

В. П. ЗЫЛЕВЪ.

О двухъ свойствахъ родственныхъ опредѣлителей.

1. Въ маѣ 1914 г. профессоръ В. Л. Некрасовъ предложилъ мнѣ обобщить результаты интересной работы его: „объ одномъ свойствѣ родственныхъ опредѣлителей“^{*)}.

Мнѣ удалось достичь широкихъ обобщеній, выражаемыхъ двумя теоремами. Обѣ теоремы были открыты ранѣе, одна—Capelli и Garbieri^{**)}, другая въ частномъ видѣ—A. Cayley^{***)} и въ общемъ—E. von Weber'омъ^{****)}.

Замѣчу, что E. von Weber ошибочно приписываетъ L. Kronecker'у теорему A. Cayley, а W. H. Metzler ошибается, считая, что обобщеніе теоремы A. Cayley сдѣлано имъ лишь въ 1914 г.

Обобщеніе теоремъ проф. В. Л. Некрасова, а также новое доказательство теоремы Capelli-Garbieri осмѣливаюсь предложить вниманію читателей.

2. Родственными, по В. Л. Некрасову, опредѣлителями называются опредѣлители, выдѣленные изъ одной и той же матрицы. Рангомъ, или характеристикой матрицы, по Frobenius'у, называется наибольшій порядокъ ея миноровъ, неравныхъ нулю.

Возьмемъ матрицу, состоящую изъ n строкъ и $m > n$ столбцовъ; если рангъ ея $p < n$, то она называется исчезающей.

Теорема Capelli-Garbieri:

Если рангъ матрицы равенъ p , то родственные опредѣлители, заключенные въ p строкахъ (столбцахъ), пропорціональны соотвѣтствующимъ опредѣлителямъ, заключеннымъ въ какихъ-либо p строкахъ (столбцахъ).

*) Извѣстія Томскаго Технологическаго Института Императора Николая II, т. 32, 1913 г.

**) A. Capelli e G. Garbieri. Corso di analisi algebrica, 1, Padova 1886, p. 398.

***) Cambr. math. I. 4 (1847/8) p. 119.

****) E. von Weber. Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem. 1900, p. 13.

Наше доказательство основано на известной изъ теории опредѣлителей теоремѣ:

Если опредѣлитель $(p+1)$ -го порядка равенъ нулю, то миноры его, заключенные въ p строкахъ (столбцахъ) пропорціональны соотвѣтствующимъ опредѣлителямъ, заключеннымъ въ p какихъ-либо строкахъ (столбцахъ). Воспользуемся схематическимъ чертежомъ.

Черт. 1.

(Ф)

	A_{ik}		A_{it}	
	A_{qk}		A_{qt}	

Обозначимъ черезъ A_{ik} опредѣлитель p -го порядка, черезъ A_{it} — опредѣлитель, заключенный въ тѣхъ же строкахъ, а черезъ A_{qk} опредѣлитель, заключенный въ тѣхъ же столбцахъ, что и A_{ik} — наконецъ, черезъ A_{ik+1} назовемъ опредѣлитель, полученный изъ A_{ik} передвиженіемъ вдоль строкъ его на 1 столбецъ, и черезъ A_{i+1k} опредѣлитель, полученный изъ A_{ik} передвиженіемъ вдоль столбцовъ его на 1 строку; строки A_{qk} и столбцы A_{it} могутъ частично совпадать соотвѣтственно со строками и столбцами опредѣлителя A_{ik} .

Требуется доказать, что

$$\frac{A_{ik}}{A_{qk}} = \frac{A_{it}}{A_{qt}}.$$

Если рангъ $p = n$, то очевидно, $A_{ik} = A_{qk}$, и $A_{it} = A_{qt}$, такъ какъ число всѣхъ строкъ равно n и, слѣдовательно, строки опредѣлителей A_{qk} и A_{qt} совпадутъ со строками опредѣлителей A_{ik} и A_{it} ; тогда

$$\frac{A_{ik}}{A_{qk}} = 1 = \frac{A_{it}}{A_{qt}};$$

но случай этотъ не представляетъ интереса. Перейдемъ теперь къ доказательству теоремы для $p < n$, т. е. для исчезающей матрицы.

Пусть (см. черт. 2) прямоугольники AB, ED, FH, CJ обозначают соответственно определители A_{ik} , A_{ik+1} , A_{i+1k} , A_{i+1k+1} .

АЖ обозначить тогда определитель $(p+1)$ -го порядка, который, так как ранг матрицы есть p , равен нулю. Следовательно, на основании цитированной теоремы,

$$\frac{A_{ik}}{A_{i+1k}} = \frac{A_{ik+1}}{A_{i+1k+1}}.$$

Так как рассуждения не зависели от величины значков i , k , то имеемъ

$$\frac{A_{ik}}{A_{i+1k}} = \frac{A_{ik+1}}{A_{i+1k+1}} = \frac{A_{ik+2}}{A_{i+1k+2}} = \dots = \frac{A_{it}}{A_{i+1t}};$$

оставляя лишь первое и последнее отношения, получимъ

$$\frac{A_{ik}}{A_{i+1k}} = \frac{A_{it}}{A_{i+1t}}.$$

Точно также

$$\frac{A_{i+1k}}{A_{i+2k}} = \frac{A_{i+1t}}{A_{i+2t}}, \quad \frac{A_{i+2k}}{A_{i+3k}} = \frac{A_{i+2t}}{A_{i+3t}}, \quad \dots$$

$$\dots \frac{A_{q-1k}}{A_{qk}} = \frac{A_{q-1t}}{A_{qt}}.$$

Перемножая эти отношения, найдемъ

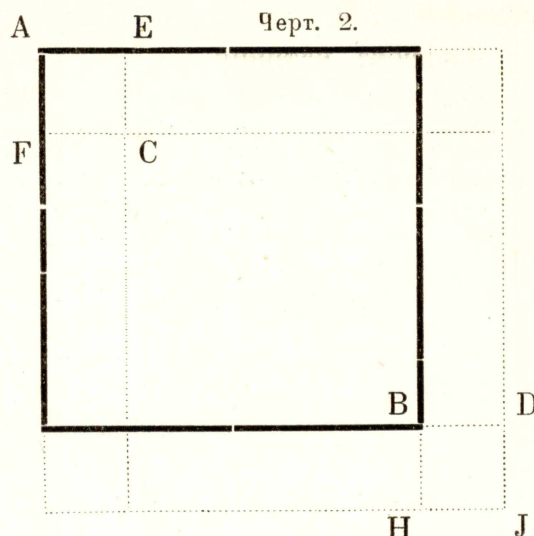
$$\frac{A_{ik}}{A_{qk}} = \frac{A_{it}}{A_{qt}},$$

что и требовалось доказать.

Теорема Cayley—E. von Weber:

Если все родственные определители $(p+m)$ -го порядка, полученные путем m -кратного окаймления определителя D, неравного нулю и порядка p , равны нулю, то и все родственные определители $(p+m)$ -го порядка равны нулю*).

*) Ibid.



3. Комбинація теоремъ Capelli-Garbieri и Cayley съ дополнительными разсужденіями даетъ обобщеніе теоремъ В. Л. Некрасова*); покажемъ это.

Возьмемъ матрицу

$$(Ф) \quad \begin{array}{c|cccc|cccc} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} & \dots & a_{1m} \\ & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-2} & a_{2n-1} & a_{2n} & \dots & a_{2m} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} & \dots & a_{n-2,m} \\ & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & \dots & a_{n-1,m} \\ & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} & \dots & a_{nm} \end{array}$$

Θ

а) Пусть опредѣлитель $D = (a_{21} \ a_{32} \ \dots \ a_{n,n-1}) \neq 0$. Если всѣ родственные опредѣлители n -го порядка, полученные черезъ окаймленіе D , равны 0, то, на основаніи теоремы Cayley, и всѣ родственные опредѣлители n -го порядка равны 0.

При $m=4$ и $n=3$ получаемъ первую теорему В. Л. Некрасова.

б) Вторая теорема представляетъ особенный интересъ, такъ какъ не является слѣдствіемъ какой-либо одной изъ общихъ теоремъ.

Допустимъ, что результаты однократнаго окаймленія D всѣ равны нулю, и хотя бы одинъ изъ родственныхъ опредѣлителей n -го порядка не равенъ нулю. Это возможно лишь тогда, когда $D=0$, такъ какъ въ противномъ случаѣ, на основаніи теоремы Cayley, всѣ опредѣлители n -го порядка равнялись бы нулю.

Достаточно посмотрѣть на матрицу (Ф), чтобы замѣтить, что каждый опредѣлитель, полученный черезъ простое окаймленіе $D = (a_{21} \ a_{32} \ \dots \ a_{n,n-1})$, есть въ то-же время результатъ окаймленія опредѣлителя $D_1 = (a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{n-1,n-1})$; слѣдовательно и $D_1=0$, такъ какъ въ противномъ случаѣ всѣ опредѣлители n -го порядка равнялись бы нулю.

Обратимъ теперь вниманіе лишь на ту часть (Θ) матрицы (Ф), которая состоитъ изъ $(n-1)$ первыхъ столбцовъ, и которую мы отдѣлили чертой (см. черт. 3). Покажемъ, что при $D=D_1=0$ всѣ опредѣлители $(n-1)$ -го порядка матрицы (Θ) равны нулю.

Дѣйствительно, если $\Delta = (a_{21} \ a_{23} \ \dots \ a_{n-1,n-2}) \neq 0$, то всѣ опредѣлители $(n-1)$ -го порядка матрицы равны нулю въ силу теоремы Cayley: всѣ, — въ данномъ случаѣ D и D_1 —, опредѣлители, являющіеся результатомъ окаймленія Δ , равны нулю.

*) См. названную выше работу.

Если $\Delta = 0$, то теорема Cayley не может быть приложена, и требуются дополнительные разсужденія*).

Обозначим определитель n -го порядка, заключенный въ (Θ) и отличный отъ D и D_1 , черезъ Δ_1 и покажемъ, что $\Delta_1=0$. Замѣтимъ, что Δ_1 обязательно содержитъ 1-ую и n -ую строку матрицы (Θ) , — такъ какъ въ противномъ случаѣ онъ совпадалъ бы съ D или D_1 , и еще какихъ то $(n-3)$ строкъ изъ $(n-1)$ строки: 2-ой, 3-ей и т. д. $(n-1)$ -ой.

Такъ какъ $D=0$, то между элементами каждаго столбца его существуетъ одно и то же линейное соотношеніе. Поэтому

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{31} + \dots + \lambda_{n-2} a_{n-11} \\ a_{12} &= \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 a_{32} + \dots + \lambda_{n-2} a_{n-12} \\ &\vdots \\ a_{1,n-1} &= \lambda_1 a_{2,n-1} + \lambda_2 a_{3,n-1} + \dots + \lambda_{n-2} a_{n-1,n-1}; \end{aligned} \quad (1)$$

для $D_1 = 0$ имѣемъ

$$\begin{aligned} a_{n1} &= \mu_1 a_{21} + \mu_2 a_{31} + \dots + \mu_{n-2} a_{n-1,1}, \\ a_{n2} &= \mu_1 a_{22} + \mu_2 a_{32} + \dots + \mu_{n-2} a_{n-1,2}, \\ .\quad.\quad.&\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad., \\ a_{n,n-1} &= \mu_1 a_{2,n-1} + \mu_2 a_{3,n-1} + \dots + \mu_{n-2} a_{n-1,n-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть, что не нарушает общности, Δ_1 не содержит второй строки матрицы (Θ) , т. е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-2} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix};$$

изъ 1-й строчки вычтемъ 2-ую, 3-ю, ..., $(n-2)$ -ую, умноженные соответственно на $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}$; изъ $(n-1)$ -ой строчки вычтемъ 2-ую, 3-ю, ..., $(n-2)$ -ую, умноженные соответственно на $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{n-2}$; тогда—на основании равенствъ (1) и (2)—получимъ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{21}, & \lambda_1 a_{22}, & \dots & \lambda_1 a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-2} \\ \mu_1 a_{21}, & \mu_1 a_{22}, & \dots & \mu_1 a_{2,n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

такъ какъ элементы 1-й строчки пропорціональны элементамъ послѣдней.

*) Въ доказательствѣ В. Л. Некрасова эти разсужденія заключаются, при $\Delta_2 \neq 0$, въ слѣдствіи изъ равенствъ (3) и (4); къ сожалѣнію, методъ В. Л. Некрасова мы не могли приложить въ общемъ случаѣ.

Итакъ, опредѣлители $(n-1)$ порядка матрицы (Θ) всѣ равны 0 (въ доказательствѣ В. Л. Некрасова только что изложенному соответствуетъ равенство нулю миноровъ (2)).

Слѣдовательно, рангъ матрицы $(\Theta) = r < n-1$, въ частности равенъ $(n-2)$; тогда—на основаніи теоремы Carrelli-Garbieri—всѣ родственные опредѣлители ея r -го порядка, заключенные въ r строкахъ (столбцахъ), пропорціональны соответствующимъ опредѣлителямъ, заключеннымъ въ какихъ-либо строкахъ (столбцахъ) (последнему разсужденію соответствуетъ послѣднее равенство работы В. Л. Некрасова).

Вл. Зылевъ.

15 января 1915 года.
Томскъ.