КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ВНЕШНИМИ УЗЛАМИ

И. В. Корытов

г. Томск, Томский политехнический университет
e-mail: korytov@tpu.ru

Рассматриваются квадратурные формулы, точные на многочленах степени m, построенные интегрированием интерполяционного многочлена

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{m} c_k f(x_k).$$

В общем случае узлы могут располагаться за пределами отрезка интегрирования. На подынтегральную функцию при этом налагается требование быть определенной в этих узлах. Если задачу поставить таким образом, чтобы известными были узлы, то коэффициенты можно единственным образом получить из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{m} c_k x_k^{\alpha} = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha = 0, \ldots, m.$$

Это возможно, поскольку матрицы таких систем являются квадратными матрицами Вандермонда. Точность интегрирования на многочленах заданной степени сохраняется, даже если все узлы будут внешними по отношению к отрезку интегрирования, однако на индивидуальных функциях погрешность в этом случае может превышать значение интеграла.

Оценить погрешность классическим способом можно, если узлы являются равноотстоящими и внутренними: $x_0 = a$, $x_k \in (a,b)$, $k = 1, \ldots, m-1$, $x_m = b$. Такие формулы относятся к типу Ньютона – Котеса, их погрешность оценивается для класса непрерывно дифференцируемых на отрезке (a,b). Если же узлы равноотстоящие, но $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_k \notin (a,b)$, $k = 2, \ldots, m$, то оценка погрешности на классе непрерывно дифференцируемых функций будет затруднительной. Указанный вариант расположения узлов, частично выходящих за пределы отрезка интегрирования, не единственный: они могут быть сдвинуты влево до $(m-1)$ раз на длину отрезка. В этом случае применение методов функционального анализа с рассмотрением основной функции как свертки ядра усреднения с функцией, от которой требуется найти приближенное значение интеграла. Такое действие обеспечивает, с одной стороны равенство новой и исходной функций в рассматриваемых точках, с другой стороны, принадлежность новой функции пространству Соболева. Погрешность при этом рассматривается как функционал над такой функцией.

В работе приводится вывод нормы функционала погрешности. Норма выступает константой, представляющей данную квадратурную формулу. Константа является неулучшаемой для всего класса основных функций.