

Объ одномъ свойствѣ родственннхъ опредѣлителей.

Опредѣлители

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & a_1 \\ c_2 & d_2 & a_2 \\ c_3 & d_3 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

составленные изъ элементовъ матрицы

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

въ круговомъ порядкѣ, назовемъ *родственными*.

1. Пусть два изъ опредѣлителей (1), скажемъ — Δ_0 и Δ_3 , равны 0, а хотя бы одинъ изъ ихъ общихъ миноровъ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

отличень отъ 0.

Разлагая Δ_0 по элементамъ третьяго, а Δ_3 — перваго столбца, мы получимъ

$$\begin{aligned} c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &= 0, \\ d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

кромѣ того, какъ извѣстно,

$$a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

$$b_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Такъ какъ миноры (2) — по условію — не всѣ равны 0, и они удовлетворяютъ во первыхъ — тремъ однороднымъ уравненіямъ (3) и (4) и во вторыхъ — (5) и (3), то соответственные опредѣлители изъ коэффициентовъ этихъ уравненій должны обращаться въ 0; а этими опредѣлителями являются Δ_2 и Δ_1 ; итакъ

Если изъ четырехъ родственныхъ определителей два обращаются въ 0, а хотя бы одинъ изъ ихъ общихъ миноровъ отличенъ отъ 0, то равны нулю и два остальныхъ определителя.

2. Пусть теперь Δ_0 и Δ_3 равны 0, а хотя бы одинъ изъ двухъ другихъ определителей, напримеръ— Δ_2 , отличенъ отъ 0.

Въ этомъ случаѣ изъ (3) и (4) слѣдуетъ, что миноры (2) должны обращаться въ 0; изъ равенства ихъ 0 вытекаетъ, что

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

такимъ образомъ

Если два родственныхъ определителя равны 0, а третій отличенъ отъ 0, то общіе миноры двухъ первыхъ определителей равны 0, и входящіе въ нихъ элементы пропорціональны.

(2)

(3)

(4)

(5)