М. Н. Ивановъ.

О МАЛЫХЪ КОЛЕБАНІЯХЪ

МАТЕРІАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

ОКОЛО ПОЛОЖЕНІЯ РАВНОВѢСІЯ.

ТОМСКЪ.
Типо-литографія Сибирскаго Т—ва Печатнаго Дѣла, уг. Дворянской ул. и Ямск. пер., соб. д.
1916.

О малыхъ колебаніяхъ матеріальной системы около положенія равновѣсія.

ВВЕДЕНІЕ.

Колебательныя движенія строго или приблизительно гармоническаго типа, вслѣдствіе тѣсной связи ихъ со многими важными вопросами, какъ теоретической, такъ и прикладной физики, довольно рано сдѣлались предметомъ спеціальнаго изученія. Изслѣдованіе простѣйшихъ случаевъ колебаній маятниковъ математическаго и физическаго—принадлежитъ *Галилею* (1564—1642) и *Гюйгенсу* (1629—1695)—основателямъ динамики; въ аналитической механикѣ *Lagrange*'а (1736—1813) мы видимъ уже разработанную теорію колебательныхъ движеній матеріальной системы около положенія равновѣсія. Въ основныхъ своихъ чертахъ эта теорія сохраняется и до настоящаго времени; работы позднѣйшихъ математиковъ (*Cauchy, Sturm, Weierstrass, Сомовъ*) усовершенствовали отдѣльныя части теоріи *Lagrange*'а и исправили допущенную имъ ошибку, не измѣняя самаго метода изслѣдованія.

Изложеніе Лагранжевой теоріи малыхъ колебаній съ исправленіями и дополненіями позднѣйшаго времени можно найти въ очень извѣстныхъ англійскихъ руководствахъ: Treatise on natural philosophy by lord *Kelvin* and *Tait*, Theory of Sound by lord *Rayleigh*, и Dynamics of a system of rigid bodies by *Routh*, а также въ работѣ проф. *Умова* подъ заглавіемъ: „Изъ лекцій математической физики“. Написанныя гораздо раньше, произведеннаго *Hertz*'емъ, раздѣленія механическихъ системъ на голономныя и неголономныя, указанныя выше работы имѣютъ въ виду колебанія системъ только голономныхъ. Это ихъ первая особенность.

Другой особенностью является устраненіе изъ изложенія многихъ подробностей алгебраическаго характера, затрудняющее пониманіе и заставляющее читающаго дѣлать дополненія недостающихъ подробностей изъ постороннихъ источниковъ.

Цѣль настоящей статьи—дать изложеніе исправленной теоріи *Lagrange*'а съ распространеніемъ ея на системы неголономныя, пользуясь при этомъ средствами алгебры и анализа въ такихъ размѣрахъ, которые указываются съ одной стороны строгостью математическаго изложенія, а съ другой—его возможной простотой и ясностью.

Общая постановка вопроса.

Механическія системы, малыя колебанія которыхъ мы имѣемъ въ виду изучить, предполагаются состоящими изъ отдѣльныхъ матеріальныхъ частицъ съ массой m_i (такъ назыв. матеріальныхъ точекъ) и координатами $x_i y_i z_i$, гдѣ индексъ i пробѣгаетъ рядъ значеній отъ 1 до m, равнаго числу всѣхъ различныхъ частицъ системы.

Въ полномъ согласіи съ вышеупомянутыми авторами мы будемъ предполагать дѣйствующія на систему силы консервативными, т. е. зависящими только отъ положенія точекъ, но не отъ скоростей; относительно же характера кинематическихъ связей между различными точками системы, мы будемъ держаться болѣе общихъ предположеній: на ряду съ связями, выражающимися конечными уравненіями между координатами вида

$$\varphi_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots . x_m, y_m, z_m) = 0,$$

мы допустимъ существованіе и связей дифференціальныхъ, выражаемыхъ, какъ всегда, уравненіями линейными относительно первыхъ производныхъ всѣхъ, или только нѣкоторыхъ, координатъ по времени.

Иначе говоря, мы будемъ имѣть въ виду системы, какъ голономныя, такъ и неголономныя, но при одномъ существенномъ ограниченіи, что время t не входитъ въ уравненія связей *явно*, а только черезъ посредство координатъ различныхъ точекъ системы, или ихъ первыхъ производныхъ по времени, т. е. составляющихъ скоростей отдѣльныхъ точекъ по координатнымъ осямъ. Отсутствіе времени t въ уравненіяхъ связей *явнымъ* образомъ исключаетъ возникновеніе съ теченіемъ времени какихъ либо измѣненій, какъ въ самыхъ связяхъ въ ихъ цѣломъ, такъ въ частности и въ той конфигураціи равновѣсія, около которой должны происходить по предположенію малыя колебанія системы.

Распространеніе метода Lagrange'а на системы неголономныя.

Возможность распространить теорію безконечно-малыхъ колебаній на системы неголономныя вытекаетъ изъ того, что при допустимости однихъ только безконечно малыхъ перемѣщеній всякая дифференціальная связь вышеуказаннаго вида (т. н. склерономная) становится связью интегрируемой и, слѣдовательно, можетъ быть замѣнена конечнымъ уравненіемъ между координатами.

Чтобы видѣть это, оставимъ временно безъ разсмотрѣнія дифференціальныя связи неголономной системы, которую мы предположимъ состоящей изъ m дискретныхъ матеріальныхъ частицъ или точекъ, связанныхъ конечными уравненіями вида:

$$\varphi_i(x_1, y_1, z_1, \ldots x_m, y_m, z_m) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots i), \tag{1}$$

и дифференціальными уравненіями вида:

$$\psi_k(x_1, y_1, \ldots x_1', y_1', z_1', \ldots) \equiv A_{k1} x_1' + B_{k1} y_1' + C_{k1} z_1' + \ldots + A_{km} x_m' + B_{km} y_m' + C_{km} z_m' = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots k), \tag{2}$$

и будемъ разсматривать пока только конечныя ея связи $\varphi_i = 0$.

Тогда по общему правилу, приложимому ко всякой голономной системѣ, изъ $3m$ Декартовыхъ координатъ отдѣльныхъ матеріальныхъ точекъ этой системы, связанныхъ i конечными уравненіями (1) связей, вполнѣ независимыми будутъ только $3m - i$ координатъ, выбранныхъ по нашему усмотрѣнію; остальныя i координатъ будутъ нѣкоторыми функціями первыхъ $3m - i$ координатъ.

Какова бы ни была форма функцій, выражающихъ зависимость i координатъ отъ остальныхъ координатъ системы, эти функціи всегда будутъ обладать однимъ очевиднымъ свойствомъ, а именно будутъ при подстановкѣ ихъ въ уравненія связей обращать эти уравненія въ нуль *тождественно*, т. е. при какой угодно системѣ частныхъ значеній независимыхъ координатъ. Понятно, что свойство это сохранится и въ томъ случаѣ, если мы систему независимыхъ другъ отъ друга $3m - i$ координатъ замѣнимъ какой нибудь другой системой такъ же независимыхъ другъ отъ друга координатъ $q_1, q_2, q_3 \ldots q_{3m-i}$, подчиненныхъ единственному условію, чтобы между первыми и вторыми координатами существовало однозначное соотвѣтствіе.

Установивъ тѣмъ или другимъ способомъ связь между $3m - i$ независимыми координатами старой системы и столькими же новыми координатами, которыя въ отличіе отъ первыхъ будемъ называть независимыми параметрами или обобщенными координатами *Lagrange*'а, мы безъ труда выразимъ и остающіяся i зависимыхъ координатъ черезъ тѣже параметры q_i и такимъ образомъ будемъ имѣть слѣдующую систему уравненій, связывающихъ старыя координаты съ новыми:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \overline{x}_i(q_1, q_2, \ldots q_n) \\ y_i &= \overline{y}_i(q_1, q_2, \ldots q_n) \\ z_i &= \overline{z}_i(q_1, q_2, \ldots q_n) \end{aligned}\right\} \; i = 1, 2, 3, \ldots m \tag{3}$$

гдѣ черезъ n обозначено ради краткости число $3m-i$, представляющее собой число независимыхъ координатъ системы или такъ называемое число степеней свободы голономной системы. Какъ было только что сказано, при выборѣ новыхъ координатъ были приняты во вниманіе два требованія: 1) чтобы конечныя уравненія связей при подстановкѣ въ нихъ новыхъ координатъ обращались въ тождества, и 2) чтобы каждая система частныхъ значеній координатъ $q_i (i=1, 2, 3 \ldots n)$ могла *вполнѣ* опредѣлять соотвѣтствующее положеніе системы. Къ этимъ требованіямъ присоединяется еще третье, вытекающее изъ непрерывности движенія, чтобы координаты x, y, z различныхъ точекъ системы были непрерывными функціями отъ координатъ q_i, а сами q были непрерывными функціями времени.

Не нарушая общности изслѣдованія, можно для упрощенія выкладокъ принять, что независимыя перемѣнныя q_i отсчитываются отъ положенія равновѣсія,—иными словами, можемъ принять въ положеніи равновѣсія всѣ параметры $q_1, q_2, \ldots q_n$ равными нулю.

Тогда разлагая каждую изъ координатъ x_i, y_i, z_i какой либо точки системы вблизи положенія равновѣсія, мы получимъ для этихъ координатъ слѣдующія выраженія:

$$(4)\quad \left.\begin{aligned}
x_i &= \xi_i + \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\right)_0 \Delta q_1 + \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_2}\right)_0 \Delta q_2 + \ldots\ldots = \xi_i + \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)_0 \Delta q_k + \alpha_2 \\
y_i &= \eta_i + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_1}\right)_0 \Delta q_1 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_2}\right)_0 \Delta q_2 + \ldots\ldots = \eta_i + \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\right)_0 \Delta q_k + \beta_2 \\
z_i &= \zeta_i + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)_0 \Delta q_1 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_2}\right)_0 \Delta q_2 + \ldots\ldots = \zeta_i + \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)_0 \Delta q_k + \gamma_2
\end{aligned}\right\}$$

Въ этихъ формулахъ черезъ ξ_i, η_i, ζ_i обозначены частныя значенія x_i, y_i, z_i при подстановкѣ въ нихъ $q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_n = 0$, т. е. Декартовы координаты различныхъ точекъ системы въ положеніи равновѣсія, а черезъ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$—совокупность членовъ 2-го и высшихъ порядковъ въ каждомъ изъ разложеній.

При малыхъ колебаніяхъ отклоненія системы отъ положенія равновѣсія остаются величинами малыми и потому въ первомъ приближеніи является возможнымъ ограничиваться въ разложеніи координатъ только членами перваго порядка. Ради удобства мы будемъ писать въ разложеніяхъ вмѣсто Δq_k просто q_k, предполагая при этомъ, что величины q_k остаются настолько малыми, что квадратами ихъ можно пренебрегать. Въ такомъ случаѣ уравненіямъ (4) можно будетъ придать болѣе удобную форму:

$$\left.\begin{aligned} x_i - \xi_i &= \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)_0 q_k \\ y_i - \eta_i &= \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\right)_0 q_k \\ z_i - \zeta_i &= \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)_0 q_k \end{aligned}\right\} i = 1, 2, 3 \ldots . m. \tag{5}$$

Обращаясь теперь, къ временно оставленнымъ безъ разсмотрѣнія, дифференціальнымъ связямъ и преобразуя линейныя уравненія (1) къ новымъ перемѣннымъ q_i съ помощью уравненій (5) и ихъ производныхъ, мы получимъ уравненія линейнаго же вида относительно производныхъ $q_1', q_2', \ldots . q_n'$ съ коеффиціентами, зависящими отъ параметровъ q_i и коеффиціентовъ преобразованія. Разложивъ каждый изъ коеффиціентовъ по степенямъ малыхъ величинъ q_i, мы получимъ преобразованныя уравненія дифференціальныхъ связей подъ видомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} C_i^k q_i' + \sum_{ij} C_{ij}^k q_i' q_j + \text{члены 2-го и высш. пор.} = 0, \tag{6}$$

гдѣ

$$k = 1, 2, 3 \ldots . k, \text{ а } i = j = 1, 2, 3 \ldots \ldots n.$$

Въ этихъ уравненіяхъ, согласно теоріи *Lagrange*'а, впослѣдствіи болѣе точно установленной *L. Dirichlet*, когда имѣются въ виду малыя колебанія около положенія *устойчиваго* равновѣсія, остаются малыми величинами не только координаты q_i, но и ихъ производныя по времени или скорости q_i'; поэтому съ точностью до величинъ 2-го порядка мы имѣемъ право написать уравненія дифференціальныхъ связей въ болѣе простомъ видѣ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} C_i^k q_i' = 0, \ (k = 1, 2, 3 \ldots . k). \tag{7}$$

Всѣ коеффиціенты уравненій (7) суть постоянныя, а потому лѣвыя части этихъ уравненій допускаютъ почленное интегрированіе, переводящее связи дифференціальныя въ разрядъ связей конечныхъ.

Вводимыя интегрированіемъ уравненій связей, произвольныя постоянныя должны быть всѣ приравнены нулю, такъ какъ въ положеніи равновѣсія всѣ параметры $\dot{q}_i$ по условію равны нулю и удовлетворяютъ уравненіямъ связей.

Итакъ ясно, что всякая дифференціальная связь въ данномъ случаѣ (т. е. при малыхъ колебаніяхъ) дѣйствуетъ на систему такъ же, какъ и связь конечная, т. е. понижаетъ на единицу число независимыхъ координатъ, или, что одно и тоже, уменьшаетъ на единицу число степеней свободы системы; такъ что результатомъ введенія k независимыхъ другъ отъ друга дифференціальныхъ связей является потеря системой еще новыхъ k степеней свободы.

Составленіе дифференціальныхъ уравненій движенія системы.

Имѣя въ виду все вышесказанное, мы будемъ предполагать положеніе всякой системы, голономной или неголономной, заданнымъ съ помощью уравненій вида:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \xi_i + \sum_k \alpha_{ik} q_k \\ y_i &= \eta_i + \sum_k \beta_{ik} q_k \\ z_i &= \zeta_i + \sum_k \gamma_{ik} q_k \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Въ этихъ уравненіяхъ ξ_i, η_i, ζ_i суть значенія координатъ отдѣльныхъ точекъ системы въ положеніи устойчиваго равновѣсія, а величины q_i суть независимые параметры *Lagrange*'а въ числѣ равномъ числу степеней свободы движущейся системы; всѣ q_k въ силу условнаго выбора начала счета равны нулю въ положеніи равновѣсія и отличны отъ нуля, но остаются малыми величинами вмѣстѣ съ ихъ производными по времени во все время движенія; коэффиціенты $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$ суть постоянныя, замѣняющія собой частныя производныя

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)_0, \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\right)_0, \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)_0.$$

Для составленія уравненій движенія въ формѣ *Lagrange*'а необходимо имѣть два выраженія: выраженіе для живой силы и потенціальной функціи системы.

Предполагая эти выраженія, если они заданы непосредственно въ функціи координатъ x_i, y_i, z_i, преобразованными къ новымъ перемѣннымъ q_k и ихъ производнымъ, мы придадимъ имъ слѣдующій видъ:

$$2\,\mathrm{T}=\sum_i m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)=\sum_{ik} a_{ik}\,q_i'\,q_k',$$

$$2\,\mathrm{V}=2\,\mathrm{V}\left\{\xi_i+\sum_k \alpha_{ik}q_k,\ \eta_i+\sum_k \beta_{ik}q_k,\ \zeta_i+\sum_k \gamma_{ik}q_k,\ldots\ldots\right\}.$$

Изъ этихъ двухъ формулъ первая получается съ помощью элементарныхъ алгебраическихъ дѣйствій и представляетъ собой однородную квадратичную функцію скоростей измѣненія неизвѣстныхъ параметровъ q_i' съ коеффиціентами a_{ik}, которые составляются очень простымъ образомъ изъ коеффиціентовъ $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$. Что касается второй формулы для потенціальной функціи $2\,\mathrm{V}$, то развивая ее по степенямъ различныхъ q_k, мы получимъ сначала формулу:

$$2\,\mathrm{V}=2\,\mathrm{V}_0+2\left\{\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q}\right)_0 q_1+\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_2}\right)_0 q_2+\ldots\ldots\right\}+\left\{\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2+2\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial q_1\,\partial q_2}\right)_0 q_1 q_2\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial q_1\,\partial q_3}\right)_0 q_1 q_3+\ldots\ldots+\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2+\ldots\ldots\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial q_k^2}\right)_0 q_k^2\right\}+\alpha_3,$$

въ которой α_3 обозначаетъ совокупность членовъ разложенія 3-го и высшихъ порядковъ. Частныя производныя отъ V по различнымъ координатамъ q_i въ положеніи равновѣсія, т. е. всѣ $\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_i}\right)_0$ должны обращаться въ нуль, что приводитъ $2\,\mathrm{V}$ къ виду:

$$2\,\mathrm{V}=2\,\mathrm{V}_0+\sum_{ik} b_{ik}\,q_i q_k, \tag{9}$$

если удерживать одни только члены 2-го порядка малости и писать сокращенно вмѣсто $\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_i\,\partial q_k}\right)_0$ символъ b_{ik}.

Полученныя выраженія живой силы и потенціальной энергіи въ какомъ-либо положеніи системы, близкомъ къ положенію устойчиваго равновѣсія, даютъ возможность написать дифференціальныя уравненія движенія этой системы.

Общій видъ этихъ уравненій

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i'}\right)-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i}=-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_i}\ \ (i=1,2,\ldots,k)$$

въ данномъ случаѣ приводится къ болѣе простому:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i'}\right)+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_i}=0\quad (i=1,2,3\ldots\ldots k), \tag{10}$$

благодаря тому, что выраженіе живой силы не содержитъ параметровъ q_i, а потому частныя производныя вида $\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)$ при всякомъ индексѣ i равны нулю.

Написавъ подробно выраженіе

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'}=a_{i1}q_1'+a_{i2}q_2'+a_{i3}q_3'+\ldots\ldots+a_{ik}q_k',$$

мы непосредственно замѣчаемъ, что

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'}=\frac{d}{dt}(a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+a_{i3}q_3+\ldots\ldots\ldots+a_{ik}q_i),$$

гдѣ многочленъ

$$a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+a_{i3}q_3+\ldots\ldots\ldots+a_{ik}q_k$$

есть частная производная по q_i отъ нѣкоторой однородной квадратичной функціи

$$Q=\frac{1}{2}\sum_{ik}a_{ik}q_iq_k,$$

которая получается изъ выраженія живой силы T простымъ отбрасываніемъ знаковъ производныхъ у параметровъ $q_1, q_2, q_3 \ldots q_k$.

Условимся ради краткости обозначать частныя производныя однородныхъ квадратичныхъ функцій Q и $V-V_0$ по аргументу q_i соотвѣтственно черезъ Q_i и V_i, такъ что

$$Q_i=\frac{\partial Q}{\partial q_i}=a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+a_{i3}q_3+\ldots\ldots+a_{ik}q_k, \tag{11}$$

$$V_i=\frac{\partial V}{\partial q_i}=b_{i1}q_1+b_{i2}q_2+b_{i3}q_3+\ldots\ldots+b_{ik}q_k. \tag{12}$$

Тогда уравненіямъ (10) можетъ быть придана болѣе симметричная форма:

$$\frac{d^2Q_i}{dt^2}+V_i=0 \quad (i=1, 2, 3, \ldots k). \tag{13}$$

Система (13) есть система линейныхъ однородныхъ дифференціальныхъ уравненій 2-го порядка съ постоянными коеффиціентами; интегрированіе ея выполняется обыкновенно подстановкой въ дифференціальныя уравненія системы пробныхъ рѣшеній вида $q_i=A_ie^{st}$ и слѣдующаго затѣмъ нахожденія значеній множителя s, которыя опредѣляютъ собой такъ называемые періоды колебаній системы—величины, тѣсно связанныя съ самой природой системы и не могущія измѣняться въ зависимости отъ того или другого выбора системы координатъ.

Но тѣже самыя уравненія могутъ быть интегрированы другимъ методомъ, не принятымъ авторами, трактовавшими вопросъ о малыхъ колебаніяхъ, но имѣющимъ на мой взглядъ нѣкоторыя преимущества передъ обычнымъ способомъ, состоящія въ большей естественности и доступности для пониманія, какъ общаго плана, такъ и отдѣльныхъ деталей рѣшенія.

Преобразованіе Лагранжевыхъ уравненій движенія къ уравненіямъ гармоническаго типа.

Уравненія *Lagrange*'а (13) только внѣшней формой напоминаютъ собой уравненія простыхъ гармоническихъ колебаній, такъ какъ функціи Q_i и V_i отличны другъ отъ друга; но пользуясь линейностью этихъ функцій относительно перемѣнныхъ q_i, мы можемъ, слѣдуя методу *D'Alembert*'а, искать такую линейную комбинацію уравненій (13), которая бы представляла собой дѣйствительно уравненіе гармоническаго типа.

Съ этой цѣлью множимъ различныя уравненія системы (13) послѣдовательно на неопредѣленныхъ множителей $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k$ и складываемъ ихъ почленно, подводя неопредѣленныхъ, но не зависящихъ отъ времени, множителей α_i подъ знакъ второй производной. Результатомъ этихъ дѣйствій будетъ уравненіе вида:

$$\frac{d^2}{dt^2}\{\alpha_1 Q_1+\alpha_2 Q_2+\alpha_3 Q_3+\ldots+\alpha_k Q_k\}+\{\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+\ldots+\alpha_k V_k\}=0. \quad (14)$$

Пользуясь неопредѣленностью множителей α_i, мы можемъ опредѣлить ихъ такъ, чтобы отношеніе

$$\frac{\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+\alpha_3 V_3+\ldots\ldots+\alpha_k V_k}{\alpha_1 Q_1+\alpha_2 Q_2+\alpha_3 Q_3+\ldots\ldots+\alpha_k Q_k}=s$$

не зависѣло отъ перемѣнныхъ q_i и времени t, иначе говоря, чтобы равенство:

$$\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+\ldots+\alpha_k V_k=s(\alpha_1 Q_1+\alpha_2 Q_2+\alpha_k Q_k)$$

выполнялось при какихъ угодно значеніяхъ q_i и t.

Это требованіе выполняется при пропорціональности коеффиціентовъ у различныхъ q_i въ правой и лѣвой части равенства, т. е. предполагаетъ существованіе слѣдующаго ряда равенствъ:

$$
(15)\quad \left.\begin{array}{l}
b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+b_{31}\alpha_3+\ldots b_{k1}\alpha_k=s(a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+a_{31}\alpha_3+\ldots a_{k1}\alpha_k)\\
b_{12}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+b_{32}\alpha_3+\ldots b_{k2}\alpha_k=s(a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+a_{32}\alpha_3+\ldots a_{k2}\alpha_k)\\
b_{13}\alpha_1+b_{23}\alpha_2+b_{33}\alpha_3+\ldots b_{k3}\alpha_k=s(a_{13}\alpha_1+a_{23}\alpha_2+a_{33}\alpha_3+\ldots a_{k3}\alpha_k)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
b_{1k}\alpha_1+b_{2k}\alpha_2+b_{3k}\alpha_3+\ldots b_{kk}\alpha_k=s(a_{1k}\alpha_1+a_{2k}\alpha_2+a_{3k}\alpha_3+\ldots a_{kk}\alpha_k)
\end{array}\right\}
$$

Перенося всѣ члены въ правую сторону и располагая по произвольнымъ множителямъ α_i, будемъ имѣть рядъ уравненій, выполняемыхъ условно, въ зависимости отъ s:

$$
(16)\quad \left.\begin{array}{l}
(a_{11}s-b_{11})\alpha_1+(a_{21}s-b_{21})\alpha_2+(a_{31}s-b_{31})\alpha_3+\ldots+(a_{k1}s-b_{k1})\alpha_k=0\\
(a_{12}s-b_{12})\alpha_1+(a_{22}s-b_{22})\alpha_2+(a_{32}s-b_{32})\alpha_3+\ldots+(a_{k2}s-b_{k2})\alpha_k=0\\
(a_{13}s-b_{13})\alpha_1+(a_{23}s-b_{23})\alpha_2+(a_{33}s-b_{33})\alpha_3+\ldots+(a_{k3}s-b_{k3})\alpha_k=0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(a_{1k}s-b_{1k})\alpha_1+(a_{2k}s-b_{2k})\alpha_2+(a_{3k}s-b_{3k})\alpha_3+\ldots+(a_{kk}s-b_{kk})\alpha_k=0
\end{array}\right\}
$$

Условіемъ совмѣстности этихъ уравненій служитъ равенство нулю детерминанта этой системы:

$$\Delta(s)=\|a_{11}s-b_{11},\ a_{22}s-b_{22},\ a_{33}s-b_{33},\ldots\ldots a_{kk}s-b_{kk}\| \quad (17)$$

Для краткости мы будемъ называть, какъ детерминантъ $\Delta(s)$, такъ и систему множителей α_i, гармонизирующими, такъ какъ съ ихъ помощью уравненіе (14) приводится къ гармоническому виду.

Отвлекаясь отъ трудностей разрѣшенія уравненія $\Delta(s)=0$ и предполагая найденнымъ какой нибудь изъ корней этого уравненія $s=s_h$, мы превратимъ систему *условно* совмѣстныхъ уравненій (16) въ систему *дѣйствительно* совмѣстныхъ уравненій, замѣнивъ въ уравненіяхъ (16) неопредѣленный множитель s черезъ s_h.

Изъ полученныхъ такимъ образомъ линейныхъ однородныхъ уравненій относительно множителей α_i, можно опредѣлить рядъ величинъ пропорціональныхъ этимъ множителямъ α_i, которыя мы будемъ отмѣчать тѣмъ же индексомъ h, который стоитъ у корня s_h.

Такимъ путемъ получится слѣдующій рядъ отношеній:

$$\frac{\alpha_{1h}}{M_{j1}(s_h)}=\frac{\alpha_{2h}}{M_{j2}(s_h)}=\frac{\alpha_{3h}}{M_{j3}(s_h)}=\ldots\ldots=\frac{\alpha_{kh}}{M_{jk}(s_h)}=C_{jh},$$

гдѣ M_{jn} есть миноръ детерминанта $\Delta(s)$, соотвѣтствующій элементу, стоящему на пересѣченіи j-ой строки и n-ой колонны, а C_{jh} есть множитель пропорціональности; индексы у постоянной C относятся: первый — къ строкѣ, второй — къ корню s_h.

Понятно, что вмѣсто миноровъ, соотвѣтствующихъ элементамъ j-ой строки опредѣлителя, можно бы было взять миноры элементовъ какой угодно другой строки того же опредѣлителя, такъ какъ между минорами опредѣлителя $\Delta(s)$, обращающагося при подстановкѣ вмѣсто s одного изъ корней s_h тождественно въ нуль, существуетъ слѣдующее соотношеніе:

$$\frac{M_{i1}}{M_{j1}}=\frac{M_{i2}}{M_{j2}}=\frac{M_{i3}}{M_{j3}}=\ldots\ldots\ldots=\frac{M_{ik}}{M_{jk}},$$

выражающее пропорціональность между минорами элементовъ, принадлежащихъ къ одной и той же колоннѣ (строкѣ) въ двухъ различныхъ строкахъ (колоннахъ).

Относительно всѣхъ вообще миноровъ детерминанта $\Delta(s)$ можно сдѣлать замѣчаніе, что они суть цѣлыя раціональныя функціи отъ s; поэтому всѣ миноры, а слѣдовательно и всѣ пропорціональные этимъ минорамъ множители α_i будутъ *вещественными* величинами при подстановкѣ вмѣсто s *вещественныхъ* и мнимыми—при подстановкѣ мнимыхъ корней уравненія $\Delta(s)=0$.

Различные способы, которыми изъ Лагранжевыхъ уравненій (13) могутъ быть составлены уравненія гармоническаго типа, зависятъ только отъ вещественныхъ корней уравненія $\Delta(s)=0$, и потому вопросъ о природѣ корней детерминанта $\Delta(s)$ занимаетъ видное мѣсто въ теоріи малыхъ колебаній системы.

Отсутствіе общихъ признаковъ, позволяющихъ судить о природѣ корней уравненій съ буквенными коеффиціентами, заставило искать для этой задачи рѣшенія окольнымъ путемъ, какъ это будетъ видно изъ послѣдующаго изложенія.

Вещественность корней уравненія $\Delta(s)=0$.

Въ основу, приводимаго мною, способа доказательства вещественности корней детерминанта $\Delta(s)$ положены изслѣдованія *Cauchy*, *Jacobi*, *Weierstrass*'а, *Sylvester*'а, *Сомова* и др., относящіяся къ преобразованію квадратичныхъ формъ и къ уравненію вѣковыхъ неравенствъ. Въ оправданіе отклоненій отъ принятаго порядка и формы изложенія я долженъ сказать, что моей цѣлью было одновременно, и доказательство вещественности корней, и указаніе въ общихъ чертахъ того пути, которымъ эти корни, при желаніи, могутъ быть дѣйствительно найдены.

Доказательство главнаго положенія слагается изъ трехъ, одинаково важныхъ, частей: 1) доказательства неизмѣняемости корней детерминанта $\Delta(s)$ послѣ упрощенія его съ помощью линейнаго преобразованія, 2) доказательства возможности упрощенія внѣшняго вида детерминанта, и 3) доказательства вещественности корней у детерминанта даннаго упрощеннаго вида.

1) Неизмѣняемость корней гармонизирующаго детерминанта.

Для удобства дальнѣйшаго изложенія согласимся обозначить результаты подстановки въ квадратичныя функціи Q и $V-V_0$ на мѣсто аргументовъ $q_1, q_2, \ldots q_k$ множителей $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_k$ соотвѣтственно черезъ $\varphi(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k)$ и $\psi(\alpha_1 \alpha_2, \ldots \alpha_k)$, или еще болѣе кратко черезъ φ и ψ безъ указанія аргументовъ; а частныя производныя 1-го и 2-го порядковъ отъ φ и ψ, разсматриваемыхъ какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, будемъ изображать символами:

$$\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \ldots \varphi_{11}, \varphi_{12} \ldots \text{ и т. д., гдѣ } \varphi_k = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}, \text{ а } \varphi_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k}.$$

Съ помощью этихъ обозначеній, при условіи, что s не зависитъ отъ перемѣнныхъ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, гармонизирующій детерминантъ $\Delta(s)$ можетъ быть представленъ подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\Delta(s) = \left\| \frac{\partial^2(s\varphi-\psi)}{\partial \alpha_1^2}, \frac{\partial^2(s\varphi-\psi)}{\partial \alpha_2^2}, \frac{\partial^2(s\varphi-\psi)}{\partial \alpha_3^2}, \ldots \frac{\partial^2(s\varphi-\psi)}{\partial \alpha_k^2} \right\|$$

$$(18) \qquad = \| \Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{33}, \ldots \Phi_{kk} \|,$$

гдѣ для сокращенія положено $s\varphi-\psi=\Phi$, а символъ Φ_{ik} обозначаетъ вторую производную $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k}$. Опредѣлитель $\| \Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{33} \ldots \Phi_{kk} \|$, которому можно также придать еще другой видъ:

$$\mathrm{H}(\Phi)_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} = \left\| \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha_3}, \ldots \frac{\partial \Phi_k}{\partial \alpha_k} \right\|,$$

есть такъ называемый Гессіанъ функціи Φ относительно ея аргументовъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_k$.

Изъ способа образованія Гессіана вытекаетъ, какъ слѣдствіе, что всякое преобразованіе, производимое надъ его функціей, должно принять видъ Гессіана. Не касаясь общаго вопроса о томъ, какъ отражается на составѣ Гессіана *какое угодно* преобразованіе его функціи, мы разсмотримъ здѣсь частный вопросъ объ измѣненіи формы Гессіана въ зависимости отъ *линейнаго* преобразоваія надъ его функціей. Чтобы точнѣе формулировать нашу задачу, положимъ, что функція $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_k)$ получается изъ другой однородной и квадратичной функціи $\Phi'(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_k)$, аргументы которой β_i связаны съ аргументами первой функціи α_i линейными однородными уравненіями съ вещественными коэффиціентами $l_1, l_2 \ldots r_1, r_2, \ldots r_k$ слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{array}{l}
\beta_1 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + \ldots + l_k\alpha_k \\
\beta_2 = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 + \ldots + m_k\alpha_k \\
\beta_3 = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 + \ldots + n_k\alpha_k \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta_k = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_3\alpha_3 + \ldots + r_k\alpha_k
\end{array}\right\} \qquad (19)$$

и требуется установить зависимость между Гессіанами

$$H(\Phi)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \text{ и } H(\Phi')_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}.$$

Для рѣшенія поставленной задачи, мы вычислимъ отдѣльные элементы Гессіана

$$H(\Phi)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = \left\| \frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_1}, \ \frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_2}, \ \frac{\partial\Phi_3}{\partial\alpha_3}, \ldots \frac{\partial\Phi_k}{\partial\alpha_k} \right\|,$$

разсматривая функцію Φ какъ сложную функцію, равную $\Phi'(\beta_1\beta_2\ldots\beta_k)$, въ которой аргументы β замѣнены ихъ значеніями съ помощью уравненій (19). Пользуясь правилами дифференцированія сложныхъ функцій, находимъ предварительно выраженія $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_k$, которыя имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\Phi_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1} = \frac{\partial\Phi'}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Phi'}{\partial\beta_2}\cdot\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_1} + \ldots + \frac{\partial\Phi'}{\partial\beta_k}\cdot\frac{\partial\beta_k}{\partial\alpha_1} = \Phi'_1 l_1 + \Phi'_2 m_1 \ldots + \Phi'_k r_1$$

$$\Phi_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_2} = \frac{\partial\Phi'}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\Phi'}{\partial\beta_2}\cdot\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_2} + \ldots + \frac{\partial\Phi'}{\partial\beta_k}\cdot\frac{\partial\beta_k}{\partial\alpha_2} = \Phi'_1 l_2 + \Phi'_2 m_2 \ldots + \Phi'_k r_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Phi_k = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_k} = \frac{\partial\Phi'}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_k} + \frac{\partial\Phi'}{\partial\beta_2}\cdot\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_k} + \ldots + \frac{\partial\Phi'}{\partial\beta_k}\cdot\frac{\partial\beta_k}{\partial\alpha_k} = \Phi'_1 l_k + \Phi'_2 m_k \ldots + \Phi'_k r_k$$

По тому же правилу какая нибудь изъ производныхъ 2-го порядка будетъ имѣть видъ:

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial\Phi_i}{\partial\alpha_j} = \frac{\partial\Phi_i}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_j} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial\beta_2}\cdot\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_j} + \ldots + \frac{\partial\Phi_i}{\partial\beta_k}\cdot\frac{\partial\beta_k}{\partial\alpha_j}$$

$$= \frac{\partial\Phi_i}{\partial\beta_1}\cdot l_j + \frac{\partial\Phi_i}{\partial\beta_2}\cdot m_j + \ldots + \frac{\partial\Phi_i}{\partial\beta_k}\cdot r_j,$$

при чемъ множители

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \beta_1}, \frac{\partial \Phi_i}{\partial \beta_2}, \ldots \frac{\partial \Phi_i}{\partial \beta_k}$$

представляютъ изъ себя суммы членовъ слѣдующаго вида:

$$(20)\begin{cases} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \beta_1} = \frac{\partial}{\partial \beta_1}(\Phi_1' l_i + \Phi_2' m_i + \ldots + \Phi_k' r_i) = \Phi_{11}' l_i + \Phi_{21}' m_i + \Phi_{31}' n_i + \ldots + \Phi_{k1}' r_i \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \beta_2} = \frac{\partial}{\partial \beta_2}(\Phi_1' l_i + \Phi_2' m_i + \ldots + \Phi_k' r_i) = \Phi_{12}' l_i + \Phi_{22}' m_i + \Phi_{32}' n_i + \ldots + \Phi_{k2}' r_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial}{\partial \beta_k}(\Phi_1' l_i + \Phi_2' m_i + \ldots + \Phi_k' r_i) = \Phi_{1k}' l_i + \Phi_{2k}' m_i + \Phi_{3k}' n_i + \ldots + \Phi_{kk}' r_i \end{cases}$$

Умножая, для составленія Φ_{ij}, уравненія (20): первое—на l_j, второе—на $m_j \ldots$, k-ое—на r_j, и складывая результаты по вертикальному направленію съ вынесеніемъ за скобку общихъ множителей $l_i, m_i, n_i \ldots r_i$, мы получимъ для Φ_{ij} слѣдующую формулу:

$$\Phi_{ji} = \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = l_i(\Phi_{11}' l_j + \Phi_{12}' m_j + \ldots + \Phi_{1k}' r_j) + m_i(\Phi_{21}' l_j + \Phi_{22}' m_j + \ldots + \Phi_{2k} r_j)$$

$$(21) \quad + n_i(\Phi_{31}' l_j + \Phi_{32}' m_j + \ldots + \Phi_{3k}' r_j) + \ldots + r_i(\Phi_{k1} l_j + \Phi_{k2}' m_j + \ldots + \Phi_{kk}' r_j)$$

Чтобы нагляднѣе представить себѣ законъ образованія члена Φ_{ij}, стоящаго на пересѣченіи i-й горизонтали съ j-ой вертикалью въ детерминантѣ $H(\Phi)_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$, разсмотримъ опредѣлитель

$$P = \| \Phi_{11}', \Phi_{22}', \ldots \Phi_{kk}' \| . \| l_1, m_2, n_3 \ldots r_k \| = \| p_{11}, p_{22}, p_{33} \ldots p_{kk} \|,$$

элементы котораго могутъ быть получены умноженіемъ элементовъ горизонталей одного на элементы горизонталей другого опредѣлителя.

Сравненіе, заключенныхъ въ скобки, множителей въ формулѣ (21) съ элементами j-ой колонны детерминанта P, позволяетъ написать для Φ_{ij} слѣдующее выраженіе:

$$\Phi_{ij} = l_i p_{1j} + m_i p_{2j} + n_i p_{3j} + \ldots + r_i p_{kj},$$

которое образовано умноженіемъ элементовъ i-ой горизонтали детерминанта

$$D = \| l_1, m_2, n_3 \dots r_\kappa \|,$$

называемаго модулемъ линейнаго преобразованія, на элементы j-ой вертикали детерминанта P.

Такъ какъ по такому закону образуются элементы детерминанта, равнаго произведенію детерминантовъ D и P, то мы приходимъ къ заключенію, что детерминантъ, образованный изъ элементовъ Φ_{ij}, есть произведеніе D.P или, что тоже самое

$$H(\Phi)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\kappa} = \| \Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{33} \dots \Phi_{\kappa\kappa} \| = D.P = D^2 \| \Phi_{11}', \Phi_{22}', \Phi_{33}', \dots \Phi'_{\kappa\kappa} \|$$
$$= D^2.H(\Phi')_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_\kappa}. \qquad (22)$$

Полученная формула показываетъ, что Гессіаны двухъ однородныхъ квадратичныхъ функцій, получаемыхъ одна изъ другой съ помощью линейнаго преобразованія аргументовъ, отличаются другъ отъ друга множителемъ, равнымъ квадрату модуля преобразованія.

Замѣчая, что квадратичныя функціи: основная и преобразованная съ помощью линейной подстановки—суть линейныя функціи отъ s, а Гессіаны ихъ H(Φ) и H(Φ') суть дискриминанты функцій Φ и Φ', имѣющіе видъ $\Delta(s)$ и $\Delta'(s)$, мы можемъ вмѣсто (22) написать слѣдующее равенство:

$$\Delta(s) = D^2.\Delta'(s), \qquad (23)$$

изъ котораго видно, что, при D не равномъ нулю, дискриминанты $\Delta(s)$ и $\Delta'(s)$, будучи цѣлыми многочленами одной и той же степени относительно s, т. е. корни уравненій $\Delta(s) = 0$ и $\Delta'(s) = 0$ одни и тѣже. Такимъ образомъ неизмѣняемость корней гармонизирующаго детерминанта послѣ линейнаго преобразованія вполнѣ доказана и мы можемъ перейти къ вопросу объ упрощеніи внѣшняго вида дискриминанта.

Упрощеніе дискриминанта съ помощью элементарныхъ преобразованій, производимыхъ надъ функціей Φ.

Не прибѣгая къ разрѣшенію уравненій, можно значительно упростить внѣшній видъ дискриминанта, приведя коеффиціентъ у s въ функціи Φ, т. е. квадратичную функцію φ, къ виду суммы k квадратовъ. Мы употребимъ для такого приведенія элементарный пріемъ группировки членовъ квадратичной формы 2φ, которую мы напишемъ слѣдующимъ образомъ:

$$2\varphi = a_{11}\left\{\alpha_1^2 + 2\alpha_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\alpha_2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}\alpha_3 + \dots + \frac{a_{1\kappa}}{a_{11}}\alpha_\kappa\right)\right\} + a_{22}\alpha_2^2 + 2a_{23}\alpha_2\alpha_3 \dots \qquad (24)$$

Дополняя члены въ скобкахъ до полнаго квадрата, мы дадимъ формѣ 2φ слѣдующій видъ:

$$2\varphi = a_{11}\left(\alpha_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\alpha_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}\alpha_3 + \ldots + \frac{a_{1\kappa}}{a_{11}}\alpha_\kappa\right)^2 + a_{22}\alpha_2^2 + \ldots + a_{\kappa\kappa}\alpha_\kappa^2$$
$$-\frac{1}{a_{11}}(a_{12}\,\alpha_2 + a_{13}\,\alpha_3 + \ldots)^2$$

$$(25) \qquad = a_{11}(\alpha_1 + a_2\,\alpha_2 + a_3\,\alpha_3 + \ldots + a_\kappa\,\alpha_\kappa)^2 + 2\chi(\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\kappa),$$

гдѣ

$$a_2 = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad a_3 = \frac{a_{13}}{a_{11}}, \ldots, \; a_\kappa = \frac{a_{1\kappa}}{a_{11}},$$

и 2χ обозначаетъ однородную квадратичную функцію аргументовъ $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\kappa$, при чемъ коэффиціенты этой функціи вычисляются непосредственно съ помощью только прямыхъ дѣйствій сложенія и умноженія. Примѣнивъ тотъ же самый пріемъ группировки членовъ къ формѣ 2χ, мы представимъ ее подъ видомъ:

$$(26) \quad 2\chi = p_2(\alpha_2 + b_3\,\alpha_3 + b_4\,\alpha_4 + \ldots + b_\kappa\,\alpha_\kappa)^2 + 2\,\omega\,(\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_\kappa),$$

гдѣ $b_3, b_4, \ldots b_\kappa$ суть коэффиціенты, аналогичные коэффиціентамъ $a_2, a_3, \ldots a_\kappa$, а $2\,\omega$ есть новая квадратичная форма отъ аргументовъ $\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_\kappa$. Продолжая тѣмъ же путемъ преобразованіе, мы придадимъ въ концѣ концовъ квадратичной формѣ 2φ слѣдующій видъ:

$$(27) \qquad 2\varphi' = a_{11}\,\beta_1^2 + p_2\,\beta_2^2 + p_3\,\beta_3^2 + \ldots + p_\kappa\,\beta_\kappa^2,$$

гдѣ для сокращенія черезъ $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_\kappa$ обозначены слѣдующія выраженія:

$$(28) \qquad \left.\begin{array}{l} \beta_1 = \alpha_1 + a_2\,\alpha_2 + a_3\,\alpha_3 + \ldots\ldots\ldots + a_\kappa\,\alpha_\kappa \\ \beta_2 = * + \quad \alpha_2 + b_3\,\alpha_3 + \ldots\ldots\ldots + b_\kappa\,\alpha_\kappa \\ \beta_3 = * + \quad * + \quad \alpha_3 + c_4\,\alpha_4 + \ldots + c_\kappa\,\alpha_\kappa \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_\kappa = * + \quad * + \quad * + \ldots\ldots\ldots + \quad \alpha_\kappa \end{array}\right\}$$

Такъ какъ для вычисленія коэффиціентовъ въ подстановкахъ (28) употребляются только умноженіе и сложеніе, то они могутъ быть только вещественными величинами.

Коэффиціентамъ $p_2, p_3, \ldots p_\kappa$ въ виду ихъ особенной роли можно придать удобную для вычисленія форму, пользуясь указаннымъ выше свойствомъ Гессіановъ квадратичныхъ формъ.

Такъ какъ форма 2φ получается изъ $2\varphi'$ помощью линейныхъ подстановокъ (28), то $\mathrm{H}(\varphi)_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} = \mathrm{H}(\varphi')_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k} D_1^2$, гдѣ

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1, & a_2, & a_3, & \ldots\ldots\ldots & a_k \\ 0, & 1, & b_3, & b_4, \ldots\ldots & b_k \\ 0, & 0, & 1, & c_4, \ldots\ldots & c_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0, \ldots\ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Слѣдовательно

$$\mathrm{H}(\varphi)_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} = \mathrm{H}(\varphi')_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & p_k \end{vmatrix} = a_{11} p_2 p_3 \ldots p_k \qquad (29)$$

Называя черезъ Δ_k дискриминантъ формы 2φ отъ всѣхъ k аргументовъ ея $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_k$, черезъ Δ_{k-1}—дискриминантъ той же формы, когда сдѣланъ равнымъ нулю аргументъ α_k, черезъ Δ_{k-2}—когда приравнены нулю аргументы α_k и α_{k-1}, и т. д., мы будемъ имѣть рядъ соотношеній:

$$\begin{aligned} \Delta_k &= a_{11} p_2 p_3 p_4 \ldots p_k \\ \Delta_{k-1} &= a_{11} p_2 p_3 p_4 \ldots p_{k-1} \\ \Delta_{k-2} &= a_{11} p_2 p_3 p_4 \ldots p_{k-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_3 &= a_{11} p_2 p_3 \\ \Delta_2 &= a_{11} p_2 \\ \Delta_1 &= a_{11} \end{aligned} \qquad (30)$$

которыя даютъ возможность выразить коэффиціенты $p_2, p_3, \ldots p_k$ черезъ детерминанты $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_k$.

Относительно детерминанта Δ_k нужно замѣтить, что онъ не можетъ равняться нулю, такъ какъ это есть детерминантъ квадратичной формы, представляющей живую силу системы, которая остается положительной величиной при какихъ угодно вещественныхъ значеніяхъ ея аргументовъ, и можетъ обращаться въ нуль только при одновременномъ обращеніи въ нуль всѣхъ аргументовъ; тоже самое относится и ко всѣмъ остальнымъ детерминантамъ $\Delta_{k-1}, \Delta_{k-2}, \ldots \Delta_3, \Delta_2, \Delta_1$.

Обращаясь теперь къ квадратичной формѣ 2ψ и производя надъ ней линейное преобразованiе съ помощью уравненiй (28), мы получимъ преобразованный видъ ея $2\psi'(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_\kappa)$, въ которомъ коэффицiентами будутъ количества $b_{i\kappa}'$, получаемыя элементарнымъ путемъ изъ коэффицiентовъ b_{ik} и коэффицiентовъ подстановокъ (28).

Образуя теперь дискриминантъ функцiи $\Phi' = s\varphi' - \psi'$, мы найдемъ его равнымъ слѣдующему опредѣлителю:

$$\Delta'(s) = \begin{vmatrix} a_{11}s - b_{11}', & -b_{12}', & -b_{13}', \ldots\ldots, & -b_{1\kappa}' \\ -b_{21}', & p_2 s - b_{22}', & -b_{23}', \ldots\ldots, & -b_{2\kappa}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_{\kappa 1}', & -b_{\kappa 2}', & -b_{\kappa 3}', \ldots\ldots, & p_n s - b_{\kappa\kappa}' \end{vmatrix},$$

который отличается отъ дискриминанта $\Delta(s)$ тѣмъ, что неизвѣстное s встрѣчается въ немъ только въ дiагональныхъ элементахъ, и потому характеръ корней его опредѣляется проще, чѣмъ у $\Delta(s)$.

Вещественность корней упрощеннаго дискриминанта $\Delta'(s)$.

Изобразимъ упрощенный дискриминантъ $\Delta'(s)$ въ видѣ окаймленнаго детерминанта, такъ что

$$\Delta'(s) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, 0 \\ 0 & a_{11}s - b_{11}', & -b_{12}', \ldots & -b_{1\kappa}' \\ 0, & -b_{21}', & p_2 s - b_{22}', \ldots & -b_{2\kappa}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & -b_{\kappa 1}', & -b_{\kappa 2}', \ldots & p_\kappa s - b_{\kappa\kappa}' \end{vmatrix}$$

и обозначимъ детерминанты, получаемые изъ него послѣдовательнымъ вычеркиванiемъ по одной строкѣ (снизу) и по одной колоннѣ (справа) черезъ:

$$\Delta_{\kappa-1}', \Delta_{\kappa-2}', \Delta_{\kappa-3}', \ldots \Delta_3', \Delta_2', \Delta_1', \Delta_0',$$

такъ что для какого нибудь Δ_{j+1}' имѣемъ выраженiе:

$$\Delta_{j+1}'(s) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & a_{11}s - b_{11}', & -b_{12}' \ldots\ldots\ldots b_{1\,j+1}' \\ 0, & -b_{21}', & p_2 s - b_{22}' \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & -b_{j+1,1}' & \ldots\ldots\ldots p_{j+1}' s - b_{j+1,j+1} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots 0 \\ 0, & u_{11}, & u_{12}, & \ldots u_{1j+1} \\ 0, & u_{21}, & u_{22}, & \ldots u_{2j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & u_{j+1,1}, & u_{j+12}, & \ldots u_{j+1j+1} \end{vmatrix}, \tag{31}
$$

гдѣ для краткости положено:

$$u_{jj} = p_j s - b_{jj}', \text{ и } u_{ij} = -b_{ij}', \text{ а } \Delta_0' = 1.$$

Изъ способа образованія опредѣлителей $\Delta_j'(s)$ ($j = 0, 1, 2, 3 \ldots k$) вытекаютъ слѣдующія очевидныя свойства ихъ:

1) Каждый детерминантъ $\Delta_j'(s)$ есть цѣлый полиномъ, расположенный по убывающимъ степенямъ s;

2) Высшій членъ каждаго детерминанта $\Delta_j'(s)$ имѣетъ коэффиціентомъ детерминантъ Δ_j, что слѣдуетъ непосредственно изъ формулъ (30).

Кромѣ этихъ, непосредственно очевидныхъ свойствъ, мы получимъ еще другія свойства тѣхъ же детерминантовъ, если произведемъ умноженіе детерминанта $\Delta_{j+1}'(s)$ на опредѣлитель 2-го порядка

$$
R_2 = \begin{vmatrix} M_{jj}, & M_{j,j+1} \\ M_{j+1,j}, & M_{j+1,j+1} \end{vmatrix},
$$

составленный изъ миноровъ M_{jj} опредѣлителя $\Delta_{j+1}'(s)$, соотвѣтствующихъ его элементамъ съ тѣми же индексами.

Для удобства выполненія умноженія, мы придадимъ опредѣлителю 2-го порядка R_2 форму опредѣлителя $(j+1)$-го порядка

$$
R_2 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots 0, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots 1, & 0, & 0 \\ M_{j1}, & M_{j2}, & M_{j3}, & \ldots M_{j,j-1}, & M_{jj}, & M_{j,j+1} \\ M_{j+11}, & M_{j+12}, & M_{j+13}, & \ldots M_{j+1,j-1}, & M_{j+1j}, & M_{j+1\,j+1} \end{vmatrix}
$$

и послѣ умноженія будемъ имѣть слѣдующій результатъ:

$$
\Delta_{j+1}'(s) R_2 = \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & \ldots u_{1j-1}, & u_{ij}, & u_{1j+1} \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & \ldots u_{2j-1}, & u_{2j}, & u_{2j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{j-11}, & u_{j-12}, & u_{j-13}, & \ldots u_{j-1j-1}, & u_{j-1\,j}, & u_{j-1j+1} \\ 0, & 0, & 0, & \ldots 0, & \Delta'_{j+1}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots 0, & 0, & \Delta'_{j+1} \end{vmatrix} = \Delta_{j-1}'(s)\, \Delta_{j+1}'^2(s)
$$

а по сокращеніи на $\Delta_{j+1}(s)$ получаемъ формулу:

$$R_2 = \Delta_{j-1}'(s)\,\Delta_{j+1}'(s),$$

которую можно также написать слѣдующимъ образомъ:

(32) $$\Delta_{j+i}'\,\Delta_{j-1}' = M_{jj}\,\Delta_j' - M_{j,j+1}\,M_{j+1,j}$$

По симметричности опредѣлителя $\Delta_{j+1}'(s)$ и его миноровъ произведеніе $M_{jj+1}\cdot M_{j+1,j} = M_{jj+1}^2$, т. е. величина положительная при какомъ угодно вещественномъ значеніи s. Поэтому, если мы найдемъ какимъ либо образомъ вещественный корень $s = s_j$ уравненія $\Delta_j'(s) = 0$ и вставимъ этотъ корень s_j вмѣсто s въ формулу (32), то получимъ слѣдующее равенство:

(33) $$\Delta_{j+1}'(s_j).\Delta_{j-1}'(s_j) = -[M_{j,j+1}(s_j)]^2,$$

которое показываетъ, что выраженія $\Delta_{j+1}'(s_j)$ и $\Delta_{j-1}'(s_j)$ имѣютъ разные знаки.

Это свойство принадлежитъ какимъ угодно тремъ рядомъ стоящимъ функціямъ и можетъ быть формулировано такъ: вещественные корни s_j любого детерминанта Δ_j' при подстановкѣ ихъ въ примыкающіе къ нему справа и слѣва детерминанты Δ_{j-1}' и Δ_{j+1}' даютъ результаты съ противоположными знаками.

Изъ этого свойства, относящагося къ какимъ угодно тремъ сосѣднимъ детерминантамъ, вытекаетъ очень важное слѣдствіе, касающееся всѣхъ детерминантовъ и состоящее въ томъ, что число варіацій знаковъ у опредѣлителей ряда

(34) $$\Delta_\kappa'(s),\ \Delta_{\kappa-1}'(s),\ \Delta_{\kappa-2}'(s), \ldots \Delta_3'(s),\ \Delta_2'(s),\ \Delta_1'(s),\ \Delta_0'$$

при подстановкѣ въ нихъ вмѣсто s сначала $s_j - \varepsilon$, а затѣмъ $s_j + \varepsilon$, гдѣ s_j есть одинъ изъ вещественныхъ корней детерминанта $\Delta_j'(s)$, остается безъ измѣненія.

Доказазательство этого свойства основывается на непрерывности всѣхъ членовъ ряда (34), какъ цѣлыхъ полиномовъ отностительно аргумента s; въ силу этой непрерывности при какомъ угодно измѣненіи s внутри безконечно малаго интервала отъ $s_j - \varepsilon$ до $s_j + \varepsilon$ сохранятъ свои знаки всѣ члены ряда (34), кромѣ $\Delta_j'(s)$, который при прохожденіи черезъ корень измѣнитъ знакъ съ $+$ на $-$, или наоборотъ.

Принявъ во вниманіе, что для $s = s_j$ знаки у $\Delta_{j+1}'(s)$ и $\Delta_{j-1}'(s)$ различны и сохраняются такими на всемъ безконечно маломъ интервалѣ $(s_j - \varepsilon,\ s_j + \varepsilon)$, мы будемъ имѣть слѣдующую возможную таблицу знаковъ для трехъ сосѣднихъ членовъ ряда (34):

	$\Delta_{j-1}'(s)$	$\Delta_j(s)$	$\Delta_{j+1}(s)$
$s_j - \varepsilon$	$\pm$	$\pm$	$\mp$
$s_j + \varepsilon$	$\pm$	$\mp$	$\mp$

Изъ этой таблицы видно, что при любой возможной комбинаціи знаковъ у трехъ функцій, способныхъ внести измѣненіе въ числѣ варіацій, этого измѣненія не происходитъ.

Безъ доказательства очевидно, что никакого измѣченія въ числѣ варіацій знаковъ не произойдетъ и въ томъ случаѣ, если вещественный корень s_j обратитъ въ нуль кромѣ $\Delta_j'(s)$ еще и другіе члены ряда (34), если только члены эти не слѣдуютъ другъ за другомъ непосредственно.

Всѣ, указанныя выше, свойства среднихъ членовъ ряда (34) приводятъ къ заключенію, что измѣненіе въ числѣ варіацій знаковъ у членовъ ряда (34) наступаетъ только при прохожденіи s черезъ какой нибудь вещественный корень опредѣлителя $\Delta'(s)$.

Мы установимъ полную аналогію ряда (34) съ рядомъ функцій *Штурма*, употребляемыхъ при отдѣленіи вещественныхъ корней алгебраическихъ уравненій, если докажемъ, что послѣдовательные члены ряда $\Delta_{j+1}'(s)$ и $\Delta_j'(s)$ имѣютъ разные знаки для значеній $s_{j+1} - \varepsilon$, и одинаковые знаки для значеній $s_{j+1} + \varepsilon$, гдѣ s_{j+1} обозначаетъ одинъ изъ вещественныхъ корней детерминанта $\Delta_{j+1}(s)$ не обращающій въ нуль опредѣлителя $\Delta_j'(s)$

Доказательство слѣдуетъ изъ того, что производная детерминанта $\Delta_{j+1}'(s)$ по s

$$\frac{d\Delta_{j+1}'}{ds} = a_{11}\frac{\partial \Delta_{j+1}'}{\partial u_{11}} + p_2\frac{\partial \Delta_{j+1}'}{\partial u_{22}} + \ldots + p_{j+1}\frac{\partial \Delta_{j+1}'}{\partial u_{j+1\,j+1}}$$

$$= a_{11}M_{11} + p_2 M_{22} + \ldots + p_{j+1}\Delta_j(s)$$

при $s = s_{j+1}$ представляетъ сумму слагаемыхъ одного знака съ $\Delta_j'(s_{j+1})$, такъ какъ всѣ множители $a_{11}, p_2, p_3 \ldots p_{j+1}$ суть количества положительныя (какъ это замѣчено выше), а всѣ миноры $M_{jj}(s_{j+1})$ —одинаковаго знака съ $\Delta_j(s_{j+1})$, какъ это усматривается изъ формулы (32) и аналогичныхъ ей при $\Delta_{j+1}(s_{j+1}) = 0$, которыя даютъ произведенія

$$[M_{jj}\Delta_j']_{s=s_{j+1}} = [M_{j,j+1}]^2_{s=s_{j+1}}.$$

Поэтому, при

$$\Delta_j'(s_{j+1}) > 0, \quad \left[\frac{d\Delta_{j+1}}{ds}\right]_{s=s_{j+1}} > 0$$

и функція Δ_{j+1}' при прохожденіи черезъ корень s_{j+1} возрастаетъ; наоборотъ, при

$$\Delta_j(s_{j+1}) < 0, \quad \left[\frac{d\Delta_{j+1}}{ds}\right]_{s=s_{j+1}} < 0$$

и функція Δ_{j+1}' при прохожденіи черезъ корень s_{j+1} убываетъ; короче говоря, мы имѣемъ слѣдующую таблицу знаковъ:

	$\Delta_{j+1}'(s)$	$\Delta_j'(s)$
$s_{j+1} - \varepsilon$	$\mp$	$\pm$
$s_{j+1} + \varepsilon$	$\pm$	$\pm$

которая показываетъ, что передъ прохожденіемъ черезъ какой либо вещественный корень детерминанта $\Delta_{j+1}'(s)$ знаки у Δ_{j+1}' и $\Delta_j'(s)$ различны, а послѣ прохожденія дѣлаются одинаковыми и всегда происходитъ потеря одной варіаціи знаковъ.

О числѣ вещественныхъ корней детерминанта $\Delta_{j+1}'(s)$ внутри конечнаго интервала отъ A до B.

Обыкновенно переходъ отъ безконечно малаго интервала, заключающаго одинъ вещественный корень уравненія $\Delta_{j+1}'(s) = 0$, къ интервалу, заключающему нѣсколько корней, обходится молчаніемъ. Слѣдуя примѣру *Штурма*, послѣ доказательства того, что потеря варіаціи знаковъ въ ряду

$$\Delta_{j+1}', \ \Delta_j' \ldots . \Delta_1', \ \Delta_0'$$

происходитъ всегда между двумя первыми членами этого ряда вслѣдствіе прохожденія s черезъ вещественный корень уравненія $\Delta_{j+1}'(s) = 0$, дѣлается заключеніе, что разность между числами варіацій при подстановкѣ въ члены ряда вмѣсто s сначала A, затѣмъ B, равняется числу вещественныхъ корней уравненія $\Delta_{j+1}'(s) = 0$ между этими двумя числами. (См. напр. Encyclopädie der Math. Wiss. I Bd, S. 417, или Weber. Lehrbuch d. Algebra, I Bd. S. 304).

При такомъ выводѣ остается неяснымъ, какимъ образомъ потери варіацій, пріуроченныя всегда къ первой парѣ опредѣлителей (или функцій *Штурма*), суммируются при прохожденіи величиной s конечнаго интервала отъ A до B.

Такая неясность устраняется, если обратить вниманіе на то, что измѣненіе s отъ $s_{j+1}-\varepsilon$ до $s_{j+1}'+\varepsilon$,—(гдѣ s_{j+1} и s_{j+1}' два сосѣднихъ вещественныхъ корня детерминанта $\Delta_{j+1}(s)$)—, вызываетъ потерю одной варіаціи, при чемъ потеря эта можетъ быть отнесена только на счетъ перераспредѣленія знаковъ у *всѣхъ* членовъ ряда Δ_{j+1}', $\Delta_j'...\Delta_0'$.

Это съ необходимостью вытекаетъ изъ того, что опредѣлители Δ_{j+1}' и Δ_j', какъ при $s=s_{j+1}-\varepsilon$, такъ и при $s=s_{j+1}'+\varepsilon$, должны имѣть знаки противоположные другъ другу; слѣдовательно при той и другой подстановкѣ первая пара опредѣлителей даетъ по одной варіаціи знаковъ и потому не можетъ вызвать потери одной варіаціи.

Установивъ, при измѣненіи s отъ $s_{j+1}-\varepsilon$ до $s_{j+1}'+\varepsilon$, фактъ общей перегруппировки знаковъ, соединенной съ потерей одной варіаціи, мы легко поймемъ, что всякое новое расширеніе интервала измѣненій s, соединенное съ прохожденіемъ черезъ 2-й вещественный корень уравненія $\Delta_{j+1}'(s)=0$, вызываетъ новое общее распредѣленіе знаковъ, съ потерей еще одной варіаціи и т. д.

Такимъ образомъ измѣненіе s отъ A до B произведетъ въ ряду опредѣлителей $\Delta_{j+1}'(s)$, $\Delta_j'\ldots\Delta_0'$ перераспредѣленіе знаковъ съ потерей столькихъ варіацій, сколько вещественныхъ корней уравненія $\Delta_{j+1}(s)=0$ будетъ лежать внутри этого интервала.

Расположеніе вещественныхъ корней двухъ сосѣднихъ опредѣлителей Δ_{j+1}' и Δ_j' по отношенію другъ къ другу.

Такъ какъ два сосѣдніе опредѣлителя Δ_{j+1}' и Δ_j' должны имѣть одинаковые знаки послѣ прохожденія черезъ вещественный корень перваго изъ нихъ, и—различные знаки до этого прохожденія, и такъ какъ это должно имѣть мѣсто при прохожденіи s черезъ всякій вещественный корень, то каждый интервалъ между двумя сосѣдними вещественными корнями уравненія $\Delta_{j+1}'(s)=0$ будетъ обладать тѣмъ свойствомъ, что въ началѣ его—(непосредственно вслѣдъ за прохожденіемъ перваго изъ корней s_{j+1})—функція $\Delta_j'(s)$ имѣетъ знакъ одинаковый со знакомъ Δ_{j+1}', а въ концѣ интервала—(непосредственно передъ прохожденіемъ s черезъ слѣдующій корень s_{j+1}')—знакъ $\Delta_j'(s)$

дѣлается обратнымъ знаку $\Delta_{j+1}'(s)$, который самъ остается безъ измѣненія.

Иначе говоря, между каждыми двумя послѣдовательными вещественными корнями функціи $\Delta_{j+1}'(s)$ слѣдующая функція $\Delta_j'(s)$ измѣняетъ свой знакъ на обратный; а это, при непрерывности функціи $\Delta_j(s)$, обозначаетъ присутствіе въ разсматриваемомъ интервалѣ вещественнаго же корня этой послѣдней функціи.

Такимъ образомъ между вещественными корнями функціи Δ_{j+1}' лежитъ по крайней мѣрѣ по одному вещественному корню функціи Δ_j'; точно также между вещественными корнями функіи Δ_j' располагаются вещественные корни функціи Δ_{j-1}'; между вещественными корнями этой функціи лежатъ вещественные корни функціи Δ_{j-2}' и т. д. Короче это взаимное расположеніе вещественныхъ корней какихъ угодно двухъ послѣдоватезьныхъ членовъ ряда Δ_{j+1}', $\Delta_j' \ldots$ выражаютъ такъ: вещественнные корни опредѣлителя съ большимъ указателемъ отдѣляются другъ отъ друга вещественными корнями опредѣлителя съ низшимъ указателемъ.

Вещественность всѣхъ корней детерминанта $\Delta'(s)$ и всѣхъ, получаемыхъ изъ него, детерминантовъ $\Delta_j'(s)$.

На основаніи изложенныхъ выше свойствъ, относящихся къ детерминанту $\Delta_{j+1}(s)$ съ какимъ угодно индексомъ j отъ нуля до $k-1$, можно доказать, что всѣ корни уравненія $\Delta'(s) = 0$ вещественны. Для доказательства слѣдуетъ только показать, что при подстановкѣ вмѣсто s сначала $-\infty$, а потомъ $+\infty$, теряется k варіацій знаковъ въ ряду функцій $\Delta_k = \Delta'$, $\Delta_{k-1}, \ldots \Delta_1'$. Это сейчасъ же слѣдуетъ изъ сдѣланнаго выше замѣчанія, что всѣ коэффиціенты при s въ діагональныхъ членахъ опредѣлителя, т. е. $a_{11}, p_2, p_3 \ldots p_k$, положительны, и слѣдовательно коэффиціентъ наивысшей степени s въ разложеніи детерминанта $\Delta'(s)$, равный произведенію $a_{11} p_2 p_3 \ldots p_k$ не можетъ быть отрицательнымъ. Поэтому знаки опредѣлителей

$$\Delta_j'(s) \quad (j = 1, 2, 3 \ldots k)$$

при $s = -\infty$, въ данномъ случаѣ опредѣляемые знаками высшаго ихъ члена, будутъ поочередно, то положительны, то отрицательны, въ зависимости отъ показателя степени у s. Такимъ образомъ подстановка $s = -\infty$ даетъ k варіацій знаковъ; подстановка же $s = +\infty$ не даетъ ни одной варіаціи; слѣдовательно между $-\infty$ и $+\infty$ заключаются всѣ k корней уравненія $\Delta'(s)=0$ и слѣдовательно всѣ они вещественны.

Тѣмъ же пріемомъ мы могли бы найти отдѣльно число положительныхъ и число отрицательныхъ корней уравненія $\Delta'(s)=0$, если бы мы имѣли возможность такъ или иначе установить число варіацій знаковъ въ ряду опредѣлителей $\Delta_j'(s)$ при подстановкѣ $s=0$. Такъ какъ при $s=0$ опредѣлитель $\Delta_j'(s)$ сводится къ опредѣлителю:

$$D'=\begin{vmatrix} -b_{11}', & -b_{12}', \ldots -b_{1j}' \\ -b_{21}', & -b_{22}', \ldots -b_{2j}' \\ \ldots & \ldots \\ -b_{j1}', & -b_{j2}', \ldots -b_{jj}' \end{vmatrix} = (-1)^j \begin{vmatrix} b_{11}', & b_{12}', \ldots b_{1j}' \\ b_{21}', & b_{22}', \ldots b_{2j}' \\ \ldots & \ldots \\ b_{j1}', & b_{j2}', \ldots b_{jj}' \end{vmatrix} = (-1)^j D_j,$$

то окончательное рѣшеніе вопроса зависитъ отъ знаковъ

$$D_j (j=1, 2, 3 \ldots k),$$

которые суть детерминанты или дискриминанты квадратичной формы ψ или $V-V_0$ и формъ, получаемыхъ изъ нихъ, когда приравниваются нулю одинъ, два, три и т. д. изъ ихъ аргументовъ. Нѣсколько ниже мы будемъ имѣть поводъ возвратиться къ этому вопросу, а теперь ограничимся замѣчаніемъ, что среди вещественныхъ корней уравненія $\Delta'(s)=0$ нѣтъ корней равныхъ нулю.

Это вытекаетъ изъ того, что при $s=0$ $\Delta'(s)$ превращается въ D_k дискриминантъ квадратичной формы ψ или $V-V_0$. Такъ какъ V есть потенціальная функція системы, для которой частное значеніе V_0 въ положеніи равновѣсія есть minimum ея значеній и которая поэтому не можетъ сдѣлаться меньше V_0 ни при какихъ вещественнныхъ значеніяхъ ея аргументовъ, то ясно, что разность $V-V_0$ или ψ всегда положительна, т. е. форма ψ есть такъ назыв. forma definita и опредѣлитель ея D_k не можетъ равняться нулю.

Переходъ отъ дифференціальныхъ уравненій къ интеграламъ.

Установивъ вещественность всѣхъ корней гармонизирующаго детерминанта $\Delta'(s)$, и считая корни эти вычисленными (точно или съ желаемымъ приближеніемъ), мы можемъ сейчасъ же перейти отъ начальныхъ Лагранжевыхъ уравненій движенія къ уравненіямъ гармоническаго типа (14), полученнымъ изъ первыхъ путемъ ихъ комбинированія.

Эти уравненія (14) отличаются другъ отъ друга только значеніями коэффиціента s; поэтому интегрированіе всѣхъ ихъ совершается независимо другъ отъ друга по одному и тому же шаблону. Число получаемыхъ интеграловъ будетъ равняться числу *различныхъ* корней уравненія $\Delta'(s)=0$ и слѣдовательно можетъ или равняться числу независимыхъ координатъ системы, или быть меньше этого числа, въ зависимости отъ того, будутъ ли всѣ корни уравненія $\Delta'(s)=0$ различны, или оно будетъ имѣть также и кратные корни.

Необходимость различать эти два случая становится особенно понятной при первой же попыткѣ опредѣлить каждую изъ независимыхъ Лагранжевыхъ координатъ въ отдѣльности: въ первомъ случаѣ изъ k различныхъ интеграловъ непосредственно находятся всѣ k независимыхъ координатъ въ функціи времени и произвольныхъ постоянныхъ интегрированія въ числѣ $2k$; во второмъ случаѣ—число независимыхъ координатъ превышаетъ число, имѣющихся въ нашемъ распоряженіи, различныхъ интеграловъ и эти координаты не могутъ быть опредѣлены съ такой же степенью общности, какъ въ первомъ случаѣ до тѣхъ поръ, пока мы не дополнимъ полученную систему интеграловъ новыми уравненіями такого же типа, но независимыми отъ нихъ.

Опредѣленіе независимыхъ координатъ, когда всѣ корни уравненія $\Delta'(s)=0$ простые.

Рѣшеніе поставленной задачи распадается на двѣ части: къ первой относится составленіе и интегрированіе уравненій гармоническаго типа, ко второй—опредѣленіе съ помощью полученныхъ интеграловъ отдѣльныхъ координатъ системы.

Приступая къ первой части задачи, мы будемъ исходить изъ уравненія (14). Предполагая, что въ этомъ уравненіи множители α_i опредѣлены согасно формуламъ (α), мы получимъ изъ него дифференціальное уравненіе 2-го порядка:

$$(g)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{i=k}\alpha_{ih}\,Q_i+\sum_{i=1}^{i=k}\alpha_{ih}\,V_i=0,$$

въ которомъ въ въ силу формулы (s)

$$\sum\alpha_{ih}\,V_i=\sum\alpha_{ih}\,Q_i.$$

Полагая для краткости

$$\sum\alpha_{ih}\,Q_i=U_h,$$

мы придадимъ уравненію (g) видъ уравненія гармоническаго типа:

$$\frac{d^2 U_h}{dt^2} + s_h U_h = 0. \qquad (h)$$

По числу вещественныхъ корней s_h мы получимъ k такихъ уравненій. Интегрированіе этихъ уравненій совершается очень просто и приводитъ къ системѣ k интеграловъ вида:

$$U_h = A_h e^{\sqrt{-s_h}\cdot t} + B_h e^{-\sqrt{-s_h}\cdot t} = A_h e^{it.n_h} + B_h e^{-itn_h} \qquad (k)$$

гдѣ положено $n_h = \sqrt{s_h}$, а A_h и B_h суть произвольныя постоянныя интегрированія. Сообразно съ тѣмъ, будетъ ли s_h положительный или отрицательной величиной, интегралы U_h будутъ выражаться или круговыми, или гиперболическими функціями. Не останавливаясь пока на этомъ, мы перейдемъ ко второй части вопроса.

Опредѣленіе независимыхъ координатъ q_i.

Установить непосредственную зависимость координатъ q_i отъ U_h можно двумя различными путями: или 1) вычисляя предварительно полиномы U_h, какъ явныя функціи отъ q_i, или 2) находя предварительно выраженія для различныхъ Q_i въ функціи U_h, а затѣмъ разрѣшая полученныя уравненія относительно q_i.

Выбирая первый путь, мы замѣтимъ сейчасъ же, что коэффиціенты при координатахъ q_i, въ полиномахъ U_h будутъ слѣдовать въ своемъ образованіи тому же закону, которому подчиняются въ своемъ образованіи различные элементы опредѣлителя, представляющаго собой произведеніе двухъ другихъ опредѣлителей одного и того же порядка. Въ данномъ случаѣ такими опредѣлителями будутъ: 1) опредѣлитель Δ изъ коеффиціентовъ a_{ik} опредѣленной (forma definita) квадратичной формы Q и 2) опредѣлитель изъ коеффиціентовъ α_{ih}, который мы обозначимъ черезъ $\Delta(\alpha)$.

Поэтому вопросъ о разрѣшимости или неразрѣшимости системы (k) относительно перемѣнныхъ q_i по первому способу сведется къ вопросу о томъ, будетъ или не будетъ равняться нулю произведеніе опредѣлителей $\Delta.\Delta(\alpha)$; а такъ какъ Δ не можетъ равняться нулю, то все будетъ зависѣть въ концѣ концовъ отъ опредѣлителя $\Delta(\alpha)$. Отъ этого же опредѣлителя будетъ зависѣть успѣхъ рѣшенія и при выборѣ второго пути. Основываясь на томъ, что опредѣлитель обращается въ нуль 1) при равенствѣ нулю всѣхъ элементовъ одной и той же строки или колонны, или 2) при пропорціональности всѣхъ элементовъ двухъ различныхъ строкъ или колоннъ, мы могли бы доказать, что

$\Delta(\alpha)$ отличенъ отъ нуля, доказавъ, что ни равенство нулю, ни пропорціональность въ указанномъ выше смыслѣ не имѣютъ мѣста.

Хотя дать такого рода доказательство ни представляетъ никакой трудности, но мы предпочитаемъ замѣнить простое доказательство возможности вычисленія $q_i (i = 1, 2, 3, \ldots k)$ установленіемъ формулъ, по которымъ q_i вычисляются непосредственно въ функціи U_k.

Путь, ведущій къ этимъ формуламъ, указывается до нѣкоторой степени самой формой уравненій:

$$\frac{d^2 U_h}{d t^2} + s_h U_h = 0 \quad (h = 1, 2, 3, \ldots k),$$

если взглянуть на нихъ съ новой точки зрѣнія.

До сихъ поръ мы разсматривали эти уравненія какъ результатъ комбинированія первоначальныхъ Лагранжевыхъ уравненій вида:

$$\frac{d^2}{d t^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \ldots k);$$

теперь мы условимся смотрѣть на комбинированныя уравненія, какъ на первоначальныя Лагранжевы уравненія, въ которыхъ роль независимыхъ координатъ отъ перемѣнныхъ q_i перешла къ новымъ перемѣннымъ—полиномамъ U_h. При такой точкѣ зрѣнія U_h и $s_h U_h$ должны быть отождествлены съ частными производными отъ нѣкоторыхъ однородныхъ квадратиччыхъ функцій $U(U_1, U_2, U_3, \ldots U_k)$ и $W(U_1, U_2, \ldots U_h)$ по аргументу U_h, т. е. должны существовать равенства:

$$(u) \qquad \frac{\partial U}{\partial U_h} = U_h \quad \text{и} \quad \frac{\partial W}{\partial U_h} = s_h U_h \, (h = 1, 2, 3, \ldots k).$$

На основаніи этихъ условій, а также того условія, что функціи U и W должны быть функціями квадратичными однородными, мы интегрированіемъ получаемъ для нихъ слѣдующія выраженія:

$$2U = \sum_{h=1}^{h=k} U_h^2 \quad \text{и} \quad 2W = \sum_{h=1}^{h=k} s_h U_h^2.$$

По способу своего образованія U и W являются явными функціями отъ перемѣнныхъ U_h и неявными отъ независимыхъ перемѣнныхъ q_i', кромѣ того, зная связь полиномовъ U_h съ квадратичными функціями Q и V, мы сейчасъ же замѣтимъ, что U и W являются результатами одного и того же линейнаго преобразованія, выполненнаго надъ Q и V и наоборотъ.

Сдѣланное выше изслѣдованіе природы корней гармонизирующаго детерминанта $\Delta(s)$ избавляетъ насъ отъ необходимости излагать теорію одновременнаго преобразованія двухъ квадратичныхъ формъ во всѣхъ подробностяхъ.

Слѣдуя общепринятому пріему, мы замѣнимъ преобразованіе двухъ квадратичныхъ формъ Q и V преобразованіемъ одной составной формы $\Phi = sQ - U$, которая при частныхъ значеніяхъ неопредѣленнаго множителя s можетъ совпадать съ каждой изъ разсматриваемыхъ формъ. Ближайшей цѣлью преобразованія будетъ служить уничтоженіе въ преобразованной формѣ членовъ, представляющихъ произведенія различныхъ аргументовъ этой формы другъ на друга; а въ основаніе этого преобразованія будетъ положено разложеніе на частные дроби алгебраической дроби $G(s):\Delta(s)$, знаменатель которой есть гармонизирующій детерминантъ $\Delta(s)$, а числитель $G(s)$ получается изъ того же детерминанта $\Delta(s)$ окаймленіемъ (bordering) его слѣва и сверху рядомъ величинъ:

$$0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots\ldots \Phi_k,$$

такъ что

$$G(s) = \begin{vmatrix} 0, & \Phi_1, & \Phi_2, & \ldots\ldots & \Phi_k \\ \Phi_1, & a_{11}s - b_{11}, & a_{12}s - b_{12}, & \ldots\ldots & a_{1k}s - b_{1k} \\ \Phi_2, & a_{21}s - b_{21}, & a_{22}s - b_{22}, & \ldots\ldots & a_{2k}s - b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_k, & a_{k1}s - b_{k1}, & a_{k2}s - b_{k2}, & \ldots\ldots & a_{kk}s - b_{kk} \end{vmatrix} \qquad (g)$$

Считая $\Phi_1, \Phi_2, \ldots : \Phi_k$ временно совершенно произвольными величинами, разлагаемъ дробь $G(s):\Delta(s)$ по обыкновеннымъ правиламъ на сумму частныхъ дробей и получаемъ:

$$\frac{G(s)}{\Delta(s)} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i}{s - s_i} \qquad (f)$$

Такъ какъ всѣ корни s_i предполагаются отличными другъ отъ друга, то число частныхъ дробей будетъ равно числу независимыхъ перемѣнныхъ формы Φ, и коэффиціенты A_i будутъ опредѣляться формулой:

$$A_i = \left\{ G(s) : \frac{d\Delta(s)}{ds} \right\}_{s=s_i}. \qquad (A_i)$$

Ограничившись относительно знаменателя коэффиціента A_i краткимъ замѣчаніемъ, что онъ не можетъ обращаться въ нуль ни при какомъ s_i, мы займемся преобразованіемъ числителя того же коэффиціента т. е. детерминанта $G(s_i)$, который имѣетъ видъ:

$$(g_i)\qquad G(s_i)=\begin{vmatrix} 0, & \Phi_1, & \Phi_2, & \ldots & \Phi_k \\ \Phi_1, & a_{11}s_i-b_{11}, & a_{12}s_i-b_{12}, & \ldots & a_{1k}s_i-b_{1k} \\ \Phi_2, & a_{21}s_i-b_{21}, & a_{22}s_i-b_{22}, & \ldots & a_{2k}s_i-b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_k, & a_{k1}s_i-b_{k1}, & a_{k2}s_i-b_{k2}, & \ldots & a_{kk}s_i-b_{kk} \end{vmatrix}$$

Такъ какъ эта формула (g_i) получается изъ формулы (g) при произвольныхъ значеніяхъ $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_k$, то мы можемъ примѣнить ее и къ тому частному случаю, когда величины Φ_i будутъ замѣнены ихъ дѣйствительными значеніями, т. е. когда

$$\Phi_i = s\,Q_i - V_i \;\; (i=1, 2, 3, \ldots k).$$

Если послѣ такой замѣны всѣхъ Φ_i ихъ значеніями, мы умножимъ колонны опредѣлителя (g_i), начиная со второй, послѣдовательно на $q_1, q_2, \ldots q_k$ и вычтемъ результаты умноженія изъ первой колонны, то, оставляя прежней величину опредѣлителя, мы придадимъ ему слѣдующій видъ:

$$G(s_i)=\begin{vmatrix} -\sum\limits_1^k \Phi_i q_i, & \Phi_1, & \Phi_2, & \ldots & \Phi_k \\ (s-s_i)Q_1, & a_{11}s_i-b_{11}, & a_{12}s_i-b_{12}, & \ldots & a_{1k}s_i-b_{1k} \\ (s-s_i)Q_2, & a_{21}s_i-b_{21}, & a_{22}s_i-b_{22}, & \ldots & a_{2k}s_i-b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (s-s_i)Q_k, & a_{k1}s_i-b_{k1}, & a_{k2}s_i-b_{k2}, & \ldots & a_{kk}s_i-b_{kk} \end{vmatrix}.$$

Затѣмъ, умножая горизонтали полученнаго опредѣлителя, кромѣ первой, послѣдовательно на $q_1, q_2, \ldots q_k$, и вычитая изъ первой, мы получимъ новый видъ того же опредѣлителя:

$$G(s_i)=\begin{vmatrix} -2\Phi-(s-s_i)\sum\limits_1^k Q_i q_i, & (s-s_i)Q_1, & (s-s_i)Q_2, & \ldots & (s-s_i)Q_k \\ 0\;\;+(s-s_i)\;\;Q_1, & a_{11}s_i-b_{11}, & a_{12}s_i-b_{12}, & \ldots & a_{1k}s_i-b_{1k} \\ 0\;\;+(s-s_i)\;\;Q_2, & a_{21}s_i-b_{21}, & a_{22}s_i-b_{22}, & \ldots & a_{2k}s_i-b_{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\;\;+(s-s_i)\;\;Q_k, & a_{k1}s_i-b_{k1}, & a_{k2}s_i-b_{k2}, & \ldots & a_{kk}s_i-b_{kk} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -2\Phi-2(s-s_i)Q, & (s-s_i)Q_1, & (s-s_i)Q_2, & \ldots & (s-s_i)Q_k \\ 0\;+\;(s-s_i)Q_1, & a_{11}s_i-b_{11}, & a_{12}s_i-b_{12}, & & a_{1k}s_i-b_{1k} \\ 0\;+\;(s-s_i)Q_2, & a_{21}s_i-b_{21}, & \ldots\ldots, & & a_{2k}s_i-b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\;+\;(s-s_i)Q_k, & a_{k1}s_i-b_{k1}, & \ldots\ldots, & & a_{kk}s_i-b_{kk} \end{vmatrix}$$

$$=2\Phi.\Delta(s_i)+(s-s_i)^2.\begin{vmatrix} -\frac{2Q}{s-s_i}+0, & Q_1, & Q_2, & \ldots & Q_k \\ Q_1\;+0, & a_{11}s_i-b_{11}, & a_{12}s_i-b_{12}, & \ldots & a_{1k}s_i-b_{1k} \\ Q_2\;+0, & a_{21}s_i-b_{21}, & a_{22}s_i-b_{22}, & \ldots & a_{2k}s_i-b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_k\;+0, & a_{k1}s_i-b_{k1}, & a_{k2}s_i-b_{k2}, & \ldots & a_{kk}s_i-b_{kk} \end{vmatrix}$$

или, такъ какъ $\Delta(s_i)=0$,

$$G(s_i)=\begin{vmatrix} -\frac{2Q}{s-s_i}+0, & Q_1, & Q_2, & \ldots & Q_k \\ 0\;+Q_1, & a_{11}s_i-b_{11}, & a_{12}s_i-b_{12}, & \ldots & a_{1k}s_i-b_{1k} \\ 0\;+Q_2, & a_{21}s_i-b_{21}, & \ldots\ldots & \ldots & a_{2k}s_i-b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\;+Q_k, & a_{k1}s_i-b_{k1}, & \ldots\ldots & \ldots & a_{kk}s_i-b_{kk} \end{vmatrix}.(s-s_i)^2$$

$$=(s-s_i)^2\begin{vmatrix} 0, & Q_1, & Q_2, & \ldots & Q_k \\ Q_1, & a_{11}s_i-b_{11}, & a_{12}s_i-b_{12}, & \ldots & a_{1k}s_i-b_{1k} \\ Q_2, & a_{21}s_i-b_{21}, & a_{22}s_i-b_{22}, & \ldots & a_{2k}s_i-b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_k, & a_{k1}s_i-b_{k1}, & a_{k2}s_i-b_{k2}, & \ldots & a_{kk}s_i-b_{kk} \end{vmatrix} \qquad (G(s_i)$$

Сдѣлавъ такую же замѣну величинъ $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_k$ черезъ

$$Q_1 s-V_1,\ Q_2 s-V_2, \ldots Q_k s-V_k$$

въ опредѣлителѣ $G(s)$, послѣ ряда тѣхъ же самыхъ преобразованій, какія продѣланы надъ опредѣлителемъ $G(s_i)$, мы получимъ слѣдующую формулу:

$$G(s) = \begin{vmatrix} 0, & \Phi_1, & \Phi_2, \dots & \Phi_k \\ \Phi_1, & a_{11}s-b_{11}, & \dots & a_{1k}s-b_{1k} \\ \Phi_2, & a_{21}s-b_{21}, & \dots & a_{2k}s-b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_k, & a_{k1}s-b_{k1}, & \dots & a_{kk}s-b_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sum_1^k \Phi_i q_i, & \Phi_1, & \Phi_2, \dots & \Phi_k \\ 0, & a_{11}s-b_{11}, & \dots & a_{1k}s-b_{1k} \\ 0, & a_{21}s-b_{21}, & \dots & a_{2k}s-b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & a_{k1}s-b_{k1}, & \dots & a_{kk}s-b_{kk} \end{vmatrix}$$

$$= -\sum_{i=1}^{i=k} \Phi_i q_i . \Delta(s) = -2\Phi . \Delta(s) \qquad (G(s))$$

Подставляя это значеніе $G(s)$ въ разложеніе дроби $G(s):\Delta(s)$, мы найдемъ, что:

$$-2\Phi = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i}{s-s_i} = +\sum_{i=1}^{i=k} \left\{ \frac{(s-s_i)^2}{(s-s_i)\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)_{s=s_i}} \begin{vmatrix} 0, & Q_1, & Q_2, \dots & Q_k \\ Q_1, & a_{11}s_i-b_{11}, & \dots & a_{1k}s_i-b_{1k} \\ Q_2, & a_{21}s_i-b_{21}, & \dots & a_{2k}s_i-b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_k, & \dots & \dots & a_{kk}s_i-b_{kk} \end{vmatrix} \right\},$$

или по сокращеніи:

$$2\Phi = -\sum_{i=1}^{i=k} \left\{ \frac{s-s_i}{\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)_{s=s_i}} . \begin{vmatrix} 0, & Q_1, & Q_2, \dots & Q_k \\ Q_1, & a_{11}s_i-b_{11}, & \dots & a_{1k}s_i-b_{1k} \\ Q_2, & a_{21}s_i-b_{21}, & \dots & a_{2k}s_i-b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_k, & a_{k1}s_i-b_{k1}, & \dots & a_{kk}s_i-b_{kk} \end{vmatrix} \right\}.$$

Окаймленный опредѣлитель, входящій въ послѣднюю формулу для 2Φ, разложенный по элементамъ окаймленія, будетъ имѣть видъ однородной квадратичной формы отъ аргументовъ $Q_1, Q_2, \dots Q_k$; коэффиціентами этой формы будутъ миноры опредѣлителя $\Delta(s_i)$, сопряженные съ тѣмъ элементомъ его, который стоитъ на пересѣченіи вертикали и горизонтали, содержащихъ тѣ аргументы Q, которые входятъ въ составъ даннаго члена квадрачичной формы.

Пользуясь для обозначенія этихъ миноровъ прежними символами M съ соотвѣтствующими индексами, мы напишемъ разложеніе упомянутаго опредѣлителя въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} 0, & Q_1, & Q_2, & \dots & Q_k \\ Q_1, & a_{11}s_i - b_{11}, & a_{12}s_i - b_{12}, & \dots & \\ Q_2, & a_{21}s_i - b_{21}, & a_{22}s_i - b_{22}, & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ Q_k, & a_{k1}s_i - b_{k1}, & a_{k2}s_i - b_{k2}, & \dots & a_{kk}s_i - b_{kk} \end{vmatrix}$$

$$= -(M_{11}(s_i)Q_1^2 + 2M_{12}(s_i)Q_1Q_2 + \dots + M_{kk}(s_i)Q_k^2) = -\sum_{ej} M_{ej}(s_i)Q_e Q_j \;(q)$$

Но, согласно сдѣланному выше замѣчанію, когда опредѣлитель $\Delta(s_i)$ тождественно равенъ нулю, миноры элементовъ какой нибудь строки будутъ пропорціональны минорамъ элементовъ всякой другой строки, такъ что для любыхъ двухъ индексовъ j и k имѣемъ:

$$\frac{M_{jj}}{M_{jk}} = \frac{M_{jk}}{M_{kk}};$$

въ силу симметріи детерминанта $\Delta(s_i)$

$$M_{jk}(s_i) = M_{kj}(s_i),$$

поэтому миноры даннаго опредѣлителя выполняютъ слѣдующія равенства:

$$M_{jj}(s_i) \,.\, M_{kk}(s_i) = M_{jk}^2(s_i), \text{ или } M_{kj}(s_i) = \sqrt{M_{jj}} \cdot \sqrt{M_{kk}}.$$

Если, пользуясь этими равенствами, разложить всѣ коеффиціенты квадратичной формы (q), то эта форма превратится въ полный квадратъ слѣдующаго вида:

$$\sum_{ej} M_{je}(s_i) \,.\, Q_e Q_j = \sum_{ej} \sqrt{M_{ee}(s_i)} \cdot \sqrt{M_{jj}(s_i)} \,.\, Q_e \,.\, Q_j$$

$$= (\sqrt{M_{11}(s_i)} \,.\, Q_1 + \sqrt{M_{22}(s_i)} \,.\, Q_2 + \dots + \sqrt{M_{kk}(s_i)} \,.\, Q_k)^2.$$

Подставляя полученное разложеніе въ формулу для 2Φ, мы будемъ имѣть:

$$2\Phi = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{(s - s_i)}{\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)_{s=s}} \cdot \left(\sqrt{M_{11}(s_i)}\,Q_1 + \sqrt{M_{22}(s_i)}\,Q_2 + \dots + \sqrt{M_{kk}(s_i)}\,Q_k\right)^2$$

или

$$2\,\Phi = \sum_{i=1}^{i=k} (s - s_i) \cdot \left\{ \sqrt{\frac{M_{11}(s_i)}{\left(\frac{d\,\Delta}{d\,s}\right)_{s_i}}}\, Q_1 + \sqrt{\frac{M_{22}(s_i)}{\left(\frac{d\,\Delta}{d\,s}\right)_{s_i}}}\, Q_2 + \cdots \sqrt{\frac{M_{kk}(s_i)}{\left(\frac{d\,\Delta}{d\,s}\right)_{s_i}}} \cdot Q_k \right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{i=k} (s - s_i) \cdot \{ \overset{i}{a}_1 Q_1 + \overset{i}{a}_2 Q_2 + \ldots + \overset{i}{a}_k Q_k \}^2,$$

гдѣ по примѣру *Jacobi* черезъ $\overset{i}{a}_j$ обозначены коэффиціенты при Q_j т. е.

$$\left[\sqrt{\frac{M_{jj}}{\left(\frac{d\,\Delta}{d\,s}\right)}} \right]_{s=s_i}.$$

Назвавъ временно черезъ ω_i линейныя выраженія

$$\overset{i}{a}_1 Q_1 + \overset{i}{a}_2 Q_2 + \overset{i}{a}_3 Q_3 + \ldots + \overset{i}{a}_k Q_k,$$

мы напишемъ $2\,\Phi$ подъ видомъ:

$$2\,\Phi = \sum_{i=1}^{i=k} (s - s_i)\, \omega_i^2,$$

или, разлагая лѣвую и правую части на слагаемыя, будемъ имѣть:

$$2\,\Phi = 2\,s\,Q - 2\,V = s \sum_{i=k}^{i=k} \omega_i^2 - \sum_{i=1}^{i=k} s_i\, \omega_i^2.$$

При произвольномъ s такое равенство распадается на два равенства:

$$2\,Q = \sum_{i=1}^{i=\kappa} \omega_i^2 \quad \text{и} \quad 2\,V = \sum_{i=1}^{i=\kappa} s_i\, \omega_i^2.$$

Полученные результаты, сопоставленные съ квадратичными функціями $2\,U$ и $2\,W$, показываютъ, что

$$2\,U = \sum_{1}^{\kappa} \omega_i^2 \quad \text{и} \quad 2\,W = \sum_{1}^{\kappa} s_i\, \omega_i^2,$$

а

$$U_h = \omega_h = \overset{h}{a}_1 Q + \overset{h}{a}_2 Q_2 + \ldots \overset{h}{a}_\kappa Q_\kappa. \quad (h = 1, 2, 3, \ldots k).$$

Послѣдняя формула будетъ полезна при разрѣшеніи нашей главной задачи: опредѣлить независимыя перемѣнныя q_e въ функціи отъ U_h.

Непосредственнымъ образомъ перемѣнныя q_e связаны съ полиномами Φ_j $(j=1, 2, 3, \ldots k)$, системой линейныхъ уравненій вида:

$$(a_{j1}s-b_{j1})q_1+(a_{j2}s-b_{j2})q_2+\ldots+(a_{je}s-b_{je})q_e+\ldots+(a_{jк}s-b_{jк})q_к$$
$$=\Phi_j \ (j=1, 2, \ldots k).$$

Считая Φ_j новыми перемѣнными, мы разрѣшимъ эту систему относительно старыхъ перемѣнныхъ q_e и будемъ имѣть:

$$q_e=\frac{1}{\Delta(s)}\cdot\sum_{j=1}^{j=к} M_{je}(s)\Phi_j \qquad (q_e)$$

Разложимъ, какъ мы это дѣлали раньше, алгебраическую дробь, составляющую правую часть равенства (q_e), на сумму частныхъ дробей и представимъ q_e подъ видомъ:

$$q_e=\sum_{i=1}^{i=к}\frac{B_j}{s-s_j}, \qquad (B)$$

гдѣ

$$B_j=\frac{1}{\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)_{s=s_i}}\sum_{j=1}^{j=к} M_{je}(s_i)\Phi_j=\sum_{j=1}^{j=к}\Phi_j\frac{M_{je}(s_i)}{\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)_{s=s_i}}=\sum_{j=1}^{j=к}\Phi_j\frac{\sqrt{M_{jj}(s_i)}\cdot\sqrt{M_{ee}(s_i)}}{\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)_{s=s_i}}$$
$$=\sum_{j=1}^{j=к}\overset{i}{a}_j\overset{i}{a}_e\Phi_j.$$

Внося это преобразованное выраженіе для B_i въ выраженіе для q_e мы будемъ имѣть:

$$q_e=\sum_{i=1}^{i=к}\sum_{j=1}^{j=к}\frac{\overset{i}{a}_j\overset{i}{a}_e\Phi_j}{s-s_i}=\sum_{i=1}^{i=к}\overset{i}{a}_e\sum_{j=1}^{j=к}\frac{\overset{i}{a}_j\Phi_j}{s-s_i}.$$

Замѣчая, что

$$\frac{\Phi_j}{s-s_i}=\frac{sQ_j-V_j}{s-s_i}=\frac{Q_j(s-s_i+s_i)-V_j}{s-s_i}=Q_j+\frac{s_iQ_j-V_j}{s-s_i},$$

мы придадимъ внутренней суммѣ, входящей въ послѣднее выраженіе для q_e, слѣдующій видъ:

$$(\Sigma)\quad \sum_{j=1}^{j=\kappa}\frac{\overset{i}{a_j}\Phi_j}{s-s_j}=\sum_{j=1}^{j=\kappa}\overset{i}{a_j}Q_j+\sum_{j=1}^{j=\kappa}\frac{\overset{i}{a_j}(s_j Q_i-V_j)}{s-s_i}=\omega_i+\sum_{j=1}^{j=\kappa}\frac{\overset{i}{a_j}(s_i Q_j-V_j)}{s-s_i}$$

Послѣ подстановки этой преобразованной суммы въ формулу для q_e, мы получимъ для q_e новое выраженіе:

$$q_e=\sum_{i=1}^{i=\kappa}\overset{i}{a_e}\,\omega_i+\sum_{i=1}^{i=\kappa}\sum_{j=1}^{j=\kappa}\frac{\overset{i}{a_e}\overset{i}{a_i}(s_i Q_j-V_j)}{s-s_i}.$$

Можно доказать, что двойная сумма въ только что полученной формуллѣ для q_e обращается въ нуль; для этого слѣдуетъ только замѣнить произведеніе коэффиціентовъ $\overset{i}{a_e}\overset{i}{a_j}$ черезъ

$$M_{je}(s_i):\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)_{s=s_i};$$

тогда выраженіе

$$\frac{\overset{i}{a_e}\overset{i}{a_j}(s_i Q_j-V_j)}{s-s_i}$$

превращается въ

$$\frac{M_{je}(s_i)(s_i Q_j-V_j)}{(s-s_i).\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)_{s=s_i}},$$

числитель котораго т. е.

$$(s_i Q_j-V_j)M_{je}(s_i)=\{q_1(a_{j1}s_i-b_{j1})+q_2(a_{j2}s_i-b_{j2})+\ldots+q_\kappa(a_{j\kappa}s_i-b_{j\kappa})\}M_{je}(s_i),$$

а при суммированіи по индексу j, (при одномъ и томъ же i) такая сумма будетъ равна нулю, такъ какъ коэффиціенты при различныхъ q_r будутъ имѣть видъ:

$$\sum_{j=1}^{j=\kappa}(a_{jr}s_i-b_{jr})M_{je}(s_i),$$

что при $r\neq e$ дастъ нуль, какъ разложеніе опредѣлителя съ двумя одинаковыми строками, а при $r=e$ дастъ такъ же нуль, какъ разложеніе опредѣлителя $\Delta(s_i)$, который тождественно равенъ нулю.

Обращеніе въ нуль внутренней суммы влечетъ за собой уничтоженіе всего второго слагаемаго въ выраженіи q_e, и мы получаемъ для q_e окончанельное выраженіе:

$$q_e = \sum_{i=1}^{i=k} \overset{i}{a}_e \omega_i = \sum_{i=1}^{i=k} \overset{i}{a}_e U_i,$$

чѣмъ наша задача доводится до конца.

Подстановка вмѣсто U_i двучленныхъ выраженій

$$A_i e^{in\,t} + B_i e^{-in\,t}$$

приведетъ къ системѣ интеграловъ, общій видъ которыхъ будетъ:

$$q_e = \sum_{i=1}^{i=k} A_i \overset{i}{a}_e e^{in_i t} + \sum_{i=1}^{i=k} B_i \overset{i}{a}_e e^{in_i t} \quad (i=1, 2, 3 \ldots k).$$

Число произвольныхъ постояннныхъ A_i и B_i этой системы будетъ равно $2k$, т. е. удвоенному числу независимыхъ координатъ системы.

Интегрированіе уравненій Lagrange'a, когда детерминантъ $\Delta(s)$ имѣетъ кратные корни.

Когда гармонизирующій детерминантъ $\Delta(s)$ Лагранжевыхъ уравненій кромѣ простыхъ корней имѣетъ одинъ или нѣсколько корней кратныхъ, то принятый нами методъ интегрированія въ его чистомъ видѣ оказывается въ состояніи дать только тѣ дифференціальныя уравненія гармоническаго типа, которыя зависятъ отъ простыхъ корней опредѣлителя $\Delta(s)$. Получить тѣмъ же способомъ хотя бы одно лишнее уравненіе съ помощью корней кратныхъ оказывается невозможнымъ по той причинѣ, что всѣ миноры опредѣлителя $\Delta(s)$, а слѣдовательно и пропорціональные имъ гармонизирующіе множители α, для всѣхъ кратныхъ корней обращаются, какъ это мы увидимъ ниже, тождественно въ нуль.

Поэтому для полученія общаго рѣшенія задачи съ полнымъ числомъ произвольныхъ постоянныхъ является необходимымымъ видоизмѣнить методъ такимъ образомъ, чтобы онъ давалъ возможность находить недостающее число дифференціальныхъ уравненій. Такъ какъ въ томъ видоизмѣненіи метода, которое будетъ изложено, существенную роль играютъ свойства миноровъ опредѣлителя $\Delta(s)$, имѣющаго кратные корни, то естественно прежде всего обратиться къ изложенію этихъ свойствъ.

Свойства миноровъ различныхъ порядковъ гармонизирующаго опредѣлителя, имѣющаго кратные корни.

Если мы согласимся смотрѣть на появленіе кратнаго корня, какъ на результатъ сліянія двухъ, трехъ, или вообще какого нибудь числа первоначально различныхъ корней, то изъ изложенной выше теоріи распредѣленія вещественныхъ корней у различныхъ детерминантовъ ряда (Δ') сейчасъ же получимъ слѣдующіе выводы:

1) двукратный корень детерминанта $\Delta'(s)$ есть въ тоже время однократный корень детерминанта $\Delta'_{k-1}(s)$, или какого либо другого минора діагональнаго члена опредѣлителя $\Delta'(s)$;

2) трехкратный корень детерминанта $\Delta'(s)$ есть двукратный корень детерминанта $\Delta'_{k-1}(s)$, и однократный корень детерминанта $\Delta'_{k-2}(s)$, или какихъ нибудь другихъ діагональныхъ миноровъ;

3) вообще μ—кратный корень детерминанта $\Delta'(s)$ является корнемъ кратностей $(\mu-1)$-ой, $(\mu-2)$-й,... и т. д. сооответственно для миноровъ $\Delta'_{k-1}(s)$, $\Delta'_{k-2}(s)$... и т. д., или для какихъ либо другихъ миноровъ діагональныхъ членовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, вещественный корень детерминанта $\Delta'_{k-1}(s)$ лежитъ между двумя сосѣдними вещественными корнями детерминанта $\Delta'(s)$; слѣдовательно при сближеніи этихъ двухъ корней до совпаденія корень детерминанта $\Delta'_{k-1}(s)$ также совпадетъ съ ними. Точно такъ же между μ различными вещественными корнями детерминанта $\Delta'(s)$ лежатъ $\mu-1$ вещественныхъ корней детерминанта $\Delta'_{k-1}(s)$; между $\mu-1$ корнями этого детерминанта лежатъ $\mu-2$ корней детерминанта $\Delta'_{k-2}(s)$ и т. д.

При сліяніи всѣхъ μ корней детерминанта $\Delta'(s)$ въ одинъ μ—кратный корень, всѣ корни младшихъ детерминантовъ такъ же сольются съ ними и будутъ соотвѣтственно $(\mu-1)$—кратнымъ, $(\mu-2)$—кратнымъ и т. д. корнями детерминантовъ $\Delta'_{k-1}(s)$, $\Delta_{k-2}(s)$... и т. д.

Теорема Высшей Алгебры, гласящая, что кратный корень цѣлаго раціональнаго многочлена является корнемъ на единицу меньшей кратности для первой производной этого многочлена, позволитъ доказать, что, отмѣченныя нами, свойства діагональныхъ или главныхъ миноровъ детерминанта $\Delta'(s)$ принадлежатъ не только однимъ этимъ минорамъ, но *всѣмъ* вообще минорамъ того же самаго порядка.

Возьмемъ сначала самый простой случай и докажемъ, что двукратный корень $s=\beta$ опредѣлителя $\Delta'(s)$ будетъ въ тоже время корнемъ *всѣхъ* первыхъ миноровъ этого опредѣлителя. Для доказательства этого предложенія составимъ производную опредѣлителя $\Delta'(s)$ по s. Назвавъ для краткости различные элементы опредѣлителя $\Delta'(s)$ буквой U съ соотвѣтствующими двумя индексами, и замѣтивъ, что s входитъ только въ діагональные члены детерминанта, мы будемъ имѣть на основаніи правилъ дифференцированія детерминатовъ слѣдующую формулу:

$$\frac{d\,\Delta'(s)}{ds} = \frac{\partial\,\Delta'(s)}{\partial\,U_{11}} \cdot \frac{dU_{11}}{ds} + \frac{\partial\,\Delta'(s)}{\partial\,U_{22}} \cdot \frac{\partial U_{22}}{ds} + \ldots + \frac{\partial\,\Delta'(s)}{\partial\,U_{ii}} \cdot \frac{d\,U_{ii}}{ds} + \ldots$$
$$+ \frac{\partial\,\Delta'(s)}{\partial\,U_{kk}} \cdot \frac{d\,U_{kk}}{ds}. \qquad (d)$$

По условію, что $s = \beta$ есть двукратный корень детерминанта $\Delta'(s)$ и однократный корень его производной $\frac{d\,\Delta'(s)}{ds}$, лѣвая часть уравненія (d) обращается при подстановкѣ вмѣсто $s\,\beta$ въ нуль, слѣдовательно при той же подстановкѣ должна обращаться въ нуль и правая часть т. е. сумма

$$\sum_{i=1}^{i=k}\left[\frac{\partial\,\Delta'(s)}{\partial\,U_{ii}}\,\frac{d\,U_{ii}}{d\,s}\right]_{s=\beta} = \sum_{i=1}^{i=k} M_{ii}(\beta)\,p_i = \sum_{i=1}^{i=k} a_{ii}\,M_{ii}(\beta).$$

Но множители $a_{11}, p_2, \ldots p_i \ldots p_k$, какъ коеффиціенты при квадратахъ въ положительной опредѣленной квадратичной функціи (forma definita), всѣ положительны, точно такъ же положительны и всѣ частныя производныя $\frac{\partial\,\Delta'(s)}{\partial\,U_{ii}}$ или діагональные миноры M_{ii} опредѣлителя $\Delta'(s)$; поэтому вся правая часть выраженія $\frac{d\,\Delta'(s)}{ds}$ состоитъ изъ суммы однихъ только положительныхъ слагаемыхъ, и обращеніе ея въ нуль возможно только при равенствѣ нулю по отдѣльности всѣхъ діагональныхъ миноровъ.

Кромѣ того извѣстно, что діагональные миноры M_{ii}, M_{jj} связаны съ минорами другихъ членовъ того же опредѣлителя, если онъ обращается въ нуль, соотношеніями:

$$\frac{M_{i1}}{M_{j1}} = \frac{M_{i2}}{M_{j2}} = \frac{M_{i3}}{M_{j3}} = \ldots = \frac{M_{ii}}{M_{ij}} = \frac{M_{ij}}{M_{jj}} = \ldots = \frac{M_{ik}}{M_{jk}},$$

изъ которыхъ вытекаетъ, что $M_{jj} \cdot M_{ii} = M_{ji}^2$ при подстановкѣ вмѣсто $s\,\beta$; изъ этого послѣдняго равенства видно, что одновременно съ діагональными минорами M_{ii} и M_{jj} при $s = \beta$ обращается въ нуль и миноръ M_{ji}. Перебравъ всѣ i и j, мы докажемъ, что *всѣ* первые миноры обратятся въ нуль при $s = \beta$.

Изъ того же самаго разложенія производной опредѣлителя $\Delta'(s)$ по s т. е. изъ формулы (d) мы сдѣлаемъ общій выводъ; что какой нибудь μ—кратный корень $s=\gamma$ опредѣлителя $\Delta'(s)$ будетъ корнемъ $(\mu-1)$-ой кратности для производной $\frac{d\,\Delta'(s)}{d\,s}$ и слѣдовательно для каждой въ отдѣльности частной производной $\frac{\partial\,\Delta'(s)}{\partial\, \smile_{ii}}$, т. е. для всѣхъ *діагональныхъ* миноровъ опредѣлителя $\Delta'(s)$; но въ силу формулы

$$M_{ii} \,.\, M_{jj} = M_{ij}^2,$$

имѣющей силу при $s=\gamma$, корень γ будетъ $2(\mu-1)$—кратнымъ корнемъ M_{ij}^2.

Такимъ образомъ корень какой либо кратности μ опредѣлителя $\Delta'(s)$ является корнемъ *всѣхъ* первыхъ миноровъ этого опредѣлителя, при чемъ кратность его будетъ $\mu-1$.

Замѣчая, что всякій діагональный миноръ занимаетъ такое же точно положеніе по отношенію ко всѣмъ вторымъ минорамъ, изъ него образуемымъ, какое занимаетъ по отношенію къ нему главный опредѣлитель, мы уже безъ доказательствъ можемъ заключить, что μ—кратный корень главнаго опредѣлителя будетъ корнемъ $(\mu-1)$-ой кратности для первыхъ его миноровъ, корнемъ $(\mu-2)$-ой кратности для вторыхъ миноровъ и т. д., и наконецъ простымъ корнемъ для $(\mu-1)$-хъ миноровъ опредѣлителя $\Delta'(s)$.

Система гармонизирующихъ множителей, соотвѣтствующая какому либо кратному корню $\Delta'(s)$.

Такъ какъ полученіе дифференціальныхъ уравненій гармоническаго типа предполагаетъ предварительное нахожденіе гармонизирующихъ множителей, то мы и рѣшаемъ отдѣльно эту задачу, предполагая сначала для простоты разсужденій корень уравненія $\Delta'(s)=0$ только двукратнымъ. Въ предъидущемъ параграфѣ было доказано, что двукратный корень детерминанта $\Delta'(s)=0$ является корнемъ всѣхъ первыхъ миноровъ этого опредѣлителя; поэтому намъ слѣдуетъ отказаться отъ мысли найти гармонизирующихъ множителей α по формуламъ (α), и разыскать, вмѣсто того, хотя бы одинъ второй миноръ того же опредѣлителя, который бы былъ отличенъ отъ нуля при подстановкѣ въ него двукратнаго корня первоначальнаго опредѣлителя.

Допустивъ, что такимъ, отличнымъ отъ нуля при подстановкѣ двукратнаго корня, вторымъ миноромъ оказался миноръ

$$\frac{\partial^2 \Delta'(s)}{\partial\, U'_{k-1\,k-1}\, \partial\, U_{kk}} = M\binom{k-1,\ k}{k-1,\ k},$$

мы напишемъ систему линейныхъ уравненій, опредѣляющихъ гармонизирующіе множители α при двукратномъ корнѣ $s=\beta$.

Отдѣливъ въ этой системѣ $(k-2)$ первыхъ уравненія, и перенеся два послѣднихъ члена каждаго изъ этихъ уравненій изъ лѣвой части въ правую, мы будемъ имѣть слѣдующую систему линейныхъ относительно $\alpha_i (i=1, 2, 3\ldots k-2)$ уравненій со вторыми частями:

$$\left.\begin{array}{l}
(a_{11}\beta-b_{11})\alpha_1+(a_{12}\beta-b_{12})\alpha_2+\ldots(a_{1k-2}\beta-b_{1k-2})\alpha_{k-2} \\
\qquad =-(a_{1k-1}\beta-b_{1k-1})\alpha_{k-1}-(a_{1k}\beta-b_{1k})\alpha_k \\
(a_{21}\beta-b_{21})\alpha_1+(a_{22}\beta-b_{22})\alpha_2+\ldots(a_{2k-2}\beta-b_{2k-2})\alpha_{k-2} \\
\qquad =-(a_{2k-1}\beta-b_{2k-1})\alpha_{k-1}-(a_{2k}\beta-b_{2k})\alpha_k \\
(a_{31}\beta-b_{31})\alpha_1+(a_{32}\beta-b_{32})\alpha_2+\ldots(a_{3k-2}\beta-b_{3k-2})\alpha_{k-2} \\
\qquad =-(a_{3k-1}\beta-b_{3k-1})\alpha_{k-1}-(a_{3k}\beta-b_{3k})\alpha_k \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(a_{k-21}\beta-b_{k-21})\alpha_1+(a_{k-22}\beta-b_{k-22})\alpha_2+\ldots(a_{k-2k-2}\beta-b_{k-2k-2})\alpha_{k-2} \\
\qquad =-(a_{k-2k-1}\beta-b_{k-2k-1})\alpha_{k-1}-(a_{k-2k}\beta-b_{k-2k})\alpha_k
\end{array}\right\} (s)$$

Система (s) оказывается разрѣшимой относительно множителей $\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{k-2}$, такъ какъ ея опредѣлитель, или второй миноръ начальнаго опредѣлителя, $M\binom{\kappa-1,\,\kappa}{\kappa-1,\,\kappa}$ по нашему предположенію отличенъ отъ нуля.

Рѣшая по общимъ правиламъ эти простыя уравненія, мы получимъ для какого нибудь α_i слѣдующее выраженіе:

$$\alpha_i=-\frac{1}{M\binom{\kappa-1,\,\kappa}{\kappa-1,\,\kappa}}\left\{\alpha_{k-1}\left|U_{11}, U_{22}, \ldots U_{ik-1}, \ldots U_{k-2k-2}\right|\right.$$
$$\left.+\alpha_k\left|U_{11}, U_{22}, \ldots U_{ik}, \ldots U_{k-2k-2}\right|\right\}_{s=\beta}, \qquad (\alpha_i)$$

гдѣ равенство $s=\beta$ приписано къ скобкѣ для обозначенія подстановки вездѣ вмѣсто s двукратнаго корня β.

Послѣдняя формула, при i измѣняющемся отъ 1 до $k-2$, даетъ значенія $k-2$ перыхъ множителей α въ функціи двухъ послѣднихъ α_{k-1} и α_k, которые остаются совершенно произвольными.

Что касается послѣднихъ двухъ уравненій системы, служащей для опредѣленія множителей α, не выписанныхъ нами, то эти уравненія обращаются въ тождества при подстановкѣ $(k-2)$ первыхъ множителей α_i, вычисляемыхъ по формулѣ (a_i), независимо отъ частныхъ значеній, которыя можемъ придать, оставшимся произвольными, множителямъ α_{k-1} и α_k.

Мы легко убѣдимся въ этомъ, замѣтивъ, что на основаніи формулы (a_i) α_i можетъ быть представлено подъ видомъ:

$$\alpha_i = \alpha_{k-1}\frac{M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \ i}}{M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \kappa-1}} + \alpha_k\frac{M\binom{\kappa\ \ \ \kappa-1}{\kappa-1\ \ i}}{M\binom{\kappa\ \ \ \kappa-1}{\kappa\ \ \ \kappa-1}},$$

и что по подстановкѣ этихъ значеній α_i въ уравненія:

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{k-11}\beta - b_{k-11})\alpha_1 + (a_{k-12}\beta - b_{k-12})\alpha_2 + \ldots + (a_{k-1k-2}\beta - b_{k-1k-2})\alpha_{k-2}\\
&\qquad + (a_{k-1}\beta - b_{k-1k-1})\alpha_{k-1} + (a_{k-1k}\beta - b_{k-1k})\alpha_k = 0\\
&(a_{k1}\beta - b_{k1})\alpha_1 + (a_{k2}\beta - b_{k2})\alpha_2 + \ldots + (a_{kk_{-2}}\beta - b_{kk_{-2}})\alpha_{k-2}\\
&\qquad + (a_{kk_{-1}}\beta - b_{kk_{-1}})\alpha_{k-1} + (a_{kk}\beta - b_{kk})\alpha_k = 0
\end{aligned}\right\}\ (G)$$

и приведенія къ общему знаменателю лѣвыя части этихъ уравненій примутъ видъ слѣдующихъ двучленовъ:

$$\frac{\alpha_{k-1}}{M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \kappa-1}}\sum_{i=1}^{i=k-1} M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \ i}.(a_{k-1i}\beta - b_{k-1i}) + \frac{\alpha_k}{M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \kappa-1}}\sum_{i=1}^{i=k-1} M\binom{\kappa\ \ \ \kappa-1}{\kappa-1\ \ i}(a_{k-1i}\beta - b_{k-1i})$$

$$\frac{\alpha_{k-1}}{M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \kappa-1}}\sum_{i=1}^{i=k-2} M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \ i}(a_{ki}\ \beta - b_{ki}) + \frac{\alpha_k}{M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \kappa-1}}\sum_{i=1}^{i=k-2} M\binom{\kappa\ \ \ \kappa-1}{\kappa-1\ \ i}(a_{ki}\ \beta - b_{ki})$$

$$+\frac{M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \kappa-1}(a_{kk_{-1}}\beta - b_{kk_{-1}})\alpha_{k-1} + M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \kappa-1}(a_{kk}\beta - b_{kk})\alpha_k}{M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \kappa-1}};$$

множители при α_{k-1} и α_k въ этихъ выраженіяхъ суть разложенія по элементамъ $k-1$-ой и k-ой строки миноровъ $M\binom{\kappa}{\kappa}$ и $M\binom{\kappa}{\kappa-1}$ детерминанта $\Delta(s)_{s=\beta}$.

Но всѣ первые миноры по доказанному равны нулю; поэтому послѣднія два уравненія выполняются тождественно сами собой при произвольныхъ значеніяхъ множителей α_{k-1} и α_k.

Послѣ подробнаго изложенія способа нахожденія системы гармонизирующихъ множителей, соотвѣтствующихъ двойному корню детерминанта $\Delta'(s)$, рѣшеніе подобной же задачи для случая трехкратнаго корня ясно само собой. Такъ какъ трехкратный корень детерминанта $\Delta'(s)$ есть въ тоже время корень *всѣхъ вторыхъ* миноровъ его, то для опредѣленія множителей α_i слѣдуетъ изъ k уравненій, которымъ должны удовлетворять эти множители, выбрать только $k-3$ уравненія. Выборъ этихъ уравненій долженъ быть сдѣланъ такъ, чтобы съ ихъ помощью могли быть опредѣлены $k-3$ множителя α въ функціи трехъ остальныхъ, которые сами остаются совершенно произвольными. Такъ же, какъ это мы дѣлали выше, и въ данномъ случаѣ мы можемъ убѣдиться въ томъ, что найденная система множителей, среди которыхъ три совершенно произвольны, удовлетворитъ послѣднимъ тремъ уравненіямъ системы, которыя остались безъ употребленія при нахожденіи множителей α.

Принимая съ соотвѣтствующими измѣненіями тотъ же пріемъ опредѣленія множителей α къ случаю, когда дискриминантъ $\Delta'(s)$ имѣетъ μ-кратный корень, мы найдемъ, что въ этомъ случаѣ изъ k множителей α останутся совершенно произвольными μ множителей, и только $k-\mu$ множителей будутъ вполнѣ опредѣленными линейными функціями отъ первыхъ μ.

Уравненія гармоническаго типа, соотвѣтствующія кратнымъ корнямъ дискриминанта $\Delta(s)$.

Особенности рѣшенія, обусловленныя существованіемъ кратнаго корня у детерминанта $\Delta'(s)$, можно замѣтить на простѣйшемъ изъ случаевъ, когда упомянутый детерминантъ имѣетъ одинъ двукратный корень.

Какъ только что было указано, гармонизирующіе множители, соотвѣтствующіе двукратному корню $s=\beta$, имѣютъ видъ:

$$\alpha_i = f_{k-1}^{(i)}\alpha_{k-1} + f_k^{(i)}\alpha_k \quad (i=1,2,3,\dots k-2),$$

гдѣ ради краткости положено

$$f_{k-1}^{(i)} = \frac{M\binom{\kappa-1\ \kappa}{i\ \ \kappa}}{M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \kappa-1}} \text{ и } f_k^{(i)} = \frac{M\binom{\kappa\ \ \kappa-1}{\kappa-1\ \ i}}{M\binom{\kappa\ \kappa-1}{\kappa\ \kappa-1}}.$$

Съ ихъ помощью сумма

$$\sum_{i=1}^{i=k}\alpha_i Q_i = U_\beta$$

пріобрѣтаетъ слѣдующій видъ:

$$U_\beta = \alpha_{k-1}\left(\sum_{i=k}^{i=k-2} f_{k-1}^{(i)} Q_i + Q_{k-1}\right) + \alpha_k\left(\sum_{i=1}^{i=k-2} f_k^{(i)} Q_i + Q_k\right)$$

или

$$U_\beta = \alpha_{k-1} U_\beta^{(k-1)} + \alpha_k U_\beta^{(k)},$$

гдѣ для краткости положено:

$$U_\beta^{(k)} = \sum_{i=1}^{i=k-2} f_\kappa^{(i)} Q_i + Q_\kappa \text{ и } U_\beta^{(\kappa-1)} = \sum_{i=1}^{i=\kappa-2} f_{\kappa-1}^{(i)} Q_i + Q_{\kappa-1}.$$

Дифференціальное уравненіе

$$\frac{d^2 U_\beta}{d t^2} + \beta U_\beta = 0,$$

послѣ вынесенія за скобку множителей $\alpha_{\kappa-1}$ и α_κ приведется къ виду:

$$\alpha_{\kappa-1} \left\{ \frac{d^2 U_\beta^{(\kappa-1)}}{d t^2} + \beta U_\beta^{(\kappa-1)} \right\} + \alpha_\kappa \left\{ \frac{d^2 U_\beta^{(\kappa)}}{d t^2} + \beta U_\beta^{(\kappa)} \right\} = 0;$$

а въ виду полной произвольности этихъ множителей такое уравненіе равносильно двумъ отдѣльнымъ уравненіямъ:

$$\frac{d^2 U_\beta^{(\kappa-1)}}{d t^2} + \beta U_\beta^{(\kappa-1)} = 0 \text{ и } \frac{d^2 U_\beta^{(\kappa)}}{d t^2} + \beta U_\beta^{(\kappa)} = 0.$$

Изъ способа образованія выраженій $U_\beta^{(\kappa-1)}$ и $U_\beta^{(\kappa)}$ ясно, что оба они суть такія же линейныя и однородныя функціи независимыхъ координатъ, какъ и, разсмотрѣнныя нами выше, функціи U_h, соотвѣтствующія однократнымъ корнямъ дискриминанта $\Delta'(s)$.

Распространяя точку зрѣнія, развитую нами на страницѣ (28) въ отношеніи къ полиномамъ U_h, также и на полиномы $U_\beta^{(\kappa-1)}$ и $U_\beta^{(\kappa)}$, мы придемъ къ заключенію, что, при существованіи двукратнаго корня дискриминанта $\Delta(s)$, двѣ квадратичныя однородныя функціи $2Q$ и $(2V - 2V_0)$ могутъ быть составлепы каждая изъ однихъ и тѣхъ же k линейныхъ функцій отъ независимыхъ координатъ q_i.

Если бы среди корней дискриминанта $\Delta'(s)$ оказался не двукратный, а какой либо μ—кратный корень $s = \lambda$, то на основаніи соображеній, изложенныхъ въ предъидущемъ параграфѣ, гармонизирующіе множители α, соотвѣтствующіе этому случаю, имѣли бы видъ:

$$\alpha_i = f_{\kappa-\mu+1}^{(i)} \alpha_{\kappa-\mu+1} + f_{\kappa-\mu+2}^{(i)} \alpha_{\kappa-\mu+2} + \cdots + f_{\kappa-1}^{(i)} \alpha_{\kappa-1} + f_\kappa^{(i)} \alpha_\kappa,$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots k - \mu$, и гдѣ всѣ $f_{\kappa-e}^{(i)}$ $(e = 0, 1, 2, 3, \ldots \mu - 1)$ суть функціи λ, аналогичныя по составу съ $f_{\kappa-1}^{(i)}$ и $f_\kappa^{(i)}$.

Многочленъ U_λ, образованный съ помощью множителей α изъ $Q_1, Q_2, \ldots Q_\kappa$, будетъ содержать, какъ это не трудно видѣть, μ произвольныхъ постоянныхъ $\alpha_{\kappa-e}$ $(e=0, 1, 2, \ldots \mu-1)$ и будетъ имѣть видъ:

$$\begin{aligned}
U_\lambda = &\alpha_{\kappa-\mu+1}(f^{(1)}_{\kappa-\mu+1} Q_1 + f^{(2)}_{\kappa-\mu+1} Q_2 + \ldots + f^{(\kappa-\mu)}_{\kappa-\mu+1} Q_{\kappa-\mu} + Q_{\kappa-\mu+1}) \\
&+ \alpha_{\kappa-\mu+2}(f^{(1)}_{\kappa-\mu+2} Q_1 + f^{(2)}_{\kappa-\mu+2} Q_2 + \ldots + f^{(\kappa-\mu)}_{\kappa-\mu+2} Q_{\kappa-\mu} + Q_{\kappa-\mu+2}) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \alpha_{\kappa-1}(f^{(1)}_{\kappa-1} Q_1 + f^{(2)}_{\kappa-1} Q_2 + \ldots + f^{(\kappa-\mu)}_{\kappa-1} Q_{\kappa-\mu} + Q_{\kappa-1}) \\
&+ \alpha_{\kappa}\quad(f^{(1)}_{\kappa} \quad Q_1 + f^{(2)}_{\kappa} \quad Q_2 + \ldots + f^{(\kappa-\mu)}_{\kappa} Q_{\kappa-\mu} + Q_{\kappa})
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
U_\lambda = &\alpha_{\kappa-\mu+1}\left[\sum_{r=1}^{r=\kappa-\mu} f^{(r)}_{\kappa-\mu+1} Q_r + Q_{\kappa-\mu+1}\right] \\
&+ \alpha_{\kappa-\mu+2}\left[\sum_{r=1}^{r=\kappa-\mu} f^{(r)}_{\kappa-\mu+2} Q_r + Q_{\kappa-\mu+2}\right] \\
&+ \ldots + \alpha_{\kappa-1}\left[\sum_{r=1}^{r=\kappa-\mu} f^{(r)}_{\kappa-1} Q_r + Q_{\kappa-1}\right] + \alpha_\kappa\left[\sum_{r=1}^{r=\kappa-\mu} f^{(r)}_{\kappa} Q_r + Q_{\kappa}\right].
\end{aligned}$$

Вводя для многочленовъ, заключенныхъ въ четырехугольныя скобки, сокращенныя обозначенія съ помощью буквы U съ двумя индексами, изъ которыхъ одинъ указываетъ на корень λ, другой—на произвольный множитель α съ соотвѣтствующимъ указателемъ, мы напишемъ многочленъ U_λ подъ видомъ:

$$U_\lambda = \alpha_{\kappa-\mu+1} U_\lambda^{(\kappa-\mu+1)} + \alpha_{\kappa-\mu+2} U_\lambda^{(\kappa-\mu+2)} + \ldots + \alpha_{\kappa-1} U_\lambda^{(\kappa-1)} + \alpha_\kappa U_\lambda^{(\kappa)};$$

въ тоже время многочленъ V_λ будетъ равенъ λU_λ, а диференціальное уравненіе

$$\frac{d^2 U_\lambda}{d t^2} + \lambda U_\lambda = 0$$

при этихъ обозначеніяхъ можетъ быть написано подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{\kappa-\mu+1}\left\{\frac{d^2 U_\lambda^{(\kappa-\mu+1)}}{d t^2} + \lambda U_\lambda^{(\kappa-\mu+1)}\right\} + \alpha_{\kappa-\mu+2}\left\{\frac{d^2 U_\lambda^{(\kappa-\mu+2)}}{d t^2} + \lambda U_\lambda^{(\kappa-\mu+2)}\right\} \\
&\quad + \ldots + \alpha_{\kappa-1}\left\{\frac{d^2 U_\lambda^{(\kappa-1)}}{d t^2} + \lambda U_\lambda^{(\kappa-1)}\right\} + \alpha_\kappa\left\{\frac{d^2 U_\lambda^{(\kappa)}}{d^2 t} + \lambda U_\lambda^{(\kappa)}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Въ виду произвольности множителей α это уравненіе распадается на μ отдѣльныхъ дифференціальныхъ уравненій вида:

$$\frac{d^2 U_\lambda^{(\kappa-\mu+r)}}{d^2 t} + \lambda U_\lambda^{(\kappa-\mu+r)} = 0 \quad (r = 0, 1, 2, 3, \ldots \mu - 1).$$

Къ зависимымъ перемѣннымъ этихъ дифференціальныхъ уравненій $U_\lambda^{(\kappa-\mu+r)}$ $(r = 0, 1, 2, 3, \ldots \mu - 1)$ примѣнимы вполнѣ всѣ тѣ замѣчанія, которыя выше были сдѣланы относительно аналогичныхъ имъ выраженій $U_\beta^{(\kappa-1)}$ и $U_\beta^{(\kappa)}$ (стр. 44).

Число такихъ перемѣнныхъ $U_\lambda^{(\kappa-\mu+r)}$ всегда равно числу, выражающему кратность корня λ, и всѣ эти перемѣнныя линейно независимы другъ отъ друга, такъ какъ при совершенно произвольныхъ множителяхъ $\alpha_{\kappa-\mu+1}, \alpha_{\kappa-\mu+2}, \ldots \alpha_{\kappa-1}, \alpha_\kappa$ сумма

$$\sum_{e=1}^{e=\mu} \alpha_{\kappa-\mu+e} U_\lambda^{(\kappa-\mu+e)} = U_\lambda$$

не обращается въ нуль.

Нахожденіе полиномовъ вида $U_\lambda^{(\kappa-\mu+r)}$ съ помощью преобразованія квадратичныхъ формъ $2Q$ и $2V - 2V_0$.

Такъ какъ по предъидущему параграфу каждому кратному корню λ дискриминанта $\Delta(s)$ соотвѣтствуетъ система независимыхъ другъ отъ друга полиномовъ $U_\lambda^{(\kappa-\mu+r)}$ въ числѣ равномъ показателю кратности разсматриваемаго корня λ, то легко прійти къ заключенію, что, каковы бы ни были корни уравненія $\Delta(s) = 0$ и ихъ кратность, всегда возможно найти k различныхъ полиномовъ вида U_h и $U_\lambda^{(\kappa-\mu+r)}$, и изъ квадратовъ этихъ полиномовъ составить обѣ квадратичныя функціи $2Q$ и $2V - 2V_0$.

Мы подтвердимъ этотъ выводъ, полученный какъ слѣдствіе нашего способа комбинированія уравненій, непосредственнымъ преобразованіемъ квадрачичныхъ формъ, съ помощью котораго сейчасъ же опредѣлятся и полиномы $U_\lambda^{(\kappa-\mu+r)}$.

Не желая безъ надобности удлиннять формулъ, мы можемъ предположить, что дискриминантъ $\Delta(s)$, кромѣ однократныхъ корней $s = s_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots i)$, имѣетъ еще корни λ и λ_1 кратностей μ и μ_1, и вести преобразованіе для этого случая, такъ какъ присутствіе большаго числа кратныхъ корней не вноситъ существенныхъ измѣненій въ процессъ преобразованія. Въ предполагаемомъ преобразованіи мы примемъ за исходныя выраженія для $2\,Q$ и $2\,V - 2\,V_0$, получаемыя съ помощью теоремы *Euler'a*, которыя имѣютъ видъ:

$$2\,Q = \sum_{e=1}^{e=\kappa} Q_e q_e \quad \text{и} \quad 2\,V - 2\,V_0 = \sum_{e=1}^{e=\kappa} V_e q_e,$$

гдѣ q_e по формулѣ (q_e) на страницѣ (35) равенъ.

$$\sum_{j=1}^{j=\kappa} \frac{M_{ej}}{\Delta(s)} \Phi_j.$$

Прежде чѣмъ приступить къ дальнѣйшимъ преобразованіямъ квадратичныхъ формъ, мы замѣтимъ, что при нашихъ предположеніяхъ относительно состава детерминанта $\Delta(s)$ дробь $\frac{M_{ej}}{\Delta(s)}$, входящая въ выраженіе для q_e, допускаетъ сокращеніе на произведеніе $(s-\lambda)^{\mu-1}.(s-\lambda_1)^{\mu_1-1}$, такъ какъ кратные корни детерминанта $\Delta(s)$ являются кратными корнями всѣхъ первыхъ его миноровъ, при чемъ кратность ихъ въ этихъ минорахъ уменьшается на единицу.

Обозначая

$$\frac{M_{ej}}{(s-\lambda)^{\mu-1}.(s-\lambda_1)^{\mu_1-1}}$$

черезъ N_{je},

$$\frac{\Delta(s)}{(s-\lambda)^{\mu-1}.(s-\lambda_1)^{\mu_1-1}}$$

—черезъ $\delta(s)$, мы получимъ для q_e выраженіе:

$$q_e = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \frac{N_{ej}}{\delta(s)} \Phi_j.$$

Въ виду полной независимости перемѣнныхъ q_e отъ произвольнаго множителя s, q_e можетъ быть приравнено только тому члену суммы

$$\sum_{j=1}^{j=\kappa} \frac{N_{ej}}{\delta(s)} \Phi_j,$$

который свободенъ отъ множителя s, т. е. содержитъ s въ нулевой степени; коэффиціенты же при всѣхъ другихъ степеняхъ s, кромѣ нулевой, должны обращаться въ нуль. Это требованіе приводитъ насъ къ безконечному ряду равенствъ, изъ котораго мы выпишемъ здѣсь только первыхъ два:

$$q_e = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\Phi_j\right]_{s^0} \text{ и } \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\Phi_j\right]_{s^{-1}} = 0 \qquad (s)$$

гдѣ скобки съ приписанными внизу s^0 и s^{-1} обозначаютъ символически коэффиціенты при s^0 и s^{-1} въ разложеніи дроби $\frac{N_{ej}\,\Phi_j}{\delta(s)}$ по нисходящимъ степенямъ s.

Изъ того, что степень N_{ej} относительно s только на единицу нижь степени $\delta(s)$, а $\Phi_j = s\,Q_j - V_j$, слѣдуетъ, что въ разложеніи наивысшими членами будутъ члены съ нулевой степенью s, получаемые отъ дѣленія высшихъ членовъ произведеній $N_{ej}\,\Phi_j$, т. е. $s\,N_{ej}\,Q_j$, на $\delta(s)$; другими словами q_e можетъ быть выраженъ такъ:

$$q_e = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}\,\Phi_j}{\delta(s)}\right]_{s^0} = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{s\,N_{ej}\,Q_j}{\delta(s)}\right]_{s^0} = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}\,Q_j}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} \cdot Q_j .$$

Точно также вторая изъ формулъ (s) даетъ:

$$\sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}\,\Phi_j}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{s\,N_{ej}\,Q_j}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} - \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}\,V_j}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} = 0,$$

или

$$\sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{s\,N_{ej}\,Q_j}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}\,V_j}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}};$$

но

$$\sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{s\,N_{ej}\,Q_j}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}\,Q_j}{\delta(s)}\right]_{s^{-2}},$$

а потому

$$\sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}\,V_j}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}\,Q_j}{\delta(s)}\right]_{s^{-2}},$$

или

$$\sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} V_j = \sum_{j=1}^{j=\kappa} \left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\right]_{s^{-2}} Q_j .$$

Пользуясь выведенными формулами, мы придадимъ квадратичнымъ формамъ $2Q$ и $2V-2V_0$ слѣдующій видъ:

$$2Q=\sum_{e=1}^{e=\kappa} Q_e q_e=\sum_{e=1}^{e=\kappa}\sum_{j=1}^{j=\kappa}\left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} Q_e Q_j$$

$$2V-2V_0=\sum_{e=1}^{e=\kappa} V_e q_e=\sum_{e=1}^{e=\kappa}\sum_{j=1}^{j=\kappa}\left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} Q_j V_e=\sum_{j=1}^{j=\kappa}\sum_{e=1}^{e=\kappa}\left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} V_e Q_j$$

$$=\sum_{e=1}^{e=\kappa}\sum_{j=1}^{j=\kappa}\left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\right]_{s^{-2}}\cdot Q_e\cdot Q_j.$$

Коэффиціенты приведенныхъ квадратичныхъ формъ

$$\left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\right]_{s^{-1}} \text{ и } \left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\right]_{s^{-2}}$$

могутъ быть вычислены на основаніи слѣдующихъ соображеній: такъ какъ $\frac{N_{ej}(s)}{\delta(s)}$ есть правильная дробь, знаменатель которой $\delta(s)$ имѣетъ только однократные корни $s_1, s_2, s_3, \ldots s_i$, λ и λ_1, то

$$\frac{N_{je}(s)}{\delta(s)}=\sum_{i=1}^{i=i}\frac{A_{ej}^{(s_i)}}{s-s_i}+\frac{A_{ej}^{(\lambda)}}{s-\lambda}+\frac{A_{ej}^{(\lambda_1)}}{s-\lambda_1}=\sum_{i=1}^{i=i+2}\frac{A_{ej}^{(i)}}{s-s_i},$$

гдѣ λ и λ_1 включены въ общій счетъ корней s_i.

Вынеся въ знаменателѣ частной дроби $\frac{A_{ei}^{(i)}}{s-s_i}$ множитель s за скобку, мы будетъ имѣть:

$$\frac{A_{ej}^{(i)}}{s-s_i}=\frac{A_{ej}^{(i)}}{s\left(1-\frac{s_i}{s}\right)}=A_{ej}^{(i)}s^{-1}\left(1-\frac{s_i}{s}\right)^{-1}=A_{ej}^{(i)}s^{-1}\left\{1+\frac{s_i}{s}+\frac{s_i^2}{s^2}+\ldots\right\},$$

или

$$\frac{A_{ej}^{(i)}}{s-s_i}=A_{ej}^{(i)}s^{-1}+A_{ej}^{(i)}s_i s^{-2}+A_{ej}^{(i)}s_i^2 s^{-3}+\ldots;$$

суммируя частныя дроби по индексу i отъ $i=1$ до $i=i+2$, найдемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=i+2}\frac{A_{ej}^{(i)}}{s-s_i}=s^{-1}\sum_{i=1}^{i=i+2}A_{ej}^{(i)}+s^{-2}\sum_{i=1}^{i=i+2}A_{ej}^{(i)}s_i+\ldots\ldots.$$

Изъ этого разложенія ясно, что

$$\left[\frac{N_{ej}(s)}{\delta(s)}\right]_{s-1} = \sum_{i=1}^{i=i+2} A_{ej}^{(i)} \quad \text{и} \quad \left[\frac{N_{ej}(s)}{\delta(s)}\right]_{s-2} = \sum_{i=1}^{i=i+2} A_{ej}^{(i)}\, s_i. \qquad (k)$$

Пользуясь полученными значеніями коеффиціентовъ

$$\left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\right]_{s-1} \text{ и } \left[\frac{N_{ej}}{\delta(s)}\right]_{s-2},$$

мы напишемъ квадратичныя формы $2Q$ и $2V-2V_0$ подъ слѣдующимъ видомъ:

$$2Q = \sum_{e=1}^{e=\kappa} \sum_{j=1}^{j=\kappa} \sum_{i=1}^{i=i+2} A_{ej}^{(i)} Q_e Q_j$$

$$2V - 2V_0 = \sum_{e=1}^{e=\kappa} \sum_{j=1}^{j=\kappa} \sum_{i=1}^{i=i+2} s_i A_{ej}^{(i)} Q_e Q_j\,.$$

Переставивъ суммированіе по i на послѣднее мѣсто, мы придадимъ этимъ формуламъ слѣдующій видъ:

$$2Q = \sum_{i=1}^{i=i+2} \left\{ \sum_{e=1}^{e=\kappa} \sum_{j=1}^{j=\kappa} A_{ej}^{(i)} Q_e Q_j \right\} = \sum_{i=1}^{i=i+2} P_i$$

$$2V - 2V_0 = \sum_{i=1}^{i=i+2} s_i \left\{ \sum_{e=1}^{e=\kappa} \sum_{j=1}^{j=\kappa} A_{ej}^{(i)} Q_e Q_j \right\} = \sum_{i=1}^{i=i+2} s_i P_i\,.$$

гдѣ черезъ P_i обозначены квадратичныя формы

$$P_i = \sum_{e=1}^{e=\kappa} \sum_{j=1}^{j=\kappa} A_{ej}^{(i)} Q_e Q_j,$$

въ которыхъ коэффиціенты $A_{je}^{(i)}$ могутъ быть при желаніи замѣнены ихъ значеніями по извѣстнымъ формуламъ

$$A_{ej}^{(i)} = N_{ej}(s_i) : \left(\frac{d\delta}{ds}\right)_{s=s_i}.$$

Пользуясь формулой

$$\delta(s) = \frac{\Delta(s)}{(s-\lambda)^{\mu-1}(s-\lambda_1)^{\mu_1-1}},$$

связывающей $\delta(s)$ съ $\Delta(s)$, мы найдемъ съ помощью логариѳмическаго дифференцированія слѣдующую связь между производными ихъ:

$$\frac{1}{\delta(s)}\cdot\frac{d\delta}{ds}=\frac{1}{\Delta(s)}\cdot\frac{d\Delta}{ds}-\frac{\mu-1}{s-\lambda}-\frac{\mu_1-1}{s-\lambda_1},$$

или

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{ds}&=\frac{\delta(s)}{\Delta(s)}\cdot\frac{d\Delta}{ds}-(\mu-1)\frac{\delta(s)}{s-\lambda}-(\mu_1-1)\frac{\delta(s)}{s-\lambda_1}\\&=\frac{1}{(s-\lambda)^{\mu-1}(s-\lambda_1)^{\mu_1-1}}\cdot\frac{d\Delta(s)}{ds}-\left\{(\mu-1)(s-\lambda_1)+(\mu_1-1)(s-\lambda)\right\}\prod_1^i(s-s_i)\end{aligned}\tag{П}$$

Изъ этого соотношенія между производными, при подстановкѣ вмѣсто s одного изъ корней s_i, находимъ:

$$\left(\frac{d\delta}{ds}\right)_{s=s_i}=\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)_{s=s_i}\cdot\frac{1}{(s_i-\lambda)^{\mu-1}(s_i-\lambda_1)^{\mu_1-1}},\tag{D}$$

такъ какъ второй членъ правой части въ формулѣ (П) для всякаго однократнаго корня $s_i\,(i=1,2,3,\ldots i)$ обращается тождественно въ нуль. Если мы воспользуемся послѣднимъ соотношеніемъ между

$$\left(\frac{d\delta}{ds}\right)_{s=s_i} \text{ и } \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)_{s=s_i}$$

для вычисленія коеффиціентовъ $A_{ej}^{(i)}$, то получимъ

$$A_{ej}^{(i)}=\frac{N_{ej}(s_i)(s_i-\lambda)^{\mu-1}(s_i-\lambda_1)^{\mu_1-1}}{\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)_{s=s_i}}=\frac{M_{ej}(s_i)}{\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)_{s=s_i}}.$$

Это равенство, имѣющее мѣсто при всѣхъ i отъ 1 до i, показываетъ, что коеффиціенты $A_{ej}^{(i)}$ по своему строенію тождественны съ съ соотвѣтствующими коеффиціентами, найденными нами выше для случая, когда детерминантъ $\Delta(s)$ имѣлъ только одни простые корни s_i. Поэтому всѣ квадратичныя формы $P_i\,(i=1,2,3,\ldots i)$ будутъ по строенію тождественны съ выше найденными выраженіями ω_i^2.

Но при $i=i+1$ и $i=i+2$ формула (D) не имѣетъ мѣста, такъ какъ $\prod\limits_1^i(s-s_i)$ при $s=\lambda$ и $s=\lambda_1$ въ формулѣ (П) не обращается въ нуль; такимъ образомъ полиномы P_{i+1} и P_{i+2}, соотвѣтствующіе кратнымъ корнямъ λ и λ_1 детерминанта $\Delta(s)$, оставаясь квадратичными и однородными функціями отъ Q_i, а слѣдовательно и отъ q_i, въ своемъ строеніи все же нѣсколько уклоняются отъ общаго типа полиномовъ P_i или ω_i^2. Это отличіе полиномовъ P_{i+1} и P_{i+2} отъ всѣхъ другихъ полиномовъ P_i $(i = 1, 2, 3, \ldots i)$ состоитъ въ томъ, что первые два полинома не суть точные квадраты, а только могутъ быть разложены на квадраты линейныхъ однородныхъ выраженій. Полная аналогія между выраженіями P_{i+1} и P_{i+2} позволяетъ ограничиться преобразованіемъ только одного изъ этихъ выраженій.

Выбравъ первое изъ этихъ выраженій

$$P_{i+1} = \sum_{e=1}^{e=\kappa} \sum_{j=1}^{j=\kappa} A_{ej}^{(i+1)} Q_e Q_j,$$

мы установимъ предварительно одно свойство коэффиціентовъ этого выраженія $A_{ej}^{(i+1)}$, состоящее въ томъ, что опредѣлитель этой формы и всѣ миноры его отъ 1-го до $k - \mu - 1$-го порядка, которые будутъ обозначаться здѣсь соотвѣтственно символами

$$\left| A_{ej}^{(i+1)} \right|_\kappa, \ \left| A_{ej}^{(i+1)} \right|_{\kappa-1}, \ldots\ldots \left| A_{ej}^{(i+1)} \right|_{\mu+1},$$

обращаются тождественно въ нуль. На основаніи связи между минорами, порядки которыхъ отличаются на единицу, доказательство этого свойства можетъ быть сведено къ доказательству обращенія въ нуль однихъ только миноровъ $k - \mu - 1$-го порядка, такъ какъ обращеніе въ нуль *всѣхъ этихъ* миноровъ влечетъ за собой обращеніе въ нуль всѣхъ другихъ миноровъ и наконецъ самаго опредѣлителя $\left| A_{ej}^{(i+1)} \right|_\kappa$.

Желая доказать вышеупомянутое свойство относительно одного изъ миноровъ (наприм. діагональнаго) $k - \mu - 1$-го порядка, мы будемъ разсматривать этотъ миноръ, какъ результатъ подстановки корня $s = \lambda$ въ опредѣлитель $\mu + 1$-го порядка

$$\left| A_{ej} \right|_{\mu+1} = \left| A_{11}\, A_{22} \ldots\ldots A_{\mu+1\, \mu+1} \right|,$$

гдѣ

$$A_{ej} = \frac{N_{ej}(s)}{\dfrac{d\delta}{ds}} = \frac{M_{ej}(s)}{\dfrac{d\delta}{ds}(s-\lambda)^{\mu-1}(s-\lambda_1)^{\mu_1-1}}.$$

Послѣ подстановки этихъ значеній вмѣсто A_{ej}, опредѣлитель $\left| A_{ej} \right|_{\mu+1}$ принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\left| A_{ej} \right|_{\mu+1} = \left(\frac{d\delta}{ds}\right)^{-(\mu+1)} \cdot \left| N_{ej} \right|_{\mu+1}$$

$$= \left(\frac{d\delta}{ds}\right)^{-(\mu+1)} \cdot (s-\lambda)^{-(\mu+1)(\mu-1)} \cdot (s-\lambda_1)^{-(\mu+1)(\mu_1-1)} \cdot \left| M_{ej} \right|_{\mu+1}.$$

Но опредѣлитель $\left|M_{ej}\right|_{\mu+1}$, составленный изъ первыхъ миноровъ другого опредѣлителя $\Delta(s)$, дѣлится на μ-ю степень этого послѣдняго, и потому можетъ быть замѣненъ произведеніемъ $\Delta^{\mu}(s).F(s)$, которое, послѣ подстановки вмѣсто $\Delta(s)$, произведенія $G(s).(s-\lambda)^{\mu}(s-\lambda_1)^{\mu_1}$, превращается въ

$$\Delta^{\mu}.F(s)=F(s).G^{\mu}(s)(s-\lambda)^{\mu^2}(s-\lambda_1)^{\mu\mu_1}.$$

Вносся послѣднее выраженіе въ формулу, выражающую $\left|A_{ej}\right|_{\mu+1}$, и сокращая, мы найдемъ окончательную формулу

$$\left|A_{ej}\right|_{\mu+1}=F(s).G^{(\mu)}(s)\left(\frac{d\,\delta}{d\,s}\right)^{-(\mu+1)}.(s-\lambda).(s-\lambda_1)^{\mu-\mu_1+1},$$

изъ которой видно, что подстановка $s=\lambda$ обращаетъ этотъ опредѣлитель въ нуль. Примѣняя тотъ же самый пріемъ преобразованія къ какому нибудь другому минору того же порядка, мы нашли бы, что и этотъ миноръ содержитъ множитель $s-\lambda$ и обращается въ нуль при подстановкѣ корня $s=\lambda$; но въ опредѣлитель μ-го порядка изъ тѣхъ же самыхъ коеффиціентовъ A_{ej} множитель $s-\lambda$ входитъ уже только въ нулевой степени; поэтому миноры порядка $k-\mu$ являются первыми минорами, не обращающимися въ нуль при $s=\lambda$.

Основываясь на доказанномъ свойствѣ коэффиціентовъ $A_{ej}^{(i+1)}$, которые для указанія ихъ связи съ кратнымъ корнемъ λ мы будемъ изображать символъ λ_{ej}, можно преобразовать полиномъ P_{i+1} къ виду суммы μ квадратовъ.

Мы совершимъ это преобразованіе наиболѣе краткимъ путемъ, если продѣлаемъ операцію, описанную нами выше (на стр. 19), надъ опредѣлителемъ

$$\Theta_{\mu}=\begin{vmatrix} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, & \ldots & \lambda_{1\mu}, & \pi_1 \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23}, & \ldots & \lambda_{2\mu}, & \pi_2 \\ \lambda_{31}, & \lambda_{32}, & \lambda_{33}, & \ldots & \lambda_{3\mu}, & \pi_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{\mu 1}, & \lambda_{\mu 2}, & \lambda_{\mu 3}, & \ldots & \lambda_{\mu\mu}, & \pi_{\mu} \\ \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \ldots & \pi_{\mu}, & P_{i+1} \end{vmatrix},$$

который получается окаймленіемъ опредѣлителя

$$\left|\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \ldots \lambda_{\mu\mu}\right| = \left|A_{ej}^{(i+\mu)}\right|_{\mu} = \left|\lambda\right|_{\mu}$$

элементами π_j, гдѣ π_j есть половина производной

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P_{i+1}}{\partial Q_j} = \lambda_{j1} Q_1 + \lambda_{j2} Q_2 + \lambda_{j3} Q_3 + \ldots + \lambda_{jk} Q_k.$$

Называя первые миноры опредѣлителя Θ_μ, соотвѣтствующіе элементамъ его $\lambda_{\mu\mu}$ и π_μ соотвѣтственно черезъ $\Theta_{\mu-1}$ и H_μ, а второй миноръ его, соотвѣтствующій элементамъ $\lambda_{\mu\mu}$ и P_{i+1}, т. е. $\left|A_{ej}^{(i+1)}\right|_{\mu-1}$ черезъ $\left|\lambda\right|_{\mu-1}$, мы будемъ имѣть слѣдующую формулу:

$$\Theta_\mu \cdot \begin{vmatrix} \Theta_{\mu-1}, & H_\mu \\ H_\mu, & \left|\lambda\right|_\mu \end{vmatrix} = \Theta_\mu^2 \cdot \left|\lambda\right|_{\mu-1},$$

или, по сокращеніи на Θ_μ, находимъ:

$$\begin{vmatrix} \Theta_{\mu-1}, & H_\mu \\ H_\mu, & \left|\lambda\right|_\mu \end{vmatrix} = \Theta_\mu \cdot \left|\lambda\right|_{\mu-1}.$$

Разлагая опредѣлитель, стоящій въ лѣвой части этого равенства, мы будемъ имѣть слѣдующую формулу:

$$\left|\lambda\right|_\mu \cdot \Theta_{\mu-1} - H_\mu^2 = \Theta_\mu \cdot \left|\lambda\right|_{\mu-1},$$

которой мы придадимъ болѣе симметричный видъ, раздѣливъ обѣ части равенства на произведеніе $\left|\lambda\right|_\mu \cdot \left|\lambda\right|_{\mu-1}$; тогда получится уравненіе:

$$(\Theta) \qquad \frac{\Theta_{\mu-1}}{\left|\lambda\right|_{\mu-1}} - \frac{H_\mu^2}{\left|\lambda\right|_\mu \cdot \left|\lambda\right|_{\mu-1}} = \frac{\Theta_\mu}{\left|\lambda\right|_\mu} \quad \text{или} \quad \frac{\Theta_{\mu-1}}{\left|\lambda\right|_{\mu-1}} = \frac{\Theta_\mu}{\left|\lambda\right|_\mu} + \frac{H_\mu^2}{\left|\lambda\right|_\mu \cdot \left|\lambda\right|_{\mu-1}}$$

Замѣтивъ, что въ силу опредѣленій:

$$\left|\lambda\right|_1 = \lambda_{11}, \ \Theta_0 = P_{i+1}, \ H_1 = \pi_1 \ \text{и} \ \Theta_1 = \lambda_{11} P_{i+1} - \pi_1^2,$$

и что съ другой стороны, по формулѣ (Θ) при $\mu = 1$

$$\Theta_1 = \frac{\lambda_{11}}{\left|\lambda\right|_0} \cdot P_{i+1} - \frac{H_1^2}{\left|\lambda\right|_0},$$

мы находимъ изъ уравненія двухъ выраженій для Θ_1, что $\left|\lambda\right|_0 = 1$.

Суммируя теперь равенства (Θ) отъ $\mu = 1$ до $\mu = \mu$, найдемъ

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\mu} \frac{\Theta_{\mu-1}}{\left|\lambda\right|_{\mu-1}} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\mu} \frac{\Theta_\mu}{\left|\lambda\right|_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=\mu} \frac{H_\mu^2}{\left|\lambda\right|_\mu \cdot \left|\lambda\right|_{\mu-1}}.$$

По сокращеніи общихъ слагаемыхъ въ суммахъ

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\mu}\frac{\Theta_{\mu-1}}{|\lambda|_{\mu-1}} \text{ и } \sum_{\mu=1}^{\mu=\mu}\frac{\Theta_{\mu}}{|\lambda|_{\mu}}$$

получимъ:

$$\frac{\Theta_0}{|\lambda|_0}=\frac{\Theta_\mu}{|\lambda|_\mu}+\sum_{\mu=1}^{\mu=\mu}\frac{H_\mu^{\,2}}{|\lambda|_\mu|\lambda|_{\mu-1}},$$

или

$$P_{i+1}=\frac{\Theta_\mu}{|\lambda|_\mu}+\sum_{\mu=1}^{\mu=\mu}\frac{H_\mu^{\,2}}{|\lambda|_\mu|\lambda|_{\mu-1}}.$$

Но на основаніи доказаннаго выше свойства коеффиціентовъ λ_{ej} не трудно доказать, что опредѣлитель Θ_μ обращается въ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, разложивъ элементы послѣдней колонны, мы получимъ изъ опредѣлителя Θ_μ k опредѣлителей $\Theta_\mu^{(i)}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ldots k)$, отличающихся другъ отъ друга и отъ опредѣлителя Θ_μ только элементами послѣдней колонны. Какой нибудь изъ этихъ опредѣлителей:

$$\Theta_\mu^{(i)}=\begin{vmatrix}\lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \ldots & \lambda_{1\mu}, & \lambda_{1i}\,Q_i\\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \ldots & \lambda_{2\mu}, & \lambda_{2i}\,Q_i\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_{\mu1}, & \lambda_{\mu2}, & \ldots & \lambda_{\mu\mu}, & \lambda_{\mu i}\,Q_i\\ \pi_1, & \pi_2, & \ldots & \pi_\mu, & \pi_i\,Q_i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \ldots & \lambda_{1\mu}, & \lambda_{1i}\\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \ldots & \lambda_{2\mu}, & \lambda_{2i}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_{\mu1}, & \lambda_{\mu2}, & \ldots & \lambda_{\mu\mu}, & \lambda_{\mu i}\\ \pi_1, & \pi_2, & \ldots & \pi_\mu, & \pi_i\end{vmatrix}.\,Q_i$$

при всякомъ i обращается въ нуль.

Дѣйствительно, пока индексъ $i\leqslant\mu$, опредѣлители, состоящіе множителями при Q_i, обращаются въ нуль, какъ опредѣлители съ двумя одинаковыми колоннами; когда же индексъ i сдѣлается больше μ, то опредѣлитель, стоящій множителемъ при Q_i (послѣ умноженія горизонталей его послѣдовательно на $Q_1, Q_2, Q_3,\ldots Q_\mu$ и вычитанія изъ послѣдней) преобразуется къ виду:

$$\begin{vmatrix}\lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \ldots & \lambda_{1\mu}, & \lambda_{1i}\\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \ldots & \lambda_{2\mu}, & \lambda_{2i}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_{\mu1} & \lambda_{\mu2}, & \ldots & \lambda_{\mu\mu}, & \lambda_{\mu i}\\ \sum\limits_{j=\mu+1}^{j=k}\lambda_{1j}\,Q_j, & \sum\limits_{j=\mu+1}^{j=k}\lambda_{2j}\,Q_j, & \ldots & \sum\limits_{j=\mu+1}^{j=k}\lambda_{\mu j}\,Q_j, & \sum\limits_{j=\mu+1}^{j=k}\lambda_{ij}\,Q_j\end{vmatrix};$$

этотъ же опредѣлитель, разложенный по элементамъ послѣдней строки, приводится къ суммѣ членовъ вида:

$$Q_j \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \ldots \lambda_{1\mu} & \lambda_{1i} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \ldots \lambda_{2\mu} & \lambda_{2i} \\ \ldots & \ldots \ldots & \ldots \\ \lambda_{\mu 1} & \lambda_{\mu 2} \ldots \lambda_{\mu\mu} & \lambda_{\mu i} \\ \lambda_{j1} & \lambda_{j2} \ldots \lambda_{j\mu} & \lambda_{ji} \end{vmatrix},$$

въ которыхъ множители при Q_j суть опредѣлители $\mu+1$-го порядка изъ коэффиціентовъ λ_{ji}, по условію равные нулю.

Обращеніе въ нуль всѣхъ $\Theta_\mu^{(i)}$, а слѣдовательно и Θ_μ, приводитъ полиномъ P_{i+1} къ виду суммы μ квадратовъ:

$$P_{i+1} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\mu} \frac{H_\mu^2}{|\lambda|_\mu \, |\lambda|_{\mu-1}}.$$

Повторивъ тѣ же самые пріемы преобразованія въ приложеніи къ полиному P_{i+2}, соотвѣтствующему кратному корню λ_1, мы нашли бы, что этотъ полиномъ можетъ быть разложенъ на сумму μ_1 квадратовъ выраженій линейныхъ относительно Q_i, а слѣдовательно и относительно q_i.

Такъ какъ квадратичныя формы $2Q$ и $2V - 2V_0$ обѣ суть опредѣленныя (definitae) положительныя формы, то всѣ слагаемыя вида

$$\frac{H_\mu^2}{|\lambda|_\mu \, |\lambda|_{\mu-1}}$$

могутъ быть только положительными величинами; иначе говоря, линейные относительно Q_i (или относительно q_i) многочлены

$$\frac{H_\mu}{\sqrt{|\lambda|_\mu \, |\lambda|_{\mu-1}}}$$

будутъ многочленами съ вещественными коэффиціентами. Тѣмъ же свойствомъ, очевидно, обладаютъ и многочлены вида

$$\frac{H_\mu}{\sqrt{|\lambda_1|_\mu \, |\lambda_1|_{\mu_1-1}}},$$

относящіеся къ другому кратному корню λ_1.

Слѣдуетъ здѣсь же отмѣтить еще одно важное свойство только что упомянутыхъ многочленовъ, состоящее въ томъ, что, какъ между многочленами

$$\frac{H_\mu}{\sqrt{|\lambda|_\mu |\lambda|_{\mu-1}}},$$

относящимся къ одному и тому же кратному корню, такъ и между многочленами, относящимися къ различнымъ (простымъ или кратнымъ) корнямъ, не существуетъ линейной зависимости. Чтобы убѣдиться въ существованіи этого свойства, достаточно замѣтить, что существованіе линейной зависимости между какими нибудь двумя (или болѣе) многочленами вышеуказаннаго типа даетъ возможность соединить въ одинъ членъ квадраты двухъ линейно зависимыхъ многочленовъ, входящихъ въ квадратичныя формы, и такимъ образомъ представить эти формы въ видѣ суммы квадратовъ линейно независимыхъ другъ отъ друга многочленовъ въ числѣ меньшимъ числа k.

Но въ такомъ случаѣ для обращенія въ нуль формъ $2Q$ и $2V - 2V_0$, которое должно происходить только при значеніяхъ

$$q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_k = 0,$$

было бы достаточно приравнять нулю независимые другъ отъ друга многочлены; это привело бы къ системѣ линейныхъ уравненій съ числомъ перемѣнныхъ q_i бо̀льшимъ, чѣмъ число уравненій, т. е. къ установленію функціональной зависимости между независимыми другъ отъ друга координатами q_i; невозможность чего непосредственно очевидна.

Изъ всего сказаннаго относительно многочленовъ вида

$$\frac{H_\mu}{\sqrt{|\lambda|_\mu |\lambda|_{\mu-1}}}$$

легко заключить, что эти многочлены обладаютъ тѣми же самыми свойствами, какими обладаютъ опредѣленные выше (стр. 45) многочлены $U_\lambda^{(k-\mu+r)}$.

Интегрированіе уравненій Lagrange'а, когда дискриминантъ $\Delta(s)$ имѣетъ какъ простые такъ и кратные корни.

Держась относительно корней дискриминанта $\Delta(s)$, сдѣланныхъ выше (стр. 46), довольно общихъ предположеній, мы получимъ изъ основныхъ уравненій Lagrange'а три группы дифференціальныхъ уравненій. Первую группу составятъ уравненія, связанныя съ однократными корнями дискриминанта $\Delta(s)$, вторую и третью группы—уравненія, связанныя съ кратными корнями λ и λ_1 того же дискриминанта. Способъ образованія уравненій каждой изъ этихъ группъ описанъ подробно выше на стр. 44; тамъ же было замѣчено, что зависимыя перемѣнныя этихъ уравненій U_h и $U_\lambda^{(k-\mu+r)}$ представляютъ независимыя другъ отъ друга линейныя функціи параметровъ q_i.

Ради удобства можно ввести для всѣхъ подобныхъ многочленовъ одну общую нумерацію и считать, что символъ U_h обозначаетъ многочлены, относящіеся къ однократнымъ корнямъ дискриминанта, пока $h = 1, 2, 3 \ldots i$; затѣмъ тотъ же символъ U_h обозначаетъ многочлены, относящіеся къ кратному корню λ при $h = i+1,\ i+2,\ i+3, \ldots i+\mu$, и къ кратному корню λ_1 при $h = i+\mu+1,\ i+\mu+2,\ i+\mu+3,\ i+\mu+\mu_1$.

Такъ какъ (при этомъ новомъ условіи) общее число многочленовъ U_h всегда равно числу k, т. е. числу независимыхъ параметровъ q_i системы, то, при независимости ихъ другъ отъ друга, они могутъ быть приняты за новыя координаты системы, которыя носятъ названіе *нормальныхъ* или *главныхъ* координатъ системы. Отличительной особенностью этихъ координатъ служитъ то, что они являются интегралами дифференціальныхъ уравненій гармоническаго типа

$$\frac{d^2 U_h}{d t^2} + s_h U_h = 0,$$

и по этой причинѣ иногда называются также *гармоническими* координатами.

Общій интегралъ подобнаго рода дифференціальныхъ уравненій уже былъ приведенъ нами выше (формула (k) на стр. 27).

Къ сказанному тамъ полезно присоединить дополнительныя замѣчанія. На основаніи соображеній, изложенныхъ на стр. 25 и выше, всѣ корни s_h дискриминанта $\Delta(s)$ или $\Delta'(s)$ будутъ положительны, если форма $2V - 2V_0$ есть *опредѣленная положительная* форма, т. е. если положеніе равновѣсія, около котораго колеблется система, есть положеніе равновѣсія устойчиваго.

Въ этомъ случаѣ правую часть уравненія (k) можно преобразовать съ помощью формулъ *Euler*'а къ виду:

$$(k') \qquad U_h = E_h \sin(n_h t + \varepsilon_h),$$

гдѣ E_h и ε_h суть произвольныя постоянныя, имѣющія механическій смыслъ; E_h есть такъ называемая амплитуда, а ε_h—начальная фаза колебанія съ періодомъ

$$(T) \qquad T_h = \frac{2\pi}{n_h} = \frac{2\pi}{\sqrt{s_h}}.$$

Каждому однократному корню $s_h (h = 1, 2, 3, \ldots i)$ соотвѣтствуетъ *одна* гармоническая координата U_h съ опредѣленнымъ періодомъ, амплитудой и начальной фазой; съ каждымъ изъ кратныхъ корней λ и λ_1 связано по стольку гармоническихъ координатъ U_h, сколько единицъ содержится въ показателяхъ ихъ кратности.

Всѣ гармоническія координаты, связанныя съ однимъ и тѣмъ же кратнымъ корнемъ λ (или λ_1), имѣютъ одинъ и тотъ же періодъ

$$T_\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} \left(\text{или } T_{\lambda_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}}\right),$$

но амплитуды и начальныя фазы ихъ могутъ измѣняться отъ одной координаты къ другой. Причина этого явленія лежитъ въ томъ очевидномъ обстоятельствѣ, что періодическое время (какъ это видно изъ формулы (T)) зависитъ отъ корней дискриминанта $\Delta(s)$, которые въ свою очередь являются функціями коеффиціентовъ квадратичныхъ формъ $2Q$ и $2V - 2V_0$, представляющихъ кинетическую и потенціальную энергію колеблющейся системы. Разнообразіе начальныхъ обстоятельствъ движенія, т. е. начальныхъ перемѣщеній и начальныхъ скоростей различныхъ точекъ системы, нисколько не вліяя на періоды гармоническихъ координатъ, отражается всецѣло только на ихъ начальныхъ фазахъ и амплитудахъ.

Выраженія для независимыхъ координатъ колеблющейся системы и ихъ производныхъ.

Независимыя координаты системы q_i находятся простымъ разрѣшеніемъ относительно этихъ перемѣнныхъ системы уравненій (k') на стр. 58.

Въ силу линейной независимости многочленовъ U_h такое разрѣшеніе всегда возможно и приводитъ къ слѣдующимъ выраженіямъ для q_i:

$$q_i = \sum_{h=1}^{h=k} C_h^{(i)} E_h \sin(n_h t + \varepsilon_h) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots k),$$

гдѣ $C_h^{(i)}$ представляетъ дробь, знаменатель которой есть опредѣлитель изъ коеффиціентовъ лѣвыхъ частей уравненій (k'), а числитель — одинъ изъ миноровъ этого опредѣлителя. Дифференцированіемъ выраженія для q_i находимъ скорость измѣненія этой координаты

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{h=1}^{h=k} n_h C_h^{(i)} E_h \cos(n_h t + \varepsilon_h).$$

Изъ приведенныхъ формулъ видно, что каждая изъ координатъ q_i и каждая изъ производныхъ ихъ q_i' представляетъ изъ себя сумму изъ k членовъ, изъ которыхъ каждый есть періодическая функція времени.

Въ зависимости отъ корней дискриминанта $\Delta(s)$ періоды отдѣльныхъ составныхъ частей каждой изъ суммъ могутъ или отличаться другъ отъ друга, или отчасти быть равными. Въ томъ и другомъ случаѣ всѣ k слагаемыхъ каждой суммы сохраняютъ свое самостоятельное существованіе и не допускаютъ приведенія въ силу различія и поріодовъ и начальныхъ фазъ, или однихъ только фазъ, у различныхъ членовъ суммы.

Поэтому общія формулы для координатъ и скоростей сохранятъ каждая по $2k$ произвольныхъ постоянныхъ E_h и ε_h $(h=1, 2, 3, \ldots k)$, окончательное опредѣленіе которыхъ можетъ быть произведено въ зависимости отъ заданной системы начальныхъ положеній и скоростей системы.

Не входя въ подробности опредѣленія амплитудъ и фазъ по даннымъ начальнымъ условіямъ, не представляющаго какихъ либо особенностей или трудностей, и опуская нѣкоторыя интересныя свойства системы, совершающей малыя колебанія, чтобы не выйти изъ намѣченныхъ рамокъ, я заканчиваю настоящую статью перечнемъ сочиненій, которыми я пользовался при ея написаніи.

Пе ечень.

1) Treatise on Natural Philosophy by *Lord Kelvin and Tait* Vol. I.
2) The Theory of sound by *Lord Kayleigh*. Vol. I.
3) Treatise on the dynamics of a syst m of rigid bodies. by *E. D. Routh*. Vol. I и II.
4) *Weierstruss*. Ueber ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem ect Werke. Bd. I.
5) *Jakobi*. De binis quibus libet functionibus homogeneis ect. Werke Bd. III.

H. Weber. Lehrbuch der Algebra. Bd I.

Sylvester. Collected Papers. Vol. I.

Darboux. Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques. Liouville Journal. t. 19. 1874.

М. Ивановъ.