С. П. Гомелля.

Инженеръ-технологъ, преподаватель Томскаго Технологическаго Института

ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

КЪ ВОПРОСУ

О

РАЦІОНАЛЬНОМЪ РАСЧЕТѢ КРЮКА.

Теоретическое изслѣдованіе простѣйшихъ раціональныхъ формъ крюка и данныя для его расчета и конструированія.

Съ 9 чертежами въ текстѣ.

ТОМСКЪ.
ПАР. ТИП. Н. И. ОРЛОВОЙ.
1913.

Къ вопросу о раціональномъ расчетѣ крюка.

Инженеръ-технолога С. П. Гомелли.

1. Крюкъ относится къ числу наиболѣе отвѣтственныхъ деталей, употребляемыхъ въ машиностроеніи. Онъ имѣетъ широкое примѣненіе какъ въ подъемныхъ машинахъ, такъ и въ подвижномъ составѣ желѣзныхъ дорогъ.

Въ той и другой областяхъ поломка этой сравнительно простой детали всегда угрожаетъ тяжелыми послѣдствіями. Въ подъемныхъ машинахъ крюкъ, являясь частью, наиболѣе подверженной случайной поломкѣ, болѣе, чѣмъ какая-либо другая деталь, «уничтожилъ человѣческихъ жизней и, вообще, причинилъ поврежденій и убытковъ» (Glynn «Cranes and Machinery»). Роль крюка въ подвижномъ составѣ желѣзныхъ дорогъ не менѣе значительна, при чемъ поврежденія тягового крюка тоже не разъ служили причиною весьма серіозныхъ, желѣзнодорожныхъ катастрофъ.

Очевидно, что эти обстоятельства, а также сравнительно высокая стоимость матеріала и изготовленія крюка, заставляютъ относиться къ расчету и построенію этой детали съ особеннымъ вниманіемъ, и поэтому болѣе подробное освѣщеніе вопроса о проектированіи крюка не будетъ излишнимъ.

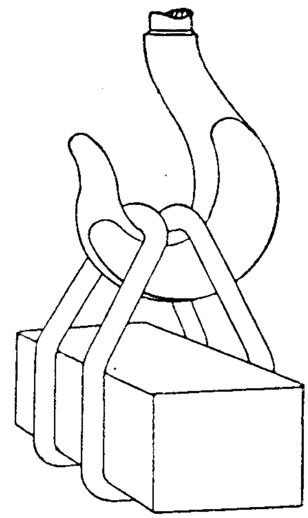
Необходимо отмѣтить, что въ обычно примѣняемыхъ способахъ расчета и проектированія крюка допускаются нѣкоторыя неправильности. Такъ, при расчетѣ крюка для подъемныхъ машинъ принимаютъ расположеніе силъ, дѣйствующихъ на него, болѣе выгодное въ отношеніи возникающихъ въ немъ напряженій, чѣмъ то, которое можетъ быть въ дѣйствительности. Затѣмъ, обыкновенно при расчетѣ діаметровъ отверстія крюка и подвѣсныхъ канатовъ не учитываютъ вліянія ихъ наклона, а нижнее сѣченіе крюка плоскостью, проходящей черезъ ось его, провѣряютъ только на срѣзъ: вслѣдствіе этого при нормальныхъ величинахъ допускаемыхъ напряженій, это сѣченіе можетъ получиться недостаточно прочнымъ. Точно также обычно принимаемыя при расчетѣ крюка по формулѣ Грасгофа величины отношенія паралельныхъ сторонъ трапеціи, получаемой въ опасномъ сѣченіи его, являются довольно произвольными и не удовлетворительны въ смыслѣ наиболѣе выгоднаго использованія матеріала крюка. Наконецъ, слѣдуетъ указать, что при расчетѣ крюка по формулѣ Грасгофа обыкновенно придаютъ ему форму, не вполнѣ соотвѣтствующую самому расчету: почти всегда расчетъ производится въ предположеніи, что центръ кривизны расчетнаго сѣченія крюка совпадаетъ съ центромъ его отверстія: при вычерчиваніи же крюка это обстоятельство обыкновенно не учитываютъ, вслѣдствіе чего въ опредѣленіи напряженій получается ошибка, пренебрегать которой никоимъ образомъ не слѣдуетъ.

Такъ какъ при опредѣленіи прочныхъ размѣровъ крюка весьма часто пользуются формулами для эксцентричнаго растяженія короткихъ брусьевъ, то ниже разсмотрѣны расчеты крюка и на эксцентричное растяженіе и по формулѣ Грасгофа,—конечно, въ томъ и другомъ случаѣ по возможности приняты во вниманіе всѣ только что отмѣченныя обстоятельства.

2. Размѣры крюка зависятъ не только отъ максимальной нагрузки Q, на которую онъ долженъ быть расчитанъ, но и отъ его формы, въ которой существенное значеніе имѣетъ радіусъ отверстія крюка a: чѣмъ больше этотъ радіусъ, тѣмъ болѣе должна быть и величина момента, изгибающаго крюкъ, вмѣстѣ съ которой одновременно возрастаетъ также вѣсъ самого крюка. Поэтому діаметру отверстія крюка должны быть приданы минимальные размѣры, достаточные лишь для подвѣшиванія на крюкѣ максимальнаго груза при помощи канатовъ или цѣпей.

При зацѣпленіи крюка за петли каната, либо цѣпи, усилія S, въ нихъ дѣйствующія, зависятъ отъ угловъ наклона канатовъ α съ вертикалью и выражаются формулою $S = \frac{Q}{4} \frac{1}{\operatorname{Cos} \alpha}$, изъ которой видно, что когда α мѣняется отъ $0°$ до $90°$, S возрастаетъ отъ $\frac{1}{4}Q$ до безконечности. Очевидно, что необходимо задаться для расчета канатовъ и крюка нѣкоторымъ предѣльнымъ значеніемъ S.

Принимаемъ предѣльное значенiе S равнымъ $\frac{1}{2}Q$, что соотвѣтствуетъ при параллельномъ положенiи пары канатовъ каждой петли (фиг. 1) угламъ ихъ наклона къ вертикали $\alpha = 60°$, или, вообще, наклону двухъ равнодѣйствующихъ натяженiй каждой петли подъ тѣми же къ вертикали углами въ 60°.



Фиг. 1.

Обозначимъ дiаметръ пеньковаго каната для подвѣшиванiя къ крюку груза черезъ d, допускаемое въ немъ напряженiе примемъ 100 $^{kg}/_{cm^2}$; дiаметръ цѣпного желѣза обозначимъ черезъ d′ и допускаемое напряженiе въ немъ, въ виду возможности перегибовъ звеньевъ на углахъ подымаемаго предмета, примемъ, какъ для калиброванной цѣпи, равнымъ 320$^{kg}/_{cm^2}$. При этихъ условiяхъ получаемъ: для каната $d = 0{,}079\sqrt{Q}_{cm}$ и для цѣпи $d' = 0{,}045\sqrt{Q}_{cm}$.

Но дiаметръ отверстiя крюка, согласно фиг. 2, равенъ $2a = 2\left(\frac{d}{2} + \frac{d}{2\,\mathrm{Sn}\,\alpha}\right)$, такъ что, подставляя въ эту формулу значенiя d и округляя числа, получаемъ для каната:

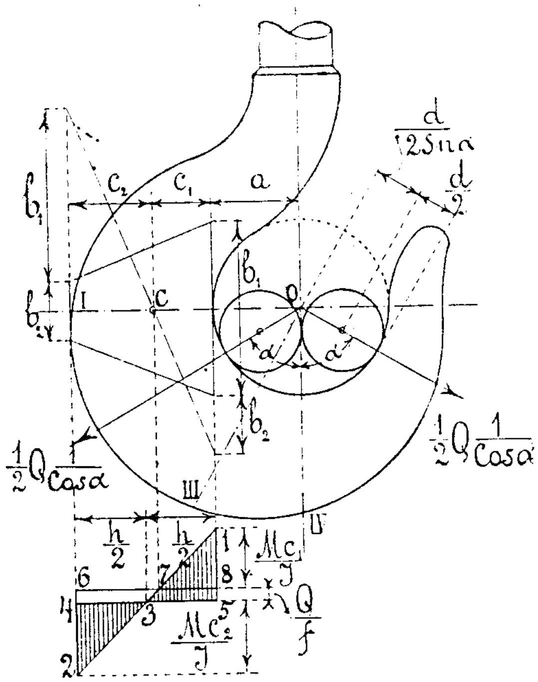
$$2a = 0{,}17\sqrt{Q}_{cm}.$$

и для цѣпи:

$$2a = 0{,}1\ \sqrt{Q}_{cm}. \qquad (1)$$

Послѣднюю формулу (1), какъ дающую для отверстiя крюка минимальные размѣры, слѣдуетъ принять для опредѣленiя величины a. Другая формула можетъ быть примѣняема только при расчетѣ крюковъ небольшой подъемной силы, при которыхъ подвѣшиванiе максимальнаго груза производится на пеньковыхъ канатахъ.

3. Расчетъ крюка долженъ быть произведенъ при условiи наиболѣе невыгоднаго расположенiя силъ, дѣйствующихъ на него. Допустивъ, какъ это обычно дѣлается, что максимальная нагрузка на крюкъ Q совпадаетъ съ вертикалью, проходящей черезъ центръ его отверстiя,—мы получили бы одно опасное сѣченiе I—0 (фиг. 2). Если предположимъ, что петли каната направлены подъ угломъ къ вертикали, такъ что равнодѣйствующiя ихъ натяженiй составляютъ съ ней углы въ 60°,—



Фиг. 2.

то получимъ болѣе невыгодное для прочности крюка расположеніе силъ, при чемъ, помимо лежащаго въ горизонтальной плоскости опаснаго сѣченія I—0, и второе сѣченіе III—0 будетъ находиться въ условіяхъ тождественныхъ съ первымъ. Кромѣ того является возможность заодно расчитать на изгибъ и растяженіе также лежащее въ вертикальной плоскости сѣченіе IV—0, которое въ случаѣ перваго предположенія, т. е. когда дѣйствующая на крюкъ сила Q направлена по вертикали, получилось бы по расчету на срѣзъ слишкомъ слабымъ сравнительно съ размѣрами, обыкновенно въ этомъ мѣстѣ придаваемыми крюку на практикѣ.

Такъ какъ крюкъ по своей формѣ представляетъ криволинейный стержень съ довольно незначительнымъ по сравненію съ высотою опаснаго сѣченія радіусомъ его кривизны, опредѣляемой геометрическимъ мѣстомъ центровъ тяжести поперечныхъ сѣченій,—то расчетъ его по формуламъ для эксцентричнаго растяженія прямолинейнаго стержня будетъ тѣмъ менѣе точенъ, чѣмъ относительно меньше упомянутый радіусъ кривизны. Однако довольно часто примѣняемый на практикѣ расчетъ крюка по простымъ формуламъ на эксцентричное растяженіе при соотвѣтственномъ выборѣ допускаемаго напряженія можетъ дать удовлетворительные въ смыслѣ прочности крюка размѣры.

При этомъ, когда матеріалъ крюка достаточно вязокъ, постепенно увеличивающаяся на него нагрузка за предѣлами упругости уменьшаетъ его кривизну, благодаря чему крюкъ по своей формѣ все болѣе и болѣе приближается къ расчетной, пріобрѣтая вмѣстѣ съ тѣмъ и большую сопротивляемость *).

*) К. Бахъ: „Детали машинъ“. стр. 597.

Опытныя изслѣдованія надъ разрывами крюковъ указали, что дѣйствительное усиліе, разрушающее крюкъ, даже нѣсколько больше расчетнаго. Подобные результаты могутъ быть объяснены тѣмъ, что распредѣленіе нормальныхъ напряженій въ какомъ-либо сѣченіи изгибаемаго бруска за предѣлами упругости матеріала уже не слѣдуютъ закону прямой линіи, при чемъ нормальныя напряженія по высотѣ сѣченія распредѣляются болѣе благопріятнымъ образомъ въ отношеніи прочности бруска, слѣдуя діаграммѣ напряженій, получаемой при разрывѣ бруска **).

Тѣмъ не менѣе до предѣловъ упругой деформаціи, каковыя всегда принимаются въ основу расчетовъ прочности деталей машинъ, расчетъ по формулѣ на экцентричное растяженіе является только приближеннымъ.

4. Въ основаніе расчета крюка должно быть принято условіе его наибольшей прочности при наименьшей затратѣ матеріала, при этомъ, конечно, форма сѣченій крюка должна быть достаточно простою, чтобы не увеличить стоимости его изготовленія. Такимъ образомъ, поперечнымъ сѣченіямъ крюка можетъ быть придана или форма трапеціи (въ частности—треугольника, прямоугольника и квадрата), или эллипса (въ частномъ случаѣ—круга). Послѣдняго рода сѣченія менѣе выгодны въ смыслѣ использованія сопротивленія матеріала крюка, работающаго главнымъ образомъ на изгибъ; поэтому мы разсмотримъ только крюки съ трапецоидальнымъ сѣченіемъ.

Опасныя сѣченія крюка (фиг. 2) I—0 и III—0 при $\alpha = 60^\circ$ подвергаются изгибу и растяженію отъ силы Q. Обозначимъ параллельныя стороны трапеціи, получаемой въ опасномъ сѣченіи I—0, черезъ b_1 и b_2, высоту ея—черезъ h, разстояніе центра тяжести трапеціи C отъ параллельныхъ сторонъ ея b_1 и b_2 соотвѣтственно обозначимъ черезъ c_1 и c_2, а площадь самой трапеціи и ея моментъ инерціи—черезъ f и J.

Максимальныя нормальныя напряженія растяженія σ_1 и сжатія σ_2 выразятся формулами:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{f} + \frac{Q\,(a + c_1)\,c_1}{J} \quad \text{и} \quad -\sigma_2 = \frac{Q}{f} - \frac{Q\,(a + c_1)\,c_2}{J}.$$

**) Берловъ „Детали подъемныхъ машинъ“ стр. 580.

На фиг. 2 величины этихъ напряженій представлены графически, какъ отрѣзки 1—5 и 2—4, при чемъ точка 7 соотвѣтствуетъ центру тяжести C опаснаго сѣченія; отрѣзокъ 8—5 соотвѣтствуетъ нормальному напряженію $\frac{Q}{f}$ въ опасномъ сѣченіи отъ одного растяженія, а отрѣзки 1—8 и 2—6 соотвѣтствуютъ максимальнымъ напряженіямъ отъ изгиба; при этомъ въ растянутыхъ волокнахъ отрѣзокъ 8—1 представляетъ $\frac{Mc_1}{J} = \frac{Q(a+c_1)c_1}{J}$, а въ сжатыхъ волокнахъ отрѣзокъ 2—6 представляетъ $\frac{Mc_2}{J} = -\frac{Q(a+c_1)c_2}{J}$.

Подставляя m вмѣсто $\frac{b_1}{b_2}$ и k вмѣсто $\frac{h}{a}$, а также принимая во вниманіе, что для трапеціи

$$J = \frac{h^3(b_1^2+4b_1b_2+b_2^2)}{36(b_1+b_2)} = \frac{h^2f}{18}\,\frac{m^2+4m+1}{(m+1)^2},$$

$$\frac{c_1}{h} = \frac{2+m}{3(m+1)} \text{ и } \frac{c_2}{h} = \frac{2m+1)}{3(m+1)}, \text{ получимъ:}$$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{f}\left\{1+\left|\frac{1}{k}+\frac{2+m}{3(m+1)}\right|\frac{2+m}{3(m+1)}\,\frac{m^2+4m+1}{18(m+1)_2}\right\},$$

откуда затѣмъ можно опредѣлить

$$\sigma_1 = \frac{Q}{f}\left\{\frac{2[3(m+1)+k(2+m)](2+m)}{(m^2+4m+1)k}+1\right\}$$

и аналогичнымъ образомъ

$$\sigma_2 = \frac{Q}{f}\left\{\frac{2[3(m+1)+k(2+m)](2m+1)}{(m^2+4m+1)k}-1\right\}.$$

Если максимальное допускаемое напряженіе въ опасномъ сѣченіи крюка обозначимъ черезъ σ, то для расчета опаснаго сѣченія его получимъ слѣдующія выраженія:

$$f_1 = \frac{Q}{\sigma}\left\{\frac{2[3(m+1)+k(2+m)](2+m)}{(m^2+4m+1)k}+1\right\}. \qquad (2)$$

$$f_2 = \frac{Q}{\sigma}\left\{\frac{2[3(m+1)+k(2+m)](2m+1)}{(m^2+3m+1)k}-1\right\}. \qquad (3)$$

5. Изъ двухъ приведенныхъ значеній для площади опаснаго сѣченія крюка f_1 и f_2 должно быть выбрано, конечно, больше, для того чтобы напряженіе матеріала противоположнаго знака было не выше допускаемаго. Что касается величины k, которая равна $\frac{h}{a}$, то, какъ не трудно замѣтить, съ увеличеніемъ ея площадь опаснаго сѣченія крюка убываетъ. Такимъ образомъ, съ этой точки зрѣнія было бы выгоднѣе брать для k значенія возможно больше, если бы не существовало для него нѣкотораго предѣла, обусловливаемаго практическими соображеніями (удобство продѣванія крюка, устойчивость противъ деформацій въ плоскости легчайшаго изгиба и др.). Обыкновенно практическій предѣлъ величины k принимается равнымъ 2,5.

Что касается значеній m, которыми обусловливается форма опаснаго сѣченія (при m равномъ нулю и безконечности получаемъ въ сѣченіи треугольникъ, при m равномъ единицѣ—прямоугольникъ и при промежуточныхъ значеніяхъ m—трапецію), то его обыкновенно такъ выбираютъ, чтобы площадь f опаснаго сѣченія при заданномъ допускаемомъ напряженіи матеріала была по возможности меньше.

Такимъ образомъ, для опредѣленія наивыгоднѣйшаго значенія m, при которомъ площадь расчетнаго сѣченія получается наименьшей, необходимо опредѣлить минимумы обоихъ выраженій (2) и (3) для f_1 и f_2, для чего беремъ отъ нихъ производныя по m и, приравнивая ихъ нулю, получаемъ два независимыя уравненія:

$$(f_1)'_m = \frac{m^2 - 2(k+1)m - (5+4k)}{(m^2+4m+1)^2} = 0 \qquad (4)$$

$$(f_2)'_m = \frac{(5+k)m^2 + 2m - (1+k)}{(m^2+4m+1)^2} = 0 \qquad (5)$$

Изъ перваго уравненія (4) получаемъ $m = (k+1) \pm \sqrt{k^2+6k+6}$.

Вторая производная отъ f_1 по m, представляющаяся въ видѣ выраженія

$$(f_1)''_m = \frac{Q}{6k}\frac{[2m-2(k+1)](m^2+4m+1)}{(m^2+4m+1)^4} - \frac{2[m^2-2(k+1)m-(5+4)](m^2+4m+1)(2m+4)}{(m^2+4m+1)^4},$$

въ данномъ случаѣ имѣетъ одинаковый знакъ съ выраженіемъ $2m-2(k+1)$, такъ что по подстановкѣ корней уравненія (4) получаемъ:

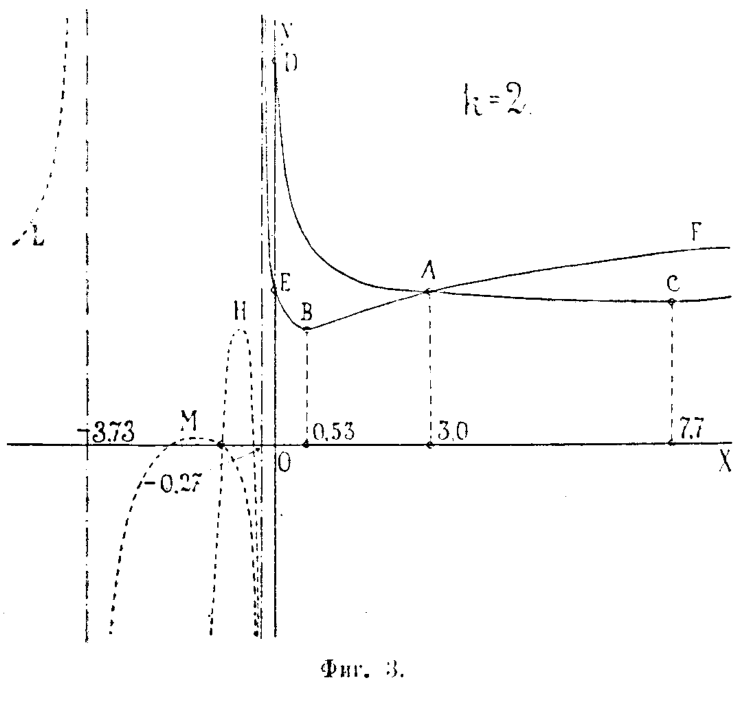
$$2m - 2(k+1) = \pm 2\sqrt{k^2+6k+6},$$

и, слѣдовательно, при $m = k + 1 + \sqrt{k^2 + 6k + 6}$ будетъ имѣть мѣсто f_1 минимумъ, а при $m = k + 1 - \sqrt{k^2 + 6k + 6}$ получимъ f_1 максимумъ.

Изъ второго уравненія (5) аналогичнымъ образомъ получаемъ: $m = \frac{-1 \pm \sqrt{k^2 + 6k + 6}}{5 + k}$, при чемъ вторая производная отъ f_2 по m имѣетъ одинаковый знакъ съ выраженіемъ: $2(k + 5)m + 2$, которое при $m = \frac{-1 + \sqrt{k^2 + 6k + 5}}{5 + k}$, будучи больше нуля, опредѣляетъ минимумъ f_2; а при другомъ корнѣ — максимумъ f_2.

Такимъ образомъ, минимумъ для площадей опасныхъ сѣченій крюка соотвѣтствуетъ корнямъ уравненій (4) и (5) съ положительнымъ радикаломъ, а ихъ максимумъ — корнямъ тѣхъ же уравненій съ отрицательнымъ радикаломъ.

Для примѣра разсмотримъ измѣненія f_1 и f_2 при $k = 2$. Подставляя это значеніе k въ уравненія (4) и (5) и рѣшая ихъ, находимъ: для площадей f_1 минимумъ имѣетъ мѣсто при $m = 7{,}7$, максимумъ f_1 — при $m = -1{,}7$; для площадей f_2 минимумъ имѣетъ мѣсто при $m_1 = 0{,}53$, а максимумъ f_2 — при $m = -0{,}81$.



Фиг. 3.

На фиг. 3 представлены кривыя, указывающія измѣненія значеній f_1 и f_2 при $k = 2$ въ зависимости отъ m, величины котораго отложены на оси абсциссъ. Кривая для f_1, LHDAC, имѣемъ свой минимумъ въ точкѣ C, а кривая, соотвѣтствующая f_2, имѣетъ минимумъ въ точкѣ B. Максимумы f_1 и f_2, находящіеся въ отрицательныхъ частяхъ кривыхъ, представленныхъ на чертежѣ пунктиромъ, не имѣютъ практическаго значенія при расчетѣ крюка, потому что для трапецоидальнаго сѣченія крюка m всегда должно быть положительно.

6. Такъ какъ при опредѣленіи значенія m, соотвѣтствующаго наименьшему значенію площади опаснаго сѣченія, приходится считаться съ обѣими кривыми f_1 и f_2, то необходимо найти еще и точку ихъ взаимнаго пересѣченія, для которой $f_1 = f_2$, или что тоже $\sigma_1 = \sigma_2$. Приравнивая между собою значенія f_1 и f_2, (2) и (3), получаемъ:

$$\frac{2[3(m+1)+k(2+m)](2+m)}{(m^2+4m+1)\,k}+1=\frac{2[3(m+1)+k(2+m)](2m+1)}{(m^2+4m+1)\,k}-1,$$

откуда находимъ:

$$m = k + 1 \ ^{*)} \qquad (6)$$

Подставляя $m + 1$ вмѣсто m въ выраженія (4) и (5), получаемъ: $(f_1)'_{m=k+1} = -\frac{Q}{k\sigma}$ и $(f_2)'_{m=k+1} = \frac{Q}{k\sigma}(k+1)$; такъ какъ k всегда больше нуля, то $(f_1)'_{m=k+1}$ всегда положительно, а $(f_2)'_{m=k+1}$ — отрицательно.

Такимъ образомъ, кривая f_1 въ точкѣ A пересѣченія ея съ другой кривой f_2 убываетъ до своего минимума, а кривая f_2 въ той же точкѣ возрастаетъ отъ своего минимума, т. е. абсцисса точки взаимнаго пересѣченія обѣихъ кривыхъ $m = k + 1$ находится между абсциссами ихъ минимумовъ: $m = k + 1 + \sqrt{k^2 + 6k + 6}$ и $m = \frac{-1 + \sqrt{k^2 + 6k + 6}}{5 + k}$.

Вслѣдствіе этого фактическій, т. е. принимаемый для расчета крюка минимумъ площади опаснаго сѣченія соотвѣтствуетъ точкѣ A пересѣченія обѣихъ кривыхъ.

Если бы абсцисса точки пересѣченія этихъ кривыхъ не была расположена между абсциссами ихъ минимумовъ, то и фактическій минимумъ площади опаснаго сѣченія не соотвѣтствовалъ бы условію равенства допускаемыхъ напряженій $\sigma_1 = \sigma_2$ и не совпадалъ бы съ указанной точкой ихъ пересѣченія, а съ тѣмъ изъ минимумовъ, который больше, — случай, который имѣетъ мѣсто при расчетѣ крюка по формулѣ Грасгофа и въ дальнѣйшемъ будетъ разсмотрѣнъ.

*) Кромѣ того существуютъ отрицательные корни: $m = -1$, $m = -0{,}27$ и $m = -3{,}73$, которые для расчета крюка тоже не имѣютъ значенія.

Итакъ, при расчетѣ крюка на эксцентричное растяженіе наивыгоднѣйшая форма его сѣченій — въ смыслѣ наименьшей величины площади — получается при $k = n + 1$. Этой формулой почти всегда пользуются при опредѣленіи наивыгоднѣйшихъ значеній m (даже нерѣдко и при расчетѣ крюка по формулѣ Грасгофа). Однако основанія, изъ которыхъ эту формулу обыкновенно выводятъ, $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$, являются только частнымъ случаемъ, который не всегда имѣетъ мѣсто, и, слѣдовательно, они не вполнѣ правильны.

Площадь опаснаго сѣченія при указанномъ выше условіи выразится формулою:

$$f = \frac{Q}{\mathfrak{S}} \frac{3(k+2)}{k}. \tag{7}$$

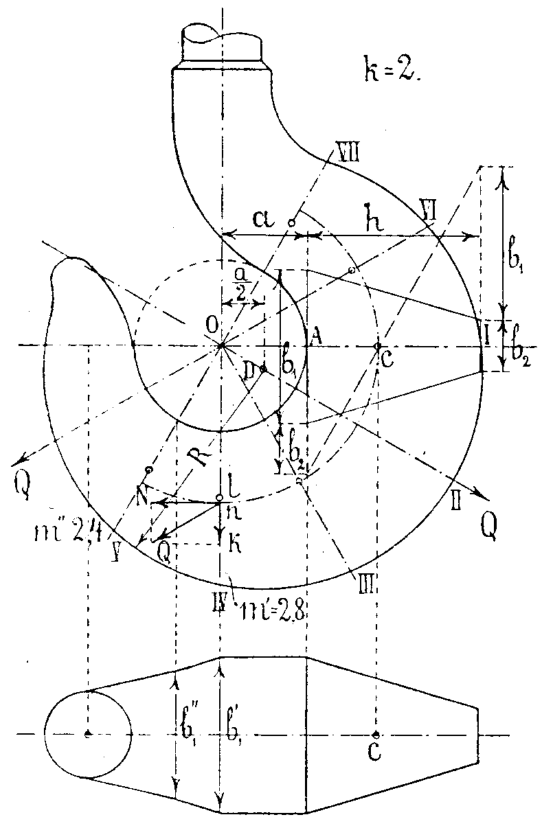
Придавая k значенія 1, 2, 3 и ∞, для f находимъ слѣдующія соотвѣтственныя имъ величины: $9\frac{Q}{\mathfrak{S}}$, $6\frac{Q}{\mathfrak{S}}$, $5\frac{Q}{\mathfrak{S}}$ и $3\frac{Q}{\mathfrak{S}}$, изъ чего можно заключить, что выгода отъ увеличенія k быстро падаетъ вмѣстѣ съ увеличеніемъ самого значенія k. Такимъ образомъ, это обстоятельство тоже является одной изъ причинъ, по которой не слѣдуетъ переходить значеній k, установленныхъ практикою.

Зная f, не трудно опредѣлить b_1 и b_2. Дѣйствительно,

$$2f = b_2 (m + 1) h, \text{ откуда получаемъ: } b_2 = \frac{Q}{\mathfrak{S}} \frac{6}{k^2 a}, \tag{8}$$

7. Наружное очертаніе крюка должно быть такъ произведено, чтобы внѣшній очеркъ его проходилъ черезъ опредѣленныя ранѣе точки I и III (фиг. 4) опасныхъ сѣченій I—0 и III—0. Если внѣшній очеркъ крюка на большой части своего контура можетъ быть описанъ однимъ радіусомъ,—то центръ дуги располагается на линіи II0, дѣлящей уголъ между опасными сѣченіями I—0 и III—0 по-поламъ. Величина же самого радіуса опредѣлится, если расчитаемъ еще третье какое-либо сѣченіе, напримѣръ, вертикальное сѣченіе IV—0 (фиг. 4).

Сѣченію IV—0 тоже должна быть придана трапецоидальная форма при найвыгоднѣйшемъ отношеніи m, длины параллельныхъ сторонъ трапеціи,—при этомъ для упрощенія расчета можно принять, что центръ тяжести сѣченія IV—0 находится на томъ же разстояніи отъ центра отверстія крюка, какъ и въ сѣченіяхъ I—0 и III—0. Въ дѣйствительности же центръ тяжести этого сѣченія немного приблизится къ центру



Фиг. 4.

отверстія O и займетъ положеніе l, довольно близкое къ принятому нами центру n, при чемъ отъ подобнаго допущенія получится нѣкоторый избытокъ въ запасѣ прочности. Затѣмъ, уже не трудно будетъ расчитать сѣченіе IV—O на изгибъ и растяженіе отъ силы $Q \text{ Sn } \alpha = 0{,}866\ Q$, расположенной на разстояніи плеча a отъ центра тяжести этого сѣченія, т. е. точно-также, какъ сила Q расположена по отношенію къ опаснымъ сѣченіямъ. I—O и O—III.

Если задаться величиной большей паралельной стороны трапеціи, получаемой въ сѣченіи IV—O, принимая ее равной γb_1 (гдѣ γ — величина, опредѣляемая изъ условій конструктивности и близкая къ единицѣ), то на основаніи уравненія (8) можно опредѣлить высоту трапеціи h'.

Обозначая отношеніе $\frac{h'}{a}$ черезъ k', получаемъ уравненіе:

$$\frac{\gamma b_1}{k'+1} = \frac{6}{\mathfrak{S}} \frac{Q}{k'^2} \frac{\text{Sn}\alpha}{a}.$$

Такъ какъ для опасныхъ сѣченій I—O и III—O отношеніе $\frac{h}{a} = k$,

то $b_1 = \frac{6}{\mathfrak{S}} \frac{Q}{k^2} \frac{(k+1)}{a}$; подставляя значеніе b_1 въ предыдущее уравненіе, получимъ уравненіе, дающее зависимость между γ, k и k':

$$\gamma\ (k+1)\ k'^2 - \text{Sn}\alpha\ k^2\ k' - \text{Sn}\alpha\ k^2 = 0,$$

изъ котораго опредѣляемъ k':

$$k' = \frac{\text{Sn}\alpha\ k^2 \pm \sqrt{(\text{Sn}\alpha\ k^2)^2 + 4\gamma\ (k+1)\ k^2\ \text{Sn}\alpha}}{2\gamma\ (k+1)}.$$

При $k = 2$, $\alpha = 60°$ и $\gamma = 1$, получаемъ $k' = 1{,}8$ и $m' = 2{,}8$; отложивъ внизъ по вертикали OIV отъ центра отверстія, крюка O отрѣзокъ, равный 2,8a, находимъ точку IV и тѣмъ самымъ опредѣляемъ какъ положеніе центра, такъ и величину радіуса R дуги, которая совпадаетъ съ внѣшнимъ очеркомъ крюка, проходящимъ черезъ три точки I, III и IV.

Сѣченіе крюка V—O, составляющее съ вертикалью уголъ въ 30°, тоже можетъ быть расчитано на эксцентричное растяженіе силою $Q \operatorname{Sn}\alpha$, гдѣ $\alpha = 30°$. Задаваясь γ, по формулѣ (8) опредѣляемъ k'', величина котораго равна отношенію: $\frac{h''}{a}$ (гдѣ h''—высота трапеціи въ сѣченіи V—O),—а затѣмъ находимъ и m'' по формулѣ: $m'' = k'' + 1$.

При $k = 2$ и $\gamma = 0{,}8$ получаемъ для сѣченія V—O $k'' = 1{,}4$; слѣдовательно, $h'' = 1{,}4a$ и $m'' = 2{,}4$.

Сѣченія VI—O и VII—O находятся въ тѣхъ же условіяхъ, какъ и сѣченія IV—O и V—O, такъ что они имѣютъ также и тождественныя съ ними расчетные размѣры.

На фиг. 4 представленъ очеркъ крюка, выполненнаго при $k = 2$ согласно приведенному расчету; въ этомъ случаѣ центръ окружности внѣшняго контура крюка расположенъ на пересѣченіи прямой IIO съ вертикалью, дѣлящей радіусъ AO по-поламъ.

8. Болѣе точный расчетъ крюка можетъ быть произведенъ по формулѣ Грасгофа, по отношенію къ которой примѣненная нами формула для эксцентричнаго растяженія является ея только частнымъ случаемъ.

Формулой Грасгофа опредѣляется величина нормальнаго напряженія въ волокнахъ криволинейнаго стержня, если извѣстны: M— моментъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ стержню, относительно центра тяжести C разсматриваемаго сѣченія,—положительный, когда подъ вліяніемъ его кривизна оси стержня возрастаетъ; N— нормальная въ центрѣ тяжести сѣченія C сила,—положительная, если она растягиваетъ волокна; r— радіусъ кривизны до деформаціи оси стержня, совпадающей съ геометрическимъ мѣстомъ центровъ тяжести поперечныхъ сѣченій его; x— разстояніе пункта, въ которомъ опредѣляется нормальное напряженіе волоконъ, отъ главной оси инерціи сѣченія, перпендикулярной къ плоскости кривизны въ той же точкѣ C, и f— площадь сѣченія.

При указанныхъ обозначеніяхъ величина нормальнаго въ разсматриваемомъ сѣченіи напряженія σ выражается формулою:

$$\sigma = \frac{N}{f} + \frac{M}{fr} + \frac{M}{\varkappa fr} \cdot \frac{x}{r+x}, \tag{10}$$

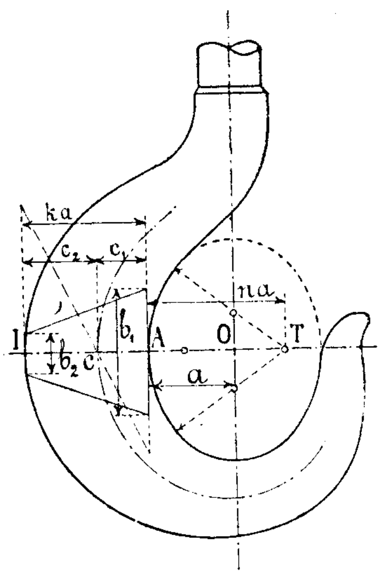
въ которой

$$\varkappa = -\frac{1}{f} \int \frac{x}{r+x}\, df, \tag{11}$$

при чемъ значенія x отрицательны для волоконъ, расположенныхъ по одну съ осью кривизны бруска сторону отъ центра тяжести C.

Обозначимъ по прежнему максимальное напряженіе волоконъ отъ растяженія въ опасномъ сѣченіи крюка черезъ σ_1 и максимальное напряженіе ихъ отъ сжатія—черезъ σ_2.

Центръ кривизны T опаснаго сѣченія AI (фиг. 5) не всегда совпадаетъ съ центромъ отверстія крюка O, которому можетъ быть придана не только форма окружности, но и эллипса или другой какой-либо кривой.



Фиг. 5.

Если отношеніе AD къ AO равно n, то, принимая прежнія обозначенія для элементовъ опаснаго сѣченія, т. е. обозначая параллельныя стороны трапеціи литерами b_1 и b_2, разстояніе отъ нихъ центра тяжести ея—c_1 и c_2, высоту трапеціи черезъ h и отношеніе $\frac{h}{a}$ черезъ k, получимъ:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{f}\left(1 - \frac{a+c_1}{na+c_1} + \frac{a+c_1}{na+c_1} \cdot \frac{c_1}{na} \cdot \frac{1}{\varkappa}\right),$$

$$-\sigma_2 = \frac{Q}{f}\left(1 - \frac{a+c_1}{na+c_1} - \frac{a+c_1}{na+c_1} \cdot \frac{c_2}{na+h} \cdot \frac{1}{\varkappa}\right).$$

Выносимъ за скобки общій множитель $\frac{1}{n+\frac{c_1}{a}}$, тогда

$$\sigma_1 = \frac{Q}{f} \cdot \frac{1}{n+\frac{c_1}{a}} \left| n - 1 + \left(1 + \frac{c_1}{a}\right) \frac{c_1}{na} \right| \frac{1}{\varkappa},$$

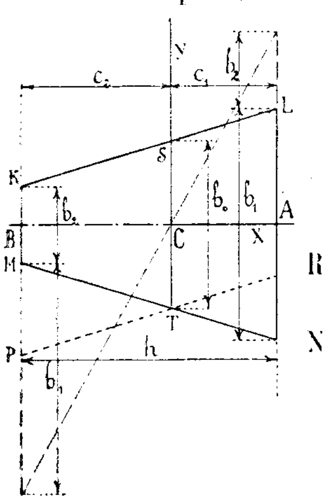
$$-\sigma_2 = \frac{Q}{f}\,\frac{1}{n+\frac{c_1}{a}}\left|n-1-\left(1+\frac{c_1}{a}\right)\frac{c_2}{na+h}\,\frac{1}{\gamma}\right|.$$

Подставляя $\frac{c_1}{h}=\frac{m+2}{3(m+1)}$, $\frac{c_2}{h}=\frac{2m+1}{3(m+1)}$ и $\frac{h}{a}=k$, получаемъ выраженія для площади опаснаго сѣченія f_1 и f_2, въ зависимости отъ максимальнаго допускаемаго напряженія σ въ растянутыхъ или въ сжатыхъ волокнахъ сѣченія:

$$f_1 = \frac{Q}{\sigma}\left\{\frac{[3(m+1)+k(m+2)](m+2)k}{3n(m+1)[3n(m+1)+k(m+2)]}\,\frac{1}{\gamma}+\right.$$
$$\left.+\frac{3n(m+1)-3(m+1)}{3n(m+1)+3(m+2)}\right\} \tag{12}$$

$$f_2 = \frac{Q}{\sigma}\left\{\frac{[3(m+1)+k(m+2)](2m+1)k}{3n(m+1)[3n(m+1)+k(m+2)(k+n)]}\,\frac{1}{\gamma}-\right.$$
$$\left.-\frac{3n(m+1)-3(m+1)}{3n(m+1)+3(m+2)}\right\} \tag{13}$$

9. Въ приведенныхъ выраженіяхъ необходимо величину γ замѣнить его аналитическимъ выраженіемъ, опредѣленнымъ по формулѣ (11). Найдемъ значеніе γ для трапецоидальнаго сѣченія; для этого будемъ разсматривать трапецію (фиг. 6), какъ фигуру, состоящую изъ двухъ геометрическихъ элементовъ: паралелограмма KLRP и фигуры RNTMP, ограниченной двумя паралельными прямыми RN и MP, и двумя прямыми PR и MN. Начало координатъ OX и OY принимаемъ въ центрѣ тяжести трапеціи C. Обозначая длину отрѣзка ST, паралельнаго основаніямъ трапеціи и проходящаго черезъ центръ ея тяжести, черезъ b_0, находимъ:



Фиг. 6.

$$\gamma = -\frac{1}{f}\left|\,b_0\int_{-c_1}^{c_2}\frac{x\,dx}{r+x}-\frac{b_1-b_2}{h}\int_{-c_1}^{c_2}\frac{x^2dx}{r+x}\right|.$$

Такъ какъ $b_0 = b_2 + \dfrac{(b_1 - b_2)\,c_2}{h}$, то получаемъ:

$$\eta = -\frac{1}{f}\left\{\left[b_2 + \frac{(b_1 - b_2)\,c_2}{h}\right]\left[c_1 + c_2 - r\ln\frac{r + c_2}{r - c_1}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{b_1 - b_2}{h}\left[\frac{c_2^2 - c_1^2}{h} - r\,(c_1 + c_2) + r^2 \ln\frac{r + c_2}{r - c_1}\right]\right\},$$

или

$$\eta = \frac{r}{f}\left[\left\{\left[b_2 + \frac{r + c_2}{h}(b_1 - b_2)\right]\ln\frac{r + c_2}{r - c_1} - (b_1 - b_2)\right\} - f\right] \qquad (14)$$

Дѣлаемъ подстановку:

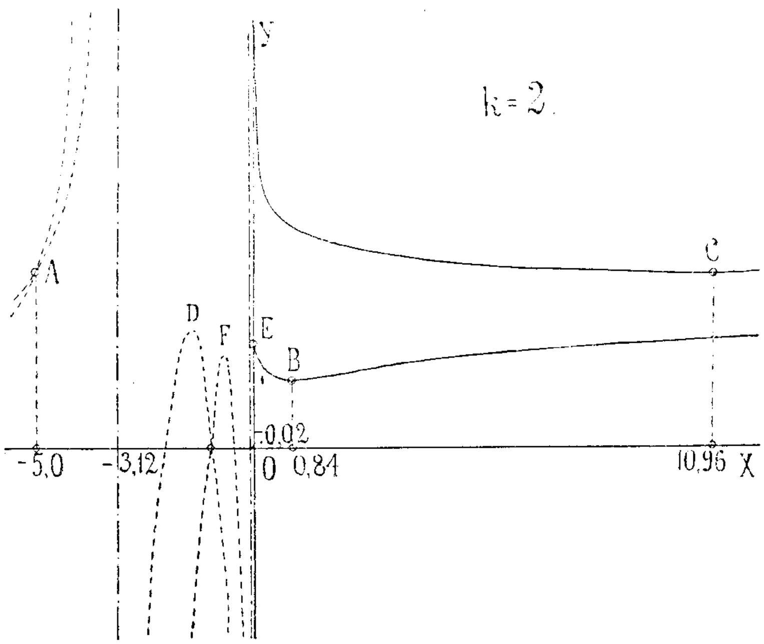
$r = na + c$, $f = \dfrac{(b_1 + b_2)\,h}{2}$, $\dfrac{b_1}{b_2} = m$ и $\dfrac{h}{a} = k$ и опредѣляемъ η:

$$\eta = \frac{2[3n(m+1) + k(m+2)]}{3k\,(m+1)^2}\left\{\left[1 + \frac{n+k}{k}(m-1)\right]\ln\frac{n+k}{n} - (m-1)\right\} - 1 \quad (15)$$

При $n = 1$, полученное выраженіе принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\eta_{n=1} = \frac{2[3(m+1) + k(m+2)]}{3k\,(m+1)^2}\left\{\left[m + \frac{m-1}{k}\right]\ln(1+k) - (m-1)\right\} - 1 \quad (15_{bis})$$

10. Если подставимъ найденное значеніе η въ выраженія (12) и (13), то получимъ общія формулы для опредѣленія площади трапецоидальнаго сѣченія крюка f въ зависимости отъ наибольшаго допускаемаго напряженія σ, максимальной нагрузки Q и относительныхъ величинъ m, n и k. Обозначая по



Фиг. 7.

прежнему площади, вычисленныя на основаніи напряженій въ растянутой и сжатой частяхъ, соотвѣтственно черезъ f_1 и f_2, находимъ слѣдующія для нихъ выраженія:

$$f_1=\frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{k^3[3(m+1)+k(m+2)](m+1)(m+2)}{2n[3n(m+1)+k(m+2)]\left[[3n(m+1)+k(m+2)]\left\{[(n+k)m-n]\ln\frac{n+k}{n}-k(m-1)\right\}-\frac{3}{2}k^2(m+1^2)\right]}+$$

$$+\frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{3n(m+1)-3(m+1)}{3n(m+1)-k(m+2)} \qquad (16)$$

$$f_2=\frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{k^3[3(m+1)+k(m+2)](m+1)(2m+1)}{2(n+k)[3n(m+1)+k(m+2)]\left[[3n(m+1)+k(m+2)]\left\{[(n+k)m-n]\ln\frac{n+k}{n}-k(m-1)\right\}-\frac{3}{2}k^2(m+1)^2\right]}$$

$$-\frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{3n(m+1)-3(m+1)}{3n(m+1)-k(m+2)} \qquad (17)$$

При $n=1$, т. е. когда центръ кривизны расчетнаго сѣченія совпадаетъ съ центромъ O отверстія крюка, выраженія для площади опаснаго сѣченія получаютъ слѣдующій видъ:

$$f_{1,\,n=1}=\frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{k^3(m+1)(m+2)}{2[3(m+1)+k(m+2)]\{[(1+k)m-1]\ln(k+1)-k(m-1)\}-3k^2(m+1)^2} \qquad (18)$$

$$f_{2,\,n=1}=\frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{k^3(m+1)(2m+1)}{2(k+1)[3(m+1)+k(m+2)]\{[(1+k)m-1]\ln(k+1)-k(m-1)\}-3k^2(m+1)^2} \qquad (19)$$

Если бы радіусъ кривизны крюка равнялся безконечности, то выраженія (16) и (18) обратились бы въ формулы для эксцентричнаго растяженія (2) и (3). Дѣйствительно, для подобнаго случая мы должны принять въ предыдущихъ формулахъ n равнымъ безконечности, при чемъ $\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ можетъ быть разложенъ въ рядъ (такъ какъ $-1<\frac{k}{n}<+1$) слѣдующаго вида: $\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{k}{n}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{k}{n}\right)^4+\;\ldots\ldots$

Подставляя это выраженіе въ формулу (16), получаемъ:

$$f_1 = \frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{k^2\left[3(m+1)+k(m+2)\right](m+1)(m+2)}{2n^3\left[3(m+1)+\frac{k}{n}(m+2)\right]^2\left[\frac{k}{n}-\frac{m+1}{2}-\frac{3}{2}\,\frac{\frac{k}{n}(m+1)^2}{3(m+1)+\frac{k}{n}(m+2)}-\frac{m+2}{2.3}\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{m+3}{3.4}\left(\frac{k}{n}\right)^3-\frac{m+4}{4.5}\left(\frac{k}{n}\right)^4+\ldots\right]}$$

$$+\frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{3(m+1)-3\,\frac{1}{n}(m+1)}{3(m+1)+\frac{k}{n}(m+2)}.$$

При $n=\infty$ это выраженіе принимаетъ слѣдующій видъ:

$$f_{1,\,n=\infty}=\frac{Q}{\varepsilon}\left\{\frac{k^2\left[3(m+1)+k(m+2)\right](m+1)(m+2)}{18n^3(m+1)^2\,\frac{m^2+4m+1}{36(m+1)}\left(\frac{k}{n}\right)^3}+1\right\},$$ или послѣ сокращенія одинаковыхъ членовъ:

$$f_{1,\,n=\infty}=\frac{Q}{\varepsilon}\left\{\frac{2\left[3(m+1)+k(m+2)\right](m+2)}{(m^2+4m+1)\,k}+1\right\}$$ — выраженіе тождественное съ формулою (2).

Точно такимъ же путемъ и выраженіе (17) при $n=\infty$ можетъ быть приведено къ формулѣ (3) для эксцентричнаго растяженія прямого стержня.

Такимъ образомъ, результаты, полученные нами при расчетѣ крюка по формуламъ для эксцентричнаго растяженія, точно также вытекаютъ изъ формулы Грасгофа для того случая, когда радіусъ кривизны крюка въ разсматриваемомъ сѣченіи равняется безконечности (что въ дѣйствительности иногда бываетъ), — и, слѣдовательно, въ такихъ случаяхъ расчетъ на эксцентричное растяженіе является настолько же точнымъ, какъ и по формулѣ Грасгофа

11. Формулы (18) и (19) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$f_{1,\,n=1} = \frac{Q}{\mathfrak{S}}\,\frac{k^3}{2}\,\frac{(m+1)(m+2)}{\alpha m^2+\beta m+\gamma} \quad \text{и} \tag{20}$$

$$f_{2,\,n=1} = \frac{Q}{\mathfrak{S}}\,\frac{k^3}{2\,(k+1)}\,\frac{(m+1)\,(2m+1)}{\alpha m^2+\beta m+\gamma} \tag{11}$$

при чемъ:
$$\left.\begin{aligned} \alpha &= (k+3)\,(k+1)\ln(k+1) - 2{,}5\,k^2 - 3\,k; \\ \beta &= 2k\,(k+2)\ln(\,k+1) - 4\,k^2; \\ \gamma &= 0{,}5\,k^2 + 3k - (2k+3)\ln(k+1). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Изъ полученныхъ выраженій для f_1 и f_2 видно, что площадь опаснаго сѣченія зависитъ отъ m и k, при чемъ, въ то время какъ m можетъ измѣняться отъ 0 до ∞,— величина k, какъ уже было указано, имѣетъ нѣкоторый практическій предѣлъ $k = 2{,}5$.

Задаваясь величиной k, мы можемъ, если $n=1$, опредѣлить значеніе m, при которомъ площадь разсматриваемаго сѣченія крюка при заданномъ допускаемомъ напряженіи $\mathfrak{S}$ будетъ наименьшей.

Такъ какъ величина искомой площади обусловливается двумя функціями отъ m (18) и (19),—то необходимо для расчета ея принимать изъ двухъ значеній функцій $f_{1,\,n=1}$ и $f_{2,\,n=1}$ при одномъ и томъ же m то значеніе, которое больше, для того чтобы максимальное напряженіе матеріала противоположнаго знака не оказалось выше допускаемаго $\mathfrak{S}$; при этомъ условіи можно найти фактическій минимумъ искомой площади, который совпадаетъ или съ минимумомъ $f_{1,\,n=1}$, или съ минимумомъ $f_{2,\,n=1}$, или же съ точкою взаимнаго пересѣченія кривыхъ, опредѣляемыхъ этими функціями.

Точка пересѣченія кривыхъ является фактическимъ минимумомъ только въ томъ случаѣ, когда въ ней одна функція возрастаетъ, а другая убываетъ; въ противномъ случаѣ онъ совпадаетъ съ однимъ изъ минимумовъ указанныхъ функцій.

Такимъ образомъ, для опредѣленія значеній m, при которыхъ площадь опаснаго сѣченія крюка при расчетѣ его по формулѣ Грасгофа получается при заданной величинѣ допускаемаго напряженія наименьшей,—необходимо прежде всего найти тѣ значенія m, при которыхъ $f_{1,n=1}=f_{2,n=1}$. Для этого слѣдуетъ приравнять между собою правыя части выраженій (20) и (21), при чемъ получаемъ уравненіе:

$$\frac{(m+1)(m+2)}{\alpha m^2+\beta m+\gamma}=\frac{(m+1)(2m+1)}{(\alpha m^2+\beta m+\gamma)(k+1)},$$

изъ котораго опредѣляются искомыя значенія m:

$$m=-1;\, m=-\frac{2k+1}{k-1} \text{ и } m=\frac{1}{2\alpha}(-\beta\mp\sqrt{\beta^2-3\alpha\gamma}\ ^{*)})$$

При $k>o$ знченія α, β и γ—положительны, такъ что найденнымъ точкамъ пересѣченія разсматриваемыхъ двухъ кривыхъ соотвѣтствуютъ только отрицательныя значенія m, а такъ какъ для расчета крюка имѣемъ смыслъ лишь m положительное, то, если $k>1$, достаточно изслѣдовать кривыя только при m большемъ нуля.

Беремъ производныя по m отъ выраженій (20) и (21).

$$(f_{1,n=1})'_m=\frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{k^3}{2}\,\frac{(\beta-3d)\,m^2-2\,(2\alpha-\gamma)\,m-(2\beta-3\gamma)}{(\alpha m^2+\beta m+\gamma)^2} \tag{23}$$

$$(f_{2,n=1})'_m=\frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{k^3}{2(k+1)}\,\frac{(2\beta-3\alpha)\,m^2-2\,(\alpha-2\gamma)\,m-(\beta-3\gamma)}{(\alpha m^2+\beta m+\gamma)^2} \tag{24}$$

Приравнивая эти производныя нулямъ, получаемъ уравненія, изъ которыхъ опредѣляемъ значенія m, соотвѣтствующія максимумамъ и минимумамъ изслѣдуемыхъ функцій, при этомъ изъ перваго уравненія получаемъ:

$$m_1=\frac{(2\alpha-\gamma)\pm\sqrt{(2\alpha-\gamma)^2+(\beta-3\alpha)\,(2\beta-3\gamma)}}{\beta-3\alpha} \tag{26}$$

и изъ второго:

$$m_2=\frac{(\alpha-2\gamma)\pm\sqrt{(\alpha-2\gamma)^2+(2\beta-3\alpha)\,(\beta-3\gamma)}}{2\beta-3\alpha}, \tag{27}$$

Такимъ образомъ, изъ каждаго уравненія опредѣляются два значенія m; для того чтобы узнать, которыя изъ нихъ соотвѣтсвуютъ максимумамъ и которыя—минимумамъ, находимъ еще и вторыя производныя отъ разсматриваемыхъ функцій (20) и (21):

*) Въ послѣднемъ случаѣ $f_{1,n=1}$ равно $f_{2,n=1}$ и оба равны $\pm\infty$: значитъ, въ этихъ мѣстахъ функція претерпѣваетъ разрывъ.

$$(f_{1,\, n=1})''_m = \frac{Q}{\varepsilon}\, k^3 \left\{ \frac{(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)^2\, [(\beta - 3\alpha) m - (2\alpha - \gamma)]}{(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{[(\beta - 3\alpha) m^2 - 2(2\alpha - \gamma) m - (2\beta - 3\gamma)]\, [(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)(2\alpha + \beta)]}{(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)^4} \right\};$$

$$(f_{1,\, n=1})''_m = \frac{Q}{\varepsilon}\, \frac{k}{k+1} \left\{ \frac{(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)^2\, [(2\beta - 3\alpha) m - (\alpha - 2\gamma)]}{(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{[(2\beta - 3\alpha) m^2 - 2(\alpha - 2\gamma) m - (\beta - 3\gamma)]\, (\alpha m^2 + \beta m + \gamma)(2\alpha + \beta)}{(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)^4}. \right\}$$

Такъ какъ $(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)^2$ не можетъ быть отрицательной величиной, и такъ какъ вторые члены въ этихъ производныхъ при значеніяхъ m_1 и m_2, обращающихъ первыя производныя въ нули, тоже обращаются въ нули,—то знаки вторыхъ производныхъ одинаковы со знаками выраженій:

$$(f_{1,\, n=1})''_m \text{ — со знакомъ: } (\beta - 3\alpha)\ m_1 - (2\alpha - \gamma)$$
$$\text{и } (f_{2,\, n=1})''_m \text{ — со знакомъ: } (2\beta - 3\alpha)\ m_2 - (\alpha - 2\gamma).$$

Подставляя въ эти выраженія значенія m_1 и m_2 корней уравненій (26) и (27), найдемъ, что фукціи $(f_{1,\, n=1})''_m$ и $(f_{2,\, n=1})''_m$ имѣютъ одинаковые знаки со знаками радикаловъ:

$$\pm \sqrt{(2\alpha - \gamma)^2 + (\beta - 3\alpha)\ (2\beta - 3\gamma)}$$
$$\text{и } \pm \sqrt{(\alpha - 2\gamma)^2 + (2\beta - 3\alpha)\ (\beta - 3\gamma)},$$

т. е. для каждой фукнціи будетъ имѣть мѣсто одинъ минимумъ, соотвѣтствующій положительнымъ радикаламъ, и одинъ максимумъ—отрицательнымъ,—при чемъ одинъ изъ этихъ минимумовъ является фактическимъ минимумомъ, при которомъ отношеніе m соотвѣтствуетъ минимальной площади опаснаго сѣченія при заданомъ напряженіи матеріала ε. Нужно замѣтить, что при m положительномъ и при $k > 1$ отношеніе $f_{1,\, n=1} : f_{2,\, n=1}$, равное $\dfrac{(m + 2)\ (k + 1)}{2m + 1}$, всегда больше еденицы,—такъ что фактическій минимумъ при всякомъ k большемъ еденицы обязательно совпадаетъ съ $f_{1,\, n=1}$ минимумомъ. Но такъ какъ не выгодно, придавать величинѣ k значенія меньше еденицы, потому что при этомъ увеличивается площадь разсчитываемаго сѣченія крюка,—то можно принять, что k для разсчетныхъ сѣченій крюка всегда больше 1 и, слѣдовательно, наивыгоднѣйшее въ указанномъ выше смыслѣ значеніе m—можно въ такихъ случаяхъ опредѣлять по формулѣ:

$$m_1 = \frac{(2\alpha - \gamma) + \sqrt{(2\alpha - \gamma)^2 + (\beta - 3\alpha)(2\beta - 3\gamma)}}{\beta - 3\alpha}, \qquad (28)$$

въ которой значенія величинъ α, β и γ даны формулами (22).

Если бы k было меньше 1, то, для того чтобы найти наивыгоднѣйшее значеніе m, необходимо было бы принять во вниманіе обѣ формулы (26) и (27) и вопросъ рѣшать путемъ совмѣстнаго изслѣдованія обѣихъ кривыхъ, опредѣляемыхъ функціями (18) и (19) и пересѣкающихся при $m = \frac{1 + 2k}{1 - k}$.

12. Отыскавши наивыгоднѣйшее значеніе m, подставляемъ его величину въ формулу (20) и вычисляемъ площадь расчитываемаго сѣченія $f_{1, n=1}$. Зная же эту площадь, уже не трудно найти также длины b_1 и b_2 параллельныхъ сторонъ трапеціи, получаемой въ разсматриваемомъ сѣченіи, изъ уравненій:

$$2f_{1, n=1} = b_2 (m + 1) ka \quad \text{и} \quad b_1 = mb_2.$$

Для примѣра опредѣлимъ значенія элементовъ трапецоидальнаго сѣченія крюка при $k = 2$.

По формуламъ (22) находимъ: $\alpha = 0{,}4790$; $\beta = 1{,}5776$ и $\gamma = 0{,}3098$. Подставляя эти величины въ формулу (28), получаемъ $m_1 = 10{,}69$—наивыгоднѣйшую при $k = 2$ величину соотношенія между параллельными сторонами трапеціи. Послѣ подстановки значеній m и k въ уравненіе (20) опредѣлится величина площади расчетнаго сѣченія $f_{n=1} = 8{,}25 \frac{Q}{\mathfrak{s}}$, гдѣ Q—максимальный грузъ, подымаемый крюкомъ, и $\mathfrak{s}$—допускаемое напряженіе въ растянутыхъ волокнахъ крюка. Длина меньшей параллельной стороны трапеціи b_2 на основаніи предыдущаго будетъ равна $\frac{16{,}50\ Q}{23{,}38\ \mathfrak{s}a}$, или, такъ какъ $a = 0{,}05\sqrt{Q}$, то $b_2 = \frac{282{,}3}{\mathfrak{s}} a$, при чемъ длина большей стороны $b_1 = \frac{3018}{\mathfrak{s}} a$.

На фиг. 7 (стр. 17) представлены для частнаго случая, когда $k = 2$, обѣ кривыя, опредѣляемыя функціями (18) и 19), при чемъ по оси ординатъ отложены значенія площадей $f_{1, n=1}$ и $f_{2, n=1}$, а по оси абсциссъ—

величины m. Минимумъ у первой кривой совпадаетъ съ точкою C, а минимумъ у второй кривой—съ точкою B. Обѣ эти кривыя имѣютъ общія точки ихъ пересѣченія (не лежащія однако между абсциссами ихъ минимумовъ) въ частяхъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ отрицательнымъ значеніямъ m, которыя представлены на чертежѣ пунктирными линіями.

Кромѣ того ниже приведена таблица I значеній *) при различныхъ k наивыгоднѣйшихъ (въ смыслѣ величины площади) отношеній m_1 параллельныхъ сторонъ b_1 и b_2 трапецоидальныхъ сѣченій при расчетѣ крюка по формулѣ Грасгофа, равно какъ и значеній величины коэффиціента $H = \frac{k^3}{2} \frac{(m+1)(m+2)}{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}$ для опредѣленія соотвѣтственныхъ площадей трапецій по уравненію (20). При этомъ параллельно приведены также значенія коэффиціентовъ $m_0 = k + 1$ и $H_0 = \frac{3(k+2)}{k}$ изъ формулъ (6) и (7) для опредѣленія аналогичныхъ величинъ при расчетѣ крюка, какъ прямолинейнаго стержня на экцентричное растяженіе. Для сравненія результатовъ того и другого расчета въ таблицѣ даны также и значенія коэффиціентовъ H_0', опредѣленныя по формулѣ Грасгофа, при $m = m_0$, и въ послѣднемъ столбцѣ таблицы указаны отношенія $\frac{H_0'}{H_0}$.

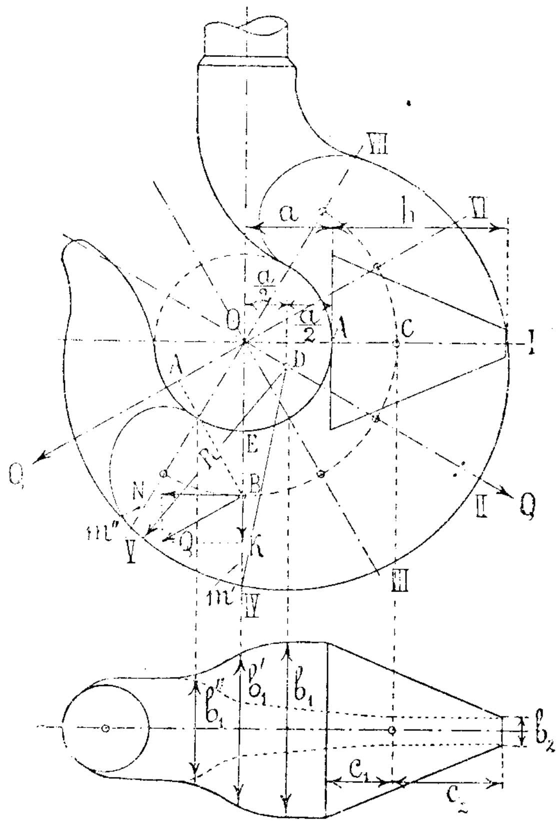
ТАБЛИЦА I.

k	m_1	H	H_0'	H_0	m_0	$\frac{H_0'}{H_0}$
0,75	5,2	12,5	13,5	11,0	1,75	1,22
1,00	6,0	10,8	11,3	9,0	2,00	1,25
1,25	7,0	9,7	10,2	7,8	2,25	1,31
1,50	8,1	9,0	9,4	7,0	2,50	1,34
1,75	9,4	8,6	8,8	6,4	2,75	1,38
2,00	10,7	8,3	8,6	6,0	3,00	1,43
2,25	12,2	8,0	8,3	5,7	3,25	1,46
2,50	14,2	7,8	8,1	5,4	3,50	1,50
3,00	19,9	7,6	7,8	5,0	4,00	1,57
4,00	49,3	7,4	7,6	4,5	5,00	1,69
5,00	∞	7,3	7,6	4,2	6,00	1,80

*) При вычисленіяхъ натуральные логариомы принимались по пятизначнымъ таблицамъ.

13. Согласно приведенному расчету, по формуламъ (20) и (28), крюкъ долженъ быть такъ сконструированъ, чтобы геометрическое мѣсто центровъ тяжести радіальныхъ сѣченій его СВ располагалось по окружности, центръ которой совпадаетъ съ центромъ отверстія крюка О (фиг. 8).

Въ томъ случаѣ, когда отверстіе крюка очерчено по дугѣ круга, линія IIО, совпадающая съ направленіемъ силы Q, при принятомъ нами наиболѣе невыгодномъ для напряженій въ крюкѣ расположеніи внѣшнихъ силъ является осью симметріи по отношенію сѣченій I—О и III—О, IV—О и VI—О, V—О и VII—О, которыя по-парно находятся въ одинаковыхъ условіяхъ по отношенію максимальныхъ, дѣйствующихъ на нихъ моментовъ и силъ; при этомъ простѣйшимъ очертаніемъ для внѣшняго контура крюка должна быть окружность, центръ которой расположенъ на линіи IIО.



Фиг. 8.

Если бы была найдена еще высота какого-либо третьяго сѣченія крюка, помимо двухъ опасныхъ сѣченій I—О и III—О, напримѣръ, сѣченія IV—О, то тѣмъ самимъ опредѣлились бы какъ величина радіуса R для этой окружности, такъ и положеніе ея центра D, который долженъ находиться на линіи IIО.

Найдемъ размѣры трапецоидальнаго сѣченія IV—О и съ нимъ тождественнаго сѣченія VI—О, задавшись предварительно однимъ изъ размѣровъ трапеціи, напримѣръ, длиной большаго основанія ея b'_1. Въ этихъ сѣченіяхъ крюкъ подвергается изгибу подъ вліяніемъ момента силы Q, дѣйствующей на разстояніи плеча OB Sn 60°, и растяженію отъ силы Q Sn 60°, совмѣстное дѣйствіе которыхъ равносильно дѣйствію силы Q Sn 60°, приложенной въ центрѣ отверстія крюка и направленной нормально къ плоскости сѣченія IV—O.

Такимъ образомъ, при опредѣленіи площади сѣченія или напряженій волоконъ мы можемъ для даннаго случая воспользоваться выведенными ранѣе формулами, въ которыхъ вмѣсто силы Q должна быть принята сила QSn60°. Для элементовъ сѣченія IV—O примемъ прежнія буквенныя обозначенія, но со знакомъ апострофа, такъ что (фиг. 8) $EB = c'_1 = c_1$; $EIV = h' = k'a$.

Отношеніе параллельныхъ сторонъ трапеціи $m' = \frac{b'_1}{b'_2}$ опредѣлится въ зависимости отъ величины k' изъ того условія, что центръ тяжести расчетнаго сѣченія остается на круговой оси крюка. Дѣйствительно, если внутреннее отверстіе крюка тоже очерчено по дугѣ круга, то

$$\frac{c'_1}{h'} = \frac{m'+2}{3(m'+1)} = \frac{c_1}{h'}, \text{ гдѣ } c_1 = \frac{(m+2)\ ka}{3(m+1)},$$

откуда получаемъ:

$$m' = \frac{c_1 - \frac{2}{3}\,k'a}{\frac{k'a}{3} - c_1} = \frac{k\,(m+2) - 2k'\,(m+1)}{k'\,(m+1) - k\,(m+2)} \qquad (29)$$

Эта формула указываетъ, что, если высоту трапеціи h' раздѣлить на три равныя части, то точка B, соотвѣтствующая ея центру тяжести, дѣлитъ средній участокъ на отрѣзки, отношеніе длинъ которыхъ равно $\frac{1}{m'}$. Этимъ свойствомъ можно пользоваться въ дальнѣйшемъ для графическаго опредѣленія отношенія m', если извѣстно положеніе центра тяжести трапеціи и ея высота h'.

Если h', а значитъ и k', не извѣстны, то для опредѣленія элементовъ трапеціи можно составить еще уравненіе, выражающее условіе прочности крюка въ разсматриваемомъ сѣченіи на основаніи уравненій (10) и (14):

$$f'_{1, n=1} = \frac{QSn60^\circ}{\varepsilon}\,\frac{c_1}{a}\,\frac{f'}{r\,[m'(k'+1)\ln(k'+1) - \ln(k'+1) - m'+1] - \frac{1}{f'}}$$

Подставляя въ это выраженіе значеніе m' изъ уравненія (29), мы получаемъ для опредѣленія k' трансцедентное уравненіе, которое можно было бы рѣшить либо путемъ постепеннаго приближенія, либо графическимъ методомъ.

Однако подобный путь довольно сложенъ; поэтому вмѣсто того, чтобы задаваться b'_1, удобнѣе задаться радіусомъ $R — a$, значитъ, и центромъ D — внѣшняго очерка крюка. Тогда аналитически или же прямо изъ чертежа опредѣляется величина $k' = \frac{h'}{a}$, и на основаніи уравненія (29) либо указаннымъ выше графическимъ путемъ получается m'.

Значенія этихъ величинъ, k' и m', нужно затѣмъ подставить въ выраженіе, аналогичное (20) и имѣющее слѣдующій видъ:

$$f'_1 = \frac{Q\ Sn\ 60^\circ}{\mathfrak{s}} \cdot \frac{k'^3 (m'+1)(m'+2)}{(\alpha' m'^2 + \beta' m' + \gamma')}, \qquad (30)$$

въ которомъ значенія $\alpha', \beta' \gamma'$ опредѣляются формулами (22) при $k = k'$. Изъ этого выраженія опредѣляемъ площадь трапеціи f'_1 (если $k' > 1$)—а затѣмъ изъ уравненія $2f'_1 = a\ k'\ b'_1 \frac{m'+1}{m'}$, получаемъ:

$$b'_1 = b_1 \frac{f'_1}{f_1} \frac{m'(m+1)k}{m(m'+1)k'} \qquad (31)$$

Точно такимъ же путемъ могутъ быть найдены величины отношеній k'' и m'' и опредѣлены длины параллельныхъ сторонъ трапеціи b''_1 и b''_2 въ сѣченіяхъ V—O VII—O, для которыхъ въ предыдущей формулѣ (30) дѣйствующую силу нужно принять равной $QSn30^\circ$.

Сѣченіе II—O по отношенію къ дѣйствующимъ на него усиліямъ находится въ одинаковыхъ условіяхъ съ сѣченіемъ IV—O. Высота его h_0 и величина отношенія параллельныхъ сторонъ трапеціи m_0 могутъ быть опредѣлены графически; что же касается до величины большаго основанія трапеціи b'_0, то изъ конструктивныхъ соображеній она можетъ быть принята равной b_1, какъ и у сосѣднихъ опасныхъ сѣченій; отъ этого прочность крюка въ сѣченіи II—O немного увеличится. Избытокъ же прочности въ этомъ мѣстѣ не будетъ лишнимъ, такъ какъ въ случаѣ отклоненія точки E приложенія силы Q вслѣдствіе тренія подвѣсного каната къ концу крюка опасное сѣченіе его приближается къ сѣченію II—O.

Наконецъ, слѣдуетъ указать, что сѣченіе V—O должно быть провѣрено на срѣзъ силою Q, а стержень крюка—на разрывъ.

Если $k=2$, положеніе центра дуги для внѣшняго очерка крюка можно задать координатами: $x=-\frac{a}{2}$ и $y=-\frac{a}{2}\ tg\ 30^\circ$. (фиг. 8). Радіусъ дуги R и высота h' сѣченій IV—0 и VI—0 въ этомъ случаѣ опредѣляются изъ треугольниковъ OID и OIVD, при чемъ получаемъ:

$R^2=6\frac{1}{3}a^2$, или $R=2,51a$; для опредѣленія же h' составляемъ уравненіе:

$6\frac{1}{3}a^2=(a+h')^2+\frac{1}{3}a^2-(a+h')\frac{a}{\sqrt{3}}$, изъ котораго находимъ: $h'=1,75a$*), такимъ образомъ, $k'=1,75$.

Принимая во вниманіе, что наивыгоднѣйшее отношеніе m параллельныхъ сторонъ трапеціи, соотвѣтствующее минимумамъ значеній площадей расчетныхъ сѣченій крюка, при $k=2$ равняется, согласно приведеннымъ ранѣе даннымъ, 10,69,—находимъ на основаніи формулы (29) величину отношенія $m'=3,15$.

Подставивъ полученныя значенія k' и m' въ уравненіе (30), получаемъ: $f'=7,63\frac{Q}{\mathfrak{s}}$, а затѣмъ изъ уравненія (31), находимъ: $b_1'=0,89\ b_1$ и $b_2'=0,28\ b_1$.

Для сѣченій V—0 и VII—0 на основаніи уравненія (30) получаемъ: $k''=1,45$, $m''=1,0$ и $b_1''=b_2=0,5\ b_1$.

Высота сѣченія II—0 h_0 опредѣлится, какъ разность II 0—a, или $h_0=2,51a+\frac{a}{\sqrt{3}}-a=2,09a$.

Для того чтобы центръ тяжести этого сѣченія отстоялъ отъ центра отверстія крюка 0 на томъ же разстояніи, какъ и центры тяжести прочихъ расчетныхъ сѣченій, необходимо, чтобы отношеніе параллельныхъ сторонъ трапеціи m_0 удовлетворяло уравненію:

$$\frac{(m_0+2)\ 2,09}{3\ (m_0+1)}=\frac{(m+2)\ 2}{3\ (m+1)},$$

изъ котораго получаемъ $m_0=24,8$.

14. Въ приведенномъ выше расчетѣ крюка отношенія параллельныхъ сторонъ трапецоидальныхъ сѣченій опредѣлялись въ томъ предположеніи, что ось этихъ сѣченій, представляетъ дугу круга, при чемъ центръ ея совпадаетъ съ центромъ отверстія крюка, соотвѣтственно примѣненныхъ

*) Другой корень даетъ значеніе h' для не существующаго сѣченія.

для расчета его основныхъ формулъ (18) и (19), представляющихъ частный случай общихъ формулъ (16) и (17), при $n = 1$. Однако очень часто формула Грасгофа, относящаяся къ случаю, когда $n = 1$, неправильно примѣняется и тогда, когда n на самомъ дѣлѣ не равно единицѣ.

Дѣйствительно, при наиболѣе употребительномъ способѣ построенія крюка внѣшній контуръ его вычерчиваютъ дугою круга изъ центра, лежащаго на горизонтали, проведенной черезъ центръ отверстія крюка 0, при чемъ разстояніе между этими центрами нерѣдко принимается равнымъ отъ $\frac{1}{4}$ a до $\frac{3}{4}$ a и болѣе. При подобномъ построеніи контура крюка ось его, совпадающая съ геометрическимъ мѣстомъ центровъ тяжести поперечныхъ сѣченій, если не принято спеціальныхъ мѣръ, имѣетъ перемѣнную кривизну, и центръ кривизны опаснаго сѣченія 1—0 не совпадаетъ съ центромъ отверстія крюка, т. е. n не равно 1. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ формула $\sigma = -\frac{Q}{\eta . f} \frac{x}{r + x}$ не должна быть примѣняема.

Чтобы иллюстрировать величину неточности, которая при этомъ получается, опредѣлимъ напряженіе σ въ опасномъ сѣченіи крюка для случая, когда $m = 3$ и $k = 2$. Если центръ кривизны опаснаго сѣченія крюка и центръ его отверстія совпадаютъ, то величину этого напряженія σ получаемъ по формулѣ (18):

$$\sigma = \frac{Q}{f} 8{,}56.$$

Если же центръ кривизны оси стоитъ отъ центра отверстія крюка на разстояніи $\frac{1}{4}$ a, то, принимая въ формулѣ (16) $n = \frac{3}{4}$, получаемъ:

$$\sigma = \frac{Q}{f} 9{,}23.$$

Такимъ образомъ, отъ примѣненія формулы, не соотвѣтствующей случаю, получаются значительныя ошибки, величины которыхъ въ процентахъ для различныхъ n при $k = 2$ и $m = 3$ приведены въ слѣдующей таблицѣ II:

ТАБЛИЦА II.

n	1	$^3/_4$	$^2/_3$	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_4$
$\frac{f\varepsilon}{Q}$	8,56	9,23	9,56	10,49	12,16	13,69
%	0	8	11	11	42	60

15. Хотя въ литературѣ по расчету крюка, вообще, придерживаются того мнѣнія, что наивыгоднѣйшія формы сѣченій крюка съ точки зрѣнія наиболѣе раціональнаго использованія матеріала соотвѣтствуютъ минимумамъ значеній ихъ площадей,—однако этотъ взглядъ не вполнѣ правиленъ, также, какъ и неправильны—согласно вышеприведенному—принимаемыя обыкновенно соотношенія сторонъ трапецій, соотвѣтствующія минимумамъ расчетныхъ площадей сѣченій крюка.

Дѣйствительно, при криволинейной формѣ крюка объемъ элемента его $d\omega$, заключеннаго между двумя поперечными сѣченіями, уголъ между которыми равенъ $d\omega$,—выражается на основаніи теоремы Гюльдена произведеніемъ:

$$d\omega = f_\alpha \, r_\alpha \, d\alpha,$$

гдѣ f_α площадь поперечнаго сѣченія крюка подъ угломъ α къ началу координатъ, а r_α —радіусъ кривизны оси крюка въ разсматриваемомъ сѣченіи.

Чтобы получить объемъ всего крюка ω необходимо указанное выраженіе проинтегрировать въ предѣлахъ дуги, соотвѣтствующей оси крюка,—такъ что

$$\omega = \int f_\alpha \, r_\alpha \, d\alpha. \qquad (32)$$

Если ось расчетныхъ сѣченій крюка представляетъ дугу круга, центръ которой совпадаетъ съ центромъ отверстія крюка, то величина r въ предѣлахъ расчетныхъ сѣченій постоянна, и тогда объемъ будетъ равенъ

$$\omega = r \int f_\alpha \, d\alpha.$$

Такимъ образомъ, объемъ крюка—а значитъ, и расходъ на него матеріала—возрастаютъ не только вмѣстѣ съ площадями поперечныхъ сѣченій крюка, но заодно и съ величиной въ нихъ радіусовъ кривизны оси, которые при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ тѣмъ меньше, чѣмъ больше отношеніе параллельныхъ сторонъ трапеціи m.

Слѣдовательно, величиной произведенія fr для даннаго сѣченія крюка характеризуется степень пригодности формы этого сѣченія съ точки зрѣнія наивыгоднѣйшей утилизаціи матеріала крюка.

Выразимъ величину произведенія fr для случая, когда ось крюка представляетъ дугу круга, центръ котораго совпадаетъ съ центромъ отверстія крюка, черезъ перемѣнныя величины m и k, имѣющія прежнія значенія.

Принимая во вниманіе выраженія (18) и (19), а также, что

$$r = a + c_1 = a\,\frac{3\,(m+1) + k\,(m+2)}{3\,(m+1)},$$

получимъ:

$$f_1 r = \frac{Q}{\mathfrak{G}}\,\frac{ak^3}{6}\,\frac{[3\,(m+1) + k\,(m+2)]\,(m+2)}{\alpha m^2 + \beta m + \gamma} \qquad (33)$$

$$\text{и}\quad f_2 r = \frac{Q}{\mathfrak{G}}\,\frac{ak^3}{6\,(k+1)}\,\frac{[3\,(m+1) + k\,(m+2)]\,(2m+1)}{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}, \qquad (34)$$

гдѣ α, β и γ имѣютъ прежнія значенія:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= (k+3)\,(k+1)\ln(k+1) - 2{,}5\,k^2 - 3k \\ \beta &= 2k\,(k+2)\ln(k+1) - 4k^2 \\ \gamma &= 0{,}5\,k^2 - 3k - (2k+3)\ln(k+1) \end{aligned}\right\}. \qquad (35)$$

16'. Точки пересѣченія кривыхъ, опредѣляемыхъ функціями (33) и (34), могутъ быть получены изъ уравненія:

$$\frac{[3\,(m+1) + k\,(m+2)]\,(m+2)}{\alpha m^2 + \beta m + \gamma} = \frac{[3\,(m+1) + k\,(m+2)]\,(2m+1)}{(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)\,(k+1)}, \qquad (36)$$

изъ котораго находимъ соотвѣтственныя значенія корней его:

$$m = -\frac{3+2k}{3+k},\quad m = -\frac{2k+1}{k-1}\ \text{и}\ m = \frac{1}{2\alpha}\,\text{и}\,(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\ .$$

Если $k > 1$, то всѣ эти корни отрицательны и, слѣдовательно, при этомъ обѣ кривыя не пересѣкаются ни при какомъ положительномъ значеніи m.

При k большемъ 1-цы значенія $f_1 r$ всегда больше значеній $f_2 r$,— поэтому минимумъ выраженія (33) соотвѣтствуетъ въ этомъ случаѣ фактическому минимуму произведенія fr и, значитъ, условію наивыгоднѣйшаго использованія матеріала крюка, при чемъ тогда искомое значеніе m опредѣляется, какъ корень уравненія $(f_1 r)'_m = 0$.

Найдемъ первую производную по m отъ $(f_1 r)$:

$$(f_1 r)'_m = \frac{Q}{\varepsilon} \frac{ak^3}{6} \frac{A_1 m^2 + 2B_1 m + C_1}{(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)^2}, \tag{37}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{гдѣ } A_1 &= \beta(3 + k) - \alpha(9 + 4k) \\ B_1 &= \gamma(3 + k) - \alpha(6 + 4k) \\ C_1 &= \gamma(9 + 4k) - \beta(6 + 4k) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Приравниваемъ трехчленъ $A_1 m^2 + 2B_1 m + C_1$ нулю и опредѣляемъ корни полученнаго такимъ путемъ квадратнаго уравненія:

$$m = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}}{A_1} \tag{39}$$

Чтобы опредѣлить, какое значеніе соотвѣтствуетъ искомому минимуму, беремъ вторую производную по m: $(f_1 r)''_m$:

$$(f_1 r)''_m = \frac{Q}{\varepsilon} \frac{ak^3}{6} \frac{(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)^2 (A_1 m + B_1 m)}{(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)^4} -$$

$$- \frac{Q}{\varepsilon} \frac{ak^3}{6} \frac{(A_1 m^2 + 2B_1 m + C_1)(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)(2\alpha + \beta)}{(\alpha m_2 + \beta m + \gamma)^4}.$$

При значеніяхъ m, обращающихъ $(fr)'_m$ въ нуль, эта вторая производная принимаетъ одинаковый знакъ со знакомъ радикала въ выраженіи (39); такимъ образомъ, искомый минимумъ соотвѣтствуетъ слѣдующему значенію m:

$$m = \frac{-B_1 + \sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}}{A_1}, \tag{40}$$

гдѣ A_1, B_1 и C_1 опредѣляются изъ выраженій (38) и (35).

Въ томъ случаѣ, когда k равно или меньше 1-цы, вопросъ о наивыгоднѣйшемъ значеніи m въ смыслѣ наиболѣе раціональнаго использованія матеріала крюка,—усложняется необходимостью изслѣдовать обѣ кривыя, опредѣляемыя выраженіями (33) и (34), которыя тогда обязательно пересѣкаются въ точкѣ, соотвѣтствующей положительному $m = \dfrac{1 + 2k}{1 - k}$.

Что касается минимума функціи $f_2 r$, то таковой соотвѣтствуетъ значенію m, опредѣляемому, какъ корень уравненія $(f_2 r)''_m = 0$ съ положительнымъ радикаломъ:

$$m = \frac{-B_2 + \sqrt{B_2 - A_2 C_2}}{A_2}, \tag{41}$$

при чемъ

$$\left.\begin{array}{l} A_2 = \beta\,(6 + 2k) - \alpha\,(9 + 5k) \\ B_2 = \gamma\,(6 + 2k) - \alpha\,(3 + 2k) \\ C_2 = \gamma\,(9 + 5k) - \beta\,(3 + 2k) \end{array}\right\} \qquad (42)$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда по расчету по формуламъ (40) либо (41) получаются для m отрицательныя значенія, при чемъ функціи f_1r и f_2r непрерывно въ предѣлахъ положительныхъ m убываютъ,—наивыгоднѣйшая трапецоидальная форма крюка въ отношеніи расхода на него матеріала получается при $m = \infty$, что соотвѣтствуетъ треугольнымъ сѣченіямъ крюка.

17. Приводимъ таблицу III значеній m_1, соотвѣтствующихъ при разныхъ величинахъ k условію наивыгоднѣйшаго использованія матеріала крюка, а также значеній коэффиціента $H_1 = \frac{k^3}{2}\,\frac{(m + 1)\,(m + 2)}{\alpha m^2 + \beta m + \gamma}$ для опредѣленія получаемыхъ при этомъ площадей сѣченій крюка по формулѣ (20), равно какъ и коэффиціента $l = \frac{b_1 \mathfrak{s}}{a}$, которымъ характеризуется форма самого сѣченія.

ТАБЛИЦА III.

k	m_1	H_1	$\frac{b_1 \mathfrak{s}}{a}$
0,75	9,0	12,6	12096
1,00	13,5	10,9	8112
1,25	24,8	9,9	6629
1,50	75,1	9,2	4550
1,75	∞	8,7	3977
2,00	∞	8,4	3360
2,25	∞	8,1	2880
2,50	∞	7,9	2528
3,00	∞	7,6	2027
4,00	∞	7,4	1480
5,00	∞	7,3	1168

На основаніи данныхъ послѣдняго столбца таблицы III можно видѣть, что ширина расчетнаго сѣченія b_1 тѣмъ меньше, чѣмъ больше k и чѣмъ больше величина допускаемаго напряженія матеріала $\mathfrak{s}$. Слѣдовательно, чтобы форма сѣченія крюка не оказалась слишкомъ уширенной, необходимо при меньшихъ значеніяхъ $в$ принимать большія значенія k.

Сравнительныя преимущества расчета крюка по формулѣ Грасгофа при наивыгоднѣйшей величинѣ m_1 въ смыслѣ утилизаціи матеріала, а также расчета при значеніяхъ m_0, соотвѣтствующихъ минимумамъ расчетныхъ площадей сѣченій крюка, по отношенію къ обычно примѣняемому расчету по той же формулѣ, но при $m = k + 1$,—выясняются таблицею IV, въ которой приведены для различныхъ k значенія произведеній f_1r_1, f_0r_0 и fr для всѣхъ трехъ указанныхъ случаевъ.

ТАБЛИЦА IV.

k	f_1r_1	f_0r_0	fr
0,75	16,0	16,1	18,1
1,00	14,8	14,9	16,3
1,25	14,2	14,3	15,7
1,50	13,9	14,0	15,4
1,75	13,8	14,0	15,4
2,00	13,9	14,2	15,7
2,25	14,2	14,5	15,9
2,50	14,5	14,8	16,3
3,00	15,4	15,5	17,3
4,00	17,2	17,4	19,4
5,00	19,6	19,6	22,0

Изъ сравненія результатовъ приведенной таблицы можно заключить, что наиболѣе выгодныя величины для k, соотвѣтствующія наименьшимъ значеніямъ произведеній f_1r_1, f_0r_0 и fr, которыми характеризуется расходъ матеріала на крюкъ,—получаются при значеніяхъ k, заключающихся приблизительно въ предѣлахъ отъ 1,25 до 2,25.

При величинахъ k выше или ниже указанныхъ предѣловъ произведенія эти быстро возрастаютъ: такъ напримѣръ, при переходѣ отъ $k = 2$ къ $k = 5$ значенія ихъ увеличиваются болѣе, чѣмъ на 40%.

Точно также расходъ матеріала увеличивается болѣе чѣмъ на 10% при опредѣленіи величины m по формулѣ: $m = k + 1$, а не по формуламъ для опредѣленія наивыгоднѣйшаго значенія m.

Въ то же время разница между результатами, вытекающими изъ расчета крюка по формуламъ для опредѣленія минимальнаго сѣченія и по формуламъ для наивыгоднѣйшаго сѣченія, соотвѣтствующаго минимумамъ произведенія $f_1 r_1$, незначительна и въ общемъ не болѣе $2^0/_0$. Однако съ чисто теоретической точки зрѣнія послѣдній методъ является болѣе правильнымъ и кромѣ того болѣе простымъ, такъ какъ для значеній k выше 1,75, какъ видно изъ таблицы III, приводитъ къ простой треугольной формѣ расчетнаго сѣченія.

Что касается дальнѣйшаго расчета крюка, въ смыслѣ опредѣленія необходимыхъ элементовъ для его вычерчиванія, то въ данномъ случаѣ примѣнимъ тотъ же самый путь, который былъ указанъ раньше.

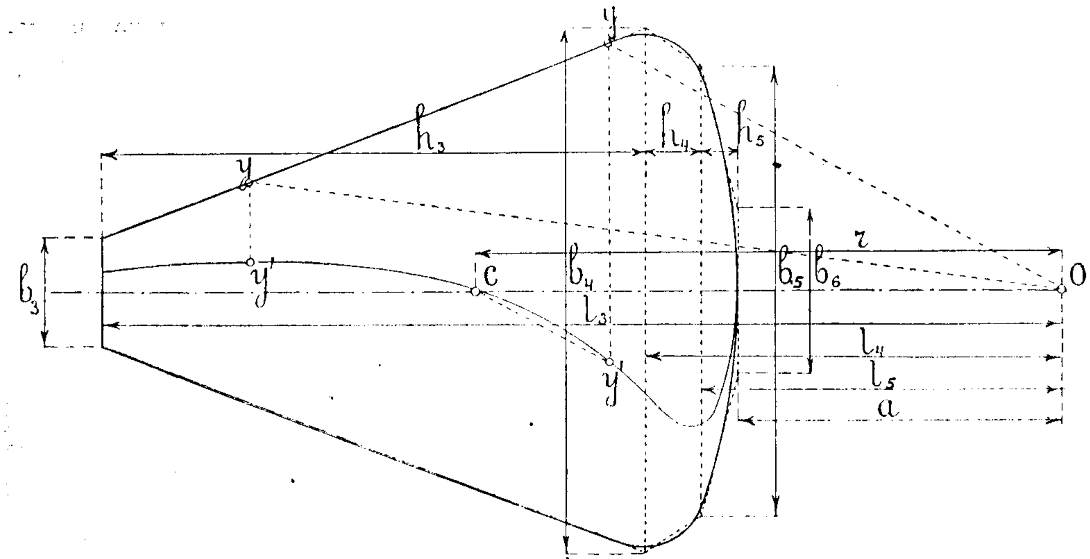
18. Такъ какъ острыя кромки, образованныя трапецоидальными сѣченіями крюка, при соприкосновеніи со звѣньями цѣпи или каната могутъ ихъ повредить и сами быть повреждены,—то во избѣжаніе этого большую параллельную сторону трапеціи замѣняютъ дугой, плавно сопрягающейся съ ея наклонными сторонами.

При такомъ нарушеніи формы трапеціи измѣняются также ея площадь, величина η и другіе элементы, вліяющіе на расчетъ крюка. Желательно, конечно, чтобы при подобномъ измѣненіи сѣченія крюка отступленія отъ произведеннаго ранѣе расчета были возможно меньше.

Такъ какъ согласно основнымъ формуламъ Грасгофа $\mathfrak{s} = \frac{N}{f} + \frac{M}{fr} + \frac{M}{\eta fr}\frac{x}{r+x}$,

гдѣ $\eta = -\frac{1}{f}\int\frac{x}{r+x}\,df$,—то въ виду вышеуказанннаго прежде всего нужно, чтобы r осталось безъ измѣненія, т. е., чтобы не измѣнилось положеніе центра тяжести C сѣченія (фиг. 9). Этого можно достигнуть, сдѣлавъ закругленіе въ широкой части трапеціи и узкую часть ея соотвѣтственно сузивъ или укоротивъ; если при этомъ дуга закругленія будетъ касательна къ большей параллельной сторонѣ трапеціи, которую она замѣняетъ, то не измѣнятся также значенія x для наиболѣе удаленныхъ волоконъ; тѣмъ не менѣе значенія η и f измѣнятся.

Для округленнаго сѣченія крюка значенія соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ η_0 и f_0 могутъ быть опредѣлены или графически или аналитически. Если имѣется планиметръ для измѣренія площадей, то удобно пользоваться для опредѣленія η_0 графическимъ способомъ Бантлина. Для этого изъ центра кривизны оси крюка O, лежащаго въ плоскости



Фиг. 9.

разсматриваемаго поперечнаго его сѣченія, проводимъ прямыя Оу, къ точкамъ контура сѣченія, а затѣмъ изъ центра тяжести его С проводимъ имъ параллельныя линіи Су' до пересѣченія съ перпендикулярами изъ точекъ у на ось симметріи сѣченія въ точкахъ у' искомой кривой. Отношеніе площади φ_c, ограниченной этой кривой и состоящей изъ положительной и отрицательной частей, къ площади самой фигуры f_0 и дастъ искомое значеніе η_0 для округленнаго сѣченія крюка, т. е.

$$\eta_0 = \frac{\varphi_0}{f_0} \tag{43}$$

Не трудно замѣтить изъ самого способа построенія и изъ приведенныхъ ранѣе формулъ (15), что η_0 не мѣняется, если ординаты сѣченія пропорціонально увеличить или уменьшить.

Поэтому, если найдено нѣкоторое значеніе η_0 для опредѣленаго сѣченія крюка, то, зная его площадь f_0, легко опредѣлить напряженіе въ крюкѣ $\mathfrak{e}$ по формулѣ (10) и наоборотъ,—задавшись допускаемымъ напряженіемъ $\mathfrak{e}$, можно опредѣлить необходимую площадь сѣченія F_0 по формулѣ: $F_0 = \frac{Q}{\mathfrak{e}} + \frac{M}{\mathfrak{e}r} + \frac{M}{\eta_0 \mathfrak{e} r}\frac{C_1}{r - c_1}$, (44)

---

*) Указанное построеніе графически воспреизводить формулу $\int \frac{xydx}{r+x}$, гдѣ х и у—координаты разсматриваемаго сѣченія крюка, а r—разстояніе его центра тяжести С до центра отверстія О.

которая для случая, когда $n=1$, принимаетъ видъ:

$$F_0=\frac{Q}{\mathfrak{G}}\frac{1}{\eta_0}\frac{c_1}{a} \tag{44 bis}$$

Затѣмъ, легко уже опредѣлить величину отношенія ψ, въ которомъ необходимо увеличить ординаты округленнаго сѣченія:

$$\psi=\frac{F_0}{f_0} \tag{45}$$

гдѣ F_0 опредѣлено по формулѣ (44), а f_0—есть площадь округленнаго сѣченія, для котораго было вычислено η_0.

19. Во избѣжаніе кропотливыхъ графическихъ построеній и примѣненія планиметра, не всегда имѣющагося подъ рукой, можно съ большимъ удобствомъ воспользоваться слѣдующимъ способомъ опредѣленія коэффиціента $\eta_0=\frac{\varphi_0}{f_0}$.

Опредѣливъ основные размѣры трапецоидальнаго сѣченія, округляемъ его, вписавъ дугу, касательную къ большей изъ параллельныхъ сторонъ трапеціи, изъ какого-либо центра, лежащаго на ея оси; при этомъ дѣлаемъ также сопряженія между большими сторонами трапеціи и построенной дугой.

Для того чтобы центръ тяжести послѣ этого измѣненія сѣченія крюка остался на своемъ мѣстѣ, отрѣзаемъ линіей перпендикулярной оси сѣченія его болѣе узкую часть. Положеніе этой линіи можетъ быть опредѣлено аналитически, но такъ какъ при этомъ получается уравненіе третьей степени, то удобнѣе ее опредѣлить опытнымъ путемъ.

Для этого нужно вырѣзать изъ бумаги округленное сѣченіе крюка и свободно повѣсить его въ одной точкѣ вмѣстѣ съ нитянымъ подвѣсомъ; пересѣченіе оси сѣченія съ осью нити опредѣлитъ центръ тяжести фигуры. Постепенно срѣзая линіями перпендикулярными оси сѣченія узкую часть трапеціи *), можно привести линію отвѣса—и, значитъ, центръ тяжести фигуры—до совпаденія съ прежнимъ центромъ тяжести трапеціи.

Что касается опредѣленія величины η_0 для округленнаго и укороченнаго сѣченія, то таковая довольно просто и при томъ весьма точно можетъ быть найдена аналитическимъ путемъ. Для этого округленную часть сѣченія замѣняемъ ломаной линіей, такъ чтобы вся фи-

*) Можно также срѣзать наклонныя стороны трапеціи,—но подобный путь сложнѣе.

гура состояла изъ трапецій, имѣющихъ общую ось (см. фиг. 9). Площадь этой фигуры f_0 будетъ равна суммѣ площадей составляющихъ ее трапецій и, слѣдовательно, опредѣляется безъ затрудненій. Величина же η_0 можетъ быть опредѣлена съ помощью формулы (11).

Отмѣчая элементы каждой составляющей трапеціи особымъ индексомъ i, можемъ написать:

$$\eta_0 = -\frac{1}{f_0} \Sigma \int \frac{x_i \, df_i}{r + x_i}$$

Но такъ какъ $-\int \frac{x_i \, df_i}{r + x_i} = \eta_i f_i$, то получаемъ:

$$\eta_0 = \frac{1}{f_0} \Sigma \, \eta_i f_i \tag{46}$$

Величина η_i должна быть опредѣлена для каждой отдѣльной трапеціи по формулѣ (14).

Если обозначимъ элементы трапецій, составляющихъ сѣченіе крюка, соотвѣтственно ихъ послѣдовательному порядку индексами 3,4,5..... (индексы 1 и 2 примѣнялись для нѣкоторыхъ элементовъ основной трапеціи), то при прежнихъ буквенныхъ обозначеніяхъ получимъ слѣдующую формулу для опредѣленія η_0:

$$\eta_0 = \frac{r}{f_0} \Big\{ \Big[b_3 + (r - c_3) \frac{b_4 - b_3}{h_3}\Big] \ln \frac{r - c_3}{r - c_4} + b^3 - b_4 +$$

$$+ \Big[b_4 + (r - c_4) \frac{b_5 - b_4}{h_4}\Big] \ln \frac{r - c_4}{r - c_5} + b_4 - b_5 +$$

$$+ \Big[b_5 + (r - c_5) \frac{b_6 - b_5}{h_5}\Big] \ln \frac{r - c_5}{r - c_6} + b_5 - b_6 +$$

. . . .

$$+ \Big[b_n + (r - c_n) \frac{b_{n+1} - b_n}{h_n}\Big] \ln \frac{r - c_n}{r - c_{n+1}} + b_n - b_{n+1} \Big\} - 1 \, .$$

Такъ какъ величины $(r - c_3)$, $(r - c_4)$ и т. д. представляютъ разстоянія параллельныхъ сторонъ трапецій отъ центра кривизны O крюка въ разсматриваемомъ сѣченіи, то, обозначивъ ихъ черезъ l съ соотвѣтственными индексами и сдѣлавъ нѣкоторыя преобразованія, получимъ:

$$\eta_0 = \frac{r}{f_0}\Big\{ [b_3 + l_3 \frac{b_4 - b_3}{h_3}] \ \ln \frac{l_3}{l_4} +$$

$$+ [b_4 + l_4 \frac{b_5 - b_4}{h_4}] \ \ln \frac{l_4}{l_5} +$$

$$+ [b_5 + l_5 \frac{b_6 - b_5}{h_5}] \ \ln \frac{l_5}{l_6} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ [b_n + l_n \frac{b_{n+1} - b_n}{h_n}] \ \ln \frac{l_n}{l_{n+1}} + b_3 - b^{n+1} \Big\} - 1 \qquad (47)$$

При чемъ $f_0 = \frac{1}{2}\{(b_3+b_4)h_3 + (b_4+b_5)h_4 + (b_5+b_6)h_5 + \ldots$

$\ldots + (b_n+b_{n+1})h_n\}$ (48).

Знaя η_0 и f_0 легко опредѣлить по формуламъ (44) и (45) коэфиціентъ ψ, на который нужно умножить ординаты округленнаго сѣченія (или что почти тоже — параллельныя стороны составляющихъ трапецій b_3, b_4...), чтобы получить сѣченіе, въ которомъ наиболѣе напряженныя волокна подвергаются подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ крюку, растяженію, величина котораго равна заданному допускаемому напряженію σ.

20. На основаніи вышеизложеннаго приходимъ къ слѣдующимъ выводамъ.

a) Расчетъ крюка подъемныхъ машинъ на одну вертикальную силу вѣса максимальной нагрузки является недостаточнымъ, такъ какъ приводитъ къ слишкомъ слабымъ сѣченіямъ въ нижней части крюка. Болѣе правильный расчетъ получится, если предположить, что крюкъ подвергается дѣйствію двухъ силъ, симметричныхъ относительно вертикальной оси и равныхъ по величинѣ и направленію равнодѣйствующимъ натяженій независимыхъ петель подвѣснаго каната.

Принимая предѣльные углы наклона указанныхъ равнодѣйствующихъ съ вертикалью равными 60°, получаемъ въ результатѣ расчета удовлетворительные размѣры частей крюка.

b) Расчетъ крюка на экцентричное растяженіе приводитъ къ слишкомъ низкой оцѣнкѣ напряженій, возникающихъ въ расчетныхъ его сѣченіяхъ; разница между получаемыми въ этомъ случаѣ напряженіями и вычисленными по болѣе точной формулѣ Грасгофа тѣмъ больше, чѣмъ больше величина отношенія k (высоты сѣченія къ радіусу отверстія крюка). Такъ что, пользуясь для расчета крюка формулой для эксцентричнаго растяженія, необходимо допускаемыя для матеріала напряженія при увеличеніи k уменьшать, сообразуясь съ данными таблицы III.

c) Условіе равенства въ расчетномъ сѣченіи крюка максимальныхъ напряженій отъ растяженія и сжатія, вообще, не является признакомъ того, что площадь самого сѣченія будетъ наименьшей. Для опредѣленія минимальнаго расчетнаго сѣченія необходимо болѣе подробно изслѣдовать аналитическія выраженія для величины его площади, (14) и (15), принимая во вниманіе не только точки пересѣченія кривыхъ, соотвѣтствующихъ этимъ функціямъ, но и ихъ минимумы. Въ частномъ случаѣ, когда расчетъ крюка ведется на эксцентричное растяженіе, минимумъ расчетной площади соотвѣтствуетъ точкѣ пересѣченія обѣихъ кривыхъ, или, иначе говоря, упомянутому условію равенства максимальныхъ напряженій въ растянутыхъ и сжатыхъ волокнахъ.

d) Наивыгоднѣйшее въ смыслѣ использованія матеріала сѣченіе крюка соотвѣтствуетъ не минимуму расчетной площади, но минимуму произведенія площади расчетнаго сѣченія на радіусъ кривизны оси крюка въ этомъ сѣченіи,—при этомъ, конечно, точно также должны быть приняты во вниманіе оба произведенія, получаемыя изъ условій максимальнаго допускаемаго напряженія въ сжатой и въ растянутой частяхъ расчетныхъ сѣченій крюка.

На основаніи данныхъ таблицъ IV и III можно видѣть, что наименьшее значеніе упомянутаго произведенія соотвѣтствуетъ треугольной формѣ крюка при значеніи k равномъ 1,75. Однако, для того, чтобы не получить слишкомъ широкихъ не конструктивныхъ сѣченій крюка, необходимо вопросъ о выборѣ значенія k всегда сообразовать съ величиной допускаемаго напряженія σ, руководствуясь при этомъ данными приведенныхъ ранѣе таблицъ.

e) Для расчета округленнаго сѣченія крюка вмѣсто соединенныхъ съ графическими построеніями способовъ Бантлина или Толле можно пользоваться довольно простой и точной аналитической формулой (47), если только дугу закругленія крюка замѣнимъ ломанной линіей, симметричной относительно оси сѣченія.

ОПЕЧАТКИ.

Страницы:	Строки:	Напечатано:	Должно быть:
6	6 сверху	III—0	III—0 подъ $\lfloor 30^0$ къ вертикали
9	4, 8 и 9 снизу	передъ дробными выраженіями пропущенъ коэффиціентъ $\frac{Q}{\beta k}$	
9	4 снизу	$(5+4)$	$(5+4k)$
10	7 сверху	k^2+6k+5	k^2+6k+6
11	13 сверху	$m+1$	$k+1$
11	14 сверху	$-\frac{Q}{k\beta}$	$-\frac{Q}{k\beta}\,\frac{1}{k^2+6k+6}$
11	14 сверху	$\frac{Q}{\beta k}\;k+1$	$\frac{Q}{k\beta}\,\frac{k+1}{k^2+6k+6}$
11	15 сверху	$(f_1)'$	$(f_2)'$
11	15 сверху	$(f_2)'$	$(f_1)'$
15	16 сверху	AD	AT
16	7 и 9 сверху	$+3\,(m+2)$	$+k\,(m+2)$
17	3 сверху	$\frac{c_2{}^2-c_1{}^2}{h}$	$\frac{c_2{}^2-c_1{}^2}{2}$
17	5 сверху	$-f$	$-\frac{f}{r}$
17	7 сверху	$na+c$	$na+c_1$
18	1 сверху	$(m+1^2)$	$(m+1)^2$
18	2 и 4 сверху	$-k\,(m+2)$	$+k\,(m+2)$
18	9 сверху	(18)	(17)
20	3 сверху	(11)	(21)
21	12 сверху	$3d$	3α
22	3 сверху	$(f_{1,\,n=1})''_m=\frac{Q}{\beta}\,\frac{k}{k+1}$	$(f_{2,\,n=1})''_m=\frac{Q}{\beta}\,\frac{k^2}{k+1}$
30	14 сверху	$d\omega$	$d\alpha$
31	9 снизу	$\frac{1}{2\alpha}$ и $(-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$	$\frac{1}{2\alpha}(-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})$
36	4 сверху	въ концѣ строки пропущенъ знакъ *).	
36	4 снизу	C_1	c_1
37	15 сверху	большими	боковыми
40	5 сверху	III	I и III

Литература.

М. Н. Берловъ „Детали подъемныхъ машинъ“ 1909.

Л. Г. Киферъ „Грузоподъемные машины“ 1910.

Л. З. Ратновскій „Подъемные краны“ вып. 2. 1910.

А. М. Самусь „Курсъ подъемныхъ машинъ“ 1896.

A. Ernst „Die Hebezeuge“ 1903.

W. Pickersgill „Lasthebemashinen“ 1905.

H. Bethmann „Die Hebezeuge“ 1908.

A. Bottcher „Cranes“ 1908.

L. Rousselet „Les ponts roulants actuells“ 1908.

Р. Дроздовъ „Отчетъ объ опытахъ съ усиленной сцѣпкой“, Вѣстникъ О-ва Технологовъ 1905.

A. Pedersen „A diagram for designing hoisting hooks“, American Machinist, Ferbuary 15, 1908.

V. Marmor „Calcul exact d'un crochet“, Revue de Méchanique 1905.