П. А. МИНЯЕВЪ
ИНЖЕНЕРЪ-СТРОИТЕЛЬ
и. д. экстраорд. профессора Томскаго Технологическаго Института ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

О РАСПРЕДѢЛЕНІИ НАПРЯЖЕНІЙ ВЪ СЫПУЧИХЪ ТѢЛАХЪ

НОВАЯ ТЕОРІЯ ДАВЛЕНІЯ ЗЕМЛИ.

ТОМСКЪ.
Типо-литографія Сибирскаго Т-ва Печ. Дѣла. Уг. Дворянской и Ямского пер. с. д.
1914 г.

Отдѣльный оттискъ изъ Извѣстій Томскаго Технологическаго Института Императора Николая II. (Т.—XXXV—1914 г.)

Предисловіе.

Настоящее изслѣдованіе является результатомъ долгихъ исканій простого и яснаго рѣшенія вопроса о давленіи земли. Стремленіе рѣшить этотъ вопросъ, исходя изъ разсмотрѣнія напряженій въ сыпучихъ тѣлахъ, и аналогія, существующая между твердымъ и сыпучимъ тѣломъ, находящимся въ состояніи равновѣсія, привели меня къ убѣжденію, что напряженія въ сыпучихъ тѣлахъ должны распредѣляться по тѣмъ же законамъ какъ и въ твердомъ тѣлѣ. Эта, подтверждаемая опытами, гипотеза приводитъ къ очень простому по идеѣ способу опредѣленія напряженій въ сыпучихъ тѣлахъ—эти напряженія могутъ быть найдены изъ соотвѣтствующихъ рѣшеній теоріи упругости твердаго тѣла (особыя свойства сыпучаго тѣла сказываются при этомъ въ томъ, что для него напряженное состояніе возможно не при всякой системѣ внѣшнихъ силъ). Однако при современномъ положеніи теоріи упругости мы имѣемъ очень немного рѣшеній, которыя по контурнымъ условіямъ соотвѣтствуютъ случаямъ, встрѣчающимся въ задачахъ о сыпучихъ тѣлахъ. Для рѣшенія задачъ о давленіи земли на подпорныя стѣны мы почти не находимъ подходящихъ рѣшеній въ теоріи упругости твердаго тѣла, поэтому въ предлагаемомъ изслѣдованіи этотъ вопросъ рѣшается, исходя изъ рѣшеній относящихся къ безконечнымъ массивамъ. Такой пріемъ нѣсколько искусственный, но пока мы имъ только и располагаемъ. Отсутствіе подходящаго рѣшенія заставило меня также отказаться отъ изслѣдованія вопроса о распредѣленіи напряженій въ откосахъ насыпей. Для рѣшенія этого вопроса нужно имѣть общее рѣшеніе о распредѣленіи напряженій въ клинообразныхъ тѣлахъ, въ теоріи же упругости мы имѣемъ только частныя рѣшенія, данныя P. Eillunger'омъ *) и Н. Герсевановымъ **) которыя не удовлетворяютъ условіямъ существованія напряженнаго состоянія въ сыпучемъ тѣлѣ. Мои собственныя попытки по отысканію общаго рѣшенія не увѣнчались успѣхомъ.

Подробный перечень литературы, относящейся по вопросу о давленіи земли, можно найти въ сочиненіи инженера А. И. Прилежаева „Къ вопросу о давленіи земли, на подпорныя стѣны" ***). Изложеніе

*) Zeitscrift für Mathematik und Physik. Band 60, Heft 3; 1912 г.
**) Сборникъ Инст. Инж. Путей Сообщ., выпускъ LXXVI.-1910 г.
***) Сборникъ Инст. Инж. Путей Сообщ. выпускъ LXXV—1909 г.

общихъ основъ теоріи давленія земли также можно найти въ Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften" *).

Въ заключеніе считаю долгомъ принести благодарность Инженерно-строительному отдѣленію Томскаго Технологическаго Института, давшему мнѣ средства на производство опытовъ, завѣдующему лабораторіей строительныхъ матеріаловъ при Томскомъ Технологическомъ Институтѣ В. Ф. Юфереву и лаборанту М. И. Мещерякову за содѣйствіе по устройству опытовъ и студенту Я. И. Маевскому, принимавшему участіе въ производствѣ опытовъ и подсчетовъ.

П. Миняевъ.

Томскъ

14 января 1914 года.

*) Band IV 2п, Heft. 3.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Глзва I.

Основанія теоріи.

Глава II.

Провѣрка теоріи опытами.

Глава III.

Практическія примѣнеія теоріи.

Приложеніе.

ВВЕДЕНІЕ.

Съ вопросомъ о распредѣленіи напряженій въ сыпучихъ тѣлахъ приходится часто встрѣчаться въ инженерной практикѣ. При разсчетѣ подпорныхъ стѣнъ приходится опредѣлять давленіе на нихъ земли, которая въ этихъ случаяхъ разсматривается какъ сыпучее тѣло; съ той же задачей мы встрѣчаемся при разсчетѣ стѣнъ закромовъ элеваторовъ и стѣнъ силосовъ. При опредѣленіи глубины заложенія фундамента рѣшается вопросъ о томъ, существуетъ ли при данныхъ условіяхъ равновѣсіе частицъ въ сыпучемъ массивѣ. Отысканіе закона, по которому распредѣляется давленіе отъ подвижного состава въ желѣзнодорожномъ пути, непосредственно связано съ вопросомъ о распредѣленіи напряженій въ балластѣ и полотнѣ, т. е. съ вопросомъ о распредѣленіи напряженій въ сыпучихъ массивахъ. Всѣ эти вопросы еще далеко не вполнѣ рѣшены, а существующія частныя рѣшенія возбуждаютъ болѣе или менѣе серьезныя сомнѣнія.

Въ настоящее время мы имѣемъ три различныхъ по своимъ основнымъ положеніямъ теоріи давленія земли, которыя одинаково относятся и ко всякому другому сыпучему тѣлу. Это—теорія Куломба, теорія Ренкина и теорія Буссинеска.

Теорія Куломба. Наиболѣе старая, наиболѣе простая и наиболѣе распространенная теорія, это—теорія французскаго физика Куломба предложенная имъ въ 1773 году. Въ основу этой теоріи положена гипотеза о плоскости скольженія и призмѣ обрушенія, первоначально высказанная Bullet (1691 г.). Bullet полагалъ, что плоскость скольженія всегда наклонена къ горизонту подъ угломъ 45 градусовъ и призма обрушенія стремится скользить по этой плоскости безъ тренія. Куломбъ ввелъ существенныя поправки въ теорію Bullet; онъ принимаетъ во вниманіе силу тренія (и сцѣпленія, если оно имѣется) по плоскости скольженія, и затѣмъ положеніе плоскости скольженія не считаетъ произвольно постояннымъ, а опредѣляетъ его изъ условія, что призма обрушенія есть призма наибольшаго давленія на стѣну. Куломбъ полагаетъ, что съ непрерывнымъ измѣненіемъ положенія плоскости скольженія измѣняется непрерывно и давленіе на стѣну, при одномъ изъ возможныхъ положеній этой плоскости давленіе на стѣну будетъ maximum. Призма обрушенія, соотвѣтствующая этому положенію плоскости скольженія, и будетъ призмой наибольшаго давленія.

Кулономъ рѣшена задача о давленіи земли только для случая вертикальной стѣны и горизонтальной поверхности засыпки, при чемъ онъ принимаетъ, что направленіе давленія нормально къ стѣнѣ. Дальнѣйшее развитіе эта теорія получила благодаря трудамъ Français, Audoy, Poncelet, Rebhann'a, Culman'a, Winkler'a и др., которыми найдены способы опредѣленія давленія на стѣну для различныхъ другихъ случаевъ положенія и формы стѣны, при различныхъ положеніяхъ и формахъ поверхности засыпки, которая можетъ быть свободна или нагружена.

Выводы теоріи Кулона, вообще говоря, не находятъ подтвержденія въ опытахъ. Результаты опытовъ различныхъ изслѣдователей, произведенныхъ съ вертикальной стѣной при плоской поверхности засыпки, болѣе или менѣе сходятся съ результатами вычисленій по теоріи Кулона только для случая ненагруженной поверхности засыпки; въ тѣхъ же случаяхъ, когда на поверхности засыпки расположена нагрузка, сходства между опытами и теоріей Кулона нѣтъ. Изъ теоріи Кулона вытекаетъ какъ слѣдствіе, что нагрузка, расположенная за предѣлами призмы обрушенія, не дѣйствуетъ на стѣну, между тѣмъ по опытамъ Müller-Breslau это не оправдалось,—оказалось, что нагрузка, расположенная даже вблизи линіи естественнаго откоса, замѣтно увеличиваетъ давленіе на стѣну,

Противъ основного положенія теоріи Кулона, что поверхность скольженія есть плоскость, были сдѣланы возраженія I. Weingarten'омъ, O. Mohr'омъ, E. Winkler'омъ, E. Kötter'омъ, H. Müller-Breslau, которые показали, что эта поверхность вообще не есть плоскость и можетъ быть таковой только въ частныхъ случаяхъ.

По теоріи Кулона давленіе на стѣну опредѣляется изъ условій равновѣсія призмы обрушенія, разсматриваемой какъ абсолютно твердое тѣло. Эта теорія не даетъ картины распредѣленія напряженій въ сыпучемъ тѣлѣ и потому при пользованіи ею остается впечатлѣніе неясности, чувствуется неудовлетворенность.

Теорія Ренкина стремится рѣшить вопросъ о давленіи земли, исходя изъ разсмотрѣнія условій равновѣсія малаго элемента сыпучаго тѣла. Первая попытка въ этомъ направленіи была сдѣлана Ortmann'омъ (1847 г.), который, разсматривая условія равновѣсія элементарнаго параллелепипеда, ошибочно предполагалъ, что нормальныя напряженія на боковыхъ и нижней граняхъ параллелепипеда всегда равны между собой. Дальнѣйшее развитіе этой теоріи принадлежитъ Шефлеру и Ренкину.

Въ основаніе этой теоріи положены дифференціальныя уравненія равновѣсія теоріи упругости и неравенство:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \leq \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

опредѣляющее зависимость между наибольшимъ (λ_1) и наименьшимъ (λ_3) главными напряженіями и угломъ (φ) тренія для даннаго сыпучаго тѣла. Для случая плоской задачи, которой обычно ограничиваются изслѣдованія о давленіи земли, эти основныя положенія выразятся такъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \rho X = 0 \\ \frac{dY_y}{dy} + \frac{dX_y}{dx} + \rho Y = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

$$\frac{(X_x - Y_y)^2 + 4\, X_y^2}{(X_x + Y_y)^2} \leq Sin^2\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Изъ двухъ уравненій (a) и неравенства (b) нельзя опредѣлить однозначно напряженія X_x, Y_y и X_y, поэтому по теоріи Ренкина возможно найти рѣшеніе только для случая, такъ называемаго предѣльнаго равновѣсія сыпучаго тѣла, т. е. такого, при которомъ отношеніе между наибольшимъ и наименьшимъ главными напряженіями достигаетъ maximum'a. Въ этомъ случаѣ неравенство (b) обращается въ равенство и получается система трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными X_x, Y_y, X_y, изъ которой эти неизвѣстныя могутъ быть опредѣлены. Частное рѣшеніе этой системы уравненій легко находится для случая сыпучаго массива, ограниченнаго сверху плоскостью и имѣющаго безконечные размѣры въ другихъ направленіяхъ. Рѣшеніе, полученное для случая неограниченнаго массива, Ренкинъ примѣняетъ и къ опредѣленію давленія земли на подпорныя стѣны. Онъ раздѣляетъ массивъ плоскостью, соотвѣтствующей положенію стѣны, на двѣ части и, отбрасывая одну часть, замѣняетъ ее стѣной, предполагая, что такая замѣна не измѣняетъ распредѣленіе напряженій въ оставшейся части. Однако полученныя такимъ путемъ, рѣшенія не всегда даютъ отвѣтъ на вопросъ о давленіи на стѣну и иногда приводятъ къ кажущимся парадоксамъ. Напримѣръ, для случая вертикальной стѣны и поднимающагося отъ стѣны откоса давленіе на стѣну получается такое же какъ и для случая, опускающагося отъ стѣны подъ тѣмъ же угломъ, откоса. Поэтому многіе ученые (Winker, S.-Venant, Boussineq и др.) полагаютъ, что теорія Ренкина можетъ примѣняться лишь тогда, когда стѣна совпадаетъ съ одной изъ поверхностей скольженія въ массивѣ.

Вопросъ о поверхности скольженія теорія Ренкина позволяетъ поставить въ болѣе общемъ видѣ, нежели теорія Куломба. Поверхность скольженія можетъ быть найдена, какъ такая по формѣ и положенію поверхность, которая отдѣляетъ призму наибольшаго давленія. Въ такомъ видѣ задача сводится, во первыхъ, къ нахожденію закона распредѣленія напряженій по поверхности скольженія и во вторыхъ, къ нахожденію формы поверхности скольженія. Для рѣшенія этой задачи имѣется вышеуказанная система трехъ уравненій, такъ какъ очевидно по поверхности скольженія имѣетъ мѣсто предѣльное равновѣсіе. Въ общемъ видѣ эта задача также не рѣшена. F. Kotter'омъ рѣшена первая часть задачи. Имъ найдено дифференціальное уравненіе для опредѣленія напряженій вдоль поверхности скольженія и интегралъ этого уравненія. Пользуясь этимъ рѣшеніемъ, можно найти давленіе на стѣну при заданной заранѣе формѣ поверхности скольженія.

Рѣшенія, найденныя по теоріи Ренкина для случая вертикальной стѣны и горизонтальной поверхности засыпки, даютъ результаты близкіе къ результатамъ опытовъ, но это такой случай, для котораго пригодны почти въ одинаковой степени всѣ три существующія теоріи. Въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ, какъ было указано выше, теорія Ренкина даетъ рѣшенія очевидно не пригодныя для опредѣленія давленія на подпорную стѣну.

Теорія Буссинеска. Буссинескомъ была предложена третья теорія давленія земли. Эта теорія стремится рѣшить вопросъ о давленіи земли тѣмъ же путемъ, какимъ опредѣляются напряженія въ теоріи упругости твердаго тѣла. Какъ извѣстно, дифференціальныхъ уравненій равновѣсія недостаточно для однозначнаго опредѣленія напряженій; для этого необходимо еще найти зависимость между напряженіями и деформаціями. Буссинескъ устанавливаетъ эту зависимость при помощи двухъ слѣдующихъ предположеній:

1) онъ предполагаетъ, что модуль скольженія въ сыпучихъ тѣлахъ есть величина перемѣнная, пропорціональная среднему давленію въ данной точкѣ, т. е.

$$\mu = mp = m\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3},$$

гдѣ λ_1, λ_2, λ_3—главныя напряженія, m—коеффиціентъ, зависящій отъ свойствъ сыпучаго тѣла.

2) онъ предполагаетъ также, что въ сыпучихъ тѣлахъ перемѣщенія частицъ настолько велики по сравненію съ измѣненіемъ объема тѣла при его деформаціи, что объемнымъ расширеніемъ (сжатіемъ) можно принебречь, т. е. положить

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3=0$$

гдѣ δ_1, δ_2, δ_3—главныя удлиненія (сжатія).

Исходя изъ этихъ двухъ предположеній, Буссинескъ находитъ слѣдующія выраженія для напряженій черезъ перемѣщенія:

$$X_x=-p\left(1-2m\frac{du}{dx}\right);\quad Y_y=-p\left(1-2m\frac{dv}{dy}\right);$$

$$Z_z=-p\left(1-2m\frac{dw}{dz}\right);\quad Y_z=pm\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right);$$

$$Z_x=pm\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right);\quad X_y=pm\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right);$$

гдѣ u, v, и w—перемѣщенія по осямъ x, y и z.

Подставивъ эти значенія напряженій въ дифференціальныя уравненія равновѣсія:

$$\frac{dX_x}{dx}+\frac{dX_y}{dy}+\frac{dX_z}{dz}+\rho X=0,$$

$$\frac{dY_x}{dx}+\frac{dY_y}{dy}+\frac{dY_z}{dz}+\rho Y=0,$$

$$\frac{dZ_x}{dx}+\frac{dZ_y}{dy}+\frac{dZ_z}{dz}+\rho Z=0,$$

$$X_y=Y_x,\ Y_z=Z_y,\ Z_x=X_z,$$

и принявъ во вниманіе еще условіе:

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

онъ получаетъ систему четырехъ уравненій съ четырьмя неизвѣстными (u, v, w и p), изъ которой эти неизвѣстныя могутъ быть опредѣлены. Однако интегрированіе этой системы уравненій въ общемъ видѣ представляетъ большія трудности и Буссинескъ ограничиваетъ примѣненіе своей теоріи предѣлами плоской задачи. Кромѣ того онъ разсматриваетъ только случай предѣльнаго состоянія равновѣсія, когда представляется возможнымъ освободиться отъ коэффиціента m, характеризирующаго сыпучее тѣло. Этотъ коэффиціентъ, вообще говоря, неизвѣстенъ и можетъ быть опредѣленъ только опытнымъ путемъ.

При опредѣленіи давленія земли на подпорныя стѣны, чтобы сдѣлать условія на поверхности стѣны вполнѣ опредѣленными, Буссинескъ разсматриваетъ два состоянія поверхности стѣны: 1) случай стѣны вполнѣ шероховатой, предполагая, что въ этомъ случаѣ перемѣщенія, соприкасающихся со стѣной, частицъ сыпучаго тѣла равны нулю, т. е.

$$u = v = w = 0$$

2) случай стѣны вполнѣ гладкой, предполагая, что въ этомъ случаѣ нормальныя къ поверхности стѣны, перемѣщенія равны нулю и касательныя напряженія по этой поверхности равны нулю.

Теорія Буссинеска не получила широкаго распространенія. Основныя положенія этой теоріи возбуждали сомнѣнія, въ особенности предположеніе, что для сыпучаго тѣла объемное расширеніе (сжатіе) есть величина высшаго порядка малости по сравненію съ компонентами деффорамціи δ_1, δ_2 и δ_3.

Сущность предлагаемой теоріи. Въ основу моего изслѣдованія легло предположеніе, что напряженія въ сыпучихъ тѣлахъ распредѣляются по тѣмъ же законамъ, какъ и въ твердомъ тѣлѣ. Эта гипотеза позволяетъ лучше другихъ объяснить, происходящія подъ дѣйствіемъ силъ, явленія въ сыпучихъ тѣлахъ. Пользуясь ею, нѣтъ надобности прибѣгать къ понятіямъ о плоскости скольженія и призмѣ обрушенія, а также къ предположеніямъ, что сыпучія тѣла обладаютъ перемѣннымъ угломъ тренія, перемѣннымъ модулемъ скольженія и проч. Результаты рѣшеній, полученныхъ при помощи этой гипотезы, сходны съ результатами опытовъ. Кромѣ того эти рѣшенія даютъ такую же полную картину распредѣленія напряженій въ сыпучемъ тѣлѣ, какую мы получаемъ для твердаго тѣла—это можетъ способствовать установленію болѣе яснаго представленія о сыпучихъ тѣлахъ.

Наша гипотеза позволяетъ переносить рѣшенія, полученныя въ теоріи упругости твердаго тѣла, на сыпучія тѣла. Особенности, характеризующія сыпучее тѣло, проявлются при этомъ въ томъ, что не при всякой системѣ силъ оказывается возможнымъ осуществить напряженное состояніе. Въ твердомъ тѣлѣ, гдѣ напряженія могутъ быть различныхъ знаковъ, напряженное состояніе возможно при всякой системѣ внѣшнихъ силъ; для сыпучаго же тѣла оно возможно только при такихъ системахъ силъ, при которыхъ, во первыхъ, ни въ одной точкѣ не получается растягивающихъ напряженій и, во вторыхъ, при которыхъ направленія напряженій по отношенію къ площадкамъ, на которыхъ онѣ дѣйствуютъ, не выходятъ изъ конуса тренія для даннаго сыпучаго тѣла. Это второе условіе совпадаетъ съ требованіемъ, чтобы системы внѣшнихъ силъ были таковы, при которыхъ въ каждой точкѣ разсматриваемаго объема отношеніе между наибольшимъ и наименьшимъ главными напряженіями удовлетворяло неравенству Ренкина:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \leq \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}.$$

Говоря, что въ сыпучихъ тѣлахъ напряженія распредѣляются также какъ и въ твердомъ тѣлѣ, мы ставимъ эти тѣла въ общій рядъ упругихъ тѣлъ. При этомъ рѣшенія теоріи упругости твердаго тѣла будутъ рѣшеніями и для другихъ тѣлъ. Отбирая только такія напряженныя состоянія, при которыхъ удовлетворено неравенство Ренкина, мы получимъ рѣшенія для сыпучаго тѣла; отбирая далѣе напряженныя состоянія, при которыхъ нѣтъ касательныхъ напряженій, т. е. такія, при которыхъ всѣ три главныя напряженія вездѣ равны, получаемъ рѣшенія для жидкости.

ГЛАВА I.

Основанія теоріи.

§ 1. Необходимыя условія для существованія напряженнаго состоянія въ сыпучемъ тѣлѣ.

Первое условіе. Дифференціальныя уравненія равновѣсія математической теоріи упругости *):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_x}{dx}+\frac{dX_y}{dy}+\frac{dX_z}{dz}+\rho X=0.,\\ \frac{dY}{dx}+\frac{dY_y}{dy}+\frac{dY_x}{dz}+\rho Y=0.,\\ \frac{dZ_x}{dx}+\frac{dZ_y}{dy}+\frac{dZ_z}{dz}+\rho Z=0.,\end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{гдѣ}-X_y=Y_x,\ Y_z=Z_y,\ X_z=Z_x,$$

представляютъ уравненія статики, отнесенныя къ выдѣленному элементу разсматриваемаго тѣла. Они выведены въ предположеніи, что напряженія будутъ непрерывными функціями координатъ. Уравненія (1) примѣнимы къ какому угодно тѣлу —твердому, жидкому или сыпучему, такъ какъ при выводѣ этихъ уравненій физическія особенности тѣла не играютъ никакой роли. Неоднородность частицъ и присутствіе пустотъ между частицами въ сыпучихъ тѣлахъ не могутъ служить причиной разрыва непрерывности. Въ самомъ дѣлѣ, въ мѣстѣ соприкосновенія разнородныхъ частицъ, напряженія, дѣйствующія на ту и и другую частицы, по закону акціи и реакціи равны и слѣдовательно мѣсто соприкосновенія частицъ не служитъ мѣстомъ разрыва. Точно также, если между частицами тѣла имѣются пустоты, то на свободныхъ поверхностяхъ частицъ напряженія равны нулю, также какъ онѣ равны нулю на всемъ протяженіи промежутка между частицами; дальше внутрь частицъ напряженія будутъ измѣняться по нѣкоторому непрерывному закону, слѣдовательно, и въ случаѣ присутствія пустотъ между частицами, напряженія останутся непрерывными. Однако найти такія функціи координатъ, которыя точно представляли бы величины напряженій въ каждой точкѣ, не представляется возможнымъ,

*) Обозначенія напряженій приняты по курсу теоріи упругости A. E. H. Love.

при этомъ пришлось бы учесть и неодинаковый законъ распредѣленія напряженій въ разнородныхъ частицахъ, и вліяніе на распредѣленіе напряженій величинъ промежутковъ между частицами.

Въ теоріи упругости твердаго тѣла упрощеніе достигается тѣмъ, что принимаютъ тѣло абсолютно однороднымъ, т. е. разсужденія и выкладки ведутъ въ предположеніи не дѣйствительнаго, а нѣкотораго идеальнаго тѣла, свойства котораго совершенно одинаковы въ каждой точкѣ и въ любомъ направленіи. Результаты выводовъ, полученные для такого идеальнаго тѣла, переносятъ затѣмъ на тѣла, существующія въ природѣ, которыя, вообще говоря, неоднородны. Дѣйствительныя напряженія въ отдѣльныхъ точкахъ такого тѣла будутъ не тѣ, которыя даютъ формулы теоріи упругости, но среднія напряженія для площадокъ, размѣры которыхъ велики по сравненію съ размѣрами частицъ, могутъ быть близки къ полученнымъ по этимъ формуламъ, и конечно тѣмъ ближе, чѣмъ разсматриваемое тѣло однороднѣе. Чтобы убѣдиться насколько выводы теоріи упругости приложимы къ данному тѣлу и приложимы ли къ нему вообще, сравниваютъ результаты вычисленій по формуламъ теоріи упругости съ результатами опытовъ. Такимъ путемъ установлено, что выводы теоріи упругости приложимы съ достаточной степенью точности, напримѣръ, къ желѣзу, стали, менѣе точно къ чугуну, камню, дереву. Нужно замѣтить, что при практическихъ приложеніяхъ не требуется одинаковой степени точности сходства результатовъ вычисленій и опытовъ для различныхъ матеріаловъ. При проектированіи сооруженій изъ желѣза или стали, какъ матеріаловъ болѣе однородныхъ, допускается гораздо меньшій запасъ прочности и размѣры частей подбираются болѣе точно, нежели для сооруженій, проектируемыхъ изъ дерева или камня. Поэтому, хотя для этихъ послѣднихъ матеріаловъ выводы теоріи упругости приложимы и съ меньшей степенью точности, но все же ими можно пользоваться при рѣшеніи практическихъ вопросовъ.

При изслѣдованіи вопроса о напряженіяхъ въ сыпучихъ тѣлахъ мы будемъ идти тѣмъ же самымъ путемъ, какимъ идутъ въ теоріи упругости твердаго тѣла. Будемъ разсматривать не дѣйствительное, а нѣкоторое идеальное однородное сыпучее тѣло. Всѣ наши предположенія отнесемъ къ такому тѣлу и относительно него будемъ вести всѣ наши разсужденія, а затѣмъ, чтобы убѣдиться, примѣнимы ли наши выводы къ существующимъ въ природѣ сыпучимъ тѣламъ, сравнимъ результаты вычисленій съ результатами опытовъ. Если при такомъ сравненіи мы получимъ для какого либо сыпучаго тѣла сходство результатовъ, достаточное для опредѣленія характера изслѣдуемыхъ явленій и достаточное для рѣшенія намѣченныхъ вопросовъ, то это укажетъ на примѣнимость нашихъ выводовъ къ данному тѣлу и на то, что наши предположенія сдѣланы достаточно удачно.

Мы примемъ, что напряженія въ сыпучихъ тѣлахъ являются непрерывными функціями координатъ. Въ этомъ случаѣ напряженное состояніе въ сыпучемъ тѣлѣ будетъ возможно, если дифференціальныя уравненія (1) удовлетворены въ каждой точкѣ—это составитъ первое необходимое условіе существованія напряженнаго состоянія въ сыпучемъ тѣлѣ.

На поверхности сыпучаго тѣла, также какъ и для твердаго тѣла компоненты напряженій должны удовлетворять условіямъ:

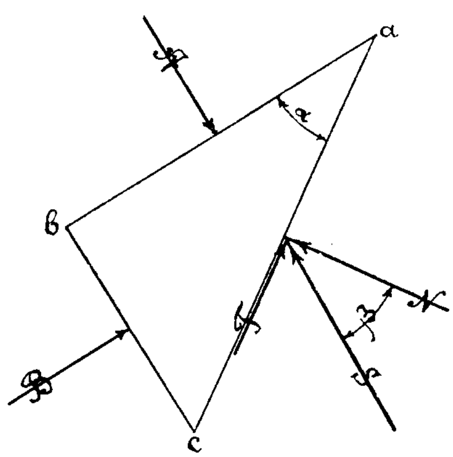
$$X_v = X_x \cos(xv) + X_y \cos(yv) + X_z \cos(zv),$$

$$Y_v = Y_x \cos(xv) + Y_y \cos(yv) + Y_z \cos(zv),$$

$$Z_v = Z_x \cos(xv) + Z_y \cos(yv) + Z_z \cos(zv).$$

Второе условіе. Мы будемъ предполагать, что между частицами сыпучаго тѣла нѣтъ сцѣпленія. Въ такомъ тѣлѣ не можетъ быть растягивающихъ напряженій, а сжимающія напряженія не могутъ быть направлены произвольно по отношенію къ площадкамъ. на которыхъ онѣ дѣйствуютъ,—уголъ образуемый направленіемъ напряженія съ нормалью къ соотвѣтствующей площадкѣ, не можетъ быть больше угла тренія для даннаго сыпучаго тѣла. Этой зависимостью опредѣляются предѣлы, между которыми можетъ измѣняться отношеніе величинъ главныхъ напряженій въ сыпучемъ тѣлѣ. Найдемъ эти предѣлы.

Черт. 1.



Вырѣжемъ изъ разсматриваемаго сыпучаго тѣла элементарную трехгранную призму, при томъ такъ чтобы грани ab, bc и ac (чер. 1) были параллельны среднему по величинѣ главному напряженію. Пусть кромѣ того грани ab и bc представляютъ главныя площадки и слѣдовательно дѣйствующія на нихъ напряженія A и B будутъ также главныя. Напряженіе S, дѣйствующее на грани ac, разложимъ на составляющія: нормальное къ площадкѣ (N) и тангенціальное (T). Разсматривая условія равновѣсія призмы, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos 2\alpha \\ T &= -\frac{A-B}{2}\sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

При помощи выраженій (2) легко найти зависимость между угломъ β, который напряженіе S образуетъ съ нормалью къ площадкѣ ac, главными напряженіями A и B и угломъ α (чер. 1):

$$tg\,\beta = \frac{T}{N} = -\frac{(A-B)\sin 2\alpha}{(A+B)+(A-B)\cos 2\alpha},$$

или послѣ нѣкоторыхъ преобразованій:

$$tg\,\beta = -\frac{(A-B)\,tg\,\alpha}{A+B\,tg^2\alpha}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Для даннаго напряженнаго состоянія A и B будутъ величинами постоянными, такъ какъ онѣ представляютъ главныя напряженія въ точкѣ, около которой вырѣзана элементарная призма. Уголъ β будетъ функціей угла α. Измѣняя уголъ α, т. е. вырѣзывая грань ac подъ различными углами къ грани ab, мы будемъ получать изъ выраженія (3) для угла β различныя значенія. При нѣкоторой величинѣ угла α уголъ β достигаетъ своего maximum'а. Уголъ β, какъ было сказано, не долженъ превосходить угла тренія даннаго сыпучаго тѣла, слѣдовательно максимальное значеніе угла β можно приравнять углу тренія (φ).

Для нахожденія maximum'а угла β воспользуемся обычнымъ пріемомъ, при чемъ, такъ какъ въ выраженіи (3) углы α и β входятъ только въ видѣ тангенсовъ, мы будемъ оперировать только съ этими величинами:

$$\frac{d\,tg\,\beta}{d\,tg\,\alpha} = -(A-B)\frac{A+B\,tg^2\alpha - 2B\,tg^2\alpha}{(A+B\,tg^2\alpha)^2} = 0$$

откуда

$$A - B\,tg^2\alpha = 0$$

или

$$tg\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{A}{B}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Полученныя значенія $tg\,\alpha$ обращаютъ $tg\,\beta$ въ maximum и minimum, которые, какъ легко видѣть, будутъ равны по абсолютной величинѣ.

Подставивъ въ лѣвую часть выраженія (3) $tg\,\varphi$ вмѣсто $tg\,\beta$ и въ правую часть вмѣсто $tg\,\alpha$ его значенія изъ (4) получимъ:

$$tg\,\varphi = \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A}{B}} - \sqrt{\frac{B}{A}}\right)$$

откуда

$$\frac{B}{A} = 1 + 2\,tg^2\varphi \pm 2\,tg\,\varphi\,\sqrt{1 + tg^2\varphi}$$

или

$$\frac{B}{A} = tg^2\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\varphi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

гдѣ верхній знакъ $(+)$ относится къ случаю, когда $B > A$, нижній $(-)$, когда $B < A$.

Выраженіе (5) даетъ два предѣльныхъ значенія для отношенія $\frac{B}{A}$, между которыми это отношеніе можетъ измѣняться. Напишемъ эту зависимость въ такомъ видѣ:

$$tg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) > \frac{B}{A} > tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Неравенства (6) представляютъ второе условіе, которое должно быть выполнено въ каждой точкѣ, чтобы напряженное состояніе для сыпучаго тѣла было возможно.

Третье условіе. Нѣтъ причинъ, чтобы въ сыпучемъ тѣлѣ при совершенно одинаковыхъ условіяхъ получались бы различныя напряженныя состоянія. Въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ напряженное состояніе будетъ вполнѣ опредѣленное и будетъ зависѣть отъ всѣхъ, дѣйствующихъ на сыпучее тѣло факторовъ. При прочихъ одинаковыхъ условіяхъ оно будетъ зависѣть отъ внѣшнихъ силъ и ими будетъ опредѣляться, слѣдовательно при разысканіи напряженій въ функціи отъ внѣшнихъ силъ мы должны получить однозначное рѣшеніе.

Дифференціальныхъ уравненій (1) и неравенствъ (6) недостаточно для такого рѣшенія, — шесть неизвѣстныхъ компонентовъ напряженій, входящихъ въ три уравненія (1), не могутъ быть опредѣлимы изъ этихъ уравненій и неравенствъ (6). Въ теоріи упругости твердаго тѣла однозначность рѣшенія получается благодаря тому, что напряженія являются функціями упругихъ перемѣщеній точекъ тѣла. Для твердаго тѣла зависимость между напряженіями и упругими перемѣщеніями выражается обобщеннымъ закономомъ Гука, который говоритъ, что компоненты деформаціи суть линейныя функціи компонентовъ напряженій.

Въ состояніи равновѣсія сыпучее тѣло имѣетъ аналогію съ твердымъ тѣломъ,—сжимающія напряженія, которыя необходимо должны дѣйствовать между частицами сыпучаго тѣла, чтобы равновѣсіе было возможно, замѣняютъ связь между частицами въ твердомъ тѣлѣ.

Наблюденія показываютъ, что сыпучія тѣла обладаютъ упругостью. При проходѣ поѣзда легко замѣтить опусканіе шпалъ подъ колесами паровоза и вагоновъ, которое по проходѣ поѣзда исчезаетъ,—шпалы принимаютъ прежнее положеніе, при чемъ подбивка балласта остается такой же плотной, какъ и до прохода поѣзда. Это указываетъ на упругія свойства деформацій насыпи и балласта, которыми главнымъ образомъ обуславливается осѣданіе шпалъ. Наблюденія надъ деформаціями желѣзнодорожнаго пути подъ дѣйствіемъ подвижного состава, дѣлавшіяся при помощи измѣрительныхъ и фотографическихъ приборовъ, указываютъ, что эти деформаціи упругія. Профессоръ A. Föppl сдѣлалъ нѣсколько наблюденій надъ осадкой почвы во дворѣ механической лабораторіи Мюнхенскаго политехникума подъ дѣйствіемъ груза въ 100 килогр. Этотъ грузъ располагался въ различныхъ разстояніяхъ отъ ранѣе забитаго въ землю небольшого колышка, положеніе котораго каждый разъ точно опредѣлялось при помощи зеркальнаго прибора. Осадка почвы по этимъ наблюденіямъ оказалась вполнѣ упругой. Какъ извѣстно, сыпучія тѣла способны передавать звуковыя колебанія—это также указываетъ, что сыпучимъ тѣламъ присущи упругія свойства.

При переходѣ сыпучаго тѣла изъ одного состоянія равновѣсія въ другое, мы будемъ различать два періода: первый, который характеризуется пересыпаніемъ частицъ, когда движеніе одной частицы не зависитъ отъ движенія другой, и второй, когда передъ наступленіемъ равновѣсія, сыпучее тѣло претерпѣваетъ только упругія деформаціи. Существованіе перваго періода необязательно, наличность же второго необходима, такъ какъ иначе трудно представить себѣ передачу дѣйствія силъ отъ одной частицы къ другой. Второй періодъ можетъ наступить неодновременно во всѣхъ частяхъ разсматриваемаго объема, но можно предполагать, что процессъ перехода въ состояніе равновѣсія имъ заканчивается.

Мы примемъ пока какъ постулатъ, что зависимость между компонентами напряженій и компонентами упругой деформаціи въ сыпучемъ тѣлѣ такая же, какъ и въ твердомъ тѣлѣ, т. е. что они подчиняются закону Гука.

Въ этомъ случаѣ компоненты напряженій, черезъ компоненты деформацій выразятся такъ:

$$
\left.\begin{aligned}
X_x &= \lambda\Delta + 2\,\mu\, e_{xx} \\
Y_y &= \lambda\Delta + 2\,\mu\, e_{yy}, \\
Z_z &= \lambda\Delta + 2\,\mu\, e_{zz}. \\
X_z &= \mu e_{xy},\ \ X_z = \mu e_{xz},\ \ Y_z = \mu\, e_{yz}.
\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (7)
$$

гдѣ Δ—объемное расширеніе, λ и μ коэффиціенты Ламе, e_{xx}, e_{yy}.... компоненты деформаціи.

Компоненты деформаціи, а слѣдовательно и компоненты напряженій, не являются независимыми величинами,—они будутъ функціями трехъ упругихъ перемѣщеній соотвѣтствующихъ точекъ по координатнымъ осямъ. Поэтому компоненты напряженій удовлетворяютъ нѣкоторымъ условіямъ, которыя вмѣстѣ съ уравненіями (1) вполнѣ опредѣляютъ напряженное состояніе.

Эти условія слѣдующія*).

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 X_x}{d x^2} + \frac{d^2 X_x}{d y^2} + \frac{d^2 X_x}{d z^2} &= -\frac{1}{1+\sigma}\,\frac{d^2(X_x+Y_y+Z)_z}{dx^2}, \\
\frac{d^2 Y_y}{d x^2} + \frac{d^2 Y_y}{dy^2} + \frac{d^2 Y_y}{dz^2} &= -\frac{1}{1+\sigma}\,\frac{d^2(X_x+Y_y+Z_z)}{dy^2}, \\
\frac{d^2 Z_z}{dx^2} + \frac{d^2 Z_z}{dy^2} + \frac{d^2 Z_z}{dz^2} &= -\frac{1}{1+\sigma}\,\frac{d^2(X_x+Y_y+Z_z)}{dz^2}, \\
\frac{d^2 Y_z}{dx^2} + \frac{d^2 Y_z}{dy^2} + \frac{d^2 Y_z}{dz^2} &= -\frac{1}{1+\sigma}\,\frac{d^2(X_x+Y_y+Z_z)}{dy\,dz}, \\
\frac{d^2 X_z}{dx^2} + \frac{d^2 X_z}{dy^2} + \frac{d^2 X_z}{dz^2} &= -\frac{1}{1+\sigma}\,\frac{d^2(X_x+Y_y+Z_z)}{dx\,dz}, \\
\frac{d^2 X_y}{dx^2} + \frac{d^2 X_y}{dy^2} + \frac{d^2 X_y}{dz^2} &= -\frac{1}{1+\sigma}\,\frac{d^2(X_x+Y_y+Z_z)}{dx\,dy},
\end{aligned}\right\} \dots (8)
$$

гдѣ $\frac{1}{1+\sigma} = \frac{2G}{E}$, σ — Пуассоново отношеніе, E и G модули упругости при растяженіи и сдвигѣ.

Выраженія (8) представляютъ третье необходимое условіе для существованія напряженнаго состоянія въ сыпучемъ тѣлѣ.

---

*) См. Г. В. Колосовъ—объ одномъ приложеніи теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго къ плоской задачѣ математической теоріи упругости стр. 138—Юрьевъ 1909 г.

Уравненія (1), (8) и и неравенства (6) должны быть удовлетворены въ каждой точкѣ сыпучаго тѣла—это составляетъ основу предлагаемой теоріи.

Въ уравненія (8) входитъ неизвѣстная величина Пуасонова отношенія, но для плоской задачи, съ которой мы въ дальнѣйшемъ только и имѣемъ дѣло, эта величина исчезаетъ. Для плоской задачи условія, выражаемыя уравненіями (8) превращаются въ одно:

$$\frac{d^2(X_x + Y_y)}{dx^2} + \frac{d^2(X_x + Y_y)}{dy^2} = 0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

При принятыхъ предположеніяхъ распредѣленіе напряженій въ сыпучемъ тѣлѣ будетъ такое же, какъ и въ твердомъ тѣлѣ, слѣдовательно, дляотысканія напряженій въ сыпучемъ тѣлѣ мы можемъ пользоваться соотвѣтствующими рѣшеніями теоріи упругости твердаго тѣла.

Напряженное состояніе вполнѣ опредѣляется дифференціальными уравненіями равновѣсія (1) и условіями (8), но для сыпучаго тѣла должны быть еще удовлетворены въ каждой точкѣ неравенства (6). Это накладываетъ ограниченія на системы внѣшнихъ силъ, при которыхъ возможно напряженное состояніе въ сыпучемъ тѣлѣ,—внѣшнія силы должны непремѣнно представлять такую систему сжимающихъ, силъ при которой напряженія удовлетворяютъ неравенствамъ (6). Какъ примѣръ подобной системы силъ разсмотримъ случай постояннаго всесторонняго давленія. Въ этомъ случаѣ уравненіямъ (1), условіямъ (8) и условіямъ на поверхности можно удовлетворить положивъ, что напряженія будутъ постоянны по всему объему. Главныя напряженія будутъ при этомъ также вездѣ равны и слѣдовательно неравенства (6) будутъ удовлетворены.

Предлагаемая теорія въ полной мѣрѣ относится къ нѣкоторому идеальному сыпучему тѣлу, къ существующимъ же въ природѣ сыпучимъ тѣламъ она будетъ примѣнима лишь постольку, поскольку эти тѣла будутъ близки къ нашему идеальному тѣлу. Говоря о примѣнимости закона Гука къ сыпучимъ тѣламъ, нѣтъ конечно необходимости требовать, чтобы этотъ законъ былъ примѣнимъ къ нимъ въ такой же мѣрѣ, какъ, напримѣръ, къ желѣзу или стали; достаточно, если выводы, построенные на основаніи этого закона, будутъ улавливать характеръ напряженнаго состоянія и давать удовлетворительныя рѣшенія практическихъ вопросовъ.

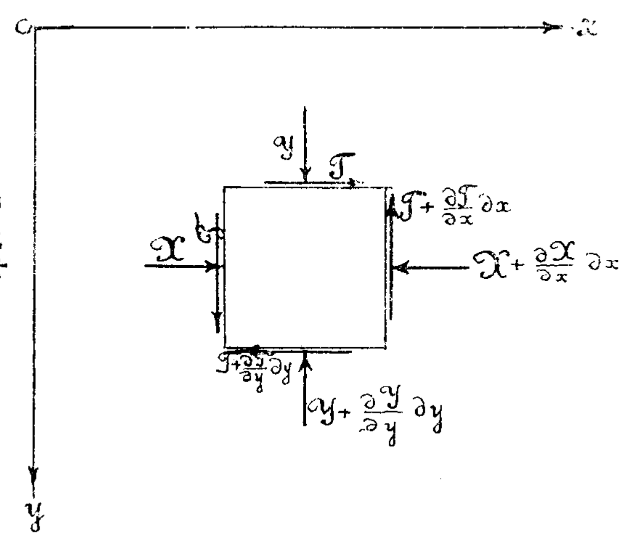
§ 2. Плоская задача.

При рѣшеніи практическихъ задачъ, связанныхъ съ вопросомъ о напряженіяхъ въ сыпучихъ тѣлахъ, приходится имѣть дѣло главнымъ образомъ съ плоской задачей. Говоря о плоской задачѣ, въ теоріи упругости различаютъ случай плоской деформаціи и плоскаго напряженнаго состоянія. Случай плоской деформаціи это тотъ, когда перемѣщенія точекъ тѣла происходятъ въ направленіяхъ параллельныхъ одной и той же плоскости, напримѣръ, въ направленіяхъ параллельныхъ координатной плоскости xy и являются въ этомъ случаѣ только функціями координатъ x и y; въ направленіи же оси z перемѣщенія равны нулю, или въ болѣе общемъ случаѣ, если эти перемѣщенія и имѣются, то онѣ являются линейными функціями только отъ z. Плоское напряженное состояніе характеризуется тѣмъ, что въ этомъ случаѣ всѣ напряженія лежатъ въ одной и той же плоскости. Вопросы относящіеся къ тому и другому случаю, рѣшаются однимъ и тѣмъ же путемъ, но для случая плоской деформаціи кромѣ напряженій дѣйствующихъ въ плоскости деформаціи, получаются еще напряженія нормальныя къ плоскости деформаціи. Очевидно, для сыпучаго тѣла можетъ имѣть мѣсто только случай плоской деформаціи, такъ какъ въ немъ ни одно изъ трехъ главныхъ напряженій не можетъ быть равно нулю, если два другія не равны нулю. Нужно замѣтить, что въ сочиненіяхъ, посвященныхъ вопросу о давленіи сыпучихъ тѣлъ, иногда дѣлаютъ ошибку, говоря о плоскомъ напряженномъ состояніи, вмѣсто того, чтобы говорить о плоской деформаціи. Это не оказываетъ вліянія на результаты вычисленій, но въ разсмотрѣніе вводится въ сущности невозможный случай равновѣсія.

Чтобы для плоской задачи можно было воспользоваться неравенствами (6) необходимо предположить, что большее и меньшее по величинѣ главныя напряженія лежатъ въ плоскости деформаціи, а среднее—нормально къ плоскости деформаціи.

При указанномъ на чертежѣ 2 расположеніи координатныхъ

Черт. 2.



осей и направленій силъ уравненія (1) для случая плоской задачи перепишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dX}{dx}+\frac{dT}{dy}=0 \\ &\frac{dY}{dy}+\frac{dT}{dx}-\Delta=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (10),$$

гдѣ X и Y нормальныя напряженія, дѣйствующія на площадкахъ, перпендикулярныхъ къ осямъ x и y, а T—касательное напряженіе для тѣхъ же площадокъ, Δ—вѣсъ единицы объема разсматриваемаго тѣла. Въ уравненіяхъ (10) мы принимаемъ за положительныя напряженія сжимающія.

Уравненіе (9) перепишемъ такъ:

$$\frac{d^2(X+Y)}{dx^2}+\frac{d^2(X+Y)}{dy^2}=0 \quad \ldots\ldots (11).$$

Неравенства (6) для плоской задачи останутся въ томъ же видѣ:

$$tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) \geq \frac{B}{A} \geq tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) \quad \ldots\ldots (12).$$

Если выразить главныя напряженія черезъ напряженія X, Y и T и принять B за меньшее по величинѣ главное напряженіе, то ихъ можно переписать еще такъ:

$$\frac{X+Y-\sqrt{(X-Y)^2+4\,T^2}}{X+Y+\sqrt{(X-Y)^2+4\,T^2}} \geq tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) \quad \ldots (13).$$

Это неравенство можетъ быть представлено еще въ такомъ видѣ:

$$\frac{(X-Y)^2+4\,T^2}{(X+Y)^2} \leq sin^2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (14).$$

§ 3. Характеръ задачъ о сыпучихъ тѣлахъ и способы ихъ рѣшенія.

Задачи о сыпучихъ тѣлахъ, съ которыми приходится встрѣчаться въ практикѣ, по характеру существенно отличаются отъ обычныхъ задачъ теоріи упругости твердаго тѣла.

Въ теоріи упругости твердаго тѣла интересуются главнымъ образомъ величиной напряженій для сужденія о прочности. При этомъ обычно приходится отыскивать напряженія при вполнѣ опредѣленныхъ условіяхъ на контурѣ; для тѣхъ же случаевъ, когда эти условія для нѣкоторыхъ частей контура не вполнѣ опредѣлены, приходится находить напряженія только вдали отъ этихъ мѣстъ, гдѣ эта неопредѣленность не оказываетъ замѣтнаго вліянія на распредѣленіе напряженій.

Задачи о сыпучихъ тѣлахъ приходится рѣшать при иныхъ условіяхъ, и интересъ въ нихъ сосредоточивается на иныхъ вопросахъ. Всѣ задачи о сыпучихъ тѣлахъ можно свести къ двумъ: первая — заданы внѣшнія силы, требуется опредѣлить, будутъ-ли частицы сыпучаго тѣла находиться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ этихъ силъ; вторая – сыпучее тѣло находится въ равновѣсіи, для нѣкоторой части его контура заданы внѣшнія силы, требуется опредѣлить внѣшнія силы, дѣйствующія на другихъ частяхъ контура.

На основаніи нашей теоріи первая задача рѣшается очень легко, если вполнѣ извѣстны контурныя условія. Достаточно подобрать, соотвѣтствующее заданнымъ условіямъ, рѣшеніе теоріи упругости твердаго тѣла и посмотрѣть, будутъ-ли удовлетворены во всѣхъ точкахъ неравенства (12). Если эти неравенства удовлетворены, то сыпучее тѣло будетъ находиться въ равновѣсіи, если нѣтъ, то равновѣсіе невозможно. Съ первой задачей мы встрѣчаемся при опредѣленіи глубины заложенія фундаментовъ.

Внѣшнія силы, которыя приходится опредѣлять при рѣшеніи второй задачи, представляютъ реакціи, поддерживающихъ сыпучее тѣло, стѣнъ и основанія. Въ этомъ случаѣ намъ неизвѣстны контурныя условія по линіямъ стѣнъ и основанія, ихъ требуется опредѣлить по заданнымъ объемнымъ силамъ (вѣсъ сыпучаго тѣла) и силамъ, дѣйствующимъ на поверхности сыпучаго тѣла между стѣнами. Легко видѣть, что въ такомъ видѣ задача не можетъ имѣть однозначнаго рѣшенія, она будетъ неопредѣленной. По линіямъ стѣнъ и основанія мы можемъ подобратать много системъ силъ, которыя вмѣстѣ съ заданными внѣшними силами удовлетворятъ условіямъ существованія напряженнаго состоянія въ сыпучемъ тѣлѣ. Неопредѣленность задачи въ данномъ случаѣ не есть слѣдствіе особыхъ свойствъ сыпучаго тѣла, а исключительно условій задачи. Подобныя же задачи могутъ встрѣтиться и въ области теоріи упругости твердаго тѣла. Возьмемъ, напримѣръ, такой случай: цилиндръ съ силой вдвинутъ въ другой цилиндръ и удерживается въ равновѣсіи отчасти реакціей стѣнокъ, отчасти реакціей дна второго цилиндра; пусть требуется опредѣлить напряженія по поверхности соприкасающихся стѣнокъ и дна цилиндровъ. Эта задача совершенно аналогична второй задачѣ о сыпучихъ тѣлахъ; здѣсь также намъ извѣстны контурныя условія только для части замкнутой поверхности, именно для верха вдвинутаго цилиндра, на остальной части поверхности этого цилиндра контурныя условія неизвѣстны, ихъ требуется опредѣлить по заданнымъ условіямъ на верхней его части. Въ такомъ видѣ задача будетъ очевидно неопредѣленной, причемъ для подбора рѣшеній здѣсь еще большій произволъ, такъ какъ для твердаго тѣла не имѣютъ мѣста неравенства (12). Эти неравенства тѣмъ больше ограничиваютъ количество возможныхъ рѣшеній, чѣмъ меньше въ нихъ будутъ разности между верхнимъ и нижнимъ предѣлами, т. е. чѣмъ меньше будетъ уголъ φ; для случая, когда оба предѣла совпадають (случай жидкости $\varphi = 0$), получается однозначное рѣшеніе.

Во второй задачѣ (какъ для твердаго, такъ и для сыпучаго тѣла) изъ всѣхъ возможныхъ рѣшеній конечно только одно будетъ представлять дѣйствительно существующее напряженное состояніе. Это состояніе зависитъ не только отъ свойствъ разсматриваемаго тѣла и дѣйствующихъ въ данный моментъ силъ, но и отъ силъ дѣйствовавшихъ раньше, а также и отъ другихъ факторовъ, какъ-то: отъ размѣровъ и свойствъ матеріала стѣнъ, заключающихъ разсматриваемое тѣло, отъ состоянія соприкасающихся поверхностей стѣнъ и разсматриваемаго тѣла, отъ случайныхъ причинъ, напримѣръ, для сыпучихъ тѣлъ отъ способа засыпки и проч. Учесть вліяніе всѣхъ этихъ факторовъ не представлается возможнымъ, а потому и нѣтъ возможности получить однозначное рѣшеніе. Это однако не лишаетъ практическаго значенія получающіяся многозначныя рѣшенія. Смотря по обстоятельствамъ, мы можемъ выбрать изъ всѣхъ этихъ рѣшеній или наиболѣе соотвѣтствующее данному случаю, пренебрегая вліяніемъ однихъ факторовъ и оцѣнивая вліяніе другихъ примѣрно—на глазъ, или же можемъ выбрать изъ всѣхъ рѣшеній случай наиболѣе невыгоднаго дѣйствія. Напримѣръ, при опредѣленіи давленія земли на подпорную стѣну мы можемъ принять для случая свѣже насыпанной земли отношеніе между главными напряженіями равнымъ нижнему предѣлу неравенствъ (12), для случая наиболѣе невыгоднаго дѣйствія это отношеніе будетъ равно верхнему предѣлу (предполагая, что главное напряженіе B близко къ нормали поверхности стѣны); мы также можемъ почти всегда указать направленіе касательныхъ усилій по высотѣ стѣны. Все это даетъ возможность выбрать наиболѣе подходящее рѣшеніе для каждаго частнаго случая.

При рѣшеніи второй задачи о сыпучихъ тѣлахъ, приходится опредѣлять давленіе на стѣну или только отъ дѣйствія собственнаго вѣса засыпки, или еще и отъ дѣйствія нагрузки, расположенной на поверхности засыпки. Въ обоихъ случаяхъ контурныя условія заданы только на поверхности засыпки, и слѣдовательно при нахожденіи общаго рѣшенія достаточно удовлетворить контурнымъ условіямъ только на этомъ протяженіи. Мы употребимъ такой пріемъ для нахожденія общаго рѣшенія. Для случая, когда дѣйствуетъ только собственный вѣсъ засыпки, возьмемъ рѣшеніе плоской задачи теоріи упругости для массива безконечныхъ размѣровъ, находящагося подъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса. Какъ увидимъ ниже, для этого случая получается рѣшеніе съ безконечнымъ числомъ произвольныхъ коэффиціентовъ; подберемъ эти коэффиціенты такъ, чтобы въ каждой точкѣ были удовлетворены неравенства (12). Практически достаточно, чтобы эти неравенства были удовлетворены только въ интересующей насъ области, напримѣръ въ области ограниченной контуромъ, соотвѣтстующимъ положенію стѣнъ и основанія, между которыми заключена засыпка. Найденное такимъ путемъ рѣшеніе будетъ многозначнымъ; придавая тѣ или иныя значенія, входящимъ въ него, произвольнымъ коэффиціентамъ, мы можемъ удовлетворить тѣмъ или инымъ условіямъ, зависящимъ отъ состоянія поверхности стѣны и состоянія засыпки, а также условіямъ, зависящимъ отъ другихъ причинъ.

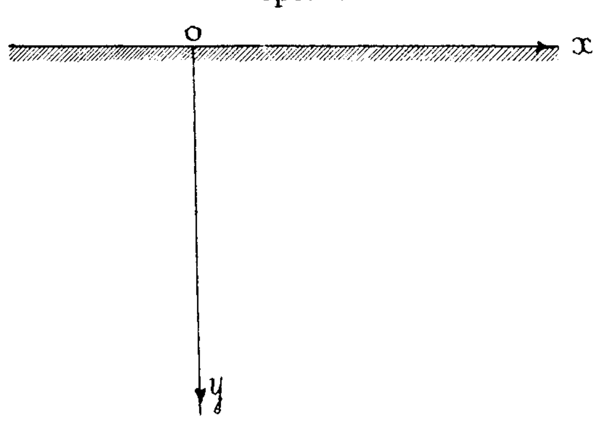
Для случая, когда кромѣ собственнаго вѣса засыпки дѣйствуетъ еще и нагрузка (обыкновенно равномѣрно распредѣленная), расположенная на поверхности засыпки, возьмемъ рѣшеніе для массива безконечныхъ размѣровъ, находящагося подъ дѣйствіемъ нагрузки, расположенной на нѣкоторомъ протяженіи его контура, и это рѣшеніе наложимъ на рѣшеніе, полученное для случая дѣйствія собственнаго вѣса. Суммарныя напряженія будутъ и въ этомъ случаѣ функціями координатъ съ произвольными коэффиціентами. Эти коэффиціенты подберемъ такъ, чтобы вездѣ были удовлетворены неравенства (12), а затѣмъ, если нужно, и другія условія.

§ 4. Распредѣленіе напряженій въ массивѣ безконечныхъ размѣровъ подъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса.

Мы будемъ разсматривать только случай плоской задачи.

Возьмемъ массивъ, ограниченный горизонтальной плоскостью, координатныя оси направимъ, какъ показано на чертежѣ 3.

Черт. 3.



Въ этомъ случаѣ контурныя условія будутъ извѣстны по оси x, — на всемъ протяженіи этой оси нормальныя напряженія Y и касательныя T равны нулю. Этимъ условіямъ можно удовлетворить, предположивъ, что напряженія будутъ линейными функкіями координатъ. Возьмемъ выраженія для напряженій въ такой формѣ:

$$X = ay, \quad Y = \Delta y, \quad T = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

гдѣ a произвольный коеффиціентъ, Δ—вѣсъ единицы объема массива.

Подставивъ эти значенія въ уравненіи (10), легко убѣдиться, что онѣ будутъ удовлетворены; уравненіе (11) также будетъ удовлетворено, такъ какъ туда входятъ только вторыя производныя. Напряженія X и Y будутъ главныя напряженія.

Для случая твердаго массива коеффиціентъ a можетъ имѣть какія угодно значенія, для сыпучаго же массива эти значенія ограничиваются неравенствами (12). Подставивъ въ нихъ вмѣсто B и A соотвѣтственно X и Y, получимъ:

$$tg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \geq \frac{a}{\Delta} \geq tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Для случая свѣже насыпаннаго массива мы можемъ приравнять отношеніе $\frac{a}{\Delta}$ нижнему предѣлу этого неравенства, т. е. положить

$$a = \Delta tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Другое предѣльное значеніе для коэффиціента a мы получимъ, приравнявъ отношеніе $\frac{a}{\Delta}$ верхнему предѣлу:

$$a = \Delta tg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Между этими предѣлами a можетъ принять какое угодно значеніе.

Выраженіями (15), (16) и (17) можно пользоваться и для опредѣленія давленія земли на подпорныя стѣны. Пусть напримѣръ, вмѣсто части массива, лежащей слѣва отъ начала координатъ (черт. 3), имѣемъ подпорную стѣну, задняя грань которой совпадаетъ съ осью y. Въ этомъ случаѣ контурныя условія на оси x будутъ такія же, какъ и для безконечнаго массива; если кромѣ того принять, что касательныя напряженія по поверхности стѣны равны нулю, то мы можемъ удовлетворить всѣмъ условіямъ, взявъ выраженія для напряженія въ формѣ (15).

Давленіе на стѣну будетъ опредѣляться напряженіями X; при этомъ, если взять коеффиціентъ a по выраженію (16), получимъ случай, такъ называемаго, активнаго давленія земли, если возьмемъ этотъ коеффиціентъ по выраженію (17), получимъ случай пассивнаго давленія.

Замѣтимъ, что коэффиціентъ a можетъ измѣняться въ зависимости отъ различныхъ причинъ. Представимъ себѣ, напримѣръ, что песчаная засыпка сильно смочена водой. Въ этомъ случаѣ коэффиціентъ тренія песка сильно понизится, и величина a будетъ близка къ Δ, давленіе на стѣну повысится. Напряженное состояніе песка будетъ очевидно иное, нежели въ случаѣ свѣже насыпаннаго сухого песка. Это напряженное состояніе останется (или если измѣнится, то весьма мало) и послѣ высыханія песка, такъ какъ для перехода въ напряженное состояніе, соотвѣтствующее свѣже насыпанному сухому песку, не будетъ никакихъ причинъ. Здѣсь мы имѣемъ аналогію съ случаемъ, вдвинутыхъ одинъ въ другой, цилиндровъ,—сжимающія напряженія, вызванныя въ нихъ при вдвиганіи, остаются болѣе или менѣе такими же и по отнятіи вдвигающей силы. Другія причины, могущія вызвать измѣненіе коэффиціента a, это—трамбованіе, дѣйствіе нагрузки на поверхности засыпки, сотрясенія. Что дѣйствіе нагрузки можетъ вызвать перемѣну напряженнаго состоянія, видно изъ опытовъ Мюллера-Бреслау. Разсматривая девятый опытъ (см. приложеніе, таблица 24), мы видимъ, что по снятіи нагрузки съ поверхности песка давленіе на стѣну не сдѣлалось равнымъ первоначальному (∞ 130 кгр.), оно оказалось гораздо больше (∞ 180 кгр.). При повторныхъ нагрузкахъ, каждый разъ по снятіи нагрузки, оно оказывалось такимъ же, какъ и послѣ снятія нагрузки въ первый разъ (∞ 180 кгр.). Трамбованіемъ можно достигнуть такого же эффекта. Здѣсь между прочимъ уясняется значеніе поливки для уплотненія песчаныхъ слоевъ и трамбованія для уплотненія грунта. Эффектъ этихъ дѣйствій заключается не только въ томъ, что при этомъ уменьшается количество пустотъ, но и въ томъ, что мы получаемъ новое напряженное состояніе. Если грунтъ не уплотненъ, то при нагрузкѣ его сооруженіемъ могутъ оказаться не выполненными условія существованія напряженнаго состоянія, это вызоветъ перегруппировку частицъ грунта, которая можетъ сопровождаться значительными неупругими перемѣщеніями частицъ, что повлечетъ за собой осадку сооруженія. Если же грунтъ предварительнымъ уплотненіемъ приведенъ въ такое напряженное состояніе, при которомъ при нагрузкѣ его сооруженіемъ условія существованія напряженнаго состоянія будутъ выполнены, то неупругаго перемѣщенія частицъ грунта не будетъ, будутъ имѣть мѣсто только упругія деформаціи и сколько-нибудь замѣтной осадки сооруженія не произойдетъ.

Приведенное выше рѣшеніе задачи о распредѣленіи напряженій въ массивѣ, ограниченномъ горизонтальной плоскостью представляетъ лишь частное рѣшеніе. Это обстоятельство часто упускаютъ изъ виду въ сочиненіяхъ по теоріи давленія земли. Для общаго рѣшенія этой задачи напряженія X, Y и T можно взять въ видѣ цѣлыхъ функцій координатъ x и y съ безконечнымъ числомъ членовъ. *) Это рѣшеніе легко находится такимъ путемъ. Возьмемъ выраженія для напряженій прежде всего въ такой формѣ:

$$X=ax+by+cx^2+dxy+ey^2+fx^3+gx^2y+hxy^2+ky^3+\ldots\ldots$$

$$Y=a_1x+b_1y+c_1x^2+d_1xy+e_1y^2+f_1x^3+g_1x^2y+h_1xy^2+k_2y^3+\ldots\ldots$$

$$T=a_2x+b_2y+c_2x^2+d_2xy+e_2y^2+f_2x^3+g_2x^2y+h_2xy+k_2y^3+\ldots\ldots$$

Чтобы удовлетворить условіямъ на контурѣ (ось x) (черт. 3) достаточно положить въ этихъ выраженіяхъ коэффиціенты при членахъ независящихъ отъ y, равными нулю, такъ какъ для случая сыпучаго массива при $y=0$ всѣ напряженія (X, Y, T) должны быть равны нулю **). Вставимъ, полученныя послѣ такой операціи, выраженія для напряженій поочередно въ уравненія (10) и (11). Такъ какъ эти уравненія должны быть удовлетворены въ каждой точкѣ, т. е. при произвольныхъ x и y, то необходимо, чтобы коеффиціенты при одинаковыхъ членахъ въ каждомъ изъ этихъ уравненій были равны нулю. Отсюда получается рядъ зависимостей между коэффиціентами, изъ которыхъ одни коэффиціенты опредѣляются черезъ другіе. Послѣ этого выраженія для напряженій получаются окончательно въ такой формѣ:

$$\left.\begin{aligned} X&=by+dxy+kx^2y-\frac{2}{3}ky^3+mx^3y-2mxy^3-\frac{1}{4}qx^4y+qx^2y^3-\frac{3}{20}qy^5+\ldots \\ Y&=\Delta y+\frac{k}{3}y^3+mxy^3-\frac{1}{2}qx^2y^3-\frac{1}{10}qy^5+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T&=-\frac{1}{2}dy^2-kxy^2-\frac{3}{2}mx^2y^2+\frac{1}{2}my^4+\frac{1}{2}qx^3y^2-\frac{1}{2}qxy^4+\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

гдѣ Δ — вѣсъ единицы объема, прочіе коэффиціенты произвольны.

Выраженіями (18) можно пользоваться какъ для опредѣленія напряженій въ безконечномъ массивѣ, такъ и для опредѣленія давленія на подпорныя стѣны. Для разсмотрѣннаго выше случая стѣны, совпадающей съ осью y (черт. 3), мы, кромѣ полученнаго уже рѣшенія, которое входитъ въ формулы (18) какъ частный случай, можемъ получить

---

*) Это рѣшеніе получено мной по аналогіи съ рѣшеніемъ для случая клинообразныхъ тѣлъ. См. Н. Герсевановъ—Общій методъ рѣшенія упругаго равновѣсія плоскаго изотропнаго тѣла и тонкой пластинки. Сборникъ Института Инженеровъ Путей Сообщенія, выпускъ LXXVI.

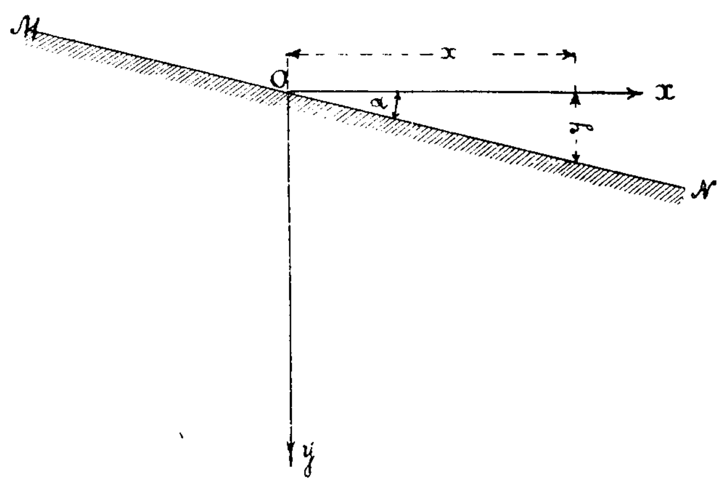
**) Напряженіе X равно нулю, потому что иначе отношеніе между главными напряженіями на контурѣ было бы равно ∞, что для сыпучаго тѣла невозможно.

много другихъ. Безконечное число входящихъ въ формулы (18) коэффиціентовъ позволяетъ подобрать ихъ каждый разъ такъ, чтобы были удовлетворены неравенства (12), а также чтобы было возможно учесть вліяніе другихъ дѣйствующихъ на стѣну при данныхъ обстоятельствахъ факторовъ.

При этихъ рѣшеніяхъ кромѣ нормальныхъ напряженій получатся также и касательныя напряженія по линіи стѣны. Каждое изъ нихъ будетъ представлять возможное напряженное состояніе, которое при соотвѣтствующихъ условіяхъ осуществимо въ дѣйствительности. Возможностью существованія нѣсколькихъ напряженныхъ состояній легко объяснить несходство въ результатахъ опытовъ по опредѣленію величины и направленія давленія земли: нормальное къ стѣнѣ направленіе давленія, получавшееся у однихъ изслѣдователей, и наклонное,—получавшееся у другихъ, соотвѣтствуютъ каждое особому возможному напряженному состоянію.

Теперь разсмотримъ еще случай массива, ограниченнаго наклонной плоскостью. Пусть эта плоскость MN наклонена къ горизонту подъ угломъ α (черт. 4). Контурныя условія въ данномъ случаѣ со-

Черт. 4.



стоятъ въ томъ, что по линіи MN напряженія X, Y и T равны нулю. Общее рѣшеніе о распредѣленіи напряженій можно найти тѣмъ же путемъ, что и въ предыдущемъ случаѣ. Чтобы удовлетворить контурнымъ условіямъ, нужно подобрать коэффиціенты такъ, чтобы при $y = x \,.\, tg\,\alpha$ (черт. 4) напряженія X, Y и T обращались въ нули. Окончательныя выраженія для напряженій будутъ:

$$
\left.
\begin{aligned}
X = & -b\, tg\,\alpha\,.\,x + by - \frac{tg\,\alpha\,(1 - tg^2\alpha)}{1 - 3\,tg^2\alpha}\, d\, x^2 + d\, x\, y + \\
& + \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - 3\,tg^2\alpha}\, d\,.\,y^2 - \frac{tg\,\alpha\,(3 - 2\,tg^2\alpha - 12\,tg^4\alpha - 6\,tg^6\alpha + tg^8\alpha)}{3\,(1 - 3\,tg^2\alpha - 9\,tg^4\alpha - 5\,tg^6\alpha)}\, k\, x^3 + \\
& + \frac{1 - 6\,tg^2\alpha - 12\,tg^4\alpha - 2\,tg^6\alpha + 3\,tg^8\alpha}{1 - 3\,tg^2\alpha - 9\,tg^4\alpha - 5\,tg^6\alpha}\, k\,.\,x^2\, y + \\
& + \frac{6\,tg\,\alpha\,(1 + tg^2\alpha - tg^4\alpha - tg^6\alpha)}{1 - 3\,tg^2\alpha - 9\,tg^4\alpha - 5\,tg^6\alpha}\, k\, x\, y^2 - {}^2/_3\, k y^3 + \ldots\ldots \\[2ex]
Y = & -(\Delta + b\, tg^2\alpha)\, tg\,\alpha\,.\,x + (\Delta + b\, tg^2\alpha)\, y - \frac{2\,tg^3\alpha}{1 - 3\,tg^2\alpha}\, d\,.\,x^2 + \\
& + \frac{tg^2\alpha\,(3 - tg^2\alpha)}{1 - 3\,tg^2\alpha}\, d\,.\,x\,y - \frac{tg\,\alpha\,(1 - tg^2\alpha)}{1 - 3\,tg^2\alpha}\, d\,.\,y^2 - \\
& - \frac{2\,tg^3\alpha\,(5 + 9\,tg^2\alpha + 3\,tg^4\alpha - tg^6\alpha)}{3\,(1 - 3\,tg^2\alpha - 9\,tg^4\alpha - 5\,tg^6\alpha)}\, kx^3 + \\
& + \frac{6\,tg^2\alpha\,(1 + tg^2\alpha - tg^4\alpha - tg^6\alpha)}{1 - 3\,tg^2\alpha - 9\,tg^4\alpha - 5\,tg^6\alpha}\, kx^2 y - \\
& - \frac{tg\,\alpha\,(3 - 2\,tg^2\alpha - 12\,tg^4\alpha - 6\,tg^6\alpha + tg^8\alpha)}{1 - 3\,tg^2\alpha - 9\,tg^4\alpha - 5\,tg^6\alpha}\, k\, x\, y^2 + \\
& + \frac{1 - 6\,tg^2\alpha - 12\,tg^4\alpha - 2\,tg^6\alpha + 3\,tg^8\alpha}{3\,(1 - 3\,tg^2\alpha - 9\,tg^4\alpha - 5\,tg^6\alpha)}\, ky^3 + \ldots\ldots \\[2ex]
T = & -b\, tg^2\alpha.x + b\, tg\,\alpha.y - \frac{tg^2\alpha\,(3 - tg^3\alpha)}{2\,(1 - 3\,tg^2\alpha)}\, d.x^2 + \\
& + \frac{2\,tg\,\alpha\,(1 - tg^2\alpha)}{1 - 3\,tg^2\alpha}\, d.xy - \frac{1}{2}\, d.y^2 - \\
& - \frac{2\,tg^2\alpha\,(1 + tg^2\alpha - tg^4\alpha - tg^6\alpha)}{1 - 3\,tg^2\alpha - 9\,tg^4\alpha - 5\,tg^6\alpha}\, kx^3 + \\
& + \frac{tg\,\alpha\,(3 - 2\,tg^2\alpha - 12\,tg^4\alpha - 6\,tg^6\alpha + tg^8\alpha)}{1 - 3\,tg^2\alpha - 9\,tg^4\alpha - 5\,tg^6\alpha}\, kx^2\, y - \\
& - \frac{1 - 6\,tg^2\alpha - 12\,tg^4\alpha - 2\,tg^6\alpha + 3\,tg^8\alpha}{1 - 3\,tg^2\alpha - 9\,tg^4\alpha - 5\,tg^6\alpha}\, kxy^2 - \\
& - \frac{2\,tg\,\alpha\,(1 + tg^2\alpha - tg^4\alpha - tg^6\alpha)}{1 - 3\,tg^2\alpha - 9\,tg^4\alpha - 5\,tg^6\alpha}\, ky^3 + \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\}\ (19)
$$

Обычное рѣшеніе входитъ въ формулы (19) какъ частный случай. Положивъ коэффиціенты d, k и т. д. равными нулю, мы получимъ это частное рѣшеніе въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} X &= -b\,tg\,\alpha x + by \\ Y &= -(\Delta + b\,tg^2\alpha)\,tg\,\alpha . x + (\Delta + b\,tg^2\alpha)\,y \\ T &= -b\,tg^2\alpha . x + b\,tg\,\alpha . y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (20)$$

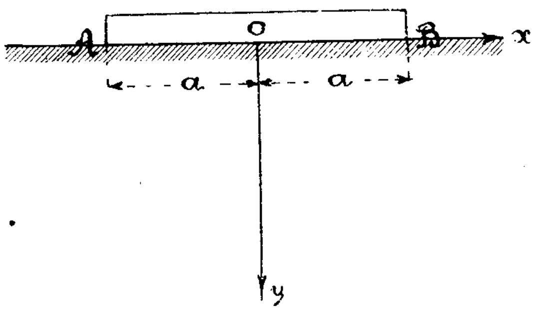
По формуламъ (20) направленіе давленія на вертикальную площадку получается параллельнымъ прямой MN (черт. 4), ограничивающей массивъ. Если взять случай стѣны, совпадающей съ осью y, то мы получимъ, что при понижающемся отъ стѣны откосѣ давленіе на стѣну направлено верхъ. Этотъ случай, кажущійся парадоксальнымъ и приводимый обыкновенно какъ примѣръ несостоятельности предположенія Ренкина о замѣнѣ сыпучаго массива стѣной, представляетъ однако возможное напряженное состояніе—его можно осуществить, если, напримѣръ, надавить стѣной, на лежащую справа (черт. 4), засыпку. Въ практикѣ считаютъ, что, при обычныхъ условіяхъ производства засыпки, давленіе на стѣну при понижающемся отъ стѣны откосѣ можетъ быть или нормальнымъ къ стѣнѣ или если и наклоннымъ, то внизъ. Въ этомъ случаѣ по формуламъ (20) нельзя получить подходящаго рѣшенія. Для рѣшенія вопроса необходимо взять выраженія для напряженій въ общей формѣ (19). Напряженія по поверхности стѣны въ этомъ случаѣ найдутся по формуламъ ($x = o$, такъ какъ стѣна совпадаетъ съ осью y):

$$\left.\begin{aligned} X &= +by + \frac{2\,tg\,\alpha}{1-3\,tg^2\alpha}\,d.y^2 - {}^2/_3\,ky^2 + \ldots\ldots \\ Y &= (\Delta + b\,tg^2\alpha)\,y - \frac{tg\,\alpha\,(1-tg^2\alpha)}{1-3\,tg^2\alpha}\,d.y^2 + \\ &+ \frac{1-6\,tg^2\alpha-12\,tg^4\alpha-2\,tg^6\alpha+3\,tg^8\alpha}{3\,(1-3\,tg^2\alpha-9\,tg^4\alpha-5\,tg^6\alpha)}\,ky^3 + \ldots\ldots \\ T &= +b.tg\,\alpha.y - \frac{1}{2}\,d.y^2 - \frac{2\,tg\,\alpha\,(1+tg^2\alpha-tg^4\alpha-tg^6\alpha)}{1-3\,tg^2\alpha-9\,tg^4\alpha-5\,tg^6\alpha}\,ky^3 + \ldots \end{aligned}\right\} (21)$$

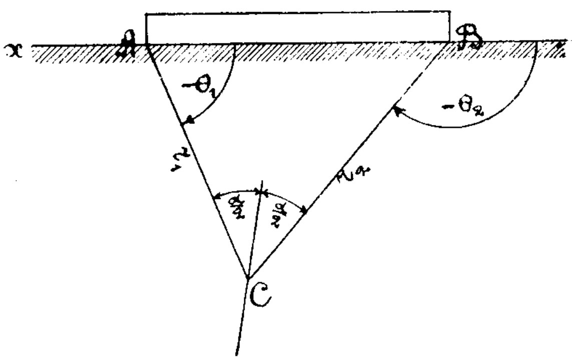
§ 5. Распредѣленіе напряженій въ массивѣ безконечныхъ размѣровъ подъ дѣйствіемъ равномѣрной нагрузки.

Задача состоитъ въ слѣдующемъ: на массивъ безконечныхъ размѣровъ, ограниченный горизонтальной плоскостью, на нѣкоторомъ протяженіи AB (черт. 5 и 6) въ плоскости чертежа и на безконечномъ протяженіи въ направленіи перепендикуляромъ чертежу дѣйствуетъ равномѣрная нагрузка, требуется опредѣлить распредѣленіе напряженій въ массивѣ.

Черт. 5.



Черт. 6.



Въ противоположность случаю массива, находящагося подъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса, здѣсь имѣемъ вполнѣ опредѣленныя условія на безконечности: предполагается, что напряженія въ безконечно удаленныхъ точкахъ равны нулю. Это позволяетъ получить однозначное рѣшеніе.

Рѣшеніе этой задачи дано Michell'емъ въ полярныхъ координатахъ*) и затѣмъ Г. В. Колосовымъ въ прямоугольныхъ координатахъ**).

При принятомъ на черт. 5 направленіи координатныхъ осей формулы для опредѣленія напряженій, данныя Г. В. Колосовымъ, слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{p}{\pi}\left\{ arc.\ tg\,\frac{a-x}{y} + arc\ tg\,\frac{a+x}{y} + \frac{2\,ya\,(x^2-y^2-a^2)}{(y^2+x^2-a^2)^2+4a^2y^2}\right\}, \\ Y &= \frac{p}{\pi}\left\{ arc.\ tg\,\frac{a-x}{y} + arc.tg\,\frac{a+x}{y} - \frac{2\,ya\,(x^2-y^2-a^2)}{(y^2+x^2-a^2)^2+4a^2y^2}\right\}, \\ T &= -\frac{p}{\pi}\cdot\frac{4\,a\,xy^2}{(y^2+x^2-a^2)^2+4\,a^2y^2}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (22)$$

гдѣ p—давленіе на един. площади, $a=\dfrac{AB}{2}$ (черт. 5).

*) См. Love—Lehrbuch der Elastizität, p. 250; болѣе подробно Proceedings of the London Mathematical Society vol. 31 (1899) p. 100, vol. 32 (1901) p. 35, vol. 34 (1902) p. 134.

) См. Г. В. Колосовъ. **Объ одномъ приложеніи теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго къ плоской задачѣ математической теоріи упругости, стран. 42-ая, Юрьевъ.—1902.

Michell для рѣшенія задачи беретъ функцію напряженій въ такой формѣ:

$$F = \frac{p}{2\pi}(r^2{}_1\,\theta_1 - r_2{}^2\,\theta_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23),$$

гдѣ p—давленіе на един. площади, r_1 и θ_1—полярныя координаты относительно точки A (черт. 6.), r_2 и θ_2—полярныя координаты относительно точки B.

Тогда для опредѣленія напряженій имѣемъ слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned}
(\widehat{rr})_1 &= \frac{1}{r_1}\frac{dF}{dr_1} + \frac{1}{r_1{}^2}\frac{d^2F}{d\theta_1{}^2} = \frac{p}{\pi}\theta_1 \\
(\widehat{\theta\theta})_1 &= \frac{d^2F}{dr_1{}^2} = \frac{p}{\pi}\theta_1 \\
(\widehat{r\theta})_1 &= -\frac{d}{dr_1}\left(\frac{1}{r_1}\frac{dF}{d\theta_1}\right) = -\frac{p}{2\pi}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

$$\left.\begin{aligned}
(\widehat{rr})_2 &= \frac{1}{r_2}\frac{dF}{dr_2} + \frac{1}{r_2{}^2}\frac{d^2F}{d\theta_2{}^2} = -\frac{p}{\pi}\theta_2 \\
(\widehat{\theta\theta})_2 &= \frac{d^2F}{dr_2{}^2} = -\frac{p}{\pi}\theta_2 \\
(\widehat{r\theta})_2 &= -\frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{r_2}\frac{dF_2}{d\theta_2}\right) = \frac{p}{2\pi}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

гдѣ Michell'емъ за положительныя напряженія приняты растягивающія.

Чтобы по формуламъ (24) и (25) получить напряженія въ какой нибудь точкѣ C (черт. 6) нужно напряженія, даваемыя формулами (24) наложить на напряженія, даваемыя формулами (25).

Опредѣлимъ напряженія въ точкѣ C, дѣйствующія на площадкахъ перпендикулярной и параллельной биссектору угла ACB (черт. 6). Формулы преобразованія компонентовъ напряженій къ новымъ осямъ, какъ извѣстно, слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
X'_{x'} &= X_x \sin^2\beta + Y_y \cos^2\beta + X_y \sin 2\beta \\
Y'_{y'} &= X_x \cos^2\beta + Y_y \sin^2\beta - X_y \sin 2\beta \\
X' &= \frac{X_x - Y_y}{2}\sin 2\beta + X_y \cos 2\beta
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

гдѣ β — уголъ между новыми и старыми осями.

Изъ выраженій (26) находимъ:

$$X'_{x'} + Y'_{y'} = X_x + Y_y \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

$$X'_{x'} - Y'_{y'} = (X_x - Y_y) \cos 2\beta + 2\, X_y \sin 2\beta = (X_x - Y_y) \frac{e^{2\beta i} + e^{-2\beta i}}{2} + \\ + X_y \frac{e^{2\beta i} - e^{-2\beta i}}{i}$$

$$X'_{y'} = \frac{X_x - Y_y}{2} \cdot \frac{e^{2\beta i} - e^{-2\beta i}}{i} + X_y \frac{e^{2\beta i} + e^{-2\beta i}}{2}$$

откуда

$$X'_{y} - Y'_{y'} - 2i\, X'_{y} = e^{2\beta i} (X_x - Y_y - 2i\, X_y) \; . \; . \; . \quad (28)$$

Пусть A будетъ нормальное напряженіе, дѣйствующее на площадкѣ, перпендикулярной къ биссектору угла $ACB = \alpha$, B — нормальное напряженіе, дѣйствующее на площадкѣ, параллельной биссектору этого угла, T — касательное напряженіе, одинаковое для обѣихъ площадокъ. По формуламъ (27) и (28) находимъ:

$$A + B = (\widehat{rr})_1 + (\widehat{\theta\theta})_1 + (\widehat{rr})_2 + (\widehat{\theta\theta})_2 = \frac{2p}{\pi} (\theta_1 - \theta_2) = -\frac{2p}{\pi} \alpha.$$

$$A - B - 2i\, T = e^{i\alpha} [(\widehat{rr})_1 - (\widehat{\theta\theta})_1 - 2i (\widehat{r\theta})_1] + e^{i\alpha} [(\widehat{rr})_2 - (\widehat{\theta\theta})_2 - \\ - 2i (\widehat{r\theta})_2] = \frac{ip}{\pi} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = -\frac{2p}{\pi} \sin\alpha$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{p}{\pi} (\alpha + \sin\alpha) \\ B &= -\frac{p}{\pi} (\alpha - \sin\alpha) \\ T &= 0 \end{aligned} \right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Изъ выраженій (29) видно, что A и B будутъ главныя напряженія, А — больше, B — меньше. Направленіе большаго главнаго напряженія совпадаетъ съ направленіемъ биссектора угла ACB.

Формулами (29) удобнѣе пользоваться для опредѣленія напряженій нежели формулами (24) и (25), особенно для отысканія главныхъ напряженій. Въ этомъ случаѣ достаточно изъ точки, въ которой хотятъ опредѣлить главныя напряженія, провести прямыя къ точкамъ A и B

(черт. 6) и измѣрить уголъ (α) между этими прямыми, тогда формулы (29) дадутъ величины главныхъ напряженій, а направленія ихъ будутъ биссекторъ угла α и линія къ нему перпендикулярная. Послѣ этого напряженія по другимъ площадкамъ въ разсматриваемой точкѣ легко найти, напримѣръ, по способу Мора.

Указанныя рѣшенія относятся къ твердому тѣлу. Для сыпучаго тѣла ими приходится пользоваться въ случаѣ совмѣстнаго дѣйствія собственнаго вѣса тѣла и нагрузки на поверхности. Такъ какъ напряженія отъ дѣйствія нагрузки опредѣляются однозначно, то, чтобы удовлетворить неравенствамъ (12) нужно взять при опредѣленіи напряженій отъ собственнаго вѣса такое рѣшеніе, при которомъ суммарныя напряженія удовлетворяли бы этимъ неравенствамъ.

ГЛАВА II

Провѣрка теоріи опытами.

§ 6. Опыты Мюллера Бреслау.

Для провѣрки предлагаемой теоріи мы пользовались прежде всего опытами профессора Мюллера Бреслау, произведенными имъ въ Берлинскомъ Политехникумѣ въ 1905—1906 г. (см. приложеніе). Эти опыты были поставлены въ крупномъ масштабѣ и велись съ точными измѣрительными приборами. При нихъ было изслѣдовано не только дѣйствіе на стѣну собственнаго вѣса засыпки, но и дѣйствіе нагрузки, расположенной на ея поверхности. Это послѣднее изслѣдованіе въ опытахъ Мюллера Бреслау занимало очень видное мѣсто,—оно велось при достаточно разнообразныхъ положеніяхъ нагрузки, а также было изслѣдовано и вліяніе повторной нагрузки. Опыты съ нагрузкой расположенной на поверхности засыпки, являются наиболѣе существенными для провѣрки нашей теоріи и для выясненія нѣкоторыхъ преимуществъ этой теоріи передъ существующими. Въ этомъ отношеніи очень цѣнными опытами являются четвертый и восьмой. Въ первомъ изъ нихъ нагрузка была расположена внѣ призмы обрушенія, а во второмъ у линіи естественнаго откоса. Въ обоихъ случаяхъ присутствіе нагрузки увеличивало давленіе на стѣну. Это указываетъ на несостоятельность существующихъ теорій, по которымъ нагрузка, расположенная внѣ призмы обрушенія, не дѣйствуетъ на стѣну и подтверждаетъ положенія предлагаемой теоріи, по которой нагрузка оказываетъ вліяніе на стѣну при всякомъ положеніи ея.

Опыты Мюллера Бреслау производились съ вертикальной стѣной Въ нихъ опредѣлялись величины горизонтальной и вертикальной составляющихъ равнодѣйствующей давленія на стѣну и точка приложенія этой равнодѣйствующей; законъ же распредѣленія давленія по высотѣ стѣны не могъ быть полученъ. Для сравненія результатовъ опытовъ съ результатами подсчетовъ по предлагаемой теоріи опредѣлялись тѣ же величины по формуламъ (18) и (22), при чемъ коэффиціенты въ формулахъ (18) подбирались такъ, чтобы были удовлетворены неравенства (12). Это выполнялось такимъ образомъ: по формуламъ (18) и (22) и неравенствомъ (12) опредѣлялись напряженія въ 10 точкахъ по высотѣ стѣны, а затѣмъ величины горизонтальной и вертикальной составляющихъ и точка приложенія равнодѣйствующей давленія на стѣну опредѣлялись обычнымъ способомъ для приближеннаго вычисленія площадей. Для опредѣленія напряженій отъ собственнаго вѣса песка по формуламъ (18) начало координатъ бралось на линіи стѣны въ верхней ея точкѣ, тогда члены, зависящіе отъ x, отпадали ($x=0$). При опредѣленіи напряженій по поверхности стѣны отъ дѣйствія нагрузки по формуламъ (22) начало координатъ необходимо было взять на поверхности засыпки въ точкѣ, соотвѣтствующей серединѣ нагрузки, а x нужно было положить равнымъ разстоянію отъ середины нагрузки до стѣны.

Результаты вычисленій сгруппированы въ ниже приводимыхъ таблицахъ, гдѣ напряженія отъ собственнаго вѣса песка обозначены черезъ X_1, Y_1 и T_1, отъ дѣйствія нагрузки—черезъ X, Y и T, суммарныя напряженія черезъ X_0, Y_0 и T_0.

Для опредѣленія напряженій X_1 и Y_1 формулы (18) брались только съ однимъ первымъ членомъ; для опредѣленія напряженія T_1 онѣ брались съ двумя членами—первымъ и четвертымъ. При такомъ упрощеніи все же оказалось возможнымъ подобрать коеффиціенты такъ, что наибольшая разность между теоретическими и опытными величинами давленія на стѣну не превышала 20%; при этомъ вычисленное давленіе больше полученнаго опытомъ. Если принять во вниманіе вліяніе боковыхъ стѣнокъ ящика на результаты опытовъ, которое по предположеніямъ Мюллера Бреслау могло уменьшить давленіе примѣрно на 8% (другіе авторы считаютъ больше), то получимъ наибольшую разность между вычисленными и опытными давленіями въ 12%. Для практическихъ задачъ такая точность достаточна; если же при опредѣленіи X_1 Y_1 и T_1 взять въ формулахъ (18) больше членовъ, то можно получить величины вычисленныхъ давленій какъ угодно близкими къ опытнымъ, однако это сильно усложняетъ вычисленія.

Въ опытахъ Мюллера Бреслау, при изслѣдованіи вліянія собственнаго вѣса песка на стѣнку ящика, песокъ отсыпался сперва понижающимся отъ стѣны откосомъ подъ угломъ естественнаго откоса $\varphi = 32^0$(опытъ 1), затѣмъ подъ угломъ равнымъ $\frac{1}{2}\varphi$ (опытъ 2) и наконецъ поверхность засыпки была сдѣлана горизонтальной. При изслѣдованіи вліянія нагрузки на стѣну ящика, засыпка всегда дѣлалась горизонтальной. Провѣрка теоріи сдѣлана только для опытовъ съ горизонтальной поверхностью засыпки, такъ какъ для опытовъ съ засыпкой въ видѣ понижающагося отъ стѣны откоса, какъ оказалось, не достаточно въ формулахъ (19) ограничиться только первыми членами, а приходится ихъ брать больше, что ведетъ къ слишкомъ утомительнымъ вычисленіямъ.

Въ опытахъ Мюллера Бреслау $\Delta = 0.0016 \frac{kg}{cm^3}$; $\varphi = 32^0$, слѣдовательно, чтобы были удовлетворены неравенства (12) необходимо:

$$\frac{B}{A} \geq tg^2\left(45 - \frac{32}{2}\right) = 0{,}307, \text{*)}$$

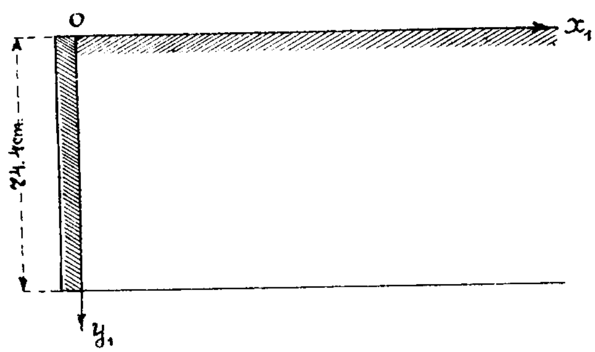
гдѣ B меньшее по величинѣ главное напряженіе.

Длина стѣнки опытнаго ящика, по которой измѣрялось давленіе, равнялась 101, 5 cm.

Опытъ 3.

Въ этомъ опытѣ (см. приложеніе) опредѣлялось давленіе на стѣнку ящика отъ дѣйствія собственнаго вѣса песка при горизонтальной поверхности засыпки.

Черт. 7.



Результаты опыта:

Горизонтальная составляющая давленія на стѣну . . . 113 kg.

Вертикальная составляющая . . . . 59 kg.

Полное давленіе . . . . 127 kg.

Разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей давленія отъ дна ящика . . . . 26 cm.

Результаты подсчетовъ по формуламъ (18) представлены въ таблицѣ 1-й.

Формулы (18) были взяты въ видѣ:

$$X_1 = 0{,}00048\, y$$

$$Y_1 = 0{,}0016\, y$$

$$T_1 = 0{,}00000\,5\, y^2 - 0{,}0000000005\, y^4$$

*) При составленіи ниже приводимыхъ таблицъ это условіе выполнено примѣрно съ точностью до 10%. Исключеніе составляютъ опыты шестой и седьмой, въ которыхъ нагрузка располагалась вблизи стѣнки; здѣсь для верхнихъ точекъ разность гораздо больше 10%, но для этихъ точекъ формулы (18), собственно говоря, не примѣнимы, такъ какъ въ дѣйствительности нагрузка по поверхности песка распредѣляется неравномѣрно, а это сильно измѣняетъ распредѣленіе напряженій въ точкахъ, лежащихъ вблизи нагрузки, не оказывая замѣтнаго вліянія для точекъ удаленныхъ.

Таблица 1.

№№ точекъ.	Разст. отъ верхн. поверхн.	Напряженія.			Гл. напряж.		B/A
		X_1	Y_1	T_1	A	B	
0	0	0	0	0	0	0	0
1	7.44	0.00357	0.0119	0.000277	0.01192	0.00356	0.299
2	14.48	0.00715	0.0238	0.00111	0.02388	0.00708	0.296
3	22.32	0.0105	0.0357	0.00249	0.0359	0.0103	0.287
4	29.76	0.0143	0.0476	0.00444	0.0483	0.0137	0.284
5	37.20	0.0179	0.0595	0.00552	0.0602	0.0172	0.286
6	44.64	0.0214	0.0715	0.00796	0.0728	0.0202	0.278
7	52.08	0.0250	0.0834	0.00987	0.0850	0.0234	0.275
8	59.52	0.0286	0.0953	0.0114	0.0973	0.0267	0.274
9	66.96	0.0322	0 107	0.0124	0.109	0.0302	0.277
10	74.40	0.0357	0.119	0.0124	0.1209	0.0339	0.281
		0.19632		0.067887			

Горизонтальная составляющая давленія на всю стѣну:

$$\left(0.19632-\frac{0.0357}{2}\right)7,44\times 101,5=134\text{ kg}$$

Вертикальная составляющая давленія на всю стѣну:

$$\left(0.067887-\frac{0.0124}{2}\right)\times 744\times 101,5=47\text{ kg}.$$

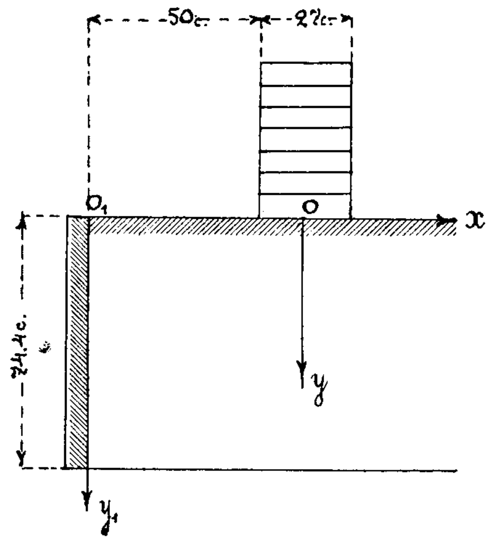
Полное давленіе на стѣну: $R=\sqrt{134^2+47^2}=142$ kg.

Разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей давленія отъ дна ящика: $C=\frac{7.44}{0.178}\left(\frac{0,0357}{4}+0,0322+2\times 0,0286+3\times 0.0250+4\times\right.$ $\times 0.0214+5\times 0,0179+6\times 0.143+7\times 0.0105+8\times 0,00715+9\times$ $\left.\times 0,00357\right)=24.9$ ст.

Опытъ 4.

Опытъ произведенъ съ нагрузкой на песокъ въ 735.4 kg.; нагрузка была помѣщена въ разстояніи 50 ст. отъ внутренней поверхности стѣнки ящика (черт. 8) (за предѣлами призмы обрушенія).

Черт. 8.



Результаты опыта:

Горизонтальная составляющая давленія на стѣну . . . 229 kg.

Вертикальная составляющая . . . . 80 kg.

Полное давленіе . . . . 241 kg.

Разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей давленія отъ дна ящика . . . . 30.2 см.

Результаты подсчетовъ по формуламъ (18) и (22) представлены въ таблицѣ 2.

Формулы (18) были взяты въ видѣ:

$$X_1 = 0.000\,43\ y.$$

$$V_1 = 0.0016\ y.$$

$$T_1 = 0.$$

Таблица 2.

№№ точекъ.	Разст. отъ верхн. поверхн.	Напряж. отъ нагрузки.			Напряж. отъ собств. вѣса.			Суммарн. напряж.			Гл. напряж.		B/A
		X	Y	T	X_1	Y_1	T_1	X_0	Y_0	T_0	A	B	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	7.44	0.0122	0	0 00170	0.00329	0.0119	0	0 0155	0.0119	0.00170	0.0162	0.0112	0.692
2	14.88	0.0160	0.00103	0.00391	0.00658	0.0238	0	0.0226	0.0248	0.00391	0.0278	0.0196	0.705
3	22.32	0.0210	0.00292	0.00761	0 00985	0.0357	0	0.0309	0.0386	0.00761	0.0433	0.0263	0.608
4	29.76	0.0234	0.00568	0.0113	0.0131	0.0476	0	0 0365	0.0533	0.0113	0.0590	0.0308	0.522
5	37.20	0 0238	0.00877	0.0144	0.0164	0.0595	0	0.0402	0.0683	0.0144	0.0745	0.0341	0.458
6	44.64	0.0230	0.0121	0.0165	0.0198	0.0714	0	0 0428	0.0835	0.0165	0.0894	0.0370	0.414
7	52.08	0.0212	0.0150	0.0178	0.0230	0.0835	0	0.0442	0.0985	0.0178	0.1039	0.0389	0.375
8	59.52	0.0192	0.0176	0.0183	0.0262	0.0952	0	0.0454	0.113	0.0183	0.1177	0.0407	0.346
9	66.96	0.0169	0.0197	0.0182	0.0288	0.107	0	0.0457	0.127	0.0182	0.1305	0.0423	0.324
10	74.4	0.0149	0.0212	0.0177	0.0321	0.119	0	0.0470	0.140	0.0177	0.143	0.044	0.308
								0.3708		0.12742			

Горизонтальная составляющая давленія на всю стѣну: $\left(0.3708 - \frac{0.0470}{2}\right) \times 7{,}44 \times 101{,}5 = 262$ kg.

Вертикальная составляющая давленія на всю стѣну: $\left(0.12742 - \frac{0.0177}{2}\right) \times 7{,}44 \times 101{,}5 = 89.86$ kg.

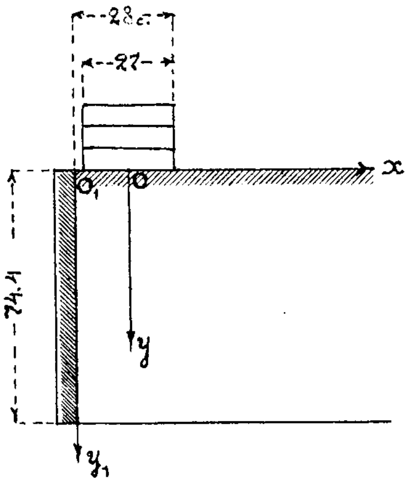
Полное давленіе на стѣну: $R = \sqrt{262^2 + 89.86^2} = 277$ kg.

Разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей давленія отъ дна ящика: $C = \frac{7.44}{0.347}\left(\frac{0.0470}{4} + 0.0457 + \right.$ $\left. + 2 \times 0.0452 + 3 \times 0.0442 + 4 \times 0.0428 + 5 \times 0.0402 + 6 \times 0365 + 7 \times 0{,}309 + 8 \times 0{,}0224 + 9 \times 0.0155\right) = 29.2$ cm.

Опытъ 6.

Нагрузка на песокъ въ 314.4 kg. была расположена въ разстояніи 1 ст. отъ стѣнки (черт. 9).

Черт. 9.



Результаты опыта:

Горизонтальная составляющая давленія на стѣну . . .	266 kg.
Вертикальная составляющая	140 kg.
Полное давленіе . . . . , ...	301.5 kg.
Разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей давленія отъ дна ящика	34.5 см.

Результаты подсчетовъ по формуламъ (18) и (22) представлены въ таблицѣ 3.

Формулы (18) были взяты въ видѣ:

$$X_1 = 0{,}001\, y - 2 \times 0{,}0000000\,3\, y^3$$

$$Y_1 = 0{,}0016\, y + 0{,}0000000\,3\, y^3.$$

$$T_1 = 0{,}00000208 y^2$$

Таблица 3.

№№ точекъ.	Разст. отъ верхн. поверхн.	Напряж. отъ нагрузки.			Напряж. отъ собств. вѣса.			Суммарн. напряж.			Гл. напряж.		B/A
		X	Y	T	X_1	Y_1	T_1	X_0	Y_0	T_0	A	B	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	7.44	0.0389	0.0474	0.0335	0.00742	0.0119	0.0001	0.0463	0.0593	0.0336	0.087	0.0186	0.214
2	14.88	0.0244	0.0499	0.0284	0.0147	0.0248	0.0005	0.0391	0.0747	0 0289	0.0909	0.0229	0.252
3	22.32	0.0151	0.0475	0.0223	0.0217	0.036	0.001	0 0368	0.0835	0.0233	0.0932	0.0272	0.293
4	29.76	0.0937	0.0435	0.0171	0.0282	0.0484	0.0019	0.0376	0.0919	0.019	0.0980	0.0316	0.322
5	37.20	0 00600	0.0393	0.0132	0 0341	0.0610	0 0029	0.0401	0.1003	0.0161	0.1044	0.0359	0 344
6	44.64	0.00407	0.0354	0.0103	0.0393	0.0742	0.0041	0.0434	0.1096	0 0144	0.1126	0.0404	0.359
7	52.08	0 00281	0.032	0.0082	0.0456	0.0876	0.00564	0.0464	0.1196	0.0138	0.1221	0.0439	0.359
8	59.52	0.00198	0.029	0.00662	0.0469	0.1016	0.00737	0.0489	0.1306	0.014	0.133	0.0466	0.350
9	66.96	0.00146	0.0264	0.00543	0.0489	0.1163	0.00935	0.0504	0.1424	0.0148	0.1448	0.0480	0.331
10	74.4	0.00115	0.0244	0.00454	0.0497	0.131	0.0115	0.0509	0.1554	0.016	0.1577	0.0487	0.309
								0.4399		0.1939			

Горизонтальная слагающая давленія на всю стѣну: $\left(0{,}4399 - \frac{0.0509}{2}\right) \times 7.44 \times 101.5 = 312$ kg.

Вертикальная слагающая давленія на всю стѣну: $\left(0.1939 - \frac{0.016}{2}\right) \times 7.44 \times 101.5 = 140$ kg.

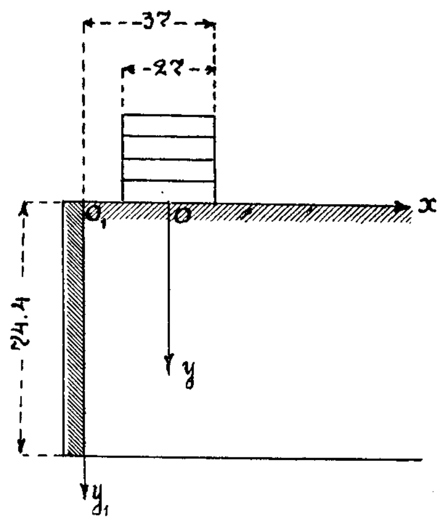
Полное давленіе на стѣну: $R = \sqrt{312^2 + 140^2} = 342$ kg.

Разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей давленія отъ дна ящика: $C = \frac{7.44}{0.4144} \times \left(\frac{0.0509}{4} + 0\ 0504 + \right.$ $\left. + 2 \times 0.0489 + 3 \times 0.0464 + 4 \times 0{,}434 + 5 \times 0.0401 + 6 \times 0.0376 + 7 \times 0.0368 + 8 \times 0{,}0391 + 9 \times 0.0463\right) = 33.9$ cm.

Опытъ 7.

Нагрузка на песокъ 418. 8 kg. была расположена въ разстояніи 10 cт. отъ стѣнки (черт. 10).

Черт. 10.



Результаты опыта:

Горизонтальная составляющая давленія на стѣну . . . 288 kg.

Вертикальная составляющая . . . . 150 kg.

Полное давленіе . . . . 326 kg.

Разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей давленія отъ дна ящика . . . . 36.6 cm.

Результаты подсчетовъ по формуламъ (18) и (22) представлены въ таблицѣ 4-й.

Формулы (18) были взяты въ видѣ:

$$X_1 = 0,0009\,y - 2 \times 0,00000003\,y^3$$

$$Y_1 = 0,0016\,y + 0,00000003\,y^3$$

$$T_1 = 0,000001\,y^2$$

Таблица 4.

№№ точекъ.	Разст. отъ верхн. поверхн.	Напряж. отъ нагрузки.			Напряж. отъ собств. вѣса.			Суммарн. напряж.			Гл. напряж.		B/A
		X	Y	T	X_1	Y_1	T_1	X_0	Y_0	T_0	A	B	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	7.44	0.0354	0.00753	0.0154	0.00667	0.0119	0.0001	0.0421	0.0194	0 0155	0.05	0.0116	0.232
2	14.88	0.0346	0.0233	0.0268	0.0132	0.0248	0.0002	0.0478	0.0481	0.027	0.075	0.021	0.280
3	22.32	0.0263	0.0299	0.0275	0.0194	0.036	0.0005	0.0457	0.0659	0.028	0.0856	0.026	0.304
4	29.76	0.0186	0.0367	0.0246	0.0252	0.0484	0.0009	0.0438	0.0851	0.0255	0.0973	0.0217	0.326
5	37.20	0.0132	0.0374	0.0209	0.0304	0.0610	0.0014	0.0436	0.0984	0.0223	0.1064	0.0356	0.334
6	44.64	0.00943	0.0365	0.0175	0.0349	0.0741	0 002	0.0443	0.1106	0.0195	0.116	0.0390	0.336
7	52.08	9.00695	0.0349	0.0146	0.0384	8.0875	0.0027	0.0454	0.1224	0.0173	0.1261	0.0417	0.33
8	59.52	0.00506	0.0328	0.0122	0.0408	0.1015	0.0035	0.0459	0.1343	0.0157	0.137	0.0432	0.315
9	66.96	0.00384	0.0309	0.0103	0.0422	0.116	0.0045	0.046	0.147	0.0148	0.149	0.044	0.295
10	74.40	0.00296	0.0289	0.00878	0.0423	0.131	0.00554	0.0453	0.168	0.0143	0.1617	0.0437	0.270
								0.4499		0.1999			

Горизонт. слагающая давленія на всю стѣну: $\left(0,449 - \frac{0.0453}{2}\right) \times 7,44 \times 101,5 = 322$ kg.

Вертикальн. слагающая давленія на всю стѣну: $\left(0.1999 - \frac{0.0143}{2}\right) \times 7,44 \times 101.5 = 145$ kg.

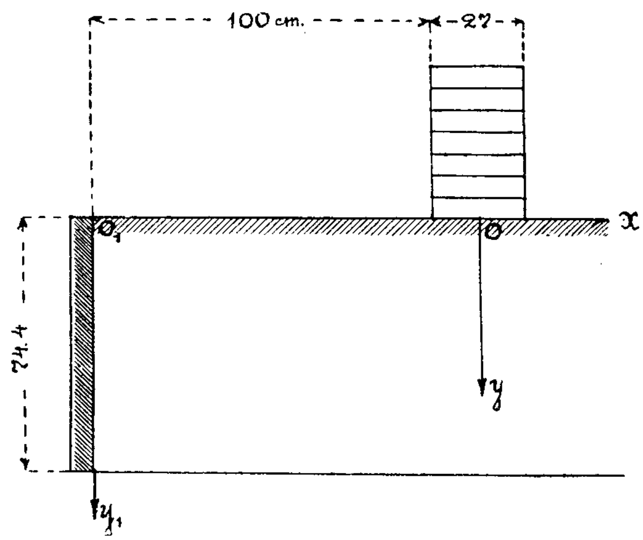
Полное давленіе на стѣну: $R = \sqrt{322^2 + 145^2} = 353$ kg.

Разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей давленія отъ дна ящика: $C = \frac{7.43}{0.4272}\left(\frac{0.0453}{2} + 046 + \right.$
$\left. + 2 \times 0.0459 + 3 \times 0.0454 + 4 \times 0,0443 + 5 \times 0.0436 + 6 \times 0438 + 7 \times 0.0457 + 8 \times 0,0478 + 9 \times 0.0421\right) = 35.6$cm

Опытъ 8.

Нагрузка на песокъ 735 4 kg, была расположена въ разстояніи 100 ст. отъ стѣнки (черт. 11) (вблизи линіи естественнаго откоса)

Черт. 11.



Результаты опыта:

Горизонтальная составляющая давленія отъ дна ящика . 176 kg.

Вертикальная составляющая . . . . 80 kg.

Полное давленіе. . . . . 193 kg.

Разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей давленія отъ дна ящика . . . . 28 cm.

Результаты подсчетовъ по формуламъ (18) и (19) представлены въ таблицѣ 5.

Формулы (18) были взяты въ видѣ:

$$X_1 = 0.00044\, y$$

$$Y_1 = 0.0016\, y$$

$$T_1 = 0.0000\, y^2$$

Таблица 5.

№№ точекъ.	Разст. отъ верхн. поверхн.	Напряж. отъ нагрузки.			Напряж. отъ собств. вѣса.			Суммарн. напряж.			Гл. напряж.		A/B
		X	Y	T	X_1	Y_1	T_1	X_0	Y_0	T_0	A	B	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	7.44	0.00261	0	0.000178	0.00327	0.0119	0.000166	0.00588	0.0119	0.000344	0.01192	0.00586	0.492
2	14 88	0.0052	0.0001	0.00070	0.00655	0.0238	0.000666	0.0118	0.0238	0 00137	0.0240	0.0116	0.484
3	22.32	0.00760	0.000256	0.00149	0.00982	0.0357	0.001491	0.0174	0.0360	0.00298	0.0365	0.0170	0.466
4	29.76	0.00939	0.000682	0·00249	0.0131	0.0446	0.00266	0.0225	0.0483	0.00515	0.0493	0.0215	0.436
5	37.2	0.0107	0.00154	0.00344	0.0164	0.0595	0.00414	0.0271	0.061	0.00758	0.0627	0.0255	0.407
6	44.64	0.0119	0.002	0.00480	0.0196	0.0714	0.00597	0.0315	0.0734	0.0108	0.0761	0.0289	0.380
7	52.08	0.0129	0.00281	0.00594	0.0229	0.0833	0.00813	0.0358	0.0861	0.0141	0.0899	0.0321	0.357
8	59.52	0.0132	0.00367	0.00699	0.0262	0 0952	0.01062	0.0394	0.0989	0.0176	0.1038	0.0346	0.333
9	66.96	0.0133	0.00478	0.00782	0.0295	0.107	0.01347	0.0428	0.112	0.0213	0.118	0.0368	0.312
10	74.4	0.0131	0.0058	0.00868	0.0327	0.119	0.01662	0.0458	0.125	0.0253	0.1324	0.0384	0.290
								0.2800		0.10646			

Горизонтальная слагающая давленія на всю стѣну: $\left(0.28-\frac{0.0452}{2}\right)\times 101.5\times 7.44=194$ kg.

Вертикальная слагающая давленія на всю стѣну: $\left(0.10646-\frac{0.0253}{2}\right)\times 7\,44\times 101.5=71$ kg.

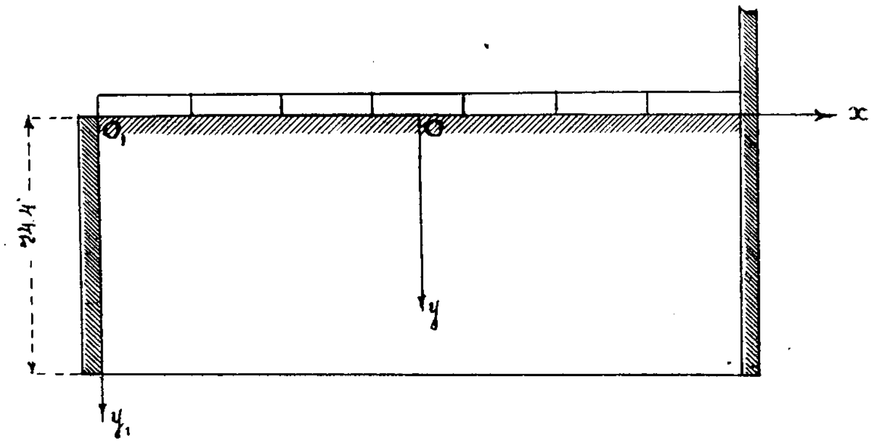
Полное давленіе на стѣну: $R=\sqrt{194^2+71^2}=207$ kg.

Разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей давленія отъ дна ящика: $C=\frac{7.44}{0.2571}\left(\frac{0.0458}{4}+0.0428+2\times\right.$ $\left.\times 0.0394+3\times 0.0358+4\times 0.0315+5\times 0.0271+6\times 0.225+7\times 0.0174+8\times 0.01{,}8+9\times 0.00588\right)=26\,2$ cm.

Опытъ 9.

Песокъ былъ нагруженъ равномѣрно распредѣленной нагрузкой 362 kg на кв. м. (черт. 12).

Черт. 12.



Результаты опыта:

Горизонтальная составляющая давленія на стѣну . . . 190 kg.

Вертикальная составляющая . . . . 94 kg.

Полное давленіе . . . . 213 kg.

Разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей давленія отъ дна ящика . . . . 29 cm.

Результаты подсчетовъ по формуламъ (18) и (22) представлены въ таблицѣ 6.

Формулы (18) были взяты въ видѣ:

$$X_1 = 0.00045\,y$$

$$Y_1 = 0.0016\,y$$

$$T_1 = 0.0000004\,y^2$$

Таблица 6.

№№ точекъ.	Разст. отъ верхн. поверхн.	Напряж. отъ нагрузки.			Напряж. отъ собств. вѣса.			Суммарн. напряж.			Гл. напряж.		B/A
		X	Y	T	X_1	Y_1	T_1	X_0	Y_0	T_0	A	B	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	7.44	0.0172	0.0181	0.0115	0.0034	0.0119	0.0000	0.0206	0.030	0.0115	0 0377	0.0129	0.342
2	14.88	0.0163	0.0181	0.0114	0.0067	0.0238	0.0001	0.0230	0.0419	0.0115	0.0474	0.0176	0.372
3	22.32	0 0155	0.0181	0.0113	0.0100	0.0357	6.0002	0.0255	0.0538	0.0115	0.0575	0.0219	0.381
4	29.76	0.0146	0.0181	0.0112	0.0134	0.0476	0.0004	0.0280	0.0657	0.0116	0.0691	0.0247	0.357
5	37.20	0.0138	0.0181	0.0111	0.0167	0.0595	0.0006	0.0305	0.0776	0.0117	0.0804	0.0278	0.346
6	44.64	0.0130	0.0180	0.0109	0.0201	0.0714	0.0008	0.0331	0.0894	0.0117	0.0918	0.0308	0.336
7	52.08	0.0122	0.0180	0.0107	0.0235	0.0833	0.0011	0.0357	0.1013	0.0118	0.1034	0.0336	0.325
8	59.52	0 0115	0.0179	0.0105	0.0268	0.0952	0.0014	0.0383	0.1131	0.0119	0.115	0.0364	0.316
9	66.96	0.0108	0.0178	0.0103	0.0302	0.107	0.0018	0.0410	0 1248	0.0121	0.1265	0.0393	0.311
10	74.4	0.0101	0.0177	0.0101	0.0335	0.119	0.0022	0.0436	0.1367	0.0123	0.1384	0.0420	0.303
								0.3193		0.1176			

Горизонтальная слагающая давленія на всю стѣну: $\left(0.3193 - \frac{0.0436}{2}\right) \times 7.44 \times 101.5 = 224$ kg

Вертикальная слагающая давленія на всю стѣну: $\left(0.1176 - \frac{0.0123}{2}\right) \times 7.44 \times 101.5 = 84$ kg.

Полное давленіе на стѣну $R = \sqrt{224^2 + 84^2} = 239$ kg.

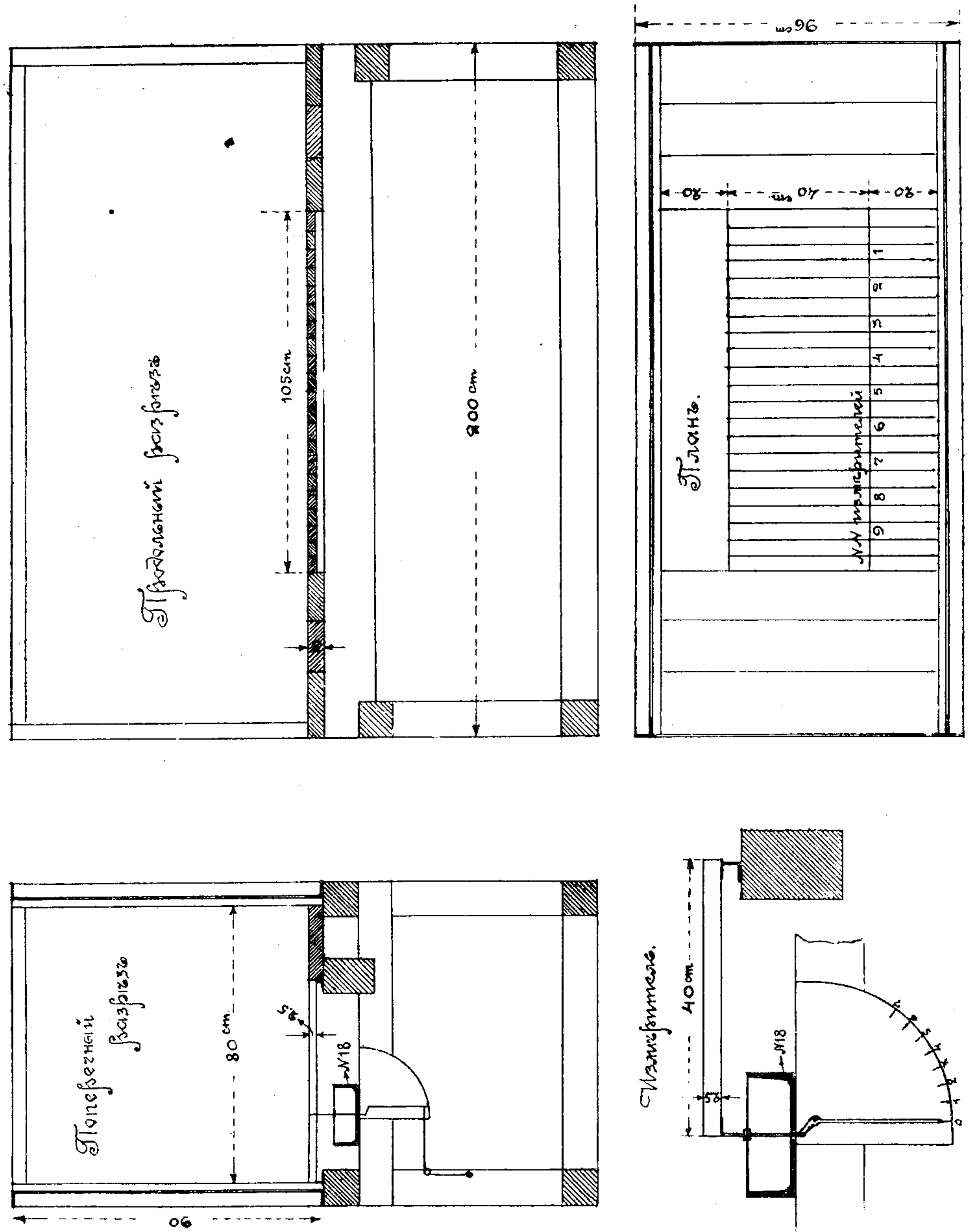
Разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей давленія отъ дна ящика: $C = \frac{7.44}{0.2975}\left(\frac{0.0436}{4} + 0.0410 + 2 \times 0.0383 + 3 \times 0.0357 + 4 \times 0.0331 + 5 \times 0.0305 + 6 \times 0.0280 + 7 \times 0.0255 + 8 \times 0.0230 + 9 \times 0.206\right) = 30.9$ cm,

§ 7. Опыты, произведенные мной.

Изъ опытовъ Мюллера Бреслау мы получаемъ доказательство приложимости нашей теоріи къ опредѣленію давленія земли на подпорныя стѣны, но не можемъ получить ясныхъ указаній на то, что напряженія въ сыпучихъ тѣлахъ распредѣляются по тѣмъ же законамъ, какъ и въ твердыхъ тѣлахъ. Попробовать найти эти указанія было цѣлью моихъ опытовъ. Я изслѣдовалъ давленіе на дно ящика. Здѣсь напряженія Y отъ дѣйствія нагрузки, расположенной на поверхности песка, непосредственно складываются съ напряженіями Y_1 отъ дѣйствія собственнаго вѣса песка. Загрузивъ ящикъ пескомъ и опредѣливъ въ нѣсколькихъ точкахъ (описанный ниже приборъ позволялъ это сдѣлать въ 9 точкахъ) напряженія Y_1, потомъ положивъ на песокъ нагрузку и опредѣливъ въ тѣхъ же точкахъ Y_1+Y, мы можемъ получить изъ опыта напряженія Y. Выдѣлить при опытахъ величины Y важно въ томъ отношеніи что теоретически эти величины опредѣляются однозначно (задача о распредѣленій напряженій въ массивѣ отъ дѣйствія равномѣрной нагрузки имѣетъ одно рѣшеніе), и слѣдовательно сравненіе величинъ Y, полученныхъ изъ опытовъ и теоретически, можетъ быть наиболѣе убѣдительнымъ доказательствомъ правильности или неправильности нашихъ взглядовъ.

Опыты производились въ лабораторіи строительныхъ матеріаловъ Томскаго Технологическаго Института. Приборъ для опытовъ (черт. 13) былъ устроенъ слѣдующимъ образомъ. Средняя часть дна ящика по длинѣ 105 ст. и ширинѣ 40 ст. была сдѣлана подвижной. Она состояла изъ отдѣльныхъ брусковъ, которые опирались однимъ концомъ на ребро неподвижнаго желѣзнаго уголка a (см. черт. 13, деталь), а другимъ при помощи подставочки b на пружины измѣрительнаго прибора. Бруски по концамъ имѣли желѣзныя планки съ небольшими канавками, а ребро уголка a и концы подставочекъ b были заострены, Бруски были шириною 48 мм. длиною 40 ст., число бруековъ 21. Они были уложены съ промежутками въ 2 мм, чтобы не было тренія по боковымъ поверхностямъ. Чтобы послѣ нагрузки прибора дно ящика представляло непрерывную поверхность, боковая часть его, прилегающая къ измѣрительному прибору, (см. черт. 13 нижняя часть плана), была сдѣлана также подвижной. Она состояла также изъ отдѣльныхъ брусковъ въ 48 мм. шириною и длиною 20 ст., которые опирались однимъ концомъ на особый уголокъ, другимъ на пружины измѣрительнаго прибора. Чтобы при опытахъ песокъ не могъ просыпаться черезъ промежутки между брусками, дно ящика покрывалось обыкновенной марлей, изъ которой приготовляются бинты. Стѣнки

Чер. 13.



ящика были сдѣланы разборчатыми, и изъ нихъ поперечныя могли устанавливаться на любомъ разстояніи другъ отъ друга. При нижеописанныхъ опытахъ это разстояніе равнялось 105 ст. Стѣнки ящика были выструганы, а дно оставлено шероховатымъ, чтобы коэффиціентъ тренія между частицами песка и дномъ ящика былъ примѣрно такой же какъ и между частицами песка.

Измѣрительный приборъ состоялъ изъ куска корытнаго желѣза № 18 длиной 2 метра, на которомъ между его полками (см. черт. 13) были уложены пружины. Пружины представляли прямыя стальныя полоски, шириною 2,5 ст. и въ виду того, что въ Томскѣ нельзя было достать спеціальной пружинной стали, были изготовлены изъ разрѣзаннаго на куски полотна обыкновенной плотничьей двухручной пилы. Чтобы убѣдиться въ пригодности такихъ пружинъ, они были предварительно испытаны на остающіеся прогибы; при нагрузкѣ въ 20 *kg* такихъ прогибовъ не получалось. Такъ какъ при опытахъ не предполагалось нагружать пружины больше чѣмъ до 15 *kg*, то можно было предполагать, что онѣ будутъ работать исправно. Пружины однимъ концомъ закрѣплялись на ребрѣ полки корытнаго желѣза неподвижно при помощи шуруповъ, а другимъ опирались свободно на ребро второй полки. Ребра полокъ были выструганы. Число пружинъ было такое же, какъ и число брусковъ—21. Ось каждой пружины находилась въ одной вертикальной плоскости съ осью соотвѣтствующаго бруска. Измѣрительныя приспособленія, которыя мы будемъ называть просто измѣрителями (см. черт. 13 деталь) имѣлись не у каждой пружины, а ихъ было всего 9; онѣ были расположены такъ, какъ указано на чертежѣ 13 въ планѣ. измѣритель № 5. соотвѣтствовалъ срединѣ подвижной части дна ящика. Остальныя пружины служили лишь для того, чтобы при дѣйствіи нагрузки вся подвижная часть дна ящика опускалась одинаково. На пружины съ измѣрителями передавалось давленіе только отъ длинныхъ (средней части дна) брусковъ, давленіе же отъ соотвѣтствующихъ короткихъ брусковъ передавалось на пружины безъ измѣрителей; при этомъ опоры брусковъ были размѣщены такъ, чтобы прогибы пружинъ безъ измѣрителей были одинаковы съ прогибами пружинъ съ измѣрителями.

Устройство измѣрителя понятно изъ чертежа. Мертвый ходъ стрѣлки уничтожался натяженіемъ шелковой нити (см. черт. 13 поперечный разрѣзъ), у которой на одномъ концѣ былъ подвѣшенъ небольшой грузикъ, а другимъ концомъ нить прикрѣплялась къ концу стрѣлки. Измѣрители были проградуированы непосредственной нагузкой. Дѣленія на циферблатѣ были поставлены черезъ 0,2 kg, такъ что на глазъ можно было отсчитывать 0.1 kg. Прогибъ пружинъ при опытахъ достигалъ 4.5—мм.; такая значительная величина для перемѣщенія частицъ песка повидимому не оказывала замѣтнаго вліянія на окончательное распредѣленіе напряженій.

Песокъ, бравшійся для опытовъ, былъ предварительно промытъ и просѣянъ черезъ сита съ 64 отверстіями на кв. ст. и съ 225 отверстіями на кв. ст. Все, что оставалось на первомъ ситѣ и все, что проходило черезъ второе, отбрасывалось. Вѣсъ литра песка изъ нѣсколькихъ взвѣшиваній опредѣлился въ 1.47 kg; уголъ естественнаго откоса ∞ 32^0. Для нагрузки на поверхность песка употреблялись кирпичи; средній вѣсъ одного кирпича опредѣлился въ 4.25 kg. Загрузка прибора пескомъ производилась ручнымъ способомъ, при помощи небольшихъ желѣзныхъ совковъ.

Каждый подвижной брусокъ дна прибора представлялъ свободно лежащую, балку на двухъ опорахъ. Длина бруска 40 ст., разстояніе между осями брусковъ—5 ст., слѣдовательно при опытахъ давленіе на пружину передавалось отъ площади

$$\frac{5 \times 40}{2} = 100 \text{ ст}^2.$$

Поэтому для опредѣленія давленія на пружину теоретически нужно было величины Y, даваемыя формулами (22), помножить на 100.

Измѣрители были размѣщены въ приборѣ черезъ брусокъ, слѣновательно разстояніе между осями брусковъ, подъ которыми находились измѣрители, было ровно 10 cm.

Опытъ 1.

Приборъ былъ нагруженъ слоемъ песка толщиною въ 40 ст. и въ такомъ положоженіи оставленъ на сутки. Затѣмъ на поверхность песка были уложены 4 ряда кирпичей (36 штукъ), какъ указано на черт. 14. Въ такомъ положеніи приборъ оставался въ теченіе 2-хъ сутокъ. Послѣ этого пвиборъ былъ совершенно разгруженъ. Запись отсчетовъ при всѣхъ опытахъ дѣлалась разъ въ сутки, причемъ первый разъ тотчасъ послѣ приложенія нагрузки. Давленіе на пружины тотчасъ послѣ приложенія нагрузки оказывалось всегда нѣсколько меньше, нежели при послѣдующихъ наблюденіяхъ. При составленіи таблицъ приняты результаты послѣднихъ наблюленій. Результаты опыта и вычисленій по формуламъ (22) указаны въ таблицѣ 7, а также на діаграммѣ 1.

Черт. 14.

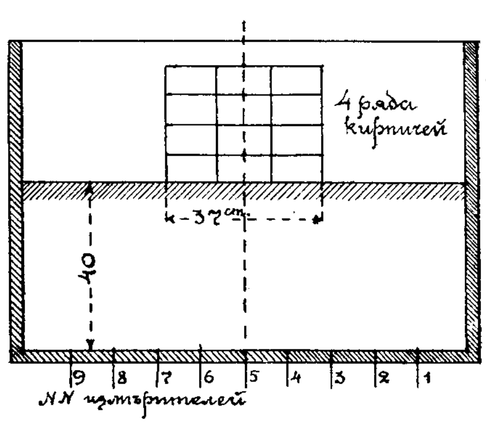
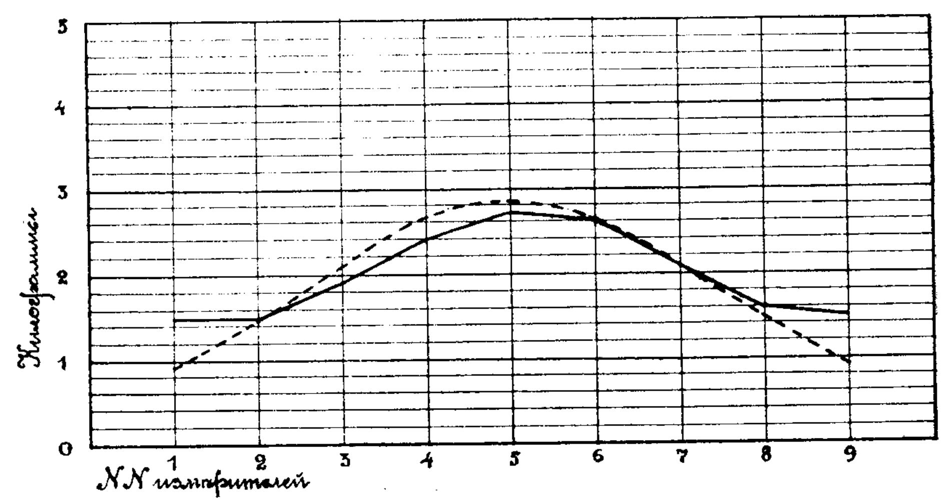


Таблица 7.

№№ измѣрителей.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Давленіе на пружины отъ вѣса песка kg.	6.6	6,3	6.4	6.9	7.2	6.9	7	7	6.8
Давленіе отъ песка и кирпичей kg.	8.1	7.8	8.3	9.3	9.9	9.5	9.1	8,6	8.3
Разность этихъ давленій kg.	1.5	1.5	1.9	2.4	2.7	2.6	2 1	1 6	1.5
Теоретическое давленіе kg	0.93	1.46	2.10	2.64	2.85	2.64	2.10	1.46	0.93

Діаграмма 1.



Опытъ 2.

Опытъ велся также, какъ и 1-й, только кирпичи были уложены не въ срединѣ ящика, а сдвинуты въ сторону на 20 ст., какъ показано на черт. 15. Результаты опыта указаны въ таблицѣ 8 и на діаграммѣ 2

Черт. 15.

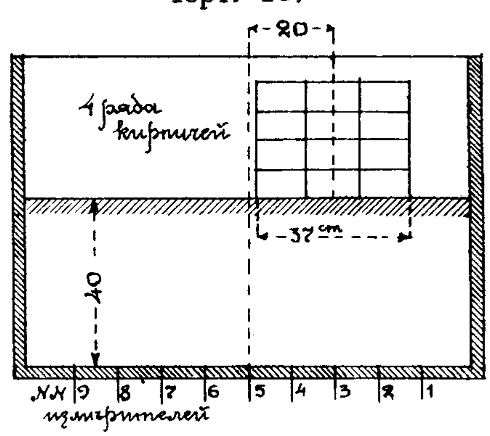
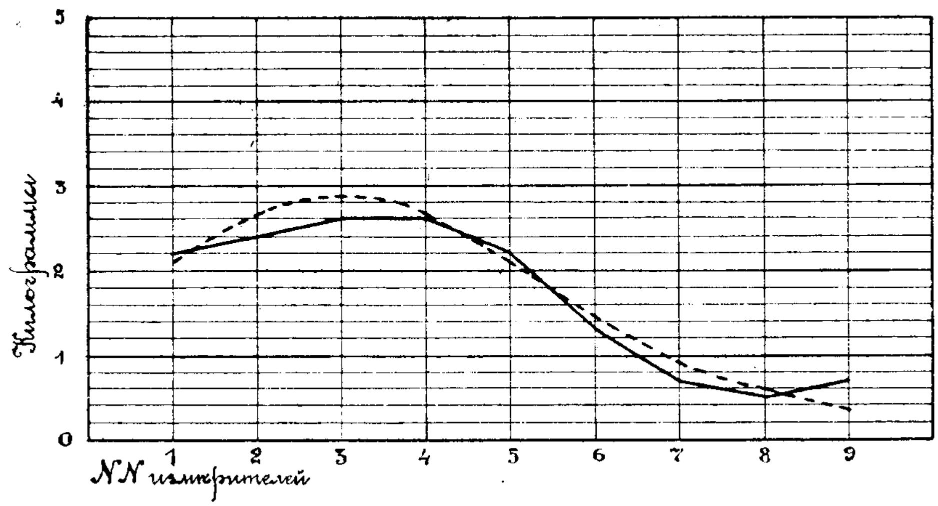


Таблица 8.

№№ измѣрителей.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Давленіе на пружины отъ вѣса песка kg.	6.9	5.9	6.1	6.4	7	6.8	6.3	6.7	6.9
Давленіе отъ песка и кирпичей kg.	9.1	8.3	8.7	9	9.2	8.1	7	7.2	7.6
Разность этихъ давленій kg.	2.2	2.4	2.6	2.6	2.2	1.3	0.7	0,5	0.7
Теоретическое давленіе kg.	2.10	2.64	2.85	2.64	2.10	1.46	0.93	0.59	0.34

Діаграмма 2.



Опытъ 3.

Приборъ былъ нагруженъ слоемъ песка въ 60 ст.; въ такомъ положеніи онъ оставался въ теченіе двухъ сутокъ; затѣмъ на поверхность песка были уложены 6 рядовъ кирпичей (54 штуки). и въ такомъ состояніи приборъ находился въ теченіе двухъ сутокъ. Результаты опыта указаны въ таблицѣ 9. и на діаграммѣ 3.

Черт. 16.

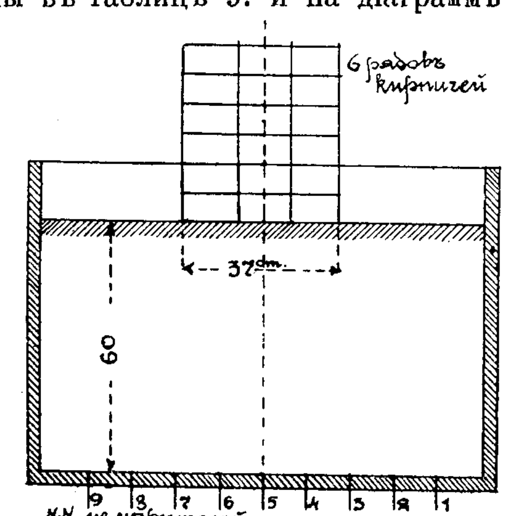
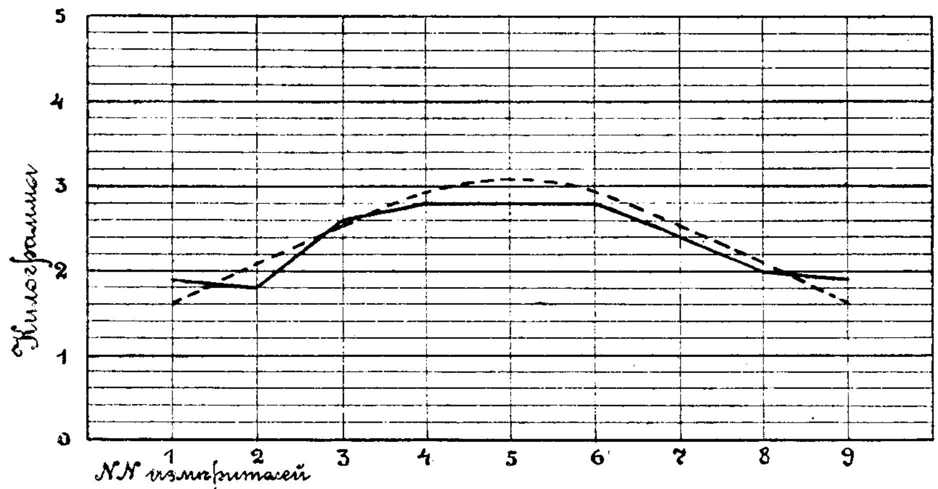


Таблица 9.

№№ измѣрителей.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Давленіе на пружины отъ вѣса песка kg	9.2	8.4	8.5	9	9.4	9.4	9,4	9.6	9,7
Давленіе отъ песка и кирпичей kg.	11.1	10.2	11.1	11.8	12,2	12.2	11.8	11.6	11,3
Разность этихъ давленій kg.	1.9	1.8	2.6	2.8	2.8	2.8	2,4	2.0	1.9
Теоретическое давленіе kg.	1.61	2.09	2 56	2.93	3.07	2.93	2.56	2.09	1.61

Діаграмма 3.



Какъ видимъ, результаты опытовъ и теоріи довольно хорошо сходятся за исключеніемъ крайнихъ точекъ, гдѣ несходство можетъ быть объяснено вліяніемъ на результаты опытовъ близости стѣнъ ящика. Теоретическое давленіе на пружины опредѣлялось по формуламъ (22), которыя представляютъ рѣшеніе задачи о распредѣленіи напряженій въ массивѣ подъ дѣйствіемъ равномѣрной нагрузки. Это рѣшеніе однозначное и слѣдовательно приложимо къ сыпучему массиву только въ томъ случаѣ, если напряженія въ немъ распредѣляются по тѣмъ же законамъ, какъ и въ твердомъ тѣлѣ. Сходство результатовъ опытовъ и теоретическихъ подсчетовъ такимъ образомъ указываетъ что законъ распредѣленія напряженій въ сыпучихъ тѣлахъ такой же, какъ и въ твердомъ тѣлѣ.

Указанными опытами попутно выясняется еще то обстоятельство, что иногда сыпучими тѣлами можно пользоваться для провѣрки выводовъ теоріи упругости. Напримѣръ, законъ распредѣленія напряженій въ безконечномъ массивѣ нѣтъ возможности провѣрить на твердомъ тѣлѣ, а на сыпучемъ тѣлѣ это оказывается возможнымъ.

ГЛАВА III.

Практическія примѣненія теоріи.

§ 8. Опредѣленіе давленія земли на подпорныя стѣны.

Способы примѣненія предлагаемой теоріи къ рѣшенію практическихъ вопросовъ достаточно понятны изъ выше изложеннаго. При опредѣленіи давленія земли на подпорныя стѣны можно поступать совершенно также, какъ мы опредѣляли давленіе песка на стѣнку опытнаго ящика въ опытахъ Мюллера Бреслау, т. е. нужно опредѣлить нормальныя и касательныя напряженія въ нѣсколькихъ точкахъ по высотѣ стѣны, а затѣмъ полное давленіе на стѣну вычислить по одному изъ способовъ для приближеннаго вычисленія площадей.

Выше было указано, что задача о давленіи земли на подпорныя стѣны является неопредѣленной. При тѣхъ данныхъ, которыя обычно имѣются въ распоряженіи при рѣшеніи этой задачи, нельзя бываетъ учесть весьма существеннаго вліянія на величину и направленіе давленія многихъ случайныхъ факторовъ, какъ-то: способа производства засыпки, трамбованія, сотрясеній, динамическаго дѣйствія подвижной нагрузки, вліянія на измѣненіе напряженнаго состоянія попеременнаго смачиванія и высыханія засыпки и проч. Подъ вліяніемъ такихъ факторовъ при одномъ и томъ же матеріалѣ засыпки, при однѣхъ и тѣхъ же условіяхъ на ея поверхности величина и направленіе давленія на стѣну получаются далеко не одинаковыми. Все это указываетъ на необходимость при разсчетѣ подпорныхъ стѣнъ брать болѣе или менѣе значительный коеффиціентъ запаса. При опредѣленіи давленія земли на подпорныя стѣны нѣтъ слѣдовательно необходимости прибѣгать къ точнымъ и сложнымъ вычисленіямъ, а можно всегда ограничиться простыми, хотя и менѣе точными рѣшеніями.

Для случая вертикальной стѣны и горизонтальной поверхности засыпки общее рѣшеніе находится по формуламъ (18), гдѣ коэффиціенты нужно подобрать такъ, чтобы были удовлетворены неравенства (12). Примѣръ примѣненія этихъ формулъ къ третьему опыту Мюллера Бреслау показываетъ, что при разсчетахъ достаточно ограничиться двумя членами. Наиболѣе простое рѣшеніе, которое и можно рекомендовать, получается, если принять линейное распредѣленіе напряженій, положивъ:

$$
\left.\begin{aligned}
X &= by \\
Y &= \Delta y \\
Z &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30),
$$

гдѣ коэффиціентъ b можетъ имѣть одно изъ значеній

$$
\Delta\, tg^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) > b > \Delta\, tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)
$$

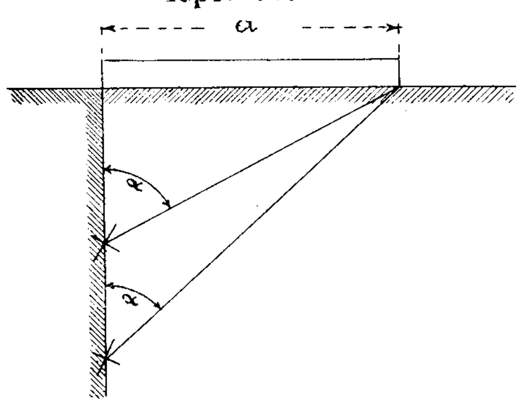
Обыкновенно для b принимаютъ наименьшее значеніе, что соотвѣтствуетъ состоянію свѣженасыпанной земли. Однако, въ виду того что такое состояніе можетъ легко измѣниться, лучше величину b брать съ запасомъ.

При опредѣленіи давленія земли по формуламъ (30) направленіе давленія получается нормальнымъ къ стѣнѣ.

Формулами (18) или (30) можно также пользоваться и для случаевъ наклоннаго, ломаннаго или криволинейнаго профиля стѣны. Въ этихъ случаяхъ по напряженіямъ для площадокъ нормальныхъ къ координатнымъ осямъ, даваемымъ формулами (18) или (30) придется опредѣлить напряженія, дѣйствующія по площадкамъ соотвѣтствующимъ поверхности стѣны. Здѣсь кромѣ нормальныхъ будутъ дѣйствовать также и касательныя напряженія.

Если на поверхности засыпки расположена нагрузка, то вліяніе ея на стѣну учитывается по формуламъ (22), при чемъ напряженія отъ собственнаго вѣса необходимо подобрать такъ, чтобы суммарныя напряженія отъ дѣйствія нугрузки и собственнаго вѣса удовлетворя-

Черт. 17.



ли неравенствамъ (12). Во многихъ случаяхъ можетъ оказаться удобнымъ опредѣлять напряженія отъ нагрузки пользуясь рѣшеніемъ Michel'я, которое даетъ сразу величины и направленія главныхъ напряженій. Углы α (черт. 17) можно измѣрять непосредственно транспортиромъ, а затѣмъ для опредѣленія напряженій по поверхности стѣны можно примѣнить способъ Мора.

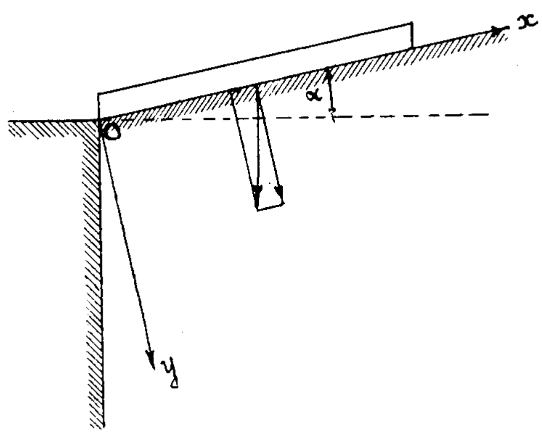
Наиболѣе простое рѣшеніе получается, когда длина нагрузки α (черт. 17) будетъ настолько велика, что ее можно считать безконечной. Тогда, положивъ въ фррмулахъ (22) $x=a$ и затѣмъ, приравнивая a безконечности, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{P}{2} \\ Y &= \frac{P}{2} \\ T &= \frac{P}{\pi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Слѣдовательно въ этомъ случаѣ нормальное давленіе на единицу поверхности стѣны равно половинѣ давленія на единицу поверхности засыпки. Напряженія по высотѣ стѣны не измѣняются. Напряженія отъ собственнаго вѣса должны быть конечно опять таки подобраны такъ, чтобы суммарныя напряженія удовлетворяли неравенствамъ (12). Этимъ неравенствамъ невозможно будетъ удовлетворить въ точкахъ близкихъ къ поверхности засыпки; на эти точки оказываетъ вліяніе то обстоятельство, что въ дѣйствительности равномѣрное распредѣленіе нагрузки по поверхности засыпки не можетъ имѣть мѣста,— это обстоятельство существенно измѣняетъ напряженія въ точкахъ лежащихъ вблизи нагрузки, но не имѣетъ значенія для точекъ удаленныхъ.

Если поверхность засыпки представляетъ наклонную плоскость, то для опредѣленія давленія на стѣну нужно пользоваться формулами (19) и (20). Формулами (20), представляющими наиболѣе простое рѣ-

Черт. 18.



шеніе, можно пользоваться для случая, поднимающейся отъ стѣны, поверхности засыпки. Для случая же, понижающейся отъ стѣны, засыпки необходимо брать формулы (19) и при томъ съ достаточнымъ числомъ членовъ, такъ какъ иначе невозможно будетъ удовлетворить неравенствамъ (12).

Если на наклонной поверхности засыпки расположена нагрузка, то давленіе отъ нея удобнѣе всего разложить на составляющія (черт. 18): нормальную къ плоскости засыпки и касательную къ ней. Если направленіе координарныхъ осей принять по черт. 18, то для опредѣленія напряженій отъ нормальнаго давленія можно пользоваться формулами (22), а отъ касательнаго слѣдующими формулами, данными Г. В. Колосовымъ:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{k}{\pi}\left\{ log\frac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2} - \frac{4\,a\,x\,y^2}{(a^2+x^2+y^2)^2-4\,a^2x^2}\right\} \\ Y &= \frac{k}{\pi}\cdot\frac{4\,a\,x\,y^2}{(a^2+x^2+y^2)^2-4\,a^2x^2} \\ T &= \frac{k}{\pi}\left\{ arc.\,tg\,\frac{a-x}{y} + arc.\,tg\,\frac{a+x}{y} - \frac{4\,ay\,(a^2-x^2-y^2)}{(a^2+y^2+x^2)^2-4\,a^2x^2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

гдѣ $k = p\ sin\,\alpha$.

Для случая ломаннаго профиля засыпки можно ломанную замѣнить подходящей кривой, напримѣръ, дугой параболы, и тогда для рѣшенія задачи можно пользоваться общимъ методомъ для нахожденія напряженій, указаннымъ Н. Герсевановымъ*).

Предлагаемые способы опредѣленія давленія земли на подпорныя стѣны представляютъ собственно случаи опредѣленія напряженій въ массивѣ безконечныхъ размѣровъ по заданнымъ направленіямъ (линіямъ стѣнъ). Эти способы, какъ мы видѣли, даютъ рѣшенія согласныя съ опытами, но ихъ нельзя считать единственнными и тѣмъ болѣе исчерпывающими полностью всевозможныя рѣшенія. Они взяты только потому, что въ теоріи упругости мы пока не имѣемъ другихъ болѣе подходящихъ для даннаго вопроса рѣшеній.

§ 9. Опредѣленіе глубины заложенія фундамснтовъ.

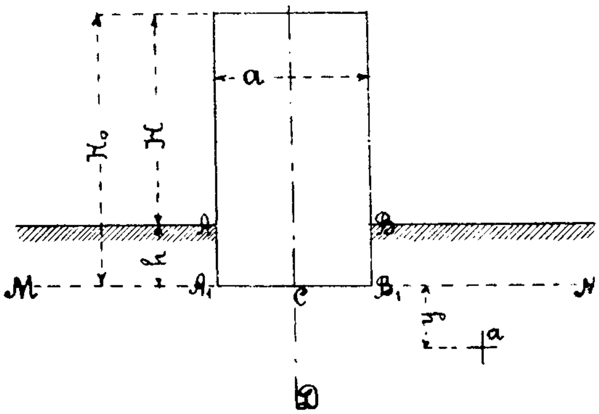
Задача о глубинѣ заложенія фундамента состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить осуществимо ли при заданныхъ силахъ напряженное состояніе въ сыпучемъ массивѣ, и если нѣтъ, то опредѣлить такую дополнительную систему силъ, которую нужно приложить къ массиву, чтобы напряженное состояніе было осуществимо. (Такой дополнительной системой силъ служитъ обыкновенно вѣсъ слоя грунта выше подошвы сооруженія).

---

*) См. его раньше указанную работу стран. 47—49.

Обычно при опредѣленіи глубины заложенія фундамента приходится имѣть дѣло съ массивомъ, ограниченнымъ горизонтальной плоскостью. Сооруженіе представляетъ нагрузку, дѣйствующую на поверхность массива на нѣкоторомъ протяженіи AB (черт. 19); кромѣ того на массивъ дѣйствуетъ собственный вѣсъ.

Черт. 19



Фундаментъ закладывается на нѣкоторой глубинѣ h, которую требуется опредѣлить такъ, чтобы подъ давленіемъ сооруженія не произошло выпучиванія грунта. т. е. другими словами, чтобы при этомъ были выполнены необходимыя условія для существованія напряженнаго состоянія. Слой грунта надъ прямой MN мы будемъ разсматривать, какъ равномѣрную нагрузку, дѣйствующую на поверхности массива, и прямую MN будемъ считать за контуръ массива.

Напряженія въ массивѣ отъ давленія сооруженія будутъ накладываться на напряженія отъ дѣйствія собственнаго вѣса массива. Чтобы не произошло выпучиванія необходимо, чтобы суммарныя напряженія отъ дѣйствія собственнаго вѣса массива и давленія сооруженія во всѣхъ точкахъ массива удовлетворяли неравенствамъ (12). Мы уже видѣли, что въ массивѣ, находящемся подъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса, возможно не одно, а нѣсколько напряженныхъ состояній. При однихъ изъ этихъ состояній суммарныя напряженія будутъ удовлетворять неравенствамъ (12), при другихъ нѣтъ. Пусть, напримѣръ, въ точкѣ a (черт. 19) сооруженіе вызываетъ напряженія X и Y; предположимъ для простоты, что эти напряженія главныя. Положимъ далѣе, что при данномъ напряженномъ состояніи массива напряженія отъ собственнаго вѣса опредѣляются выраженіями:

$$X_1 = b(y + h)$$

$$Y_1 = \Delta(y + h)$$

$$T_1 = 0$$

гдѣ коэффиціентъ b представляетъ одно изъ значеній опредѣляемыхъ неравенствами:

$$\Delta\, tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) \geq b \geq \Delta\, tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Отношеніе между главными напряженіями въ точкѣ a будетъ:

$$\frac{X+X_1}{Y+Y_1}=\frac{X+b(y+h)}{Y+\Delta(y+h)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Это отношеніе зависитъ отъ величины коэффиціента b. Равновѣсіе частицъ въ точкѣ a будетъ возможно, если

$$\frac{X+b(y+h)}{Y+\Delta(y+h)} \geq tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Положимъ, что b меньше верхняго предѣла неравенствъ (34), а напряженія отъ дѣйствія вѣса сооруженія X и Y таковы, что неравенство (36) не можетъ быть удовлетворено при данномъ значеніи b. Въ этомъ случаѣ равновѣсіе частицъ въ точкѣ a нарушится, но такъ какъ b можетъ принять еще большее значеніе, то такое нарушеніе равновѣсія будетъ только до тѣхъ поръ, пока массивъ не перейдетъ въ новое напряженное состояніе, при которомъ b приметъ такое значеніе, при которомъ неравенство (36) будетъ удовлетворено. Этотъ переходъ массива изъ одного напряженнаго состоянія въ другое можетъ сопровождаться, кромѣ упругихъ, еще и неупругими перемѣщеніями частицъ; при этомъ возможна нѣкоторая осадка сооруженія, но во всякомъ случаѣ равновѣсіе возстановится. Здѣсь будутъ происходить явленія аналогичныя тѣмъ, которыя происходятъ при искусственномъ уплотненіи грунта.

Совсѣмъ другія явленія будутъ происходить въ томъ случаѣ, когда напряженія отъ дѣйствія вѣса сооруженія X и Y будутъ таковы, при которыхъ значеніе коэффиціента b равное верхнему предѣлу неравенствъ (34) не удовлетворяетъ неравенству (36). Такъ какъ въ этомъ случаѣ переходъ въ новое напряженное состояніе съ большимъ коеффиціентомъ b невозможенъ, то грунтъ начнетъ выпучиваться и основаніе разрушаться. Напряженное состояніе массива при величинѣ b, равной верхнему предѣлу неравенствъ (34), обращающее неравенство (36) въ равенство, можно назвать предѣльнымъ состояніемъ равновѣсія. Это состояніе мы и будемъ имѣть въ виду при рѣшеніи нашей задачи.

Предѣльное состояніе равновѣсія, вообще говоря, не будетъ имѣть мѣста одновременно во всѣхъ точкахъ массива. Важно найти тѣ точки, въ которыхъ это состояніе наступаетъ раньше другихъ,— эти точки будутъ наиболѣе опасными.

Для отысканія опасныхъ точекъ необходимо прежде всего выяснить, какимъ образомъ распредѣляется давленіе по основанію сооруженія. Очевидно оно не можетъ распредѣляться равномѣрно, иначе въ точкахъ A_1 и B_1 (черт. 19) существовалъ бы скачекъ отъ одной величинѣ напряженія къ другой, а это вызвало бы перемѣщеніе частицъ грунта у этихъ точекъ, которое продолжалось бы до тѣхъ поръ, пока не установилось бы непрерывное измѣненіе величинъ напряженій. Такимъ образомъ давленіе по основанію должно распредѣляться неравномѣрно—оно будетъ возрастать отъ краевъ фундамента къ его серединѣ. Чтобы убѣдиться въ этомъ, мной были произведены ниже приводимые опыты. На неравномѣрность распредѣленія давленія по основанію указываетъ также то обстоятельство, что даже значительная нагрузка, расположенная на поверхности грунта, не вдавливается въ него, въ этомъ случаѣ давленіе у краевъ очевидно равно нулю.

Установленіе точнаго закона, по которому происходитъ распредѣленіе давленія по основанію сооруженія не представляется возможнымъ. Этотъ законъ будетъ зависѣть какъ отъ свойствъ грунта, такъ и отъ свойствъсооруженія и въ различныхъ случаяхъ можетъ быть различнымъ. Но, какъ показываютъ ниже приводимые опыты, неравномѣрность распредѣленія давленія по основанію оказываетъ вліяніе на распредѣленіе напряженій только вблизи плоскости основанія, для точекъ же удаленныхъ отъ этой плоскости можно считать, что напряженія въ нихъ будутъ тѣ же, что и при равномѣрномъ распредѣленіи давленія по основанію.

1-й опытъ.

Описанный выше въ § 7, приборъ былъ сначала загруженъ слоемъ песка толщиной 10 ст. Затѣмъ, на другой день, на песокъ были уложены деревянные бруски въ направленіи перпендикулярномъ длинѣ подвижныхъ брусковъ прибора. Длина брусковъ была взята 72 ст., число брусковъ 7. Средины брусковъ совпадали съ измѣрителемъ № 5. На бруски былъ уложенъ одинъ рядъ кирпичей (18 шт.) причемъ, чтобы бруски были нагружены по возможности равномѣрно, каждый кирпичъ опирался на два сосѣднихъ бруска; Подъ нагрузкой кирпичами приборъ оставался въ теченіе сутокъ. Запись отсчетовъ какъ при нагрузкѣ прибора собственнымъ вѣсомъ песка, такъ и при нагрузкѣ кирпичами производилась сперва тотчасъ послѣ загрузки, а затѣмъ черезъ сутки; давленіе по истеченіи сутокъ оказывалось всегда нѣсколько больше нежели тотчасъ послѣ нагрузки. Въ разсчетъ приняты послѣднія наблюденія. Въ таблицѣ указаны результаты опыта и вычисленій въ предположеніи равномѣрнаго распредѣленія давленія вдоль брусковъ по формуламъ (22). Разность давленій, указанная въ строкѣ третьей, представляетъ давленія на измѣрители только отъ дѣйствія брусковъ и кирпичей. Величины давленій указаны въ килограммахъ.

Черт. 20.

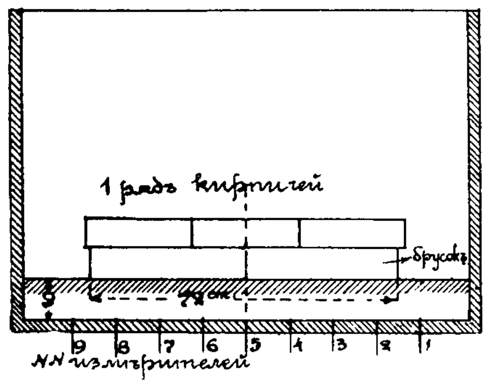
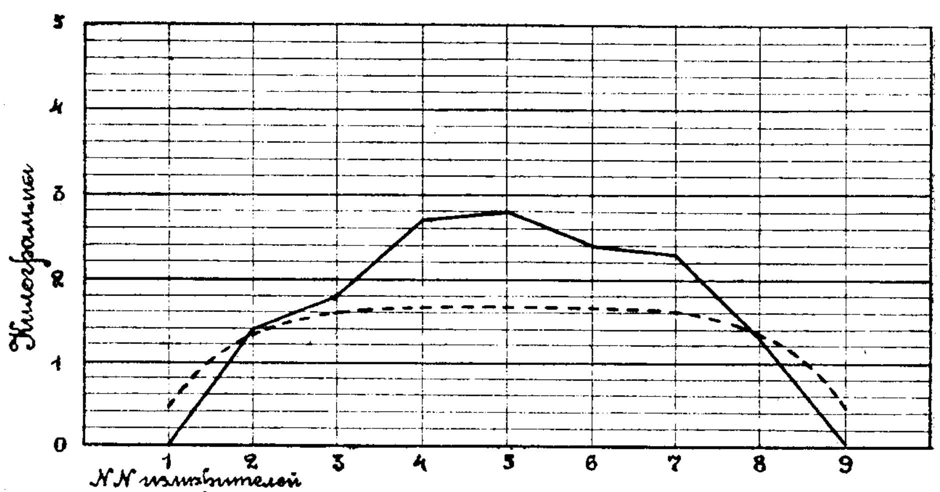


Таблица. 10,

№№ измѣрит.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Давленіе отъ собствен. вѣса песка kg.	1.8	1.1	2	1.8	1.6	1.4	1.7	1.7	1.9
Давленіе отъ песка брусковъ и кирпичей kg. . .	1.8	2.5	3.8	4.5	4.4	3.6	4	3	2
Разность давлен. kg. . . .	0	1.4	1.8	2.7	2.8	2.4	2.3	1.3	0.1
Вычислен. давлен. kg. . .	0.45	1 35	1.6	1.65	1.65	1.65	1.6	1.35	0.45

Діаграмма 4.



Въ первомъ опытѣ слой песка былъ слишкомъ тонокъ, это могло быть причиной того, что полученныя давленія измѣнялись такъ неправильно.

2-й опытъ.

Второй опытъ производился также какъ и первый, только слой песка былъ взятъ 20 ст. и вмѣсто одного ряда кирпичей было взято два (36) шт. Результаты показаны въ таблицѣ 11 и на діаграммѣ 5.

Черт. 21.

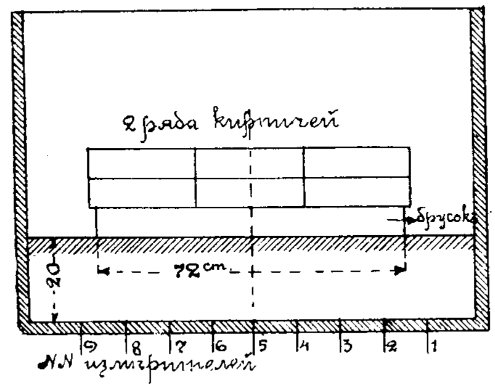
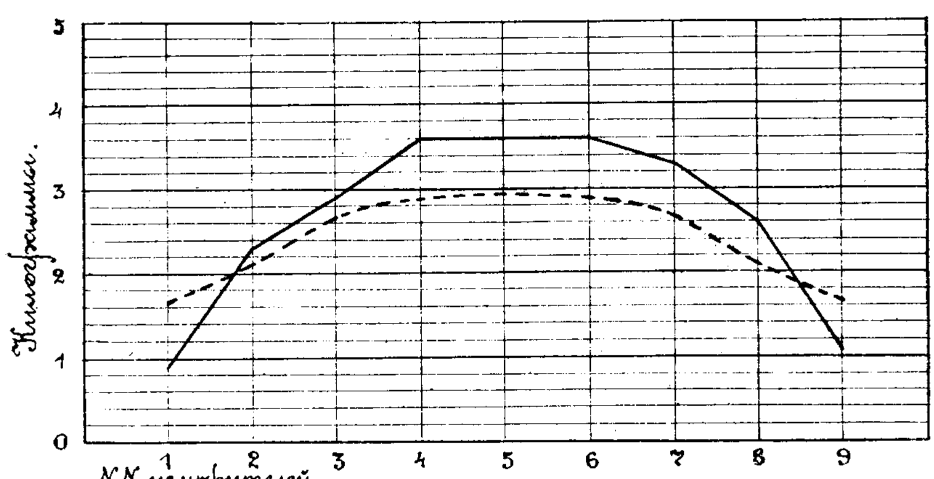


Таблица 11.

№№ измѣрителей.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Давлен. отъ песка	3.4	3.1	3.4	3.4	3.7	3.4	3 5	3.4	3.7
Давлен. отъ песка, бруск. и кирпич. kg.	4 3	5.4	6.3	7	7.3	7	6.8	6.1	4.8
Разность давленн. kg. . .	0.9	2.3	2.9	3.6	3.6	3.6	3.3	2.6	1.1
Вычисл. давлен. kg. . . .	1.67	2.1	2.67	2.88	2.94	2.88	2.67	2.1	1.67

Діаграмма 5.



3-й опытъ.

Слой песка взятъ 30 ст.; кирпичей 3 ряда (54 шт.)

Черт. 22.

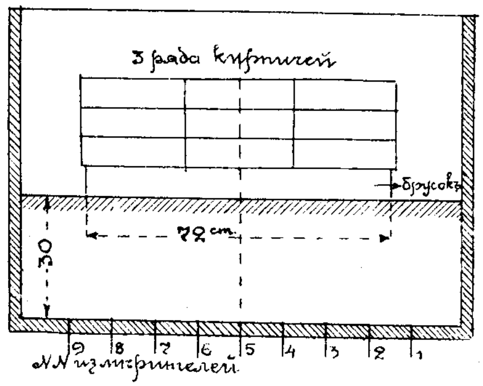
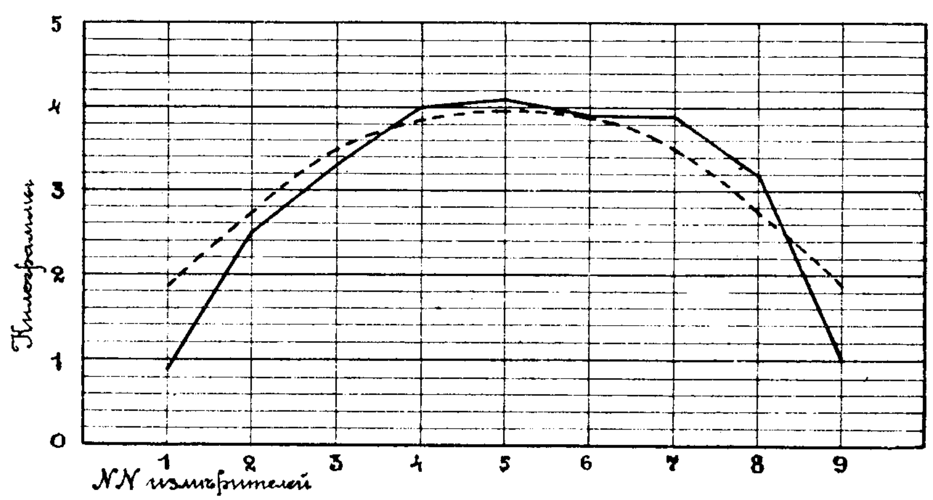


Таблица 12.

№№ измѣрит.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Давлен. отъ песка kg. . .	4.7	4.6	4.5	4.5	5	4.5	5	4.9	5
Давлен. отъ песка. бруск. и кирпичей kg.	6.5	7.1	7.8	8.5	9.1	8.4	8.9	8 1	6
Разн. давл. kg.	0 9	2.5	3.3	4.0	4.1	3.9	3 9	3.2	1.9
Вычисл. давлен.	1.84	2.74	3 47	3.84	3.95	3.84	3.47	2.74	1.84

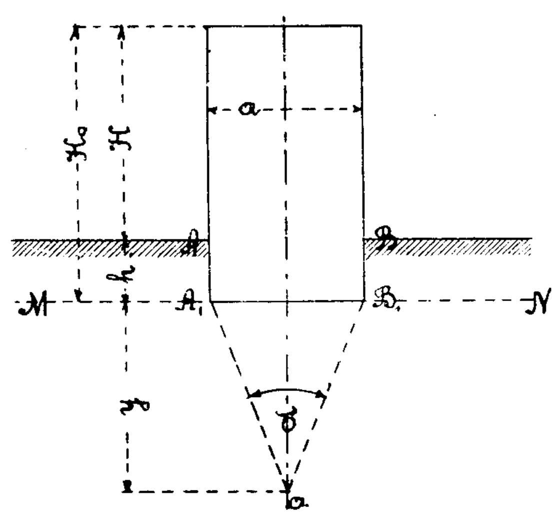
Діаграмма 6.



Изъ этихъ опытовъ видно, что съ увеличеніемъ толщины слоя песка, т. е. съ удаленіемъ отъ поверхности нагрузки, разница между опытными и теоретическими давленіями (результатъ вычисленія по формуламъ 22) уменьшается: при слоѣ песка въ 10 ст. эта разница велика, при слоѣ песка въ 30 ст. результаты опытовъ и вычисленій по формуламъ (22) уже хорошо сходятся. Для всѣхъ трехъ опытовъ наибольшая разница между опытными и теоретическими давленіями наблюдается въ крайнихъ точкахъ; въ этихъ точкахъ на опытныя величины давленій могли оказывать вліяніе стѣнки опытнаго ящика.

Для нахожденія опасныхъ точекъ намѣтимъ прежде геометрическое мѣсто этихъ точекъ. A priori можно предполагать, что такимъ мѣстомъ можетъ быть или прямая MN (черт. 23) (слой грунта выше этой прямой, какъ уже было замѣчено, мы разсматриваемъ какъ равномѣрную нагрузку), или прямая CD, служащая осью сооруженія, такъ какъ точки, лежащія въ пространствѣ между этими прямыми,

Черт. 23.



будутъ находиться въ нѣкоторыхъ среднихъ условіяхъ. При неравномѣрномъ распредѣленіи давленія по основанію, напряженія отъ дѣйствія вѣса сооруженія X_x, Y_y и X_y на прямой MN внѣ контура сооруженія обращаются въ нуль (въ этомъ легко убѣдиться, представивъ неравномѣрное давленіе по основанію какъ рядъ элементарныхъ равномѣрныхъ нагрузокъ, для которыхъ это условіе выполнено), поэтому точки, лежащія на этой прямой, не могутъ быть опасными.

Возьмемъ теперь какую нибудь точку a (черт. 23), лежащую на прямой CD. Если эта точка лежитъ не слишкомъ близко къ основанію сооруженія, то для опредѣленія въ ней напряженій отъ дѣйствія вѣса сооруженія мы можемъ воспользоваться рѣшеніемъ Michell'я, даннымъ для случая равномѣрнаго давленія (см. формулы 29)*); главныя напряженія будутъ:

$$A = \frac{p}{\pi}(\alpha + sin\,\alpha),$$

$$B = \frac{p}{\pi}(\alpha - sin\,\alpha),$$

направленіе напряженія A совпадаетъ съ биссекторомъ угла α, т. е. въ данномъ случаѣ будетъ вертикально, направленіе напряженія B будетъ горизонтально.

Отношеніе между главными напряженіями въ точкѣ a отъ совмѣстнаго дѣйствія вѣса сооруженія и собственнаго вѣса массива, $\left(\text{при } b = \Delta\, tg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$ согласно выраженія (35), будетъ:

$$\frac{\frac{p}{\pi}(\alpha - sin\,\alpha) + n_1 \Delta (y + h)}{\frac{p}{\pi}(\alpha + sin\,\alpha) + \Delta (y + h)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37),$$

гдѣ $n_1 = tg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$.

Легко показать, что величина этого отношенія для точки a будетъ меньше нежели для сосѣднихъ точекъ, лежащихъ съ ней на одной горизонтальной прямой. Въ самомъ дѣлѣ, съ удаленіемъ отъ точки a по этой прямой уголъ α (черт. 23) будетъ уменьшаться, тогда, какъ легко видѣть, отношеніе (37) будетъ увеличиваться. Это заключеніе справедливо для всякой точки, лежащей на прямой CD, Если точка a будетъ опасной точкой, т. е. если для нея:

$$\frac{\frac{p}{\pi}(\alpha - sin\,\alpha) + n_1 \Delta (y + h)}{\frac{p}{\pi}(\alpha + sin\,\alpha) + \Delta (y + h)} = tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (38),$$

то для всякой другой точки, лежащей справа или слѣва отъ точки a,

---

*) Замѣтимъ, что для точекъ, лежащихъ на прямой CD вблизи основанія сооруженія, при неравномѣрномъ распредѣленіи давленія, напряженія хотя будутъ и не тѣ, которыя даетъ рѣшеніе Michell'я, но и въ этомъ случаѣ съ приближеніемъ къ основанію отношеніе между главными напряженіями стремится къ единицѣ, также какъ и при равномѣрномъ распредѣленіи давленія, поэтому точки вблизи основанія не могутъ быть опасными.

это отношеніе будетъ больше $tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$ и слѣдовательно эти точки не будутъ опасными.

Приведенныя соображенія указываютъ, что геометрическимъ мѣстомъ опасныхъ точекъ будетъ прямая CD, служащая продолженіемъ оси сооруженія.

Зная геометрическое мѣсто опасныхъ точекъ, легко уже найти эти точки, а также и величину h — глубины заложенія фундамента. Изъ чертежа 23 имѣемъ:

$$y=\frac{a}{2}\,cotg\,\frac{\alpha}{2}.$$

Вставивъ это значеніе y въ выраженіе (37), получимъ:

$$\frac{\frac{p}{\pi}(\alpha-sin\,\alpha)+n_1\Delta\left(\frac{a}{2}\,cotg\,\frac{\alpha}{2}+h\right)}{\frac{p}{\pi}(\alpha+sin\,\alpha)+\Delta\left(\frac{a}{2}\,cotg\,\frac{\alpha}{2}+h\right)}=n\quad\ldots\ldots\ (39),$$

гдѣ
$$n=tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

Откуда послѣ нѣкоторыхъ простыхъ преобразованій:

$$h=\frac{1+n}{n_1-n}\cdot\frac{p}{\Delta}\cdot\frac{sin\,\alpha}{\pi}-\frac{1-n}{n_1-n}\cdot\frac{p}{\Delta}\cdot\frac{\alpha}{\pi}-\frac{a}{2}\,cotg\,\frac{\alpha}{2}\quad\ldots\ldots\ (40),$$

h измѣняется съ измѣненіемъ угла α, опредѣлимъ его максимальное значеніе. Для этого пойдемъ обычнымъ путемъ: возьмемъ производную отъ h по α приравниваніемъ ее нулю, найдемъ корень этого выраженія и опредѣлимъ знакъ второй производной:

$$\frac{dh}{d\alpha}=\frac{1+n}{n_1-n}\cdot\frac{p}{\Delta}\cdot\frac{cos\,\alpha}{\pi}-\frac{1-n}{n_1-n}\cdot\frac{p}{\Delta}\cdot\frac{1}{\pi}+\frac{a}{4}\,\frac{1}{sin^2\frac{\alpha}{2}}=0$$

или послѣ нѣкоторыхъ преобразованій.

$$cos^2\alpha-\frac{2}{1+n}\,cos\,\alpha+\frac{1-n}{1+n}+\frac{(n_1-n)\,\pi\,\Delta\,a}{2\,(1+n)\,p}=0$$

откуда:

$$cos\,\alpha=\frac{1}{1+n}\pm\sqrt{\frac{n^2}{(1+n)^2}+\frac{(n_1-n)\,\pi\,\Delta\,a}{2\,(1+n)\,p}}\quad\ldots\ldots\ (41).$$

Такъ какъ $\cos\alpha$ не можетъ быть больше единицы, то въ выраженіи (41) слѣдуетъ взять передъ корнемъ знакъ минусъ. Вторая производная отъ h по α:

$$\frac{d^2h}{d\alpha^2} = -\frac{1+n}{n_1-n}\cdot\frac{p}{\Delta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\pi} - \frac{1-n}{n_1-n}\cdot\frac{p}{\Delta}\cdot\frac{1}{\pi} - \frac{\alpha}{4}\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^3\frac{\alpha}{2}}$$

при всякомъ положительномъ углѣ α будетъ величина отрицательная, слѣдовательно опредѣливъ уголъ α изъ выраженія (41) и вставивъ полученное значеніе въ выраженіе (40), получимъ h maximum.

$\frac{p}{\Delta} = H$ равно приведенной высотѣ сооруженія (необходимо въ расчетъ вводить только величину H; $H_0 - H = h$ возмѣщаетъ слой вынутаго грунта). Вставивъ это значеніе въ выраженія (40), и (41), позучимъ:

$$h = \left(\frac{1+n}{n_1-n}\cdot\frac{\sin\alpha}{\pi} - \frac{1-n}{n_1-n}\cdot\frac{\alpha}{\pi}\right)H - \frac{a}{2}\cot g\frac{\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; (42),$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+n} - \sqrt{\frac{n^2}{(1+n)^2} + \frac{(n_1-n)\,\pi\, a}{2\,(1+n)\,H}} \quad . \; . \; . \; . \; (43)$$

Этими формулами можно пользоваться для опредѣленія величины h. Онѣ показываютъ, что глубина заложенія фундамента зависитъ не только отъ приведенной высоты H, но и отъ ширины основанія сооруженія a.

Положеніе опасной точки найдется изъ выраженія:

$$y = \frac{a}{2}\cot g\frac{\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (44).$$

Въ ниже помѣщенной таблицѣ*) показаны результаты подсчетовъ по формуламъ (42), (43) и (44) при $\varphi = 22°$ и $\varphi = 32°$.

*) Въ этой таблицѣ показаны отрицательныя значенія h/a; эти значенія сами по себѣ не имѣютъ смысла и внесены въ таблицу лишь для того, чтобы указать предѣлы отношенія H/a между которыми находится нулевое значеніе h/a.

Таблица 13.

H/a	$\varphi = 22°$			$\varphi = 32°$		
	$\cos\alpha$	h/a	Y/a	$\cos\alpha$	h/a	Y/a
4	—0.065	—0.061	0.469	—	—	—
5	0	+0.05	0.5	—	—	—
10	0.153	0.636	0.584	—	—	—
15	0.215	1.503	0.623	0.195	—0.084	0.609
20	0.25	1.874	0.646	0.25	+0.094	0.646
25	0.272	2.538	0.662	0.286	0.308	0.672
30	0.287	3.168	0.672	0.312	0.51	0.69

Изъ этой таблицы видно, что глубина заложенія фундамента h сильно измѣняется съ измѣненіемъ угла (φ) естественнаго откоса: при $H/a = 30$ для $\varphi = 22^0$ имѣемъ $h/a = 3.168$, для $\varphi = 32^0$ $h/a = 0.51$, т. е. величина въ шесть разъ меньшая; при меньшихъ величинахъ отношенія H/a разница въ глубинѣ заложенія еще больше. Отсюда можно видѣть, какой вредъ приноситъ сооруженію пропиты ваніе грунта водой, когда φ сильно падаетъ.

Значенія $\frac{H}{a} = \infty 4{,}5.$ при $\varphi = 22^0$ и

$$\frac{H}{a} = \infty 17{,}6 \text{ при } \varphi = 32^0$$

при которыхъ h/a равно нулю, представляютъ предѣлъ, до котораго грунтъ не выпучиваясь выдерживаетъ нагрузку на поверхности. Такая нагрузка отнесенная къ единицѣ площади представляетъ временное сопротивленіе грунта. Его легко найти изъ соотношеній:

$$\frac{H}{a} = \infty\ 4{,}5$$

$$\frac{H}{a} = \infty 17{,}5$$

Вставивъ сюда вмѣсто H его значеніе $\frac{P}{\Delta}$ получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } \varphi = 22^0 \\ &\quad P = \infty\, 4{,}5\, \Delta a \\ &\text{для } \varphi = 32^0 \\ &\quad P = \infty 17{,}5\, \Delta a \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Слѣдовательно временное сопротивленіе грунта будетъ пропорціонально вѣсу единицы объема грунта и ширинѣ основанія сооруженія.

Если принять, напримѣръ, $\Delta = 0.0015$ kg/cm². и взять $a = 100$ ст., то получимъ:

$$\text{для } \varphi = 22^0$$

$$p_1 = \infty\, 4.5 \times 0.0015 \times 100 = 0.675 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{для } \varphi = 22^0$$

$$p_2 = \infty\, 17.5 \times 0.0015 \times 100 = 2{,}62 \text{ kg/cm}^2$$

Принявъ $a = 200$ ст. получимъ $p_1 = 1{,}35$ kg/cm², $p_2 = 5.25$ kg/cm, если $a = 50$ ст., то $p_1 = 0{,}338$ kg/cm². $p_2 = 1{,}31$ kg/cm².

Необходимо замѣтить, что всѣ наши выводы относятся къ плоской задачѣ, слѣдовательно они приложимы къ случаямъ, когда ширина фундамента невелика по сравненію съ длиной.

Мы опредѣляли глубину заложенія фундамента и временное сопротивленіе грунта по моменту наступленія предѣльнаго состоянія равновѣсія въ одной только опасной точкѣ. Въ это время въ другихъ точкахъ такое состояніе еще не наступило, поэтому можно предполагать, что выпучиваніе грунта, влекущее за собой разрушеніе основанія произойдетъ при большихъ нагрузкахъ нежели даютъ выше приведенныя формулы.

Для опредѣленія момента разрушенія основанія мной были произведены опыты надъ вдавливаніемъ въ песокъ небольшихъ дощечекъ толщиной около 4 ст., игравшихъ роль фундаментовъ. Размѣры этихъ фундаментовъ были: 8×16 ст., 8×32 ст., 16×32 см. и 24×36 см.

При опытахъ поверхность песка въ опытномъ ящикѣ выравнивалась горизонтально, на песокъ накладывалась дощечка, которая затѣмъ осторожно нагружалась чугунными болванками до тѣхъ поръ, пока не происходило разрушеніе основанія. Это явленіе наблюдалось достаточно ясно: сперва, при постепенномъ нагруженіи дощечки, она нѣсколько вдавливалась въ песокъ (примѣрно отъ 3 до 7 mm.), затѣмъ, когда нагрукка достигала нѣкоторой, такъ сказать, критической величины, песокъ сразу сдавалъ и дощечка какъ-бы проваливалась. Величина критической нагрузки измѣнялась въ зависимости отъ правильности расположенія чугунныхъ болванокъ,—чѣмъ равномѣрнѣе была нагружена дощечка, тѣмъ большей величины достигала критическая нагрузка; при этомъ при правильномъ расположеніи болванокъ, когда дощечка была нагружена равномѣрно, она проваливалась въ песокъ одинаково всей площадью, при неправильномъ расположеніи болванокъ она сваливалась на одинъ бокъ. Изъ нѣсколькихъ повторныхъ опытовъ можно было заключить, что при правильномъ равномѣрномъ нагруженіи разрушеніе основанія происходило:

для дощечки 8×16 cm. при нагрузкѣ ∞ 90 kg.

" " 8×32 cm. " " ∞ 180 kg.

" " 16×32 cm. " " ∞ 700 kg.

" " 24×36 cm. при нагрузкѣ ея всѣми, имѣвшимися въ распоряженіи, грузами (950 kg.) не проявлялось еще никакихъ признаковъ близости разрушенія основанія.

Теоретически сопротивленіе основанія (Q) при тѣхъ же размѣрахъ фундаментовъ можно опредѣлить по формуламъ (45). Для песка. съ которымъ производились опыты, уголъ естественнаго откоса можно принять равнымъ 32^0 и $\Delta = 0{,}0015$ $^{kg}/_{cm^3}$ тогда;

$$Q_1 = 17{,}5\ \Delta a \times 8 \times 16 = 17{,}5 \times 0{,}0015 \times 8 \times 8 \times 16 = 27 \text{ kg.}$$

$$Q_2 = 17{,}5\ \Delta a \times 8 \times 32 = 17{,}5 \times 0{,}0015 \times 8 \times 8 \times 32 = 54 \text{ kg.}$$

$$Q_3 = 17{,}5\ \Delta a \times 16 \times 32 = 17{,}5 \times 0{,}0015 \times 16 \times 16 \times 32 = 215 \text{ kg.}$$

$$Q_4 = 17{,}5\ \Delta a \times 24 \times 36 = 17{,}5 \times 0{,}0015 \times 24 \times 24 \times 36 = 545 \text{ kg.}$$

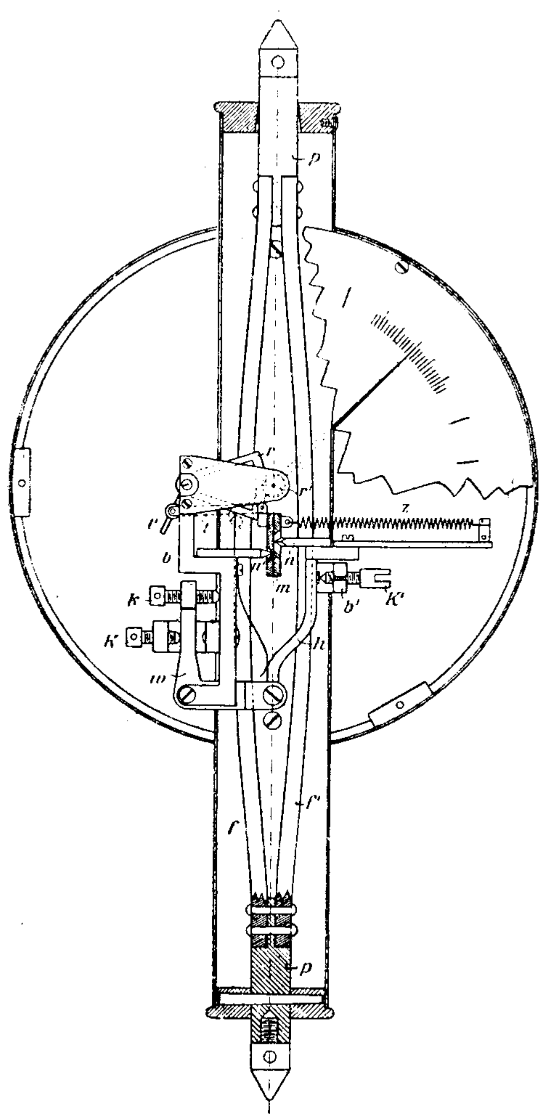
Слѣдовательно разрушеніе основанія происходило при нагрузкѣ въ 3—3,5 раза большей нежели даютъ формулы (45).

Полученная разность между теоретическимъ и опытнымъ сопротивленіемъ основанія конечно относится только къ взятому для опытовъ песку. Съ измѣненіемъ угла естественнаго откоса и плотности матеріала основанія эта разность будетъ измѣняться и надо полагать, что съ уменьшеніемъ угла естественнаго откоса она будетъ уменьшатся.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Описаніе опытовъ профессора Мюллера Бреслау.

Описаніе этихъ опытовъ мы заимствуемъ изъ книги профессора Мюллера Бреслау: „Erddruck auf Stützmauern.“ Они были произведены въ Берлинскомъ политехникумѣ въ 1905—1906 годахъ.



Черт. 24.

Представленный на черт. 24 измѣрительный приборъ состоялъ изъ двухъ слегка изогнутыхъ пружинъ поперечнаго сѣченія 16 мм. $\times$ $\times$ 5 мм. изготовленныхъ изъ тигельной литой стали. Размѣры ихъ выбраны такъ, чтобы укороченію на Δs измѣрителя (длина послѣдняго

385 мм.) соотвѣтствовало расхожденіе пружинъ въ ключѣ на 12 Δs. Это движеніе пружинъ со значительнымъ увеличеніемъ съ помощью рычажковъ и зубчатокъ передавалось стрѣлкѣ-указателю, дающему на шкалѣ прямо величину нагрузки въ килограммахъ.

Измѣрители могли воспринять давленіе до 200 kg. При нагрузкѣ въ 30—200 kg. укороченіе конца составляло $12{,}5\times10^3$ мм., и полное измѣненіе длины стержня:

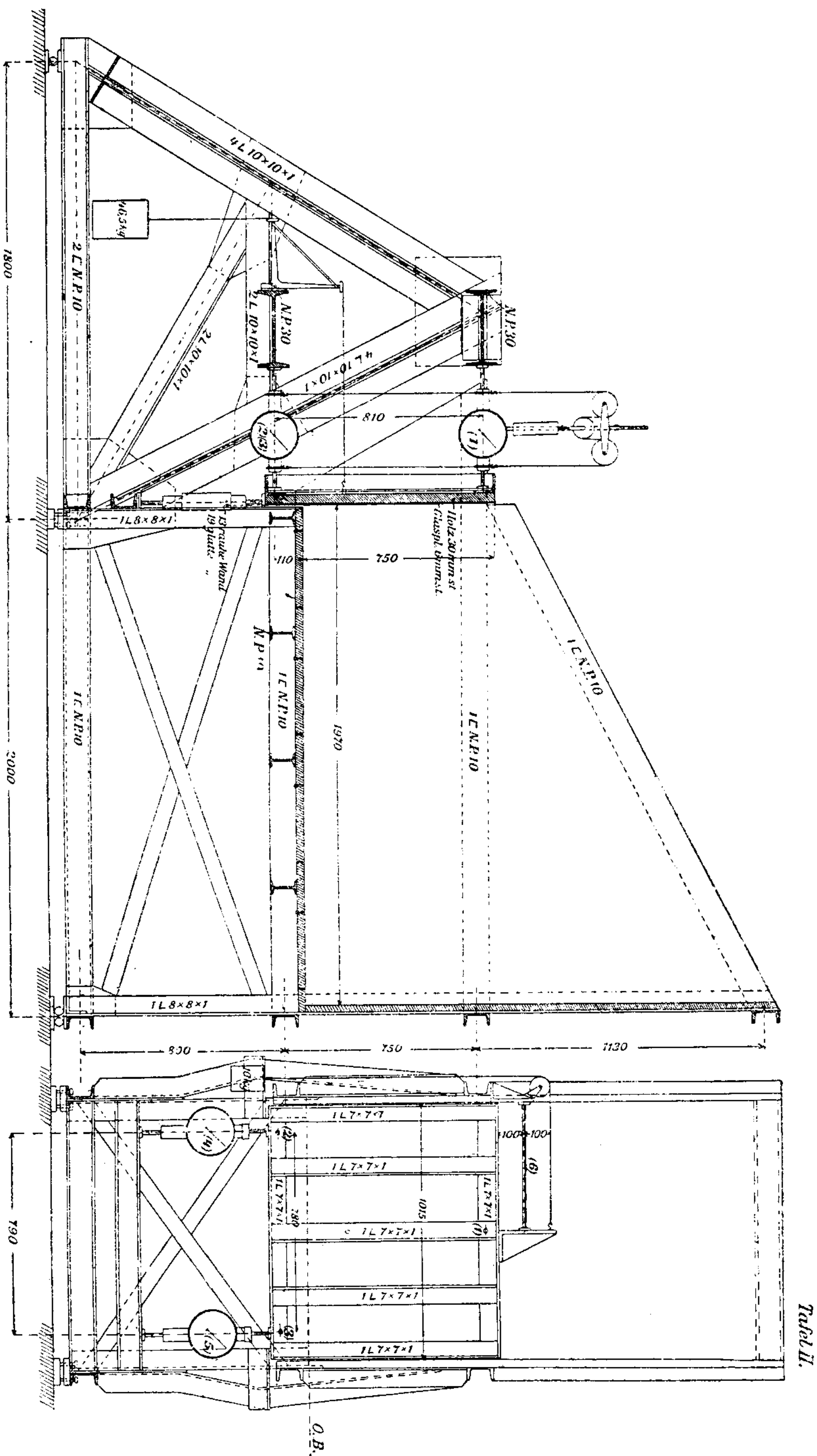
$$\Delta s = (83{,}86 + 2.12{,}5)\ 10^{-3} = 108{,}86.10^{-3}\ \text{мм}.$$

Для нагрузки 100 kg.

$$\Delta s = 0{,}064\ \text{мм}.$$

Приборъ для производства опытовъ представленъ на черт. 25. Для помѣщенія песка, давленіе котораго желаютъ опредѣлить, служитъ открытый съ передней стороны и сверху ящикъ шириной 101,5 cm., длиной 19 cm. съ горизонтальнымъ дномъ и отвѣсными боковыми стѣнками. Эти послѣднія для уменьшенія тренія о нихъ песка были обиты оксидированной и натертой графитомъ стальной жестью. Верхній ихъ край поднимается отъ передней стѣнки ящика къ задней подъ угл. $\infty 30^0$. Для болѣе удобнаго опоражниванія ящика полъ снабженъ 4-мя отверстіями, которыя открываются и закрываются при помощи задвижекъ. Для той же цѣли имѣется заслонка и въ задней стѣнкѣ. Передняя стѣнка ящика подвижная и опирается на 3 горизонтальныхъ и 2 вертикальныхъ вышеописанныхъ измѣрителя. Промежутокъ между подвижной и не подвижными стѣнками ящика сдѣланъ около 2 мм. Этотъ промежутокъ былъ прикрытъ полосками тонкой бумажной кальки, шириной около 30 мм., согнутыми уголкомъ, чтобы употребляемый для опытовъ мелкій песокъ не проваливался сквозь щели. При осторожномъ насыпаніи эти полоски прекрасно исполняли свое назначеніе. Чтобы измѣрители могли воспринять давленіе песка, пришлось предварительно надавить подвижную стѣнку на горизонтальные измѣрители при помощи противовѣсовъ (46.5 kg. и 10 kg.). На вертикальные измѣрители стѣнка достаточно давила своимъ собственнымъ вѣсомъ, который при шероховатой стѣнкѣ, оклеенной наждачнымъ полотномъ, былъ ∞ 60 kg, при гладкой, покрытой зеркальнымъ стекломъ около 75 kg. Собственный вѣсъ каждаго горизонтальнаго измѣрителя былъ уравновѣшенъ при помощи противовѣса, висящаго на подвижномъ блокѣ. Вертикальные измѣрители опирались на корытообразную балку, укрѣпленную на переднихъ ножкахъ ящика. Три горизонтальныхъ измѣрителя упирались въ двѣ двутавро-

Черт. 25.



выя балочки. № 30 и въ жесткіе козлы треугольной формы. Подвижная стѣнка деревянная толщиной 30 мм., она усилена желѣзными уголками и снабжена коническими лагерями для упора измѣрителей. Внутренняя сторона стѣнки оклеена наждачнымъ полотномъ. Для опытовъ съ гладкой поверхностью на стѣнку накладывалась пластинка изъ зеркальнаго стекла, укрѣплявшаяся помощью винтовъ и наугольниковъ.

Отсыпка песка производилась ручнымъ подъемнымъ краномъ, желѣзный ящикъ котораго вмѣщалъ около 0,75. $m.^3$ Поверхность дна этого ящика наклонная. Передняя стѣнка состоитъ изъ заслонки, которая помощью рычага можетъ быть открыта и закрыта во время отсыпки песка.

Опредѣленіе вѣса единицы объемы (литра) песка (γ), угловъ тренія φ и φ'.

Песокъ для опытовъ брали мелкозернистый Его сначала хорошенько просушивали; потомъ въ теченіе зимняго полугодія онъ находился въ совершенно сухомъ и хорошо отапливаемомъ помѣшеніи, предназначеннномъ для производства опытовъ. Чтобы знать величину зеренъ просѣяли 50 kg. песка череез 6 различныхъ ситъ и взвѣсили остатки. Оказалось:

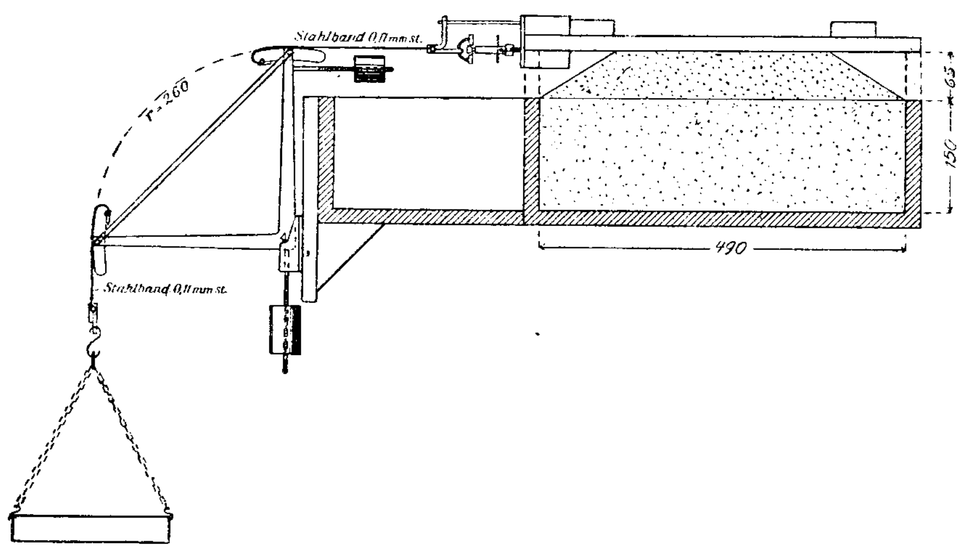
на ситѣ	съ	4	отверст.	на $cm.^2$	осталось	20
„	„	9	„	„	„	85
„	„	16	„	„	„	120
„	„	25	„	„	„	70
„	„	64	„	„	„	361.5
„	„	121	„	„	„	940.5
						1597 gr.
Прошло через сита					. . . .	48730.0
						49.967.0 gr.

Наполнивъ пескомъ литровую мѣру безъ встряхиванія, получили вѣсъ $\gamma = 1.58$; уплотненный песокъ имѣлъ $\gamma = 1.60$; насыпанный свободно въ ящикъ размѣрами $41 \times 21 \times 20.75$ cm. имѣлъ $\gamma = 1.56$. Затѣмъ при наполненіи ящика, служившаго для опытовъ, на дно его была поставлена плоская кювета $40 \times 40 \times 5$ cm.; по заполненіи почти всего ящика, непосредственно подъ самой поверхностью песка была помѣщена вторая такая же кювета. Въ верхней кюветѣ вѣсъ γ получился $= 1.58$, въ нижней $= 1.61$. Для вычисленій принято $\gamma = 1.6$ kg.

Для опредѣленія угла тренія песка φ, песокъ насыпали въ ящикъ прибора такимъ образомъ, чтобы отъ верхней грани подвижной стѣнки образовался естественный откосъ. Затѣмъ медленно открывали отверстіе въ днѣ и высыпали часть песку. Происшедшій отъ этого откосъ принималъ правильную плоскость, причемъ уголъ φ оказался равнымъ 32^0.

Для опредѣленія коэффиціента тренія стѣнки, оклеенной наждачнымъ полотномъ былъ произведенъ слѣдующій опытъ. На ящикъ размѣрами въ свѣту $49 \times 49 \times 15$ ст. (черт. 26) клали раму высотой 6.5 ст., служащую какъ бы продолженіемъ боковыхъ стѣнокъ ящика. Образованный такимъ образомъ ящикъ наполняли пескомъ, верхняя поверхность выравнивалась при помощи линейки, послѣ чего рамку осторожно снимали. На образованную такимъ образомъ совершенно ровную поверхность накладывалась оклеенная наждачнымъ полотномъ деревяннаи доска, которая могла быть сверху нагружена гирями.

Черт. 26.



Горизонтальная стальная лента толщиной 0.11 мм. соединяла лежавшую на пескѣ доску съ вращающимся на ножѣ равноплечимъ прямоугольнымъ рычагомъ. Центръ тяжести рычага приводился помощью подвижныхъ противовѣсовъ въ точку вращенія. Къ горизонтальному плечу рычага былъ подвѣшенъ поддонъ при помощи стальной ленты толщиной 0.11 мм. Нагрузка производилась медленнымъ насыпаніемъ дроби. Небольшія движенія доски были очень неправильны и состояли изъ постепенно возраставшихъ толчковъ. Нормальное давленіе доски на поверхность песка колебалось въ завосимости отъ величины наложенныхъ сверху грузовъ между 10,95 kg и 20,95 kg. Опыты продолжались $1^1/_4 - 1^1/_2$ час.; среднее значеніе коэффиціента тренія изъ 13 опытовъ было найдено:

$$tg\,\varphi^1 = 0.604 \text{ т. е. } \varphi^1 = 31^0\,8',$$

По величинѣ нагрузокъ на доску результаты располагались такъ:

I — 31^0 38' — давленіе 10.95 kg (4 опыта)

II — 31^0 15' — давленіе 15.95 kg (3 опыта)

III — 30^0 45' — давленіе 20.95 kg (6 опыт.)

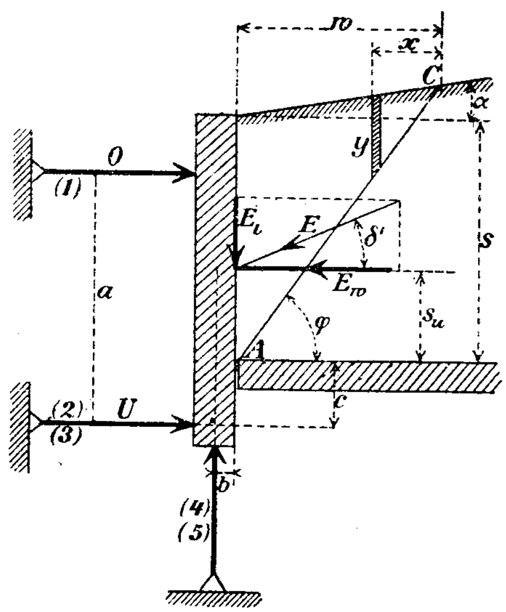
Въ первой группѣ опытовъ наибольшее отклоненіе значенія искомаго коэффиціента достигло 9%, во второй и третьей — 5%.

Судить о вліяніи величины нормальнаго давленія на уголъ тренія изъ этихъ цифръ нельзя: наибольшее его значеніе въ III-ьей группѣ $\varphi^1 = 31^0$ 17' было больше наименьшаго значенія въ I-ой группѣ $\varphi^1 = 30^0$ 17'. Пластинка проходила въ среднемъ путь въ 4 мм.

Формулы для расчета при опытахъ.

Обозначая черезъ $S_1\ S_2\ \ldots\ S_5$ усилія въ измѣрителяхъ и беря для обозначеній чертежа 27 размѣры съ черт. 25: $a = 810$ мм., $c = 110$ мм., $b = 13$ мм. для шероховатой или $b = 19$ мм. для стеклянной стѣнки получаемъ равенства (черт. 27):

Черт. 27.



$$0 = S_1;\ U = S_2 + S_3;$$

Горизонтальная слагающая давленія, очевидно, будетъ:

$$E_w = 0 + U$$

Вертикальная слагающая:

$$E_t = S_4 + S_5$$

Высота точки приложенія давленія земли надъ дномъ ящика:

$$S_u = \frac{8100 + \frac{13}{19}\, E_1}{E_w} - 110 \text{ мм.}$$

Опыты съ шероховатой стѣнкой.

Въ описаніи опытовъ обозначеніе T_n указываетъ на отсчеты произведенные въ n—ый день. Отсчеты дѣлались всегдаоколо полудня, между 12 и 3 часами дня. Спеціальный термометръ указывалъ предѣлы колебаній температуры въ помѣщеніи для опытовъ ($t\,max$ и $t\,min$) въ промежуткахъ между отсчетами.

Горизонтальныя отклоненія концовъ стержней 0 и u (черт. 27) и вертикальная осадка стѣнки обозначены черезъ η_0, η_u и η_1.

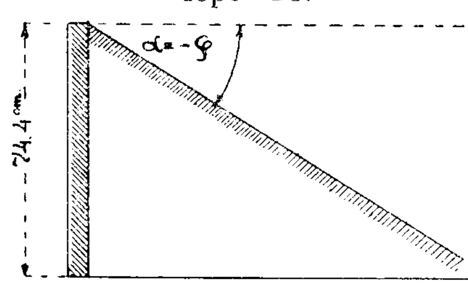
Опытъ 1.

Опытъ былъ начатъ 27 октября.

Въ первый день T_1 песокъ былъ медленно отсыпанъ подъ угломъ $\alpha = -\varphi$ (черт. 28). Немедленно послѣ засыпки получено было:

0	U	E_w	E_1	E	δ'	S_w	$S_n : h$
32.7	46.7	79.4	38.2	88	25°48'	23 0	0.310

Черт. 28.



$\eta_0 = 0.021$ мм.; $\eta_u = 0\,015$ мм.; $\eta_1 = 0.012$ мм. Давленіе наблюдалось нѣсколько дней; получено было:

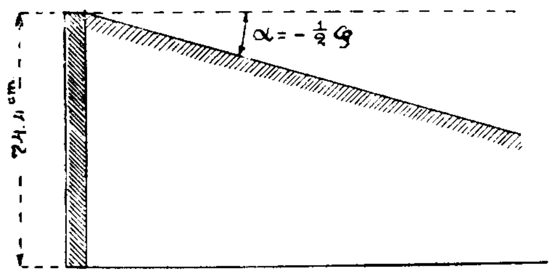
Таблица 14.

Дни.	Температуры.	0 kg.	U kg	E_w kg	E_1 kg	E kg	δ'	h_u ст.	$S_u : S$
T_2	16°. 7;21°; 21°. 5	33.1	47.3	80.4	39.4	89	26°.3'	23.0	0.310
T_5	17°. 3;22°.4;22°. 8	33.2	47.7	80.9	39.6	90	26°.5'	22.9	0.318
T_8	19°; 21°. 6;22°. 5	32.1	46.2	78.3	39.5	88	26°.46'	23.9	0.321

Опытъ 2.

Въ восьмой день въ ящикъ было присыпано нѣкоторое количество песка, такъ что поверхность его сдѣлалась наклоненой подъ угломъ $\alpha = {}^1/_2 \varphi = -16^0$;

Черт. 29.



Произведенные отсчеты дали:

Таблица 15.

Дни.	Температуры.	0 kg.	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	S_u ст.	$S_u : S$
T_8		40.9	53.8	94.7	47.6	106	$26^0\,41'$	24.6	0.331
T_9	$18^0.1; 20^0; 20^0$	42.0	55.2	97.2	47.7	108	$26^0\,8'$	24.6	0.331
T_{11}	$18^0.7; 20^0.5; 21^0.3$	41.0	54.3	95.3	49.0	107	$27^0\,12'$	24.5	0.330
T_{13}	$18^0.5; 21^0.6; 21^0.8$	40.7	53.2	93.9	47.5	105	$26^0\,50'$	24.8	0.333

Вновь присыпанный песокъ увеличилъ отклоненія на:

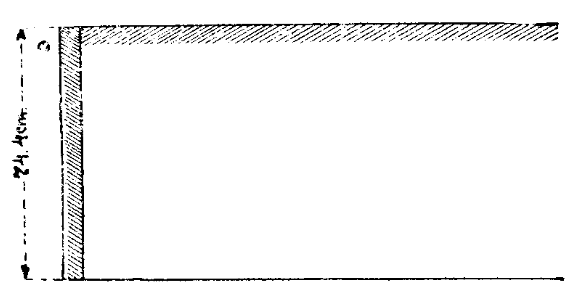
$\eta_0 = 0.006$ мм.; $\eta_u = 0.0025$ мм.; $\eta_l = 0.0025$ мм.

Опытъ 3.

Въ тринадцатый день сдѣлана была еще присыпка песка; откосъ доведенъ до горизонта $\alpha = 0$

Черт. 30.

$\alpha = 0$



Результаты:

Таблица 16.

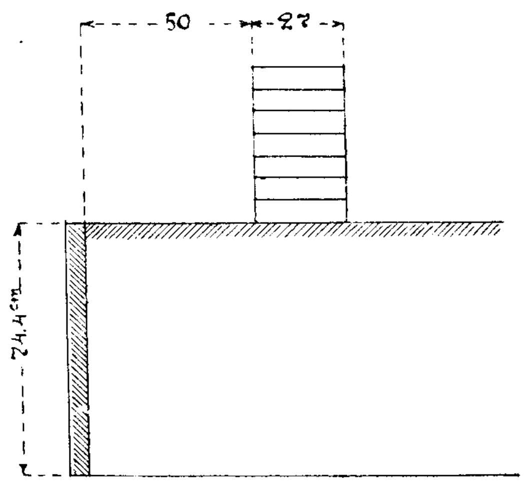
Дни.	Температуры.	0 kg.	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	S_u cm.	$S_u : S$
T_{13}		53.0	63.2	116.2	55.5	129	25°32′	26.6	0.358
T_{14}	18°.5;22°.3;22°.5	51.0	62.5	113.5	59.3	128	27°35′	26.1	0.351
T_{15}	18°.6;22°.2;23°.4	52.3	62.3	114.6	60.6	130	27°52′	26.7	0.359
T_{16}	18°.7;21°.5;23°.3	48.6	61.5	110.1	58.8	125	28°6′	25.4	0.342
T_{18}	18°.5;21°.5;23°.5	49.1	61.1	110.2	59.4	125	28°20′	25.8	0.347
T_{19}	18°.6;22°. 23°	51.3	61.2	112.5	58.2	127	27°22′	26.6	0.358

Присыпанный песокъ увеличилъ отклоненія на:

$$\eta_0 = 0.008 \text{ мм.}; \qquad \eta_u = 0.003 \text{ мм.}; \qquad \eta_l = 0.003 \text{ мм.}$$

Опытъ 4.

Послѣ этого на поверхность песка былъ положенъ грузъ въ 735.4 kg., состоящій изъ 7 приблизительно одинаковыхъ по вѣсу чугунныхъ плитъ (черт. 31).



Длина загруженнаго участка была 27 cm., ширина почти равнялась ширинѣ подпорной стѣнки; разстояніе отъ внутренней поверхности стѣнки до груза было 50 cm. (черт. 31). Грузъ находился внѣ призмы обрушенія; это было сдѣлано съ цѣлью опровергнуть ошибочное мнѣніе, что грузъ, расположенный внѣ предѣловъ призмы, не оказываетъ уже давленія на стѣнку. При помощи подвижного крана медленно и одновременно положили 4 плитки, составляющія 1 ый слой; спустя нѣсколько минутъ установилось соотвѣтствующее давленіе; начало загрузки въ 11 ч. 50 м.; конецъ 12 ч. 35 м. Послѣ укладки всѣхъ плитъ давленіе наблюдалось въ теченіе одной недѣли

Таблица 17.

Дни.	Температуры.	0 kg.	U kg	E_w kg	E_1 kg	E kg	δ'	S_u ст.	$S_u : S$
	Послѣ укладки.								
T_{19}	Перваго ряда	64.7	70.8	135.5	62.2	149	24°39′	28.3	0.380
	Второго „	74.9	80.6	155.5	64.8	168	22°38′	28.6	0.384
	Третьяго „	84.5	87.9	172.4	68.4	185	21°37′	29.2	0.392
	Четверт. „	95.4	96.1	191 5	69.4	204	19°55′	29.8	0.400
	Пятаго „	105.0	103.5	208.5	71.0	220	18°48′	30.2	0.406
	Шестого „	116 1	111.2	227.3	71 8	238	17°32′	30.8	0.414
	Седьмого „	129.3	121.1	250.4	70.6	260	15°46′	31.2	0.420
T_{20}	18°.3,20°,23°	115.4	114.0	229.4	75.4	241	18°.12′	30.1	0.405
T_{22}	18°.3,21°,22°.8	115.5	114.3	229.8	80.0	243	19°.12′	30.2	0.406
T_{25}	16°,17°.5,17°.5	113.4	111.3	224.7	80.4	239	19°.42′	30.3	0.407
T_{26}	15°.9,17°.6,17°.6	114.4	111.1	225.5	81.9	240	19°.59′	30.5	0.410

Какъ видно, отъ приложенія груза давленіе увеличилось примѣрно вдвое. Максимальное его значеніе получилось тотчасъ послѣ приложенія груза.

Въ 19-тый день получены слѣдующія отклоненія стѣнки:

$$\eta_0 = 0.048 \text{ мм.}; \qquad \eta^u = 0.019 \text{ мм.}; \qquad \eta = 0.005 \text{ мм.}$$

Въ 26-ой день нагрузка была снята. Тотчасъ же и два дня спустя опредѣлялось давленіе песка. Потомъ при открытыхъ окнахъ и закрытомъ отопленіи наблюдали измѣненія давленія въ теченіе 4-хъ дней. Измѣненія происходили въ тѣхъ же предѣлахъ, что и при закрытыхъ окнахъ; это доказываетъ, что въ теченіи первыхъ 26 дней не произошло большихъ ошибокъ въ измѣреніяхъ отъ небольшихъ измѣненій температуры. Невозможно, конечно, установить вполнѣ точно вліяніе температуры и степени влажности, потому что какъ ящикъ со своими опорами такъ и песокъ непрерывно мѣняютъ свою форму въ извѣстныхъ границахъ.

Результаты наблюденій:

Таблица 18.

Дни.	Температуры.	Q kg.	P kg.	E_w kg.	E_l kg.	E kg.	δ'	S_n cm.	$S_n : S$
	Снятіе груза продолжалось 40 мин.								
T_{26}		99.0	100.3	199 3	43.9	204	12°25′	29.4	0.395
T_{28}	15°; 16°; 17°.8	96.2	97.5	193,7	42.5	198	12°23′	29.5	0 396
	При открытыхъ окнахъ и закрытомъ отоплен.								
T_{29}	5°.5; 9°.3; 16°.0	93.4	99.3	192.7	48.4	199	14° 6′	28.6	0.384
T_{30}	7°.5: 9°.0; 9°.5	87.9	100.8	188.7	50.2	195	14°54′	27.1	0.364
	При закрытыхъ окнахъ и закрытомъ отоплен.								
T_{32}	9°.0; 17°.6; 19,7	88.9	100.5	189.7	55.3	197	16°17′	27.4	0.368

Нужно замѣтить, что давленіе послѣ снятія груза убыло довольно мало; это свидѣтельствуетъ о продолжительномъ вліяніи перегрузки засыпки на подпорную стѣну.

Послѣ снятія груза на 26-й день показанія измѣрителей дали слѣдующіе результаты:

$$\eta_0 = -\ 0.010 \text{ мм.};\ \eta_u = -\ 0,0035 \text{ mm};\ \eta_l = -0.012 \text{ mm}.$$

Опытъ 5.

Для уясненія вліянія нагрузки и разгрузки поверхности песка были произведены 3 слѣдующихъ опыта.

Песокъ былъ засыпаемъ такимъ же самымъ образомъ что и прежде, но начиная съ $\alpha = -\varphi$ засыпка производилась безостановочно до $\alpha = 0$: разстояніе груза до стѣны$=51$ сн. Температура измѣнялась въ такихъ же узкихъ предѣлахъ, что и въ теченіе раньше описаннаго опыта.

Таблица 19.

Дни.	O kg.	U kg.	E_w kg.	E_1 kg.	E kg.	δ'	S_n cm.	$S_n : S$
				I.				
				Песокъ насыпанъ до $\alpha=0$.				
T_1	54.5	61.5	116.0	62 8	132	$28^0 26'$	27.8	0.374
T_4	54 5	64.3	118.8	63.4	135	$28^0 5'$	26.9	0.362
				$\eta_0 = 0.035$ мм.; $\eta_u = 0.021$ мм : $\eta_e = 0.020$ мм.				
				Положенъ грузъ 735,4 kg.				
T_4	134.6	125 4	260.0	76 3	271	$16^0 22'$	31.4	0.422
T_9	124.6	115.7	240.3	81.2	254	$18^0 43'$	31.4	0.422
				II.				
				Песокъ насыпанъ до $\alpha=0$.				
T_1	54.4	63.8	118.2	62.7	134	$27^0 57'$	27,0	0.363
T_4	53 3	64.6	117.6	62.7	133	$28^0 4'$	26.2	0.352
				Положенъ грузъ 735.4 kg.				
T_1	126.4	124.8	251.2	85.2	265	$18^0 44'$	30.2	0.406
T_4	112.5	116.3	228.8	85 5	244	$20^0 29'$	29.3	0.394
				III.				
				Песокъ насыпанъ до $\alpha = 0$.				
T_1	56.0	64.2	120.2	64.4	136	$28^0 11'$	27.4	0.368
T_4	56.0	65.0	121.0	62.7	136	$27^0 23'$	27.1	0.364
				Положенъ грузъ 735.4 kg.				
T_4	135.3	126.7	262.0	81.3	274	$17^0 14'$	31.2	0.420
T_8	119.4	117.9	237.3	85.0	252	$19^0 42'$	30.2	0.406

Опытъ 6.

Нагрузка 314,4 kg была расположена въ разстояніи 1 cm. отъ внутренней поверхности стѣнки. Длина загруженной части равна 27 cm.

Черт. 32

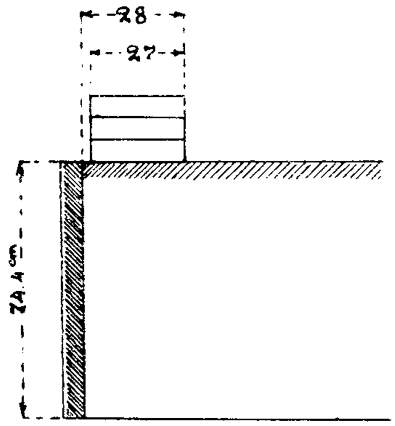


Таблица 20.

Дни.	0 kg.	U kg.	E_w kg.	E_1 kg.	E kg.	δ'	S_n cm.	$S_n : S$
		Песокъ насыпанъ до $\alpha = 0$						
T_1	54.8	64.4	119.2	60.5	134	26°55′	26.9	0.362
5	53.8	63.6	117.4	63.5	133	28°24′	26.8	0.360
		Положенъ грузъ.						
T_5	148.7	118.7	267.	139.6	302	27°34′	34.7	0.466
T_6	146.3	119.4	265.7	140.6	301	27°53′	34.4	0.462

Опытъ 7.

Нагрузка 418.8 kg на разст. 10 cm. отъ стѣнки

Черт. 33.

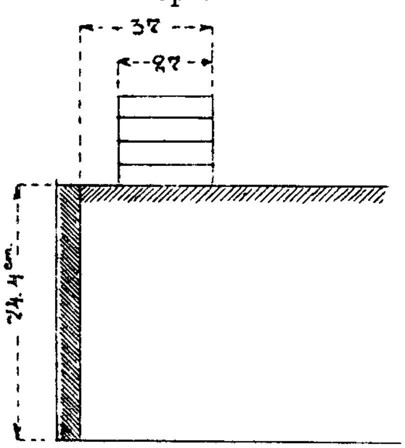
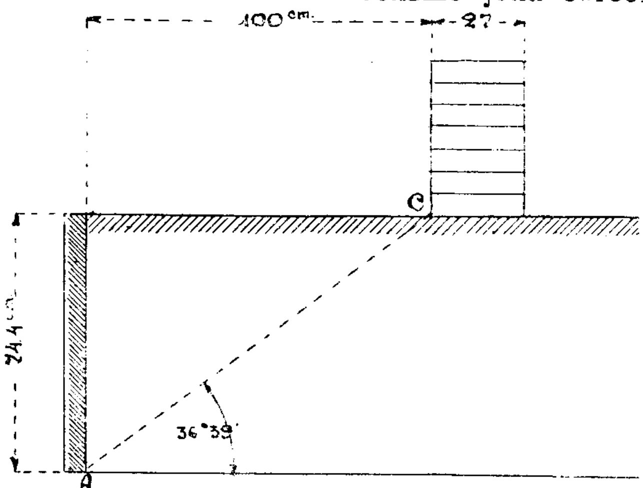


Таблица 21.

Дни.	O kg.	U kg.	E_w kg.	E_l kg.	E kg.	δ'	S_n cm.	$S_n : S$
		Песокъ насыпанъ до $\alpha = 0$						
T_1	54.4	64.2	118.6	63.6	135	28°12′	26.8	0.360
T_3	55 4	64.8	188.8	64.0	135	28°19′	26.5	0.356
		Положенъ грузъ.						
T_3	158.6	138 6	297.2	148.2	332	26°30′	32.9	0.442
T_5	152.5	135.2	287.7	153.0	326	28°0′	32.6	0.438
T_{25}	145.5	131.2	276.7	148.2	314	28°10′	32.3	0.434

Опытъ 8.

Грузъ 735.4 kg былъ расположенъ на разст. 100 cm. отъ стѣнки. Въ этомъ опытѣ плоскость AC (черт. 34) составляла съ горизонтомъ уголъ 36°39′ т. е. только на 4°30′ больше угла естественнаго откоса



Черт. 34,

Таблица 22.

Дни.	O kg.	U kg.	E_w kg.	E_l kg.	E kg.	δ'	S_n cm.	$S_n : S$
		Песокъ насыпанъ до $\alpha = 0$						
T_1	55.8	65 2	121.0	64.5	137	28°4′	27.1	0.364
T_3	54.9	64.5	119.4	65.6	136	28°47′	27.0	0.363
		Положенъ грузъ.						
T_3	84.6	92.1	176.7	79.4	194	24°17′	28.4	0.382
T_6	82.1	93.1	175.2	80.4	193	24°39′	27.5	0.370

Опытъ 9.

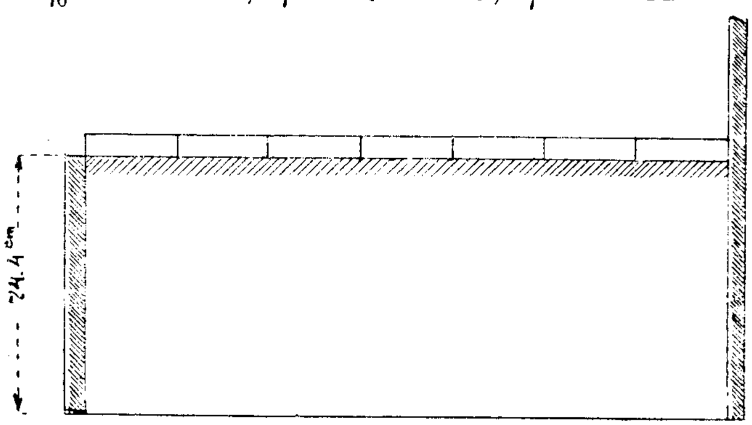
Этотъ опытъ продолжался довольно долго. Загрузка ящика производилась постепенно причемъ давленіе песка измѣрялось въ теченіе 20 дней.

Таблица 23.

Дни.	Q kg.	U kg.	E_w kg.	E_l kg.	E kg.	δ'	S_n cm.	$S_n : S$
		Песокъ насыпанъ до $\alpha=-\varphi$						
T_1	33.8	49.4	83.2	42.6	93	27° 7′	22.6	0.304
T_7	33.6	50.4	84.0	42.0	94	26°34′	22.0	0.296
		Песокъ досыпанъ до $\alpha=-0.5\varphi$						
T_7	43.4	57.0	100.4	53.1	114	27. 3′	24.7	0.332
T_{14}	42.5	55.7	98.2	49.2	110	26°37′	24.7	0.332
		Песокъ досыпанъ до $\alpha=0$						
T_{14}	52.2	63.0	115.2	58.1	129	26°46′	26.4	0.355
T_{20}	53.3	64.5	117.8	59.4	132	26°46′	26 3	0.354

Потомъ была приложена равномѣрная нагрузка 362 kg/mt²., состоящая изъ 7 поперечныхъ рядовъ одинаковаго вѣса чугунныхъ плитъ. Плиты каждаго поперечнаго ряда были положены помощью подвижного крана одновременно. Все нагруженіе продолжалось 65 минутъ. По истеченіи нѣсколькихъ дней нагрузка была поочередно то снимаема, то накладываема. Измѣненія длинъ измѣрителей, происшедшія отъ нагрузки:

$$\eta_0=0.026 \text{ мм.}; \ \eta_u=0.011 \text{ мм.}; \ \eta=0.012 \text{ мм.}$$



Черт. 35.

Давленія получились слѣдующія:

Таблица 24.

Дни.	O kg.	U kg.	E_w kg.	E_1 kg.	E kg.	δ'	S_n cm.	$S_n : S$
		Нагрузка положена, начиная отъ стѣнки.						
T_{20}	90.4	98.1	188.5	96.6	212	27° 8′	28.5	0.385
T_{25}	93.8	99.4	193.2	96.7	216	26°35′	29.0	0.390
		Нагрузка снималась въ противоп. поряд.						
T_{25}	81.3	90.5	171.8	52.9	179	17° 7′	27.7	0.372
T_{29}	81.0	83.6	164.6	49.3	172	16°40′	29.2	0.392
		Снова положена нагрузка.						
T_{29}	93.6	96.2	189.8	91.3	211	25°41′	29.6	0.398
T_{32}	95.7	96.5	192.2	94.8	214	26°15′	30.0	0.403
			Нагрузка снята.					
T_{32}	79.8	93.8	173.6	52.4	181	16°48′	26.6	0.358
T_{36}	79.6	83.8	163.4	46.8	170	15°59′	28.8	0.387
			Опять положена нагрузка.					
T_{36}	93.0	94.5	187.5	95.7	211	27° 2′	29.8	0.401
T_{42}	94.7	98.1	192.8	94.3	215	26°10′	29.4	0.395
			Послѣ снятія нагрузки.					
T_{42}	80.5	95.3	175.8	50.2	183	15°56″	26.5	0,356
T_{44}	79.9	92.7	172.6	48.9	179	15°49′	26.9	0.362

Повторные опыты съ равномѣрной нагрузкой дали:

Таблица 25.

Дни.	0 kg.	U kg.	E_w kg.	E_l kg.	E kg.	δ′	S_n cm.	$S_n : S$
T_1			Песокъ	насыпа	нъ до	$\alpha = 0$		
T_5	55.4	64.8	120.2	64.8	137	28°20′	27.0	0.363
T_5		Поло	жена на	грузка	p=362	kg/mt		
T_7	96.0	97.0	193.0	97.2	216	26°44.	29.9	0.402
T_7			Нагруз	ка сня	та			
T_9	82.8	90.1	172.9	52 8	181	16°59′	28.2	0.379
T_9			Нагруз	ка поло	жена			
T_{11}	99.7	93.7	193.4	96.2	216	26°24′	31.4	0.422
T_{11}			Нагруз	ка сня	та			
T_{14}	83.6	84.2	167.8	55.9	177	18°25′	29.8	0.400
T_{14}			Нагруз	ка поло	жена			
T_{18}	102.0	92,0	194.0	98.0	217	26°48′	32.2	0.433
T_{18}			Нагруз	ка сня	та.			
T_{20}	85.6	82.2	167.8	53.4	176	17°39′	30.7	0 413

Опыты съ гладкой стѣнкой.

Нѣсколько опытовъ производилось съ зеркальной стѣнкой главнымъ образомъ съ цѣлью измѣрить δ′ для гладкой стѣны. Приводимыя округленныя среднія значенія показываютъ, что при сухомъ пескѣ разница между давленіемъ на шероховатую и гладкую стѣнку невелика; къ этому же выводу пришелъ Leygue при своихъ опытахъ. Уголъ δ′ колебался между 19° и 22½°; среднее его значеніе—21°.

Таблица 26.

	E kg.	δ′	$S_u : S$
$\alpha = -\varphi$	90		0.31
$\alpha = -\frac{1}{2}\varphi$	120		0.33
$\alpha = 0$	140	21°	0.38
$\alpha = +\frac{1}{2}\varphi$	200		0.40