В. П. ЗЫЛЕВЪ.

Обобщеніе понятія и свойствъ матрицы, составленной изъ миноровъ другой матрицы.

1. Обобщая теоремы, относящіяся къ матрицѣ, составленной изъ миноровъ другой матрицы, мы расширяемъ понятіе составной матрицы настолько, что дальнѣйшее увеличеніе объема понятія кажется невозможнымъ, если за основу взята лишь одна матрица.

При выводѣ теоремъ пользуемся понятіемъ ранга матрицъ и приведеніемъ ихъ къ нормальному виду путемъ элементарныхъ преобразованій.

Элементарнымъ преобразованіемъ матрицы называютъ одну изъ слѣдующихъ операцій: a) транспозицію рядовъ, b) умноженіе всѣхъ элементовъ ряда на одно и то же число, неравное нулю, и c) прибавленіе къ элементамъ одного ряда соотвѣтственныхъ элементовъ параллельнаго ряда.

Элементарно-нормальнымъ видомъ матрицы, къ которому можно привести ее при помощи лишь одныхъ элементарныхъ преобразованій, т. е. не измѣняя ея ранга, назовемъ такой видъ матрицы, когда всѣ ея элементы равны нулю, за исключеніемъ ρ элементовъ, равныхъ единицѣ и стоящихъ на пересѣченіи ρ первыхъ строкъ съ соотвѣтствующими ρ первыми столбцами. Число ρ равно рангу матрицы*).

2. Возьмемъ матрицу

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{Vmatrix} \qquad (\Phi)$$

Образуемъ всѣ сочетанія строкъ по v_1, затѣмъ по v_2 и т. д., наконецъ,—по v_p, при $v_1+v_2+\dots+v_p.<n$.

Къ каждому изъ сочетаній по v_1 присоединимъ послѣдовательно каждое изъ сочетаній по v_2, не содержащихъ ни одной изъ строкъ сочетанія, къ которому они присоединяются; получимъ $C_n^{v_1}.C_{n-v_1}^{v_2}$ паръ соединеній.

*) См. Д. Граве. Элементы Высшей Алгебры, §§ 50—59. Кіевъ. 1914.

Къ каждой изъ этихъ паръ присоединяемъ послѣдовательно каждое изъ сочетаній по v_3, не содержащихъ ни одной строки пары, къ которой производимъ присоединеніе; получимъ $C_n^{v_1} \cdot C_{n-v_1}^{v_2} \cdot C_{n-v_1-v_2}^{v_3}$ соединеній.

Продолжаемъ процессъ до тѣхъ поръ, пока не исчерпаемъ всѣ числа v_1; получимъ

$$C_n^{v_1} \cdot C_{n-v_1}^{v_2} \ldots C_{n-v_1-\ldots-v_{p-1}}^{v_p} = \binom{v_1\, v_2 \ldots v_p}{n} = k_n$$

соединеній строкъ.

Каждое изъ этихъ соединеній состоитъ изъ p группъ: первая заключаетъ v_1 строкъ, вторая v_2, третья v_3 и т. д., p—тая v_p строкъ; одно изъ этихъ сложныхъ соединеній обозначимъ

$$[(i_{11}, i_{12}, \ldots i_{1v_1}),\ (i_{21}, \ldots i_{2v_2}), \ldots (i_{p1}, \ldots i_{pv_p})],$$

гдѣ i обозначаютъ номера строкъ; про это соединеніе скажемъ, что оно состоитъ изъ первой, второй, ..., p-той группы строкъ.

Точно также поступимъ со столбцами; получимъ

$$C_m^{v_1} \ldots C_{m-v_1-\ldots-v_{p-1}}^{v_p} = k_m$$

аналогичныхъ соединеній; одно изъ соединеній обозначимъ

$$[(j_{11}, j_{12}, \ldots j_{1v_1}), \ldots (j_{p1}, \ldots j_{pv_p})];$$

это соединеніе состоитъ изъ первой, второй, ..., p-той группы столбцовъ.

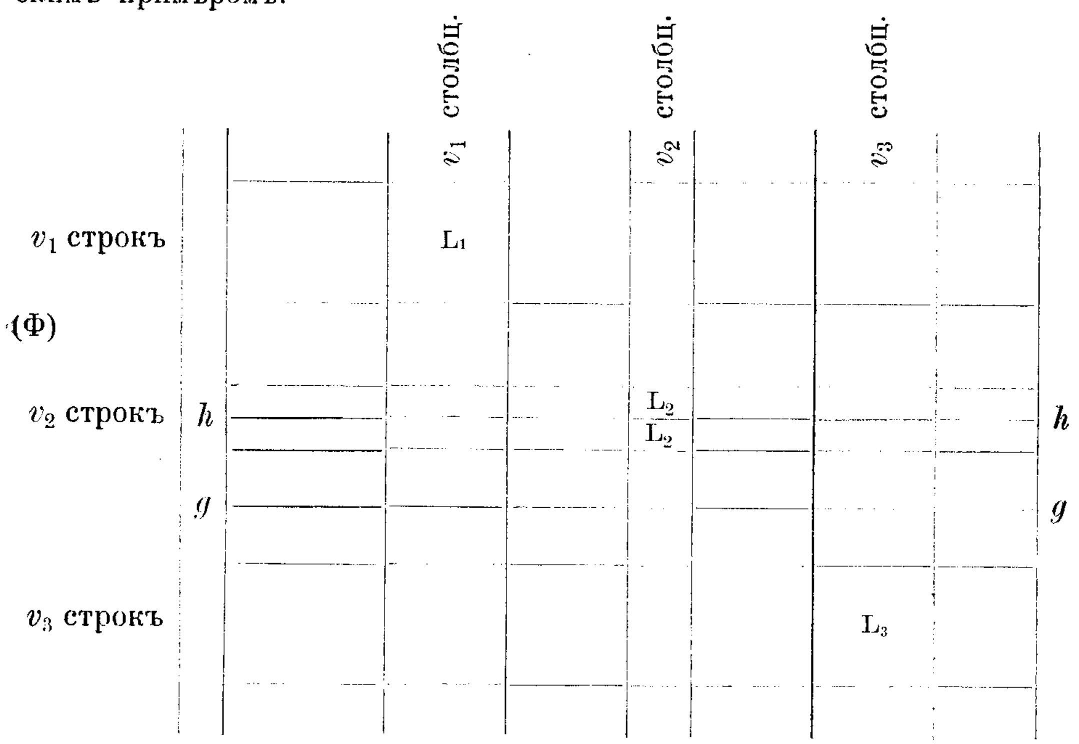
Расположимъ въ какомъ-либо порядкѣ всѣ соединенія строкъ, затѣмъ всѣ соединенія столбцовъ; назовемъ ихъ первымъ, вторымъ и т. д. соединеніями $\left\{\begin{array}{l}\text{строкъ}\\ \text{столбцовъ.}\end{array}\right.$ Образуемъ матрицу

$$(\Theta) \qquad \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k_m} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2k_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{k_n1} & A_{k_n2} & \ldots & A_{k_nk_m} \end{Vmatrix}$$

такъ составленную изъ матрицы (Φ), что A_{ij} равно произведенію p опредѣлителей, стоящихъ на пересѣченіе i-таго соединенія строкъ съ j-тымъ соединеніемъ столбцовъ;—именно первый изъ этихъ опредѣлителей состоитъ изъ элементовъ матрицы (Φ), лежащихъ на пересѣченіи v_1 строкъ первой группы i-таго соединенія строкъ съ v_1 столбцами первой группы j-таго соединенія столбцовъ; аналогично этому получается второй опредѣлитель, и т. д., наконецъ,—p-ый.

Назовемъ опредѣлители, изъ произведенія которыхъ состоитъ A_{ij}, соотвѣтственно изложенному, первымъ, вторымъ,..., p-тымъ опредѣлителями элемента A_{ij}; Матрицу (Θ) назовемъ составной изъ (Φ), а (Φ) по отношенію къ (Θ) основой.

Пояснимъ опредѣленіе составной матрицы слѣдующимъ схематическимъ примѣромъ:



Въ примѣрѣ $p=3$. Здѣсь представлено пересѣченіе одного изъ соединеній строкъ,—напримѣръ третьяго, матрицы (Φ) съ однимъ изъ соединеній столбцовъ, напримѣръ—пятымъ.

Соединеніе $\left\{\begin{matrix}\text{строкъ}\\\text{столбцовъ}\end{matrix}\right.$ состоитъ изъ трехъ группъ: первая заключаетъ v_1, вторая v_2, третья v_3 $\left\{\begin{matrix}\text{строкъ}\\\text{столбцовъ.}\end{matrix}\right.$

Первая группа соединенія строкъ пересѣкается съ первой группой соединенія столбцовъ по опредѣлителю, выражаясь кратко, L_1; вторая группа соединенія строкъ пересѣкается со второй группой соединенія столбцовъ по опредѣлителю L_2, и, наконецъ, третьи группы соединеній пересѣкаются по L_3. Тогда элементъ составной матрицы $A_{35}=L_1 L_2 L_3$; при чемъ L_1, L_2, L_3 соотвѣтственно первый,—второй, третій опредѣлители.

Пересѣченіе i-таго соединенія строкъ съ $1, 2, .. k_m$ соединеніями столбцовъ дастъ i-тую строку матрицы (Θ), а пересѣченіе j-таго соединеніе столбцовъ съ первымъ, вторымъ и т. д. k_n, соединеніемъ строкъ дастъ j-ый столбецъ матрицы (Θ).

З а м ѣ ч а н і е. Для дальнѣйшаго важно знать, какимъ образомъ элементы строки (столбца) матрицы (Φ) входятъ въ строки матрицы (Θ).

Не теряя общности, можемъ обратиться для выясненія этого обстоятельства къ нашему схематическому примѣру. Отмѣчены 2 строки: строка gg, элементы которой не входятъ въ A_{35} и строка hh, элементы которой входятъ въ A_{35}, именно—часть строки hh даетъ одну изъ строкъ 2 го опредѣлителя A_{35}. Если такимъ образомъ разсмотримъ пересѣченіе третьяго соединенія строкъ со всѣми соединеніями столбцовъ, то замѣтимъ, что каждый элементъ третьей строки составной матрицы заключаетъ въ качествѣ множителя опредѣлитель—въ нашемъ примѣрѣ второй, всѣ элементы одной изъ строкъ котораго принадлежатъ строкѣ hh матрицы (Ф).

Слѣдовательно, если умножимъ всѣ элементы строки hh на число a, то этимъ самымъ мы умножимъ всѣ строки матрицы (Θ), включающія элементы строки hh, на то же число.

Не трудно убѣдиться, что число строкъ матрицы (Θ), включающихъ элементы какой-либо строки матрицы (Ф), равно

$$k_n - k_{n-1} = C_n^{r_1} . C_{n-r_1}^{r_2} \ldots C_{n-r_1-\ldots-r_{p-1}}^{r_p} - C_{n-1}^{r_1} . C_{n-1-r_1}^{r_2} \ldots C_{n-1-r_1-\ldots-r_{p-1}}^{r_p}.$$

Дѣйствительно, число всѣхъ соединеній строкъ равно k_n, число соединеній, не включающихъ одну изъ строкъ матрицы (Ф), равно очевидно

$$k_{n-1} = C_{n-1}^{r_1} \ldots C_{n-1-r_1-\ldots-r_{p-1}}^{r_p}.$$

Слѣдовательно, число соединеній, включающихъ строку равно $k_n - k_{n-1}$, поэтому въ матрицѣ (Θ) будетъ $k_n - k_{n-1}$ строкъ съ элементами одной какой-либо строки изъ (Ф).

Отсюда, наконецъ, получаемъ важное заключеніе:
если умножимъ элементы строки матрицы (Ф) на a, то на a умножится $k_n - k_{n-1}$ строкъ матрицы (Θ)

Все сказанное о строкахъ приложимо и къ столбцамъ.

3. Докажемъ нѣсколько теоремъ.

Назовемъ элементарнымъ преобразованіемъ матрицы матрицу, полученную изъ первой путемъ элементарныхъ преобразованій.

Теорема I. Составная матрица изъ элементарнаго преобразованія матрицы (Ф) есть элементарное преобразованіе составной изъ (Ф).

Для доказательства разсмотримъ отдѣльно каждое изъ трехъ элементарныхъ преобразованій.

Первое элементарное преобразованіе матрицы (Ф), напримѣръ—транспозиція строкъ, нарушаетъ лишь порядокъ указанныхъ въ опредѣленіи составной матрицы соединеній строкъ: 1-е, 2-е,..., k_n соединенія перейдутъ соотвѣтственно въ $i_1, i_2, .., i_{k_n}$-е. Составная изъ новой матрицы будетъ, слѣдовательно, отличаться отъ составной изъ начальной лишь тѣмъ, что строки ея 1-ая, 2-ая, и т. д. перейдутъ соотвѣтственно въ i_1, i_2-ую, и т. д. Но подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{k_n} \end{pmatrix}$ можетъ быть замѣнена рядомъ транспозицій; поэтому для перваго преобразованія теорема справедлива.

Второе элементарное преобразованіе (Ф), напр.—умноженіе на a какого-либо столбца матрицы, равносильно, умноженію на a, какъ то уже показано въ замѣчаніи въ концѣ § 2, k_{m-1} столбцовъ (Θ).

Итакъ, для второго преобразованія теорема справедлива.

Наконецъ, третье элементарное преобразованіе, напр.—прибавленіе къ элементамъ 3-й строки матрицы (Ф) соотвѣтственныхъ элементовъ 8-й строки, равносильно въ составной прибавленію къ строкамъ строкъ; дѣйствительно, тѣ ряды матрицы (Θ), которые содержали прежде элементы 3-й строки (Ф), будутъ теперь содержать элементы 3-й, измѣненной прибавленіемъ 8-й. Разбивая опредѣлители L на сумму двухъ опредѣлителей, обнаружимъ, что въ матрицѣ (Θ) къ строкамъ, заключающимъ элементы 3-й строки (Ф), прибавили строки, заключающія элементы 8-й.

Итакъ, для 3-го преобразованія теорема также справедлива. Выводъ изъ этой теоремы:

Рангъ составной изъ (Ф) матрицы равенъ рангу составной изъ элементарнаго преобразованія матрицы (Ф).

Теорема II. Если рангъ матрицы (Ф) равенъ ρ, то рангъ составной матрицы (Θ) равенъ

$$k_\rho = C_\rho^{r_1}\, C_{\rho-r_1}^{r_2} \dots C_{\rho-r_1 \dots - r_{p-1}}^{r_p}.$$

На основаніи вывода изъ теоремы I-ой, очевидно достаточно опредѣлить рангъ составной матрицы изъ элементарно-нормальной формы матрицы (Ф).

Элементарно-нормальный видъ матрицы (Ф) слѣдующій

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \qquad (\Phi_1$$

Здѣсь число элементовъ, равныхъ единицѣ, равно ρ, которое равно рангу матрицъ (Φ) и (Φ_1).

Образуемъ изъ (Φ_1) составную слѣдующимъ образомъ: составляемъ сначала k_ρ соединеній $\left\{\begin{matrix}\text{строкъ}\\ \text{столбцовъ}\end{matrix}\right.$ матрицы опредѣлителя

$$\delta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{Vmatrix},$$

а затѣмъ уже будемъ брать соединенія, заключающія нулевые ряды.

Соединенія рядовъ, заключающихъ нулевые ряды, даютъ, очевидно, нулевые ряды въ матрицѣ (Θ_1).

Расположимъ k_ρ соединеній строкъ и k_ρ соединеній столбцовъ матрицы δ такъ, чтобы между соединеніями строкъ съ одной стороны и столбцовъ—съ другой было полное соотвѣтствіе, т. е. если, напримѣръ, 5-е соединеніе строкъ имѣетъ видъ $[(2, .. 3); (4, .. 7, .. 8); ...]$, то 5-е соединеніе столбцовъ должно быть построено изъ столбцовъ точно также, т. е. должно имѣть видъ $[(2, .. 3); (4, .. 7, .. 8); ..]$. Обозначенія эти вполнѣ соотвѣтствуютъ общему обозначенію § 2, причемъ ряды располагаются въ порядкѣ возрастанія ихъ номеровъ.

Покажемъ, что матрица (Θ_1) будетъ имѣть такой же видъ, какъ и матрица (Φ_1), съ тѣмъ отличіемъ, что число единицъ будетъ равно

$$k_\rho = C_\rho^{v_1} \ldots C_{\rho - v_1 - v_2 .. - v_{p-1}}^{v_p} = \text{рангу } (\Theta_1) = \text{рангу } (\Theta).$$

Дѣйствительно, возьмемъ какое либо соединеніе строкъ матрицы (Φ_1), s-тое—напр.,

$$(1) \qquad [(i_{11}, i_{12}, .. i_{1v_1}); (i_{21}, i_{22}, .. i_{2v_2}); (i_{p1}, .. i_{pv_p})]$$

и t-тое соединеніе столбцовъ.

$$(2) \qquad [(j_{11}, .. j_{1v_1}); (j_{21}, j_{22} .. j_{2v_2}); \ldots (j_{p1}, .. j_{pv_p})].$$

Если $s = t < k_\rho$, то (2) будетъ такое же точно, какъ и (1), и каждый опредѣлитель пересѣченія равенъ 1, т. е. $A_{ss} = 1$.

Если $s \neq t$, то хотя бы одна изъ группъ соединенія (2), напр.—вторая, отличается отъ соотвѣтствующей группы соединенія (1). Это въ свою очередь указываетъ, что по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ $j_{21}, j_{22}, .. j_{2v_2}$, напр.,—$j_{22}$, не равно ни одному изъ чиселъ $(i_{21}, .. i_{2v_2})$; тогда опредѣлитель, стоящій на пересѣченіи строкъ $(i_{21}, i_{22}, .. i_{2v_2})$ столбцами $(j_{21}, j_{22}, .. j_{2v_2})$, равенъ нулю. Дѣйствительно, одинъ изъ столбцовъ его состоитъ лишь изъ нулей: j_{22}-ый столбецъ, пересѣкаясь съ $i_{21}, i_{22}, \ldots i_{2r_2}$, даетъ только нули, потому что въ опредѣлителѣ δ всѣ элементы, за исключеніемъ главныхъ, равны 0; итакъ, при $s \neq t$, $A_{st}=0$; слѣдовательно, (Θ_1) имѣетъ видъ (Φ), при чемъ число единицъ равно k_ρ; этимъ мы доказали нашу теорему.

Слѣдствіе:

1°. Составная матрица изъ нормальной формы матрицы (Φ) есть нормальная форма составной изъ (Φ)*).

2°. Обращаясь отъ общаго случая къ частному, положимъ p равнымъ единицѣ, т. е. при образованіи составной матрицы сочетаемъ $\left\{\begin{matrix}\text{строки}\\ \text{столбцы}\end{matrix}\right.$ только по v_1. Въ этомъ, извѣстномъ уже математикамъ, случаѣ каждый элементъ матрицы состоитъ изъ одного опредѣлителя, а не изъ произведенія p опредѣлителей, какъ въ общемъ случаѣ.

Прилагая общую теорему получаемъ:

Рангъ простой составной матрицы равенъ $C_\rho^{v_1}$, если ρ рангъ основной.

4. Приложимъ изложенное къ квадратнымъ матрицамъ, въ частности—къ выражаемымъ ими опредѣлителямъ.

Изъ матрицы опредѣлителя n-таго порядка D образуемъ составную матрицу опредѣлителя, который обозначимъ черезъ Δ.

Теорема III. Составной опредѣлитель равенъ степени основного, показатель которой равенъ

$$C_n^{v_1} C_{n-v_1}^{v_2} \ldots C_{n-v_1 \ldots - v_{p-1}}^{v_p} - C_{n-1}^{v_1} . C_{n-1-v_1}^{v_2} \ldots C_{n-1-v_1 \ldots - v_{p-1}}^{v_p},$$

т. е. $\Delta = D^{k_n - k_{n-1}}$.

Если $D=0$, то и $\Delta=0$, такъ какъ его порядокъ есть k_n, а рангъ равенъ k_ρ, и при $\rho < n$ имѣемъ $k_\rho < k_n$.

Слѣдовательно, теорему нужно доказать для $D \neq 0$.

Приводимъ матрицу опредѣлителя D къ элементарно-нормальному виду D_1. Только второе изъ элементарныхъ преобразованій измѣняетъ величину опредѣлителя, именно—если $a_1, a_2, \ldots a_t$—множители, на которые приходилось множить ряды D для полученія D_1, то

$$D_1 = a_1 \, a_2 \ldots a_t \, D. \tag{1}$$

На основаніи слѣдствія перваго теоремы второй, матрица Δ при этомъ перейдетъ въ элементарно-нормальную форму Δ_1, и, на основаніи замѣчанія въ концѣ § 2,

$$\Delta_1 = a_1^{k_n - k_{n-1}} . \; a_2^{k_n - k_{n-1}} \ldots a_t^{k_n - k_{n-1}} . \Delta. \tag{2}$$

*) Здѣсь понятіе нормальной формы матрицы не ограничено только элементарно-нормальной формой.

Возвышая обѣ части (1) въ степень съ показателемъ $k_n - k_{n-1}$, получаемъ

$$D_1^{k_n - k_{n-1}} = (a_1\, a_2 \ldots a_t)^{k_n - k_{n-1}} \cdot D^{k_n - k_{n-1}};$$

а такъ какъ;

$$\Delta_1 = D_1 = 1,$$

то изъ сравненія этихъ равенствъ съ предыдущими находимъ

$$\Delta = D^{k_n - k_{n-1}}.$$

Слѣдствія:

1°. При $p=1$ получаемъ извѣстную теорему (Spottiswoode-Sylvester)

(3) $$\Delta = D^{C_n^{v_1} - C_{n-1}^{v_1}} = D^{C_{n-1}^{v_1-1}}.$$

Новый выводъ этой истины значительно отличается отъ извѣстныхъ, при чемъ D не предполагается у насъ опредѣлителемъ лишь обшаго вида.

2°. Еще болѣе частнымъ является тотъ случай, когда при $p=1$ имѣемъ $v_1=n-1$; въ этомъ случаѣ Δ обращается во взаимный съ D опредѣлитель, и (3) равенство даетъ:

(4) $$\Delta = D^{C_{n-1}^{n-2}} = D^{n-1}.$$

Замѣчаемъ, что теорема о величинѣ взаимнаго опредѣлителя можетъ быть получена независимо отъ теоремы о произведеніи опредѣлителей, такъ какъ хотя мы и говорили о произведеніи опредѣлителей, но теоремой объ умноженіи ихъ не пользовались.

5. Для каждаго изъ элементовъ опредѣлителя Δ можно въ D найти соотвѣтствующій адъюнктъ (алгебраическое дополненіе); опредѣлитель, полученный изъ Δ черезъ замѣну элементовъ его только что упомянутыми адъюнктами, обозначимъ черезъ δ.

Прилагая методъ обычныхъ разсужденій, пользуясь при этомъ обобщенной теоремой Laplace'а о разложеніи опредѣлителей, получимъ двѣ теоремы:

$$\text{IV)}\quad \delta = D^{k_n - (k_n - k_{n-1})} = D^{k_{n-1}},$$

$$\text{V)}\quad f_q = D^{q - k_{n-1}} \cdot g_{q_1}$$

являющуюся обобщеніемъ теоремы Franke*).

Здѣсь f_q миноръ q-таго порядка опредѣлителя Δ, g_{q_1} миноръ $(k_n - q)$-го порядка опредѣлителя δ, дополнительный къ минору, соотвѣтствующему f_q; при $p=1$ мы получаемъ формулу Franke, а при $p=1$ и $v_1 = n-1$ формулу для минора взаимнаго опредѣлителя.

*) См. Pascal, §§ 22—24.

6. Въ заключеніе приведемъ два примѣра на приложеніе изложеннаго.

1-й примѣръ. Теорема Cappelli-Garbieri*): „если рангъ матрицы (Ф) равенъ ρ, то опредѣлители ρ-таго порядка, заключенные въ какихъ либо ρ рядахъ пропорціональны соотвѣтствующимъ опредѣлителямъ, заключеннымъ въ другихъ ρ параллельныхъ рядахъ". Если ее приложить къ матрицѣ составной (Θ) изъ (Ф), ранга K_ρ, то, очевидно, получимъ большое обобщеніе теоремы, такъ какъ матрица (Ф) является частнымъ случаемъ (Θ).

2-й примѣръ: пользуясь методомъ § 4, выведемъ теорему объ умноженіи опредѣлителей. Предположимъ сначала неравенство нулю перемножаемыхъ опредѣлителей.

Имѣемъ два опредѣлителя

$$(1)\ |a_{ij}| \quad \text{и} \quad (2)\ |b_{ij}|$$

Образуемъ изъ нихъ новый опредѣлитель (3) $|c_{ij}|$ такъ, что

$$c_{ij} = a_{i1} b_{j1} + a_{i2} b_{j2} + \ldots + a_{in} b_{jn},$$

и докажемъ, что $|c_{ij}| = |a_{ij}| \cdot |b_{ij}|$.

Приводимъ матрицы опредѣлителей $|a_{ij}|$ и $|b_{ij}|$ къ нормальному виду. Лишь второе элементарное преобразованіе измѣнитъ величину ихъ, вводя множители.

Элементарно-нормальные виды соотвѣтствующихъ матрицъ даютъ опредѣлители, равные единицѣ

$$(4)\quad 1 = m_1\, m_2 \ldots m_t \cdot |a_{ij}|$$

$$(5)\quad 1 = q_1\, q_2 \ldots q_t\, |b_{ij}|,$$

гдѣ m и q множители, на которые приходилось умножать ряды матрицы (1) и (2). Умноженіе ряда одного изъ опредѣлителей (1) и (2), какъ легко видѣть изъ формы c_{ij}, даетъ умноженіе соотвѣтствующаго ряда опредѣлителя $|c_{ij}|$ на то же число. Кромѣ того опредѣлитель (3), составленный для элементарно-нормальныхъ формъ матрицъ (1) и (2), очевидно, есть элементарно-нормальная форма $|c_{ij}|$ и равенъ 1; отсюда

$$(6)\qquad 1 = m_1\, m_2 \ldots m_t \cdot q_1\, q_2 \cdot \cdot q_t\, |c_{ij}|.$$

Перемножая (4) и (5) и сравнивая съ (6), найдемъ

$$|c_{ij}| = |a_{ij}| \cdot |b_{ij}|.$$

Если одинъ или оба опредѣлителя равны нулю, то изъ вида элементарно-нормальной формы $|c_{ij}|$ увидимъ, что и $|c_{ij}| = 0$.

Томскъ, 7 января 1915 г. **В. Зылевъ.**

*) Capelli-Garbieri. Analisi algebrica, p. 398; 1886. текстъ ся у Pascal-Leitzmann.