ИЗВѢСТІЯ
Томскаго Технологическаго Института
Императора Николая II.
т. 5. 1907. № 2.

В. Л. Некрасовъ.

СТРОЕНІЕ И МѢРА ЛИНЕЙНЫХЪ ТОЧЕЧНЫХЪ ОБЛАСТЕЙ.

Предисловіе. Глава первая. I—VIII, 1—102.

Теорія точечныхъ областей, созданная *G. Cantor'омъ*, къ началу XX вѣка представляла собой уже вліятельную вѣтвь математики, вѣтвь, которая съ каждымъ днемъ расширяла кругъ своего примѣненія. Но всѣ данныя этой теоріи были разбросаны по различнымъ журналамъ, и не было такого трактата, гдѣ всѣ результаты теоріи были бы собраны и классифицированы [1]). Эту задачу отчасти выполнилъ *É. Borel* въ 1898 г. въ его „Leçons sur la théorie des fonctions", преслѣдуя впрочемъ при этомъ свои особенныя задачи; и только въ 1900 г. *Schoenflies* въ отчетѣ, представленномъ нѣмецкому обществу математиковъ, и годомъ раньше—въ „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften" далъ систематическое изложеніе всего ученія, какъ оно стояло къ 1900 г.

Преслѣдуя цѣли систематизаціи, *Schoenflies* почти не интересовался исторической перспективой развитія всего ученія; поэтому, если начать знакомиться съ теоріей областей только по отчету *Schoenflies'a*, трудно себѣ представить, какъ развивалось это ученіе, и кому обязано своимъ появленіемъ то или другое новое понятіе.

Первая и третья глава настоящей работы имѣютъ цѣлью дополнить въ этомъ отношеніи работу *Schoenflies'a*, поскольку дѣло идетъ о строеніи и мѣрѣ точечныхъ областей, но не касается теоріи трансфинитныхъ чиселъ и приложеній теоріи областей къ теоріи функцій и геометріи [2]). Историческій очеркъ, заключающійся въ этихъ главахъ, дастъ, я надѣюсь, достаточно полную картину развитія ученія съ самаго его возникновенія и до послѣдняго времени.

Слѣдя за наростаніемъ новой теоріи, я могъ быть очень сжатымъ, пока рѣчь шла о сочиненіяхъ болѣе ранняго періода, отчасти—въ виду того, что ихъ отношеніе къ теоріи областей было сравнительно отдаленное, если не считать работъ *G. Cantor'a*, отчасти-же потому, что въ этихъ работахъ все болѣе важное съ исчерпывающей полнотой было изложено въ отчетѣ *Schoenflies'a*; по мѣрѣ-же того, какъ я переходилъ къ работамъ болѣе новымъ, въ особенности появившимся послѣ этого отчета, я старался извлечь изъ нихъ все существенное,

---

[1]) Я долженъ оговориться, что мнѣ не удалось познакомиться съ работой *Vivanti*, напечатанной въ „Bibliotheca Mathematica", 1892.

[2]) См. ниже стр. 98, 101-102.

чтобы, помимо историческаго обзора, моя работа могла до нѣкоторой степени быть продолженіемъ соотвѣтственныхъ главъ отчета *Schoenflies'a* Мнѣ приходилось при этомъ сдѣлать нѣкоторыя измѣненія въ доказательствѣ теоремъ, нѣкоторыя теоремы добавить и предложить кой-гдѣ измѣненія въ формулировкѣ и опредѣленіи. Такимъ образомъ первая и третья главы должны, по своему замыслу, служить частью — дополненіемъ, съ другой только точки зрѣнія, работы *Schoenflies'a*, частью же ея продолженіемъ.

Въ главѣ второй, посвященной строенію линейной области, собравъ всѣ установленныя до сихъ поръ результаты, я перехожу къ изученію трехъ *типовъ размѣщенія* ω, $^*\omega$, $\overset{*}{\omega}$ и показываю, какимъ образомъ конечная или трансфинитная комбинація этихъ типовъ даетъ области все возростающей сложности, обладающія строеніемъ, вполнѣ характеризуемымъ ихъ типомъ размѣщенія. Въ концѣ главы я показываю, что для всякой заданной замкнутой области можетъ быть указанъ вполнѣ опредѣленный типъ; что-же касается областей незамкнутыхъ, для нѣкоторыхъ изъ нихъ такой типъ также можетъ быть опредѣленъ, но еще не удается доказать, что этотъ типъ существуетъ для *каждой* незамкнутой области. Пользуясь типами размѣщенія, мы можемъ характеризовать прерывную функцію дѣйствительной перемѣнной опредѣленнымъ символомъ, указывающимъ размѣщеніе ея точекъ разрыва.

По поводу содержанія четвертой главы я долженъ замѣтить, что, благодаря ряду внѣшнихъ условій, печатанье настоящей работы, начатое осенью 1904 г., растянулось на два съ половиной года. Само собой понятно, что за это время появились въ печати новыя изслѣдованія, которыя нельзя было не отмѣтить, и которыя не могли не оказать вліянія на содержаніе моей работы. Эта работа по первоначальному плану должна была состоять изъ трехъ главъ, посвященныхъ вторая и третья — строенію и мѣрѣ области и первая — исторіи развитія этихъ ученій. Въ виду указанныхъ выше условій къ первой главѣ пришлось добавить новую третью главу, посвященную новѣйшимъ работамъ въ соотвѣтственныхъ областяхъ науки; что же касается прежней третьей главы, превратившейся теперь въ четвертую, то она подверглась, сравнительно съ первоначальнымъ предположеніемъ, почти полной переработкѣ. Сохранивъ ея начало въ томъ видѣ, какъ оно проектировалось раньше, я, въ виду исчерпывающихъ работъ *W. H. Young'a* въ теоріи мѣры незамкнутыхъ областей, отказался отъ своихъ попытокъ въ этомъ отношеніи. Мнѣ приходилось такимъ образомъ или совершенно выбросить эту послѣднюю главу изъ своей работы, нарушивъ при этомъ тотъ планъ, который былъ въ началѣ составленъ, и въ предположеніи котораго была изложена и уже напечатана первая глава; или-же—удержать эту главу и слѣдовать въ ученіи о мѣрѣ за *Young'омъ*; я остановился на послѣдней мысли и рѣшилъ провести все касающееся измѣренія области въ систематическій видъ, такъ чтобы придать соотвѣтствующему матеріалу форму достаточно полнаго „ученія о мѣрѣ“, какое названіе я и придалъ этой главѣ. Въ ней мы находимъ такимъ образомъ только объединеніе добытыхъ до сихъ поръ результатовъ, при чемъ окончательное рѣшеніе вопроса о мѣрѣ находится въ связи съ изслѣдованіемъ характера нѣкоторой незамкнутой области, которую я назвалъ *элементарной*; эта элементарная область нѣсколько отличается отъ той незамкнутой области, о которой говоритъ *Young*, въ смыслѣ указанія нѣсколькихъ свойствъ, которыми она должна обладать; но обладаетъ ли она теоремой внутренняго сложенія, что является рѣшающимъ моментомъ въ ученіи о мѣрѣ области, это остается еще вопросомъ открытымъ.

Затѣмъ по первоначальному плану я предполагалъ посвятить свою работу не только линейнымъ областямъ, но также и областямъ двухъ измѣреній; слѣды этого намѣренія встрѣчаются въ первой главѣ; но потомъ оказалось, что и безъ включенія послѣднихъ областей работа приняла довольно значительные размѣры; да кромѣ того за послѣднее время появился рядъ изслѣдованій, касающихся теоріи двухмѣрныхъ областей и слишкомъ далеко уходящихъ въ сторону отъ того круга идей, которому посвящена настоящая работа. Поэтому я счелъ за лучшее ограничить ея планъ, оставивъ двухмѣрныя области за ея границами, не смотря даже на то, что я занимался вопросомъ объ этихъ областяхъ еще раньше, чѣмъ выяснился планъ работы въ ея настоящемъ видѣ.

Замѣчу еще, что я только что прочелъ публикацію о выходѣ въ Лондонѣ сочиненія *W. H. Young'a* и *G. C. Young'a* „Theory of sets of points“, которое вѣроятно даетъ систематическое изложеніе всего ученія объ областяхъ; но я не считаю возможнымъ задерживать еще выпускъ въ свѣтъ настоящей работы, главной частью которой является глава вторая; „теорія областей—по выраженію *Schoenflies'a* [1])—есть нѣкотораго рода молекулярная теорія математическихъ величинъ“, и вотъ это-то молекулярное изслѣдованіе точечной области и возсозданіе ея изъ элементовъ ω, $^*\omega$, $\tilde{\omega}$ и служитъ какъ разъ цѣлью второй главы. И такъ какъ [2]) „теорія областей—вся въ будущемъ, но ея вліяніе растетъ съ каждымъ днемъ“, что доказываетъ все возра-

[1]) Bericht, S. 113.

[2]) ib., S. III.

стающее число статей, ей посвященныхъ, я позволяю себѣ надѣяться, что изученіе типовъ размѣщенія будетъ и въ настоящемъ его видѣ не безполезно для уясненія структуры областей.

Прилагая въ концѣ книги литературу ученія объ областяхъ, я указалъ всѣ извѣстныя мнѣ сочиненія, даже въ видахъ полноты—тѣ, которыя не имѣютъ непосредственнаго отношенія къ теоріи строенія и мѣры линейной области, а касаются только теоріи трансфинитныхъ чиселъ или двухмѣрныхъ областей; эти послѣднія сочиненія отмѣчены у меня звѣздочкой и ноликомъ отмѣчены тѣ, познакомиться съ которыми мнѣ не удалось.

Томскъ,
9 января 1907 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ИСПРАВЛЕНІЯ.

Стр.	Строка.	Напечатано:	Должно быть:
25	6 св.	m_ν	m_μ
„	10 „	$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$	$-(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$
„	14-16 св.	m_n	m_μ
55	6 сн.	i; Рона	P_i; она
78	3 „	$\sum i$	$\sum l'_{2i}$
92	12 „	серединой	внутренней для
„	7 „	$\mathrm{P}^{(0)}$ будетъ	$\mathrm{P}^{(0)}$, не входящая въ P, будетъ
99	13 св.	*Peano, Jordan* и *Lebesgue*; два предпослѣднихъ	*Peano* и *Jordan*; два послѣднихъ
100	15 сн.	III	IV
128	9 „	83. Положимъ	Положимъ
144	4 „	44°	95°
208	15 св.	ν_1'ой	ν_1'ого

ГЛАВА I.

Историческій очеркъ.

1. Теорія точечныхъ областей—одна изъ самыхъ юныхъ вѣтвей чистой математики; ея идеи приняли нѣкоторую опредѣленную форму только какихъ нибудь двадцать лѣтъ тому назадъ.

Медленно, но вѣрно эта теорія завоевывала себѣ право на существованіе, и теперь уже не можетъ быть сомнѣній относительно ея будущей роли въ обоснованіи самыхъ деликатныхъ понятій математическаго анализа.

Со времени *Leibnitz'a* и *Newton'a*, создавшихъ анализъ безконечно малыхъ, изъ двухъ элементовъ, на которыхъ строился этотъ анализъ,—функціи и аргумента, привлекла на себя вниманіе только *функція*, тогда какъ относительно *аргумента* какъ будто всѣ молчаливо соглашались, что тамъ изучать нечего.

Но понемногу выяснилось, что и съ аргументомъ дѣло стоитъ далеко не такъ просто, какъ казалось сначала; поэтому пришлось и ему удѣлить надлежащее вниманіе. Создалась *теорія аргумента* въ видѣ *теоріи точечныхъ областей*

Впервые понятіе объ *области* (Menge) появились у *Bolzano* (1847); онъ опредѣляетъ [1]) область, какъ совокупность (Inbegriff), размѣщеніе частей которой безразлично, т. е. относительно которой ничто существенное для насъ не мѣняется, если мѣняется только размѣщеніе. Область единицъ извѣстнаго рода *Bolzano* называетъ *множественностью* (Vielheit) [2]); онъ различаетъ [3]) конечныя или счетныя (zählbare) области и области безконечныя и ведетъ рѣчь [4]) объ области *всѣхъ цѣлыхъ чиселъ*.

Затѣмъ [5]) *Bolzano* говоритъ, что „не всѣ безконечныя области, относительно ихъ множественности. можно считать равными между

---

[1]) Paradoxien des Unendlichen. 1889. стр 4

[2]) Стр. 4.

[3]) Стр 6.

[4]) Стр. 21.

[5]) Стр. 27.

собой"; но въ этомъ отношеніи онъ еще не пришелъ къ установленію понятія о *равномѣрности* въ смыслѣ *Cantor'a*, хотя понятіе о взаимно-однозначномъ отнесеніи разныхъ областей у него выражено вполнѣ точно [1]): „Двѣ безконечныя области могутъ стоять другъ къ другу въ такомъ отношеніи, что возможно—съ одной стороны—каждый предметъ, принадлежащій одной области, соединить съ предметомъ другой такъ, что ни одинъ предметъ этихъ областей не останется безъ пары и не войдетъ въ двѣ или нѣсколько разныхъ паръ; при этомъ—съ другой стороны—возможно, что одна изъ этихъ областей заключаетъ въ себѣ другую, какъ часть, такъ что множественности, которыя онѣ представляютъ, если мы предметы разсматриваемъ какъ единицы, имѣютъ другъ по отношенію къ другу самыя разнообразныя соотношенія". Это же соотношеніе взялъ исходной точкой для изслѣдованія безконечныхъ областей *G. Cantor* [2]) и послѣ него—*Dedekind* [3]).

Затѣмъ нужно отмѣтить [4]) связанные съ понятіемъ о счетности „парадоксы"; *Bolzano* признаетъ [5]) далѣе требующимъ ближайшаго выясненія понятіе о *величинѣ* протяженія", т. е. понятіе о мѣрѣ непрерывной области; при этомъ онъ обращаетъ [6]) вниманіе на значеніе границы областей, на вліяніе [7]) на мѣру области удаленія счетнаго ряда точекъ, при чемъ впервые появляются въ наукѣ *предѣльныя точки*, играющія такую большую роль въ теоріи областей.

Такимъ образомъ приходится признать, что родоначальникомъ современной теоріи областей былъ *Bolzano*, но развилъ ее и поставилъ на строго научную почву *G. Cantor*.

2. Главные вопросы, которые сдѣлались задачей теоріи областей это—вопросы о *мѣрѣ* и *строеніи* области.

Понятіе о *мѣрѣ* области возникло при изслѣдованіи возможности интегрированія прерывной функціи; поэтому это понятіе является въ той или иной формѣ вездѣ, гдѣ идетъ рѣчь объ опредѣленномъ интегралѣ.

Первымъ, кто направилъ въ 1854 году математическую мысль на „измѣреніе" области, нужно назвать *Riemann'a*. Устанавливая извѣстное условіе интегрируемости, *Riemann* дѣлитъ интервалъ (a, b), въ которомъ производится интегрированіе, на части δ_i и разсматриваетъ [8])

---

1) Стр. 28.
2) A. M. 2. Стр. 311.
3) Was sind und was sollen die Zahlen стр. 19.
4) § 29 и § 33.
5) Стр. 80.
6) § 41
7) Стр. 83.
8) Werke, 1876, стр. 226.

общую длину (Gesammtgrösse) тѣхъ интерваловъ δ_i, гдѣ колебаніе функціи превышаетъ нѣкоторое малое число σ; здѣсь еще нѣтъ этого понятія о мѣрѣ въ тѣсномъ смыслѣ, но *Riemann* дѣлаетъ еще шагъ къ его установленію; онъ примѣняетъ свой признакъ къ изслѣдованію функціи

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(n\,x)}{n^2},$$

которая дѣлаетъ разрывы для всѣхъ значеній перемѣнной, равныхъ $\frac{p}{2n}$, гдѣ p и n—числа взаимно простыя. Здѣсь *Riemann* еще не включаетъ *всѣ* разрывы въ нѣкоторые интервалы; преслѣдуя свою цѣль, онъ дѣлаетъ это только относительно тѣхъ точекъ $x = \frac{p}{2n}$, въ которыхъ разрывы $> \sigma$, и говоритъ, что общая длина такихъ интерваловъ можетъ быть произвольно мала.

3. Слѣдующимъ, кто взялся въ 1870 г. за мысль, брошенную *Riemann'омъ*, былъ *Hankel*, который формулировалъ ее уже болѣе полно и точно, установивъ [1]) понятіе о *часто разсѣянныхъ областяхъ* (überall dicht—въ терминологіи *Cantor'a*), точки которыхъ онъ назвалъ *точками, заполняющими отрѣзокъ* (Punkte, die Strecke erfüllen), и *рѣдко разсѣянныхъ* (по *Cantor'y*—nirgends dicht), точки которыхъ на отрѣзкѣ zerstreut liegen. *Hankel* старается доказать теорему, которую можно выразить такъ: „Если область рѣдко разсѣяна, то общая длина s включающихъ ее интерваловъ можетъ быть произвольно мала, и обратно".

Эта теорема, какъ было доказано впослѣдствіи, не справедлива. Для насъ же представляется только интереснымъ посмотрѣть, какимъ путемъ *Hankel* приходитъ къ этой *общей длинѣ*. Онъ говоритъ: если область состоитъ изъ конечнаго числа точекъ, s составляется изъ интерваловъ, которые лежатъ около каждой изъ нихъ; такъ какъ каждый изъ этихъ интерваловъ можетъ быть сдѣланъ произвольно малымъ, то будетъ произвольно мала и s. Если число точекъ безконечно, между ними—по опредѣленію рѣдко разсѣянной области—лежатъ еще свободные интервалы; дѣлимъ тогда весь отрѣзокъ на интервалы такъ, чтобы—во первыхъ—каждый изъ нихъ обнималъ одну изъ точекъ области, и—во вторыхъ—чтобы они вмѣстѣ взятые *заполняли весь интервалъ* (a, b). Если затѣмъ каждый изъ интерваловъ будетъ

---

[1]) M. A. 16. Стр. 87.

сведенъ до его $\frac{1}{n}$ части, при соблюденіи перваго условія, то остальная $\frac{n-1}{n}$ часть (a, b) будетъ свободна отъ точекъ области. Такимъ образомъ s можетъ быть сдѣлана произвольно малой.

Центральный пунктъ предыдущаго доказательства заключается—во первыхъ—въ предположеніи, что, выражаясь современнымъ языкомъ, число точекъ области счетно [1]), и—во вторыхъ—что можно построить около каждой точки области интервалы такимъ образомъ, чтобы они не захватывали другъ друга; послѣднее можетъ быть до нѣкоторой степени выполнено для рѣдко разсѣянной *счетной* области: именно—для всѣхъ уединенныхъ ея точекъ построеніе этихъ интерваловъ возможно; что же касается предѣльныхъ точекъ, то интервалы, отвѣчающіе такимъ точкамъ, не могутъ не захватывать другихъ интерваловъ. Но все таки, несмотря на этотъ фактъ, для этихъ областей s можетъ быть произвольно малой, какъ это можно доказать инымъ путемъ. Что же касается перваго несознаннаго *Hankel'емъ* предположенія, то оно является совершенно произвольнымъ и невѣрнымъ; извѣстно, что существуютъ несчетныя рѣдко разсѣянныя области, именно—совершенныя, для которыхъ построеніе интерваловъ *Hankel'я* дѣлается невозможнымъ.

Интереснымъ будетъ замѣтить, что идея *Hankel'я* относительно построенія интерваловъ около каждой изъ точекъ данной области нашла впослѣдствіи свое развитіе въ работахъ *Borel'я* и дала тамъ очень интересные результаты.

4. Затѣмъ на путь изученія точечныхъ областей вступилъ съ 1872 года *G. Cantor*, когда онъ [2]), какъ основу для своихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій, выставилъ положеніе, что „каждому численному значенію отвѣчаетъ единственная точка прямой, и обратно“; такимъ образомъ были поставлены въ тѣсную связь одномѣрный континуумъ и геометрія прямой. Въ этой же статьѣ *Cantor* устанавливаетъ понятіе о *предѣльной* точкѣ и о *производныхъ* областяхъ, *классифицируя* области по видамъ въ зависимости отъ существованія извѣстнаго ряда производныхъ.

Въ томъ-же году [3]) *Cantor* впервые обращаетъ вниманіе на *счетность* области, устанавливая взаимно однозначное соотвѣтствіе между областями алгебрическихъ и цѣлыхъ чиселъ и доказывая несчетность всѣхъ дѣйствительныхъ чиселъ.

---

[1]) Здѣсь и вездѣ ниже мы понимаемъ подъ *счетными* областями, области конечныя и области перваго размѣра.

[2]) M. A. 5.—A. M. 2. Стр. 342.

[3]) Cr. J. 77.

До настоящей минуты изученіе областей носило случайный характеръ; послѣ же того, какъ *Cantor* далъ опредѣленіе *предѣльной точки* и *производной* области, ученіе объ областяхъ имѣло задатки къ тому, чтобы сдѣлаться самостоятельной *теоріей* съ своимъ особеннымъ содержаніемъ и своими методами изслѣдованія.

5. Далѣе въ 1875 году[1]) въ работѣ *Smith'a* вопросъ о мѣрѣ области получаетъ новое выясненіе; *Smith* даетъ нѣсколько примѣровъ рѣдко разсѣянныхъ областей и вычисляетъ общую сумму занятыхъ ими интерваловъ.

A. Построивъ на интервалѣ (0, 1) рѣдко разсѣянныя области

$$P_1 = \left\{\frac{1}{n'}\right\},\ P_2 = \left\{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''}\right\}, \ldots, P_m = \left\{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \ldots + \frac{1}{n^{(m)}}\right\},$$

гдѣ независимо другъ отъ друга

$$n^{(i)} = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, n \ldots,$$

и гдѣ точки каждой P_{i-1} служатъ предѣльными для P_i, *Smith* слѣдующимъ образомъ включаетъ точки P_m въ интервалы; онъ беретъ сначала интервалъ δ_0 вправо отъ точки 0. Въ интервалѣ $(\delta_0, 1)$ имѣется конечное число n_1 точекъ области P_1; вправо отъ каждой изъ этихъ точекъ P_1 строимъ интервалы δ_1, сумма которыхъ будетъ $n_1 \delta_1$; въ каждомъ изъ остающихся послѣ этого интерваловъ, а слѣдовательно и во всѣхъ вмѣстѣ взятыхъ, лежитъ конечное число n_2 точекъ P_2; вправо отъ каждой изъ нихъ строимъ интервалы δ_2; и т. д. Такимъ образомъ всѣ точки P_m окажутся лежащими внутри или на границахъ конечнаго числа

$$N = 1 + n_1 + n_2 + \ldots + n_m$$

интерваловъ, общая сумма которыхъ будетъ

$$\delta_0 + n_1 \delta_1 + n_2 \delta_2 + n_3 \delta_3 + \ldots + n_m \delta_m = \delta;$$

если при заданномъ ε взять

$$\delta_0 < \frac{\varepsilon}{3(m+1)}, \qquad \delta_i < \frac{\varepsilon}{3(m+1)n_i},$$

то будетъ

$$\delta < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Назвавъ $\bar{\delta}$—наименьшій изъ интерваловъ δ_i, построимъ вправо и влѣво отъ каждаго изъ нихъ еще интервалы δ; тогда всѣ точки P_m

---

[1]) Proceedings of Lond Math Soc. 6, p 140.

будутъ лежать *внутри* новыхъ интерваловъ, общая сумма которыхъ будетъ

$$\delta + 2\,\mathrm{N}\,.\,\bar{\delta} < 3\,\delta < \varepsilon.$$

B. Отрѣзокъ (0, 1) дѣлится на m частей; $m - 1$ первыя изъ нихъ дѣлятся снова на m частей; къ каждой изъ нихъ примѣняется тотъ же процессъ, и т. д., такъ что послѣ каждаго дѣленія остается исключенной $\frac{1}{m}$ предыдущаго интервала; точки дѣленія даютъ область P. Для нея сумма исключенныхъ интерваловъ, которые—слѣдовательно—не будутъ заключать внутри себя точекъ P, будетъ

$$\frac{1}{m},\ \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m^2},\ \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m^2} + \frac{(m-1)^2}{m^3}, \ldots,$$

или

$$1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right),\ 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2, \ldots, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n;$$

при безконечномъ возростаніи n

$$lim\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n\right\} = 1.$$

C. Отрѣзокъ (0, 1) дѣлится на m частей, каждая изъ $m - 1$ первыхъ дѣлится на m^2, каждая изъ $(m-1)(m^2-1)$ на m^3; и т. д. Тогда сумма несвободныхъ интерваловъ послѣ перваго, второго, третьяго и т. д. дѣленія будетъ

$$\frac{m-1}{m},\ \frac{m-1}{m}\,\frac{m^2-1}{m^2}, \ldots,\ \frac{m-1}{m}\,\frac{m^2-1}{m^2} \ldots \frac{m^n-1}{m^n}$$

или

$$1 - \frac{1}{m},\ \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right), \ldots, \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{m^n}\right);$$

слѣдовательно сумма свободныхъ интерваловъ окажется

$$1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right),\ 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right), \ldots, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{m^n}\right).$$

При безконечномъ возрастаніи n предѣлъ суммы s_n этихъ свободныхъ интерваловъ

$$lim\, s_n = 1 - lim \prod_1^n \left(1 - \frac{1}{m^n}\right) = 1 - \mathrm{E}\left(\frac{1}{m}\right)$$

оказывается отличнымъ отъ 1; слѣдовательно сумма несвободныхъ интерваловъ, равная $\mathrm{E}\left(\frac{1}{m}\right)$, для данной рѣдко разсѣянной области не будетъ равна нолю.

Этотъ послѣдній примѣръ имѣлъ своей задачей опровергнуть утвержденіе *Hankel'я* относительно рѣдко разсѣянныхъ областей.

Работа *Smith'а* представляетъ интересъ въ двухъ отношеніяхъ: во первыхъ—*Smith* даетъ первый примѣръ для установленныхъ *Cantor'омъ* понятій о предѣльной точкѣ и производной, повидимому—не зная о работахъ *Cantor'а*, и—во вторыхъ—онъ строитъ области B и C и вычисляетъ для нихъ мѣру, положивъ въ основаніе *интервалы, свободные отъ точекъ области.*

6. *Ascoli* [1]) строитъ систему часто разсѣянныхъ областей

$$P_1,\ P_2, \ldots,\ P_{s_1},\ P_{s_1+1},\ P_{s_1+2}, \ldots,\ P_{s_2}, \ldots,$$

точки которыхъ удовлетворяютъ условію

$$\overline{x_i\, x_{i+1}} < \eta_n \quad \text{для } P_{s_{n-1}+1},\ P_{s_{n-1}+2}, \ldots, P_{s_n}$$

при рядѣ безконечно убывающихъ положительныхъ величинъ

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3, \ldots,\ \eta_n, \ldots$$

Въ 1875 г. *du-Bois-Reymond* ведетъ рѣчь [2]) о часто и рѣдко разсѣянныхъ областяхъ P, о *точкахъ сгущенія* (Verdichtungspunkt) различныхъ порядковъ, объ областяхъ, для которыхъ существуютъ P′, P″, и т. д., и приводитъ, какъ примѣръ, корни *Kettensinus'а*

$$Sin\,\frac{1}{Sin\,\frac{1}{Sin \cdot_{\cdot_{\cdot_{Sin\,\frac{1}{Sin x}}}}}}$$

Относительно роли теоріи областей въ большомъ трактатѣ *Dini* (1878 г.) самъ *Cantor*, упоминая о производной P′ области P, говоритъ [3]), что тамъ „мы видимъ это понятіе еще болѣе развитымъ, потому что оно послужило исходной точкой для ряда замѣчательныхъ обобщеній извѣстныхъ аналитическихъ теоремъ“.

Между прочимъ *Dini* первый—кажется [4])—высказалъ и доказалъ [5]) теорему:

„Для области перваго рода въ каждой части основного интервала имѣются интервалы, свободные отъ точекъ области; и эта часть мо-

---

[1]) Atti d. Academia dei Lincei (2) 2, 1875 г. и (3) 2. 1878 г.

[2]) Cr. J. 79.

[3]) A. M. 2. Стр. 350.

[4]) Въ настоящее время у меня нѣтъ въ рукахъ итальянскаго изданія „*Fondamenti*“, отъ котораго нѣмецкое изданіе мѣстами отличается. См. Encyklopödie, I. p. 200.

[5]) Grundzüge, 26.

жетъ быть раздѣлена на интервалы такимъ образомъ, что сумма несвободныхъ интерваловъ будетъ произвольно мала“.

7. Въ виду установленнаго [1]) *Cantor'омъ* (1877 г.) понятія о *размѣрѣ* (Mächtigkeit, puissance) и возможности однозначно относить непрерывныя области *n'* мѣрнаго пространства къ отрѣзку прямой, явилось прежде всего необходимымъ изучить и классифицировать области на прямой, такъ называемыя *линейныя* области, что и дѣлаетъ *Cantor* въ рядѣ статей въ Mathematische Annalen. Въ 1879 г. *Cantor* вводитъ [2]) области перваго и второго рода, вводитъ терминъ *область часто разсѣянная* по интервалу; говоритъ, что для такой области P' тожественна съ интерваломъ, такъ что часто разсѣянныя области всѣ будутъ областями второго рода. Здѣсь же онъ указываетъ, что области перваго рода будутъ непремѣнно счетные, также какъ и нѣкоторыя области второго рода.

Въ 1880 г. *du-Bois-Reymond*, упоминая о G. *Cantor'ѣ*, утверждаетъ [3]), что о существованіи точекъ сгущенія порядка безконечности онъ писалъ *Cantor'у* еще за нѣсколько лѣтъ до 1880 г. „Къ точкамъ сгущенія безпрестанно убывающихъ отрѣзковъ, при чемъ порядокъ этихъ точекъ конеченъ или безконечно великъ, къ выбору термина *pantachisch*, вмѣсто позже введеннаго *Cantor'омъ* überall dicht, *du-Bois-Reymond* предполагалъ вернуться позже. Это и имѣло мѣсто въ 1882 г. въ „Allgemeine Functionentheorie.“

Въ 1880 г. *Pincherle* въ своемъ трактатѣ по теоріи функцій даетъ [4]) нѣкоторыя свѣдѣнія изъ теоріи областей. Область одного или многихъ измѣреній онъ называетъ *varietà*, элементы области—точками (posto o punto); онъ говоритъ еще объ окрестности точки.

Если для точекъ области можетъ быть построена окрестность, свободная отъ точекъ области, область образуетъ *serie discreta*.

Затѣмъ *Pincherle* различаетъ точки *внутреннія* отъ точекъ *контура*, но только для контимуума; онъ говоритъ, что непрерывная область можетъ имѣть контуръ, но не имѣть внутреннихъ точекъ, какъ напримѣръ—область точекъ, опредѣляемыхъ условіемъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

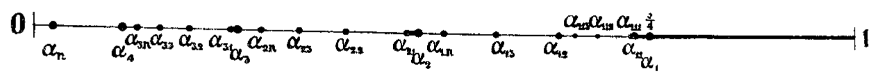
Наконецъ онъ доказываетъ по *Weierstrass'у* существованіе предѣльныхъ точекъ для области, состоящей изъ безконечнаго числа точекъ.

---

[1]) Cr J. 84
[2]) A. M. 15
[3]) A. M. 16, стр. 128.
[4]) Giornale de Matematiche, 18, p. 234.

8. Примѣры, относящіеся къ вопросу о мѣрѣ области, мы находимъ [1]) въ работѣ *Volterra* (1881). Все съ тою же цѣлью опровергнуть утвержденіе *Hankel'я*, *Volterra* строитъ рѣдко разсѣянную область такъ:

Взявъ на отрѣзкѣ (0, 1) отъ праваго конца интервалъ $(\alpha_1, 1)$ равный $\frac{1}{2^2}$, онъ помѣщаетъ между 0 и α_1 счетный рядъ точекъ



$$\ldots\ldots, \alpha_n, \ldots\ldots, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$$

такъ, чтобы онѣ имѣли 0 предѣльной точкой

$$\lim_{n\ldots\infty} \alpha_n = 0.$$

Интервалъ $(\alpha_1, 1)$ остается свободнымъ; на немъ въ дальнѣйшемъ не распредѣляется болѣе никакихъ точекъ области.

На каждомъ изъ остальныхъ отрѣзковъ (α_{n+1}, α_n) мы помѣщаемъ снова счетный рядъ точекъ

$$\ldots, \alpha_{nn'}, \ldots\ldots, \alpha_{n3}, \alpha_{n2}, \alpha_{n1},$$

для котораго—во первыхъ—α_{n+1} служитъ предѣльной точкой

$$\lim_{n'\ldots\infty} \alpha_{nn'} = \alpha_{n+1},$$

и—во вторыхъ—интервалъ (α_{n1}, α_n) составляетъ $\frac{1}{2^4}$ часть интервала (α_{n+1}, α_n).

Этотъ послѣдній интервалъ мы оставляемъ свободнымъ, въ каждомъ же изъ остальныхъ $(\alpha_{nn'+1}, \alpha_{nn'})$ помѣщаемъ снова по счетному ряду

$$\ldots\ldots, \alpha_{nn'n''}, \ldots\ldots, \alpha_{nn'3}, \alpha_{nn'2}, \alpha_{nn'1},$$

для котораго

$$\lim \alpha_{nn'n''} = \alpha_{nn'+1}, \quad (\alpha_{nn'1}, \alpha_{nn'}) = \frac{1}{2^6}(\alpha_{nn'+1}, \alpha_{nn'}); \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что получающаяся при этомъ процессѣ область $\{\alpha\}$ будетъ рѣдко разсѣяна. Для этой области суммы длинъ свободныхъ и несвободныхъ отрѣзковъ будутъ для перваго, второго, . . . , m'аго дѣленія таковы:

[1]) Giornale di Matematiche 19

свободные интервалы	несвободные
1) $\frac{1}{2^2}$,	$1-\frac{1}{2^2}$,
2) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\frac{1}{2^4}$,	$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^4}\right)$,
3) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\cdot\frac{1}{2^6}$,	$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{2^6}\right)$,
. . . .	. . . .
m) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^{2m-2}}\right)\cdot\frac{1}{2^{2m}}$	$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{2^6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)$.

Слѣдовательно, при безконечномъ продолженіи процесса, сумма несвободныхъ интерваловъ

$$\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{4}\right)$$

будетъ отлична отъ 0.

9. *Harnack* въ своихъ „Elemente" (1881)[1]) включаетъ всѣ точки x данной области въ окрестности $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ и интересуется суммой этихъ окрестностей; если возможно при уменьшеніи ихъ числа сдѣлать эту сумму произвольно малой, то такую область *Harnack*—называетъ раздѣльной (discrete); это будетъ—область рѣдко разсѣянная и полая, т. е. съ мѣрой равной нулю.

Если же эти окрестности не могутъ быть уменьшаемы произвольно, область—по *Harnack'y*—называется *линейной*. Онъ обращаетъ въ М. А. вниманіе на то, что „раздѣльная" область не можетъ быть часто разсѣяна ни въ одномъ произвольно маломъ интервалѣ", но не обратно, и *Harnack* приводитъ примѣръ того, какъ „линейная" область можетъ быть распредѣлена, чтобы она была рѣдко разсѣяной.

Беремъ на (a, b) n точекъ x_i и дѣлаемъ ихъ серединами интерваловъ длиной δ, при чемъ выбираемъ эти интервалы такъ, чтобы было

$$n\,\delta<b-a\,.$$

На каждомъ изъ интерваловъ δ беремъ n' точекъ и соотвѣтственно имъ интервалы δ', такъ чтобы было

$$n'\,n\,\delta'<n\,\delta<b-a$$

и т. д.,

$$n^{(m)}\,n^{(m-1)}\ldots n''n'n.\delta^{(m)}<n^{(m-1)}\ldots n''\,n'n\,\delta^{(m-1)}<\ldots.<n\delta<b-a.$$

[1]) Также—М. А 19 (1882).

Тогда въ зависимости отъ того, будетъ ли

$$\lim n^{(m)}\, n^{(m-1)} \ldots n''\, n'\, n\, \delta^{(m)} > 0 \text{ или } < 0,$$

область точекъ $\{x\}$ окажется „раздѣльной или линейной", при чемъ она по построенію рѣдко разсѣяна.

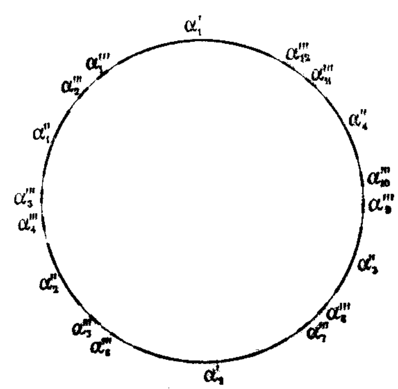
10. Въ статьяхъ *Veltmann'a* (1882)[2]) мы имѣемъ дальнѣйшій шагъ къ установленію болѣе точнаго представленія о рѣдко разсѣянныхъ и совершенныхъ областяхъ.

Онъ первый даетъ общее построеніе совершенной области, которое нужно признать классическимъ, и которое должно служить основаніемъ для теоріи областей.

При построеніи *Veltmann* особенно указываетъ на то обстоятельство, что получающіяся при этомъ безконечныя области будутъ рѣдко разсѣяны; въ терминологіи *Veltmann'a* это звучитъ такъ: „ни одинъ даже произвольно малый отрѣзокъ не разлагается точками дѣленія на явственно безконечно малыя части", такъ что вездѣ „можно взять части конечной длины", свободныя отъ точекъ области.

Особенность перваго его построенія та, что онъ строитъ совершенныя области на окружности и внутри квадрата; такимъ образомъ ему принадлежитъ также и первое построеніе плоской совершенной области.

На окружности радіуса единицы *Veltmann* беретъ двѣ равныя дуги, симметрично расположенныя и свободныя отъ точекъ области; на двухъ остающихся дугахъ симметрично помѣщаются четыре равныя и свободныя дуги; и т. д.; сумма свободныхъ дугъ можетъ при этомъ быть равна 2π или меньше 2π въ зависимости отъ закона, по которому убываютъ дуги. Если обозначить длины свободныхъ дугъ n'аго дѣленія черезъ $\alpha_i^{(n)}$ и взять

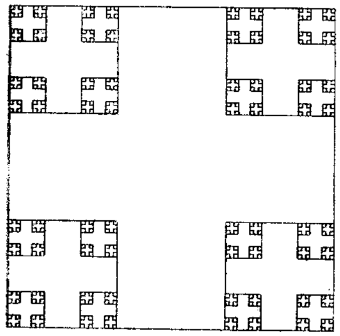


$$\sum \alpha'_i = \frac{\pi}{2},\quad \sum \alpha''_i = \frac{\pi}{2^2},\ \ldots\ldots,\ \sum \alpha_i^{(n)} = \frac{\pi}{2^n},\ \ldots\ldots,$$

то сумма всѣхъ свободныхъ дугъ будетъ π, и слѣдовательно равна π и сумма несвободныхъ дугъ.

[2]) Zeitschrift für **Mathematik**, 27.

Второй примѣръ, относящійся къ теоріи плоскихъ областей, таковъ: изъ квадрата стороны l, съ помощію четырехъ равныхъ квадратовъ на углахъ, исключимъ крестъ, внутри котораго нѣтъ точекъ области; изъ каждаго изъ четырехъ квадратовъ исключимъ снова кресты; и т. д.



Законъ убыванія сторонъ s_m квадратовъ установимъ такой

$$s_m = ae^{-\frac{1}{2^m}} s_{m-1} \text{ при } a \leqq \frac{1}{2}, \; s_0 = l;$$

тогда длины соотвѣтствующихъ сторонъ будутъ

$$s_1 = ae^{-\frac{1}{2}} l, \; s_2 = a^2 e^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)} l, \ldots, s_m = a^m e^{-\sum\limits_1^m \frac{1}{2^i}} l, \ldots,$$

площадь m'аго квадрата—

$$a^{2m} e^{-2\sum\limits_1^m \frac{1}{2^i}} l^2$$

и число квадратовъ m'аго дѣленія—4^m, такъ что сумма δ_m площадей квадратовъ m'аго дѣленія окажется

$$\delta_m = 4^m . a^{2m} e^{-2\sum\limits_1^m \frac{1}{2^i}} l^2 = (2a)^{2m} l^2 . e^{-2\sum\limits_1^m \frac{1}{2^i}};$$

при безконечномъ возрастаніи числа дѣленій

$$\lim_{m.. \infty} \delta_m = l^2 e^{-2}. \lim (2a)^{2m} = \begin{cases} 0, & a < \frac{1}{2}, \\ l^2 e^{-2}, & a = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Если за точки области мы возьмемъ вершины крестовъ, то въ первомъ случаѣ площадь крестовъ, т. е. площадь свободной отъ точекъ области части квадрата, будетъ равна площади квадрата, во второмъ—площадь свободныхъ крестовъ будетъ только

$$l^2 - l^2 e^{-2} = (1 - e^{-2}) l^2,$$

такъ что точки области не могутъ быть включены въ интервалы съ произвольно малой площадью.

Во второй статьѣ *Veltmann* даетъ примѣръ построенія рѣдко разсѣянной совершенной области на прямой, аналогично построенію предыдущихъ областей.

По поводу послѣдняго примѣра *Veltmann* говоритъ: „если назвать замкнутой — такую область, которая дѣлитъ интервалъ на явственно безконечно малые отрѣзки, то предыдущая область имѣетъ ту особенность, что каждая ея точка — предѣльная [1]), и тѣмъ не менѣе въ ней нѣтъ ни одной замкнутой части".

Въ обычной терминологіи — замкнутая область *Veltmann'a* есть часто разсѣянная; такимъ образомъ *Veltmann* говоритъ, что построенная область — сгущенная (in sich dicht) [2]), хотя она рѣдко разсѣяна.

Въ третьей статьѣ, говоря о первомъ примѣрѣ, онъ различаетъ

1) внутреннія точки свободныхъ дугъ,

2) ихъ конечныя точки и

3) точки, „которыя никогда не дѣлаются ни внутренними, ни конечными", т. е. внѣшнія; такими точками будутъ середины несвободныхъ дугъ; точки второй и третьей категоріи являются здѣсь предѣльными точками.

Такимъ образомъ *Veltmann* даетъ теоріи областей точные пріемы построенія совершенныхъ областей, которые дѣлаются въ этой теоріи руководящими. Затѣмъ онъ первый строитъ плоскую рѣдко разсѣянную совершенную область.

11. Въ 1882 г. появилась „Allgemeine Functionentheorie" *du-Bois-Reymond'a*. Подвергая здѣсь критикѣ основныя понятія анализа и въ частности — стараясь дать теорію аргумента, авторъ посвящаетъ много мѣста точечнымъ областямъ. Уступая *Cantor'y* первенство въ установленіи понятій *о размѣрѣ* области и *счетности* и признавая заслуги *Cantor'a* въ изученіи возможныхъ группировокъ значеній аргумента, возрастающаго ихъ сгущенія, въ изученіи области всѣхъ значеній аргумента и отношенія ея къ болѣе бѣднымъ точками областямъ, *du-Bois-Reymond* говоритъ, что его собственныя работы по общей теоріи функцій давно его привели на тотъ же путь, гдѣ онъ имѣлъ дѣло съ распредѣленіемъ точекъ на отрѣзкѣ и съ способами представленія ирраціональностей.

Свое изложеніе *du-Bois-Reymond* ведетъ съ своей точки зрѣнія и пользуясь своими обозначеніями; въ этомъ отношеніи онъ считаетъ себя тѣмъ болѣе правымъ, что кое что онъ опубликовалъ уже раньше, а необходимость своей основной классификаціи областей онъ письменно

[1]) Можно было бы добавить, что въ нее кромѣ того входятъ всѣ ея предѣльныя точки.

[2]) Правильнѣе — совершенная.

сообщилъ *Cantor'y* болѣе чѣмъ за годъ до его статьи въ M. A. 15. Поэтому *du-Bois-Reymond* считалъ своею собственностью общее понятіе о *пантахіи*, которое явилось не изъ умозрѣнія, но вызвано потребностями теоріи функціи.

Онъ указываетъ, что нельзя вполнѣ отожествлять значенія аргумента съ длинами, что имѣется между ними существенная разница, состоящая въ томъ, что въ первыхъ каждая точка появляется только одинъ разъ; именно—если x_0 дѣлитъ отрѣзокъ (a, b), то мы будемъ имѣть три разнаго рода дѣленія, смотря потому, причислимъ ли мы x_0 къ (a, x_0), или къ (x_0, b), или ни къ тому, ни къ другому интервалу.

Здѣсь мы такимъ образомъ встрѣчаемся съ впервые сознаннымъ различіемъ между *открытыми* отрѣзками и отрѣзками *закрытыми*, если не считать аналогичнаго „парадокса" *Bolzano*, о сочиненіи котораго большинство изъ авторовъ того періода—видимо—не знало. Это различіе должно быть такъ или иначе принято въ разсчетъ при установленіи понятія о мѣрѣ.

Переходя къ распредѣленію точекъ по интервалу, *du-Bois-Reymond* называетъ *пантахичнымъ* или *пантахіей* такое распредѣленіе, которое нынче носитъ названіе часто разсѣянной области; рѣдко разсѣянной области онъ даетъ названіе *апантахичнаго* распредѣленія; кромѣ тѣхъ и другихъ имѣются еще такія распредѣленія, которыя, не подходя ни подъ одинъ изъ этихъ типовъ, не разлагаются даже на конечное число пантахичныхъ или апантахичныхъ частей.

Пантахіи авторъ дѣлитъ дальше на слѣдующіе классы [1]): если область заключаетъ конечное число точекъ, возрастающее однако такъ, что точки появляются въ произвольно маломъ интервалѣ, то такая пантахія называется *безграничной*; это есть тѣ области, которыя получили впослѣдствіи у *Baire'a* названіе *областей первой категоріи*. Всѣ не безграничныя пантахіи *du-Bois-Reymond* называетъ *безконечными* пантахіями; это будутъ—*области второй категоріи*.

Континуумъ есть *полная пантахія* и относится—очевидно—къ безконечнымъ пантахіямъ; удаленіе изъ полной пантахіи произвольнаго числа какихъ бы то ни было безграничныхъ пантахій не можетъ превратить ее въ безграничную пантахію.

Къ апантахичнымъ системамъ относятся прежде всего *уединенныя*, или области *уединенныхъ точекъ*; это—системы изъ конечнаго числа точекъ, достаточно сгущенныхъ, но не могущихъ быть сгущаемыми произвольно, какъ у безграничныхъ пантахій; затѣмъ—системы съ точ-

---

[1]) Стр. 184—5.

ками сгущенiй разныхъ порядковъ, т. е. области перваго рода и n'аго **вида**, или—по *du-Bois-Reymond'у — до точекъ n'аго порядка уединенныя системы.*

По поводу нихъ авторъ говоритъ, что можно исключить точки сгущенiя произвольно малыми протяженiями такъ, что сумма этихъ протяженiй будетъ произвольно мала. Точки сгущенiя *du-Bois-Reymond'a* являются ничѣмъ другимъ, какъ предѣльными точками *Cantor'a* и не совпадаютъ съ точками сгущенiя *Lindelöf'a* [1]). Здѣсь *du-Bois-Reymond* дѣлаетъ важное замѣчанie, что *точки сгущенiя точекъ будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ и точками сгущенiя отрѣзковъ.* Далѣе, какъ примѣръ апантахичной системы, *du-Bois-Reymond* строитъ совершенную область, очевидно—не зная объ аналогичномъ построенiи *Veltmann'a*; по крайней мѣрѣ онъ о немъ не упоминаетъ.

Областямъ этого типа *du-Bois-Reymond* придаетъ большое значенiе, обращая между прочимъ вниманie на то, что у нихъ нѣтъ ни одной уединенной точки.

Кромѣ этихъ системъ, анализъ даетъ еще точечныя распредѣленiя, которыя *du-Bois-Reymond* называетъ *интегрируемыми*; это—полыя (unausgedehnte) системы по современному обозначенiю.

Можно было думать, говоритъ *du-Bois-Reymond*, что интегрируемыя области совпадутъ съ апантахичными, но оказывается противное: апантахичныя системы образуютъ болѣе обширный классъ.

Такимъ образомъ *du-Bois-Reymond* принадлежитъ честь введенiя въ науку понятiй о пантахiи и апантахiи и о различiи безграничныхъ и безконечныхъ пантахiй; что касается терминологiи *du-Bois-Reymond'a* то она не укоренилась въ наукѣ и были замѣнена болѣе удобными обозначенiями *Cantor'a*; классификацiи пантахiй на безконечныя и безграничныя суждено было, послѣ двадцатилѣтняго перерыва, снова явиться на свѣтъ въ мемуарѣ *Baire'a* [2]).

12. Въ 1882 г. *Cantor* говоритъ [3]) о точечныхъ областяхъ n измѣренiй, доказываетъ теорему относительно того, что въ n' мѣрномъ пространствѣ всякая *область внѣшнихъ или примыкающихъ другъ къ другу интерваловъ n* измѣренiй будетъ *счетна*, какъ бы эти интервалы ни были малы; указываетъ наконецъ на тотъ фактъ, что удаленiе изъ n' мѣрнаго пространства, при $n > 2$, счетнаго ряда даже часто разсѣянныхъ точекъ оставляетъ пространство непрерывнымъ и связнымъ.

Далѣе [4]) *Cantor* опредѣляетъ *уединенную* область Q равенствомъ

$$D(Q, Q') = 0.$$

[1]) C. R. 137. 2° *sem* стр. 697.
[2]) Annali di Matematica, (3) 3.
[3]) M. A. 20.
[4]) M. A. 21.

тогда какъ вообще

$$P = Q + D(P, P').$$

Онъ доказываетъ затѣмъ, что область P будетъ счетна въ слѣдующихъ случаяхъ: если *a*) она уединенна, *b*) P′ счетна, *c*) P—перваго рода и *n*'аго вида и *d*) $P^{(\omega)}$ или вообще $P^{(\alpha)}$ счетна.

Въ этой статьѣ *Cantor* впервые заводитъ рѣчь о *мѣрѣ* области. Онъ говоритъ, что *du-Bois-Reymond* и *Harnack* пользовались системами точекъ на прямой, которыя можно заключить въ конечное число интерваловъ съ произвольно малой суммой. Чтобы это было возможно, область точекъ не должна быть часто разсѣяна ни въ одной части интервала; но одного этого условія не достаточно.

Cantor доказываетъ, что такимъ свойствомъ обладаютъ прежде всего тѣ области, для которыхъ P′ счетна. При доказательствѣ этой теоремы *Cantor* имѣетъ дѣло съ счетнымъ рядомъ точекъ

$$(1) \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots,\ x_n,\ \ldots\ldots$$

и говоритъ, что точки интервала (a, b), не входящія въ (1), могутъ быть включены въ безконечный рядъ интерваловъ

$$(c_1, d_1),\ (c_2, d_2),\ \ldots\ldots,\ (c_n, d_n),\ \ldots\ldots,$$

самое большое—примыкающихъ другъ къ другу; *Cantor* доказываетъ затѣмъ, что сумма этихъ интерваловъ имѣетъ предѣломъ длину $b-a$, откуда вытекаетъ утвержденіе теоремы.

Это доказательство является очень важнымъ, потому что здѣсь, какъ и у *Veltmann'a*, впервые мысль была направлена не на интервалы, *включающія точки* области, а напротивъ того—на интервалы, *свободные отъ этихъ точекъ*.

Очевидно, что идеи *Cantor'a* и *Veltmann'a* развивались въ этомъ отношеніи совершенно независимо другъ отъ друга, и оба они освѣтили одинъ и тотъ же вопросъ съ разныхъ точекъ зрѣнія и дополнили такимъ образомъ другъ друга: *Cantor* для заданной области строитъ рядъ свободныхъ интерваловъ, тогда какъ *Veltmann* по заданному ряду свободныхъ интерваловъ опредѣляетъ область; *Cantor* имѣетъ при этомъ дѣло со счетной областью, тогда какъ *Veltmann*—съ областями совершенными. Такимъ образомъ *Veltmann'y* и *Cantor'y* принадлежитъ заслуга установленію твердыхъ основаній для изученія строенія и мѣры области.

Интересно между прочимъ, что главное вниманіе большинства математиковъ привлекало понятіе о мѣрѣ области, тогда какъ у творца теоріи областей *Cantor'a* оно все время занимаетъ второстепенное мѣсто.

13. Въ томъ же томѣ M. A.[1]) *Cantor* высказываетъ важную теорему, объединяющую теоремы 12°:

B. Если $P^{(\alpha)} = 0$, то P' и слѣдовательно P счетны, и обратно, гдѣ α—есть произвольное число перваго или второго класса. Затѣмъ, возбуждая вопросъ, какими необходимыми и достаточными условіями опредѣляется континуумъ, онъ классифицируетъ области по размѣру ихъ первыхъ производныхъ P': первый классъ это—тѣ, для которыхъ P' счетна и слѣдовательно $P^{(\alpha)} = 0$; для тѣхъ P, у которыхъ P' несчетна, она можетъ быть[2]) единственнымъ образомъ разложена на двѣ части

$$P' = R + S, \tag{2}$$

при чемъ для нѣкотораго числа α перваго или второго класса

$$R^{(\alpha)} = 0, \qquad S = S' = S^{(\alpha)}; \tag{3}$$

первую область онъ назвалъ *приводимой* и вторую—*совершенной*.

Затѣмъ *Cantor* опредѣляетъ континуумъ какъ *совершенную и связную* область.

Перепечатывая ту же статью въ A. M. 2., *Cantor*, согласно указанію *Bendixson'a*, измѣняетъ свою послѣднюю теорему, именно—условіе, которому удовлетворяетъ R; въ новомъ изложеніи R опредѣляется условіемъ

$$D\,\{R, R^{(\alpha}\} = 0.$$

Наконецъ *Cantor* дѣлаетъ еще нѣсколько замѣчаній; онъ говоритъ, что

A. совершенная область несчетна,

даетъ примѣръ рѣдко разсѣянной области

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \dots + \frac{c_n}{3^n} + \dots, \quad c_i = 0 \text{ или } 2;$$

не трудно видѣть [3]), что заданіе этой области есть ничто иное, какъ процессъ, примѣненный *Veltmann'омъ*.

Cantor ведетъ далѣе рѣчь объ *открытыхъ* областяхъ, открытомъ отрѣзкѣ или кругѣ, которые онъ называетъ *полуконтинуумами*; вообще полуконтинуумъ это—связная несовершенная область, двѣ точки которой могутъ быть соединены совершеннымъ континуумомъ, входящимъ въ составъ области.

---

[1]) См. „Fondements", A. M. 2, стр. 397.

[2]) M. A. 21, стр. 575.

[3]) См. Baire, p. 38; также—Lebesgue, Leçons, p. 26-27.

14. *Bendixson* (1883) доказываетъ[1]) прежде всего теорему:

А. „Если D (P, P′) = P, то P′ = P′′“,

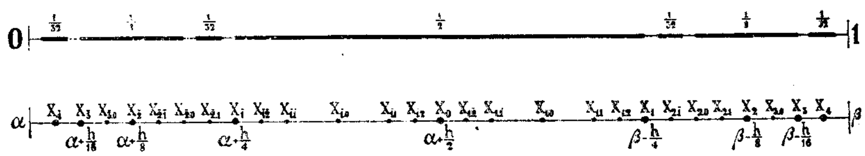
т. е. P′ совершенна, а затѣмъ даетъ примѣръ области, опровергающій утвержденіе (3) *Cantor'a*. *Bendixson* опредѣляетъ при этомъ понятіе о *симметричномъ расположеніи интервала* (a, b) на интервалѣ (α, β) равенствомъ

$$a - \alpha = \beta - b.$$

Построивъ симметрично на (0, 1) интервалъ $\frac{1}{2}$, затѣмъ на $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ два интервала по $\frac{1}{8}$, затѣмъ четыре интервала по $\frac{1}{32}$ и т. д., назовемъ Q—область концовъ этихъ интерваловъ.

Очевидно, что каждая точка q входитъ въ Q'; слѣдовательно—въ силу теоремы А—производная Q' будетъ совершенна.

Въ каждомъ изъ свободныхъ интерваловъ (α, β) области Q помѣщаемъ области $\{x_i\} = P_{(\alpha\beta)}$, построенныя по такому образцу:



гдѣ $\beta - \alpha = h$ и гдѣ x — только *внутреннія* точки интервала (α, β). Очевидно, что

$$P'_{(\alpha\beta)} = (\alpha, \beta).$$

Въ каждомъ изъ интерваловъ области $P_{(\alpha\beta)}$ помѣщаемъ области того же типа; совокупность счетнаго ряда такихъ областей назовемъ $P_{((\alpha\beta))} = \{x_{ij}\}$; очевидно

$$P'_{((\alpha\beta))} = P_{(\alpha\beta)} + (\alpha, \beta), \qquad P''_{((\alpha\beta))} = (\alpha, \beta).$$

Помѣстивъ области $P_{((\alpha\beta))}$ въ каждый изъ свободныхъ интерваловъ (α, β) области Q и назвавъ

$$\sum P_{((\alpha\beta))} = P, \tag{4}$$

разсмотримъ ея производныя; не трудно видѣть, что

$$P' = \sum P_{(\alpha\beta)} + Q', \quad P'' = Q'.$$

---

[1]) А. М. 2.

Итакъ P' дѣлится на двѣ части—совершенную область Q' и счетную

$$R = \sum P_{(\alpha\beta)},$$

при чемъ

$$R' = Q' = Q^{(\alpha)} \neq 0,$$

что и опровергаетъ теорему *Cantor'a*. Очевидно однако, что R удовлетворяетъ условію

$$D(R, R') = 0$$

или вообще

$$D(R, R^{(\alpha)}) = 0.$$

Далѣе *Bendixson* доказываетъ теоремы:

D. Если P' несчетна, существуютъ точки, входящія во всѣ $P^{(\alpha)}$,

E. $P^{(\Omega)}$—область такихъ точекъ—совершенна,

F. $P'-P^{(\Omega)} = R$ счетна.

Эти три теоремы были выведены одновременно и независимо другъ отъ друга *Cantor'омъ* и *Bendixson'омъ*; наконецъ послѣдняя теорема принадлежитъ исключительно *Bendixson'y*:

G. Существуетъ число перваго или второго класса, для котораго

$$D(R, R^{(\alpha)}) = 0.$$

Такимъ образомъ P' всегда можетъ быть приведена къ виду

$$P' = R + P^{(\Omega)},$$

при чемъ $P^{(\alpha)} = P^{(\Omega)}$ совершенна и *точки* $R^{(\alpha)}$, которыя входятъ **въ** составъ $P^{(\alpha)}$ и отличны отъ точекъ R, *должны непремѣнно входить въ* $P^{(\Omega)}$.

Итакъ для P' существуетъ такое число α, что

$$P' = R + P^{(\alpha)}, \quad \text{гдѣ} \begin{cases} P^{(\alpha)} \text{ совершенна}, \\ R^{(\alpha)} = D(P^{(\alpha)}). \end{cases} \tag{5}$$

Это равенство имѣетъ мѣсто *для какихъ угодно* P': для несчетныхъ P'—въ силу предъидущаго, а для счетныхъ, потому что $P^{(\alpha)} = 0$.

Помимо того, что теорема (2)—капитальной важности въ теоріи областей, и что—слѣдовательно—замѣчаніе *Bendixson'a* относительной ея формулировки представляется крайне цѣннымъ и существеннымъ огромное значеніе имѣетъ самое заданіе области (4), такъ какъ оно воплотило въ конкретныя формы довольно отвлеченныа разсужденія *Cantor'a* и можетъ служить исходной точкой общей теоріи [1]) строенія.

Наконецъ *Bendixson* дѣлаетъ еще важное замѣчаніе: образованіе послѣдовательныхъ производныхъ областей аналогично дифференцированію, и теорія производныхъ аналогична дифференціальному исчисленію; *Bendixson* устанавливаетъ основаніе не получившей пока развитія теоріи, аналогичной интегральному исчисленію; онъ даетъ теорему:

Для совершенной рѣдко разсѣянной области P возможно опредѣлить безконечно много уединенныхъ областей Q такихъ, что

$$Q' = P.$$

Эту теорему *Bendixson* доказываетъ, кладя въ основаніе разсужденій свободные интервалы данной совершенной области.

15. Въ Atti della Academia dei Lincei въ 1883 г. *Ascoli* напечаталъ статью, къ которой впослѣдствіи сдѣлалъ дополненія [2]) въ 1888 г.

Въ ней, разсматривая области P точекъ на прямой, ихъ предѣльныя точки и области P′ этихъ предѣльныхъ точекъ, *Ascoli* ни единымъ словомъ не упоминаетъ, что эти понятія обязаны своимъ происхожденіемъ *Cantor'y*. Отличіе идей *Ascoli* отъ *Cantor'a* только то, что *Ascoli* допускаетъ, что одно и то же значеніе x можетъ встрѣчаться конечное или даже безконечно большое число разъ, т. е. одна и та же точка можетъ считаться нанесеной на прямую неоднократно. Точка безконечной кратности eo ipso является точкой предѣльной и входитъ въ P′ уже какъ простая точка; такимъ образомъ всѣ точки области P′ будутъ простыми.

Ascoli даетъ далѣе развитіе идей *Cantor'a*, примѣняя ихъ къ системамъ линій, которыя, какъ и точки, могутъ быть кратными и даже безконечно кратными.

Ascoli устанавливаетъ существованіе *предѣльныхъ линій*, къ которымъ стремится извѣстная перемѣнная область линій такъ, что въ произвольной окрестности каждой изъ ея точекъ имѣются точки кривыхъ области.

Разсматривая для данной области линій совокупность всѣхъ предѣльныхъ линій, *Ascoli* называетъ ее первой производной областью; затѣмъ онъ образуетъ производныя второго, . . . , n'аго порядка и распредѣляетъ области линій на два класса въ зависимости отъ существованія конечнаго или безконечнаго ряда производныхъ областей.

---

[1]) См.—глава II.

[2]) Rendiconti di Palermo.

Всякая линія безконечной кратности непремѣнно войдетъ въ первую производную, какъ простая.

Затѣмъ *Ascoli* переходитъ къ понятію о мѣрѣ плоской области; онъ говоритъ, „совокупность (insieme) площадей, каждой изъ которыхъ принадлежитъ по крайней мѣрѣ одна точка ограниченнаго числа линій въ площади A, можетъ быть сдѣлана произвольно малой“, и затѣмъ: „сумма такихъ площадей для области конечнаго порядка можетъ быть произвольно мала“, при чемъ доказываетъ эту теорему, примѣняя обычный пріемъ *Cantor'a* и опять не упоминая о немъ ни слова.

Если область линій R такова, что. при наличности ряда безконечно убывающихъ чиселъ

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots, \varepsilon_n, \ldots\ldots,$$

число линій, проекціи которыхъ на оси координатъ равны или больше ε_n, конечно, то предѣльныхъ линій для R быть не можетъ; для нея получатся только предѣльныя точки, такъ что R′ будетъ только точечной областью.

16. Въ 1884 году напечатано[1]) извлеченіе изъ письма *Cantor'a* къ *Mittag-Leffler'y*; въ примѣчаніи къ нему *Mittag-Leffler* говоритъ, что *Bendixson*, по предложенію *Cantor'a*, рѣшилъ вопросъ о размѣрѣ совершенной области независимо отъ *Cantor'a* и сдѣлалъ сообщеніе въ семинаріи Стокгольмскаго Университета.

Въ M. A. 23 *Cantor* доказываетъ рядъ теоремъ, высказанныхъ имъ еще раньше, между ними — теоремы:

C. Если P′ счетна, то $P^{(\alpha)} = 0$ при нѣкоторомъ наименьшемъ α.

D-E. Если P′ несчетна, то существуетъ совершенная область $P^{(\Omega)}$, которая тожественна съ $P^{(\alpha)}$,

замѣчая между прочимъ, что „если $P^{(\beta)} = 0$, и β — число второго вида, то $P^{(\alpha)} = 0$, гдѣ α нѣкоторое число перваго вида“.

Здѣсь опредѣляется *замкнутая* область равенствомъ

$$D(P, P') = P';$$

такую замкнутую область можно образовать изъ всякой области P, взявъ M (P, P′).

Cantor даетъ дальше теорему: „Каждая первая производная P′ другой области будетъ замкнута, и обратно — каждая замкнутая область можетъ быть представлена безконечнымъ числомъ способовъ какъ

[1]) A. M. 4, стр. 381.

производная другой области". Здѣсь *Cantor* опять сходится въ своихъ выводахъ съ *Bendixson'омъ*.

Разъ Q' всегда можетъ быть приведена къ виду $R+S$, и всякая *замкнутая* область P можетъ быть представлена какъ производная нѣкоторой области Q

$$P = Q',$$

то для замкнутой области имѣютъ мѣсто теоремы C, D, E, т. е.

„Если P замкнута, то для нѣкотораго числа α перваго или второго класса

$$P = R + S, \quad S = S^{(\alpha)}, \quad D(R, R^{(\alpha)}) = 0".$$

Затѣмъ *Cantor* опредѣляетъ *сгущенную область* равенствомъ

$$D(P, P') = P,$$

такъ что всѣ точки такой области будутъ предѣльными.

„Для сгущенной области $P' = P''$"; дѣйствительно: пусть $P' = P + P_g$ тогда

$$P'' = M(P', P_g'), \quad \text{т. е. } P' = D(P'');$$

но вообще

$$P'' = D(P'); \quad \text{слѣдовательно } P' = P''.$$

Если область не имѣетъ ни одной сгущенной части, то она называется *раздѣльной* (separirt)[1]).

Къ раздѣльнымъ областямъ принадлежатъ *уединенныя* и *счетныя замкнутыя* области, и въ частности $R = P' - P^{(\Omega)}$; дѣйствительно— если бы это было не такъ, то было бы

$$P = P_1 + P_2,$$

гдѣ P_2 сгущенная часть P; тогда

$$P' = M(P_1', P_2'), \quad \text{гдѣ } P_2'' = P_2',$$

т. е. P', входящая въ P, заключала бы въ своемъ составѣ совершенную часть, и P не могла бы быть счетной областью. Раздѣльна будетъ и область перваго рода

$$P - D\{P, P^{(\Omega)}\}.$$

Очевидно, что *сгущеная область можетъ не быть часто разсѣянной* по нѣкоторому интервалу, и область часто разсѣянная по нѣкоторому

[1]) Вездѣ ниже подъ раздѣльной понимается именно эта область, а не область *Harnack'a*—см. 9°.

интервалу можетъ не быть сгущенной, если она имѣетъ еще уединенныя точки внѣ этого интервала; если этого нѣтъ, часто разсѣянная область будетъ eo ipso сгущенной.

Затѣмъ *Cantor* доказываетъ, что размѣръ всякой совершенной области равенъ размѣру континуума; отсюда слѣдуетъ, что замкнутая область или счетна, или имѣетъ размѣръ континуума.

17. Переходя [1]) къ мѣрѣ области, *Cantor* говоритъ, что для непрерывныхъ областей мы имѣемъ нѣкоторое неотрицательное число— интегралъ

$$\int\int \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

распространенный на всѣ точки области: это ничто иное, какъ *объемъ;* но и во всѣхъ другихъ случаяхъ, мы можемъ установить соотвѣтственное понятіе, которое *Cantor* называетъ *Inhalt* или *Volumen*; число, отвѣчающее этому понятію, имѣетъ опредѣленный смыслъ и единственное значеніе.

Такимъ образомъ здѣсь *Cantor* впервые высказываетъ ту точку зрѣнія, что мѣра области является обобщеніемъ понятія о длинѣ и объемѣ, но приходитъ къ этому обобщенію съ помощью извѣстной функціи $F(\rho)$, зависящей отъ положительной безконечно-убывающей перемѣнной ρ. Ходъ его разсужденія таковъ:

Для области P онъ образуетъ сначала $M(P, P')$, затѣмъ около каждой точки p такой замкнутой области описываетъ полный n'мѣрный шаръ радіуса ρ; область точекъ внутри и на границѣ шара *Cantor* обозначаетъ $K(\rho)$ и беретъ затѣмъ область точекъ, представляющую наименьшее кратное всѣхъ такихъ шаровъ

$$M_P \{ K(\rho, p) \} = \Pi(\rho).$$

Область $\Pi(\rho)$ состоитъ изъ конечнаго числа отдѣльныхъ непрерывныхъ частей; распространенный на всѣ эти части

$$\int\int \ldots \int_{\Pi(\rho)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = F(\rho)$$

Cantor называетъ *характеристической функціей* области P; эта функція есть ничто иное, какъ объемъ части пространства, занимаемаго областью $\Pi(\rho)$; предѣлъ этой функціи

$$\lim_{\rho \ldots 0} F(\rho) = I(P)$$

и есть то, что *Cantor* называетъ *Inhalt* области.

---

[1]) A. M. 23, стр. 473.

Такое опредѣленіе является—во первыхъ—крайне сложнымъ само по себѣ, да кромѣ того оно требуетъ предварительнаго вычисленія объема съ помощью кратнаго интегрированія, которому оно логически должно предшествовать. Это опредѣленіе мѣры нашло себѣ впослѣдствіи весьма простое выраженіе въ статьѣ *Lindelöf'a*.

Если область P состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ гостей P_1 и P_2, то очевидно

$$I(P) = I(P_1) + I(P_2);$$

въ противномъ случаѣ это равенство можетъ и не имѣть мѣста.

Далѣе [1]) *Cantor* доказываетъ весьма важную теорему, что

$$I(P) = I(P').$$

Отсюда слѣдуетъ—во первыхъ—, что

$$I(P) = I(P^{(\alpha)}),$$

если α—любое число перваго или второго класса, и—во вторыхъ—для приводимыхъ областей [2])

$$I(P) = I(P^{(\alpha)}) = I(0) = 0,$$

и для неприводимыхъ

$$I(P) = I(P^{(\alpha)}) = I(P^{(\Omega)}).$$

Мы приходимъ теперь къ важному результату, что *опредѣленіе мѣры* всегда сводится къ мѣрѣ совершенныхъ областей. Что касается послѣднихъ, то ихъ мѣра можетъ быть равна нолю, [3]) но она можетъ быть и отлична отъ ноля.

Мѣра области цѣликомъ зависитъ отъ того пространства, въ которомъ она разсматривается; напримѣръ—область точекъ квадрата со стороной, равной единицѣ, имѣетъ мѣру, равную 1 и 0, соотвѣтственно въ пространствѣ двухъ и трехъ измѣреній. *Cantor* говоритъ еще, что для линейныхъ областей мѣра опредѣляется легко при помощи свободныхъ интерваловъ [4]), но дальше въ этомъ направленіи не идетъ.

18. Въ 1884 г. [5]) *Mittag-Leffler*, пользуясь ученіемъ *Cantor'a* въ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, даетъ нѣсколько примѣровъ областей разнаго рода.

---

[1]) Стр. 475

[2]) Обобщеніе теоремы 12°

[3]) Такъ—для области $\{z\}$ 13° мѣра I (P) равна нулю.

[4]) A. M. 4, стр. 390

[5]) A. M. 4, стр. 58-59

Взявъ

$$P_n = \{2^{-m_1} + 2^{-(m_1+m_2)} + \dots + 2^{-(m_1+m_2+\dots+m_n)}\},$$

гдѣ m_i независимо другъ отъ друга пробѣгаютъ всѣ цѣлыя положительныя значенія, мы имѣемъ область P_n, для которой $P_n^{(n)} = \{0\}$.

Если

$$P = \{2^{-\mu} + 2^{-(\mu+m_1)} + 2^{-(\mu+m_1+m_2)} + \dots + 2^{-(\mu+m_1+m_2+\dots+m_\nu)}\},$$

при чемъ μ также, независимо отъ m_i, послѣдовательно приравнивается всѣмъ числамъ натуральнаго ряда, то $P^{(\omega)} = \{0\}$.

Для области

$$\{2^{-m_1} + 2^{-(m_1+m_2)} + \dots + 2^{\ (m_1+m_2+\dots+m_n)} + 2^{-(m_1+m_2+\dots+m_n+\nu)} +$$
$$+ 2^{-(m_1+m_2+\dots+m_n+\nu+\rho_1)} + \dots + 2^{\ (m_1+m_2+\dots+m_n+\nu+\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_\nu)}\}$$

мы получимъ $P^{(\omega+n)} = \{0\}$, и $P^{(2\omega)}$ будетъ состоять изъ одной точки 0 для области

$$P = \{2^{-\mu} + 2^{-(\mu+m_1)} + 2^{-(\mu+m_1+m_2)} + \dots + 2^{-(\mu+m_1+m_1+\dots+m_n)} +$$
$$+ 2^{-(\mu+m_1+m_2+\dots+m_n+\nu)} + 2^{-(\mu+m_1+m_2+\dots+m_n+\nu+\rho_1)} + \dots$$
$$+ 2^{-(\mu+m_1+m_2+\dots+m_n+\nu+\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_\nu)}\}.$$

Въ 1884 г. въ двухъ статьяхъ[1]) *Scheffer'a*, посвященныхъ одна— понятію о длинѣ дуги кривой и другая—теоріи функцій, ученіе объ областяхъ играетъ большую роль, но новаго въ нихъ имѣется только одна лемма, изъ которой слѣдуетъ, что совершенная область можетъ состоять изъ исключительно ирраціональныхъ точекъ.

Кромѣ того *Scheffer* даетъ примѣръ совершенной области, взявъ въ интервалѣ (0,1) всѣ десятичныя дроби, въ которыя не входитъ цыфра 5; свободные интервалы будутъ здѣсь имѣть границами

$$0,\ a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \dots a_n\ 4\,(9) \quad \text{и} \quad 0,\ a_1\, a_2\, a_4 \dots a_n\ 6$$

Phragmen въ томъ же томѣ А. М. приводитъ для n' мѣрнаго пространства доказательство теоремы F[2]) *Bendixson'a*.

19. Въ 1884 г. [3]) появилась работа *Stolz'a*, посвященная вопросу о мѣрѣ области: въ этомъ отношеніи авторъ примыкаетъ къ *Hankel'ю*.

---

[1]) А. М. 5.
[2]) См. 14°.
[3]) M A 23.

Основной интервалъ (a, b) онъ дѣлитъ на интервалы

$$\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{1m_1},$$

которые составляютъ первую систему дѣленія; затѣмъ каждый изъ τ_{1i} дѣлится на новыя части, составляющія вторую систему съ интервалами $\{\tau_{2i}\}$; и т. д.; при этомъ законъ этого дѣленія таковъ, что при произвольно заданномъ маломъ σ

$$\tau_{ni} < \sigma \quad \text{для } n > n_0.$$

Если въ каждой системѣ мы будемъ брать тѣ интервалы $\tau_{n\nu_i}$, на которыхъ лежатъ точки области P, то

$$\lim_{n \ldots \infty} s_n = \lim \sum \tau_{n\nu_i} = \mathrm{L}$$

есть нѣкоторая вполнѣ опредѣленная величина, не зависящая отъ закона дѣленія (a, b) на интервалы; этотъ предѣлъ *Stolz* называетъ *Intervallgrenze*.

Тотъ же процессъ онъ примѣняетъ и къ плоской точечной области, которая находится въ конечной части плоскости, ограниченной простымъ контуромъ.

Эту часть плоскости *Stolz* раздѣляетъ на прямолинейныя клѣточки и аналогично предыдущему доказываетъ существованіе единственнаго предѣла L для суммы клѣточекъ съ точками P; L есть *Flächengrenze* плоской точечной области. Клѣточки представляются въ видѣ многоугольниковъ, у которыхъ наибольшая хорда убываетъ безконечно.

Возвращаясь въ 1897 году [1]) къ тѣмъ же идеямъ, *Stolz*, уже подъ вліяніемъ *Peano* и *Jordan'a*, помимо предѣла L, опредѣляетъ еще

$$\mathrm{L}' = \lim \Sigma \tau'_{n\nu_i},$$

гдѣ $\tau'_{n\nu_i}$—тѣ изъ элементарныхъ клѣточекъ, *всѣ* точки которыхъ принадлежатъ P; L и L' *Stolz* присваиваетъ теперь названія *äussere und innere Flächenzahl*. Въ своихъ „Grundzüge“ *Stolz* считаетъ элементами площади—треугольники [2]). Характерно въ статьяхъ *Stolz'a* то обстоятельство, что онъ не придерживается общепринятой теперь терминологіи *Cantor'a* и вообще какъ то мало о немъ упоминаетъ.

20. Въ 1885 г. появилась [3]) интересная статья *Harnack'a*, посвященная вопросу о *мѣрѣ* области P, т. е. [4]) о предѣлѣ суммы ея

---

[1]) Wiener Berichte 106, стр 453.

[2]) T. 3, стр. 40-41, 1899.

[3]) A. M. 25.

[4]) Стр. 241.

интерваловъ. Если P — часто разсѣяна, то I (P) = l; въ противномъ случаѣ, чтобы опредѣлить I (P), *Harnack* беретъ рядъ величинъ

$$\frac{1}{2}l,\ \frac{1}{3}l,\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{n}l,\ \ldots\ldots$$

и строитъ интервалы равные или большіе $\frac{1}{n}l$ и свободные отъ точекъ P. Выдѣливъ первый интервалъ η_1, онъ примѣняетъ на каждой изъ оставшихся частей l тотъ же процессъ; и т. д.; вообще получится получится конечное число ν свободныхъ интерваловъ η_i равныхъ или большихъ $\frac{l}{n}$; пусть ихъ сумма будетъ

$$\sum_1^{\nu} \eta_i = s_n \quad \text{при } \eta_i \geqq \frac{l}{n}.$$

Точки области P, которыя лежатъ внѣ этихъ интерваловъ или— въ крайнемъ случаѣ—служатъ ихъ границами, располагаются на также конечномъ числѣ интерваловъ $\{\varepsilon_i\}$, суммакоторыхъ равна $l - s_n$.

Слѣдовательно—точки области могутъ быть *включены* въ конечное число интерваловъ, общая длина которыхъ произвольно мало отличается отъ $l - s_n$; для этого стоитъ только произвольно мало уменьшить интервалы η_i. Предѣлъ

$$\lim_{n \ldots \infty} (l - s_n) = s$$

есть искомая *Intervallgrenze.*

На основаніи этого опредѣленія, въ $l - s_n$ будутъ входить не только тѣ интервалы, всѣ точки которыхъ—точки P, но также и тѣ, гдѣ точки P только часто разсѣяны, безразлично—будутъ ли онѣ счетны или несчетны.

Въ опредѣленіи *Harnack'a* являются чрезвычайно важными два пункта: во первыхъ—въ основаніе его положены свободные отъ точекъ P интервалы, расположеніе которыхъ обусловливается самой природой области P; а во вторыхъ—онъ указываетъ на возможность включать точки P въ *конечное* число интерваловъ, сумма которыхъ произвольно близка къ s. Оба эти обстоятельства, хотя они въ частныхъ случаяхъ и фигурировали у *Cantor'a* и *du-Bois-Reymond'a*, являются существенными; много лѣтъ спустя къ *Harnack'y* въ этомъ отношеніи примкнулъ *Osgood* [1]).

---

[1]) См. 29°.

Затѣмъ *Harnack* является предшественникомъ *Peano* и *Jordan'a* въ смыслѣ опредѣленія *внутренней* и *внѣшней мѣры* области, хотя здѣсь онъ немного и противорѣчитъ собственному опредѣленію.

Дѣло въ слѣдующемъ: предѣльныя точки области P могутъ не входить въ составъ этой области; возможно, что эти точки, составляющія область

$$P' - D(P, P') = T,$$

таковы, что включающіе ихъ—согласно опредѣленію *Harnack'a*—интервалы могутъ имѣть сумму s_1, неравную нолю; пусть съ другой стороны сумма интерваловъ, занятыхъ сплошь [1]) точками P, будетъ s. Тогда сумма свободныхъ интерваловъ должна быть $l - s - s_1$; такимъ образомъ, по словамъ *Harnack'a*, „мѣра области P будетъ $s + s_1$, не смотря на то, что P можетъ быть включена въ безконечный рядъ интерваловъ съ общей длиной s".

Высказанное здѣсь положеніе не совсѣмъ точно: такъ какъ на каждомъ интервалѣ, несущемъ на себѣ точки T, должны быть вмѣстѣ съ тѣмъ и точки P, мѣра области, какъ ее опредѣляетъ *Harnack*, непремѣнно будетъ $s + s_1$, въ этомъ онъ совершенно правъ, но что P можетъ быть включена въ рядъ интерваловъ съ общей длиной s, это не справедливо. Въ позднѣйшей терминологіи s будетъ *внутренней*, а $s + s_1$—*внѣшней мѣрой* области.

Затѣмъ *Harnack* первый высказалъ [2]) мысль, что всякая, даже часто разсѣянная, счетная область имѣетъ то свойство, что ея точки могутъ быть включены въ интервалы, сумма которыхъ произвольно мала; въ случаѣ часто разсѣянной области, по поводу точекъ, „которыя не покрыты этими интервалами", авторъ замѣчаетъ [3]), что онѣ не будутъ часто разсѣяны ни въ одномъ интервалѣ, но имѣютъ мѣру большую $1 - \delta$.

21. Далѣе *Harnack* возбуждаетъ, подобно *Stolz'y*, вопросъ, будетъ ли процессъ опредѣленія мѣры однозначенъ, т. е то ли самое число получится, какъ мѣра области, если выборъ свободныхъ отрѣзковъ будетъ производиться по иному закону, чѣмъ прежде. Этотъ вопросъ—особенно не лишній для плоскихъ многомѣрныхъ областей, гдѣ выборъ свободныхъ отъ точекъ области сферъ можетъ быть произведенъ весьма разнообразно.

---

[1]) Только въ этомъ смыслѣ можно понимать *Harnack'a*.

[2]) Стр. 242.

[3]) Стр. 243

Для линейной области *Harnack* разсуждаетъ такъ: пусть два разныхъ процесса намъ послѣдовательно давали суммы интерваловъ

(1) $$s_1,\ s_2,\ s_3, \ldots\ldots, s_m, \ldots\ldots,$$

(2) $$t_1,\ t_2,\ t_3, \ldots\ldots, t_n, \ldots\ldots,$$

получающіеся послѣ выдѣленія свободныхъ интерваловъ. Такъ какъ s_i и t_i не возрастаютъ, то для нихъ существуютъ предѣлы

$$lim\, s_m = \sigma, \qquad lim\, t_n = \tau.$$

Возьмемъ какой нибудь членъ s_m изъ ряда (1) такой, что

$$s_m = \sigma + \delta,$$

гдѣ δ нѣкоторое малое положительное число.

Если мы возьмемъ какую нибудь систему интерваловъ изъ ряда (2), то эти интервалы частью будутъ лежать на s_m, частью же они находятся внѣ s_m; такъ какъ эта послѣдняя часть не входитъ въ составъ s_m, на ней нѣтъ точекъ P, и она должна отпасть въ теченіе дальнѣйшаго процесса; такимъ образомъ мы имѣемъ возможность найти такой членъ t_n ряда (2), что часть t_n, выходящая за границы s_m, будетъ меньше нѣкоторой малой величины ε; въ такомъ случаѣ окажется

$$t_n < s_m + \varepsilon.$$

Разсуждая аналогично относительно t_n мы можемъ найти такую сумму $s_{m'}$ изъ ряда (1), что

$$s_{m'} < t_n + \varepsilon.$$

Поэтому мы имѣемъ

$$s_{m'} - \varepsilon < t_n < s_m + \varepsilon,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\sigma = \tau.$$

Тотъ процессъ, который предлагаетъ *Harnack* для опредѣленія мѣры двухмѣрныхъ областей, существенно отличается отъ предыдущаго и не является его развитіемъ.

Представимъ себѣ плоскую область, заключающуюся въ кругѣ нѣкотораго радіуса l; внутренность круга разобьемъ на такія части, которыя удовлетворяли бы слѣдующимъ условіямъ: *a*) площади ихъ могутъ быть опредѣлены обычными пріемами интегрированія, *b*) эти площади допускаютъ произвольное уменьшеніе, при чемъ *c*) убываетъ безконечно и наибольшее разстояніе точекъ этихъ площадей.

Пусть площади первой системы дѣленія меньше δ; устранимъ тѣ изъ нихъ, внутри или на границѣ которыхъ нѣтъ точекъ области. Остальныя площади дѣлимъ на части, меньшія δ' при $\delta' < \delta$; изъ нихъ снова устраняемъ площади свободныя отъ точекъ области; и т. д. Остающіяся послѣ такого процесса площади дадутъ невозрастающія суммы

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots,$$

для которыхъ существуетъ предѣлъ

$$\lim s_n = s,$$

не зависящій отъ закона дѣленія.

Шагъ назадъ въ томъ разсужденіи *Harnack'a* надо видѣть въ томъ отношеніи, что здѣсь онъ не опредѣляетъ свободные интервалы, обусловливаемые строеніемъ области, а дѣлитъ основной интервалъ на части, не находящіяся ни въ какой связи съ этимъ строеніемъ. Что эти два процесса могутъ приводить къ совершенно различнымъ результатомъ, указано было *Borel'емъ*[1]).

Итакъ опредѣленіе *Harnack'омъ* мѣры плоской области исходитъ совсѣмъ изъ другихъ основаній, чѣмъ его же опредѣленіе мѣры линейной области. Кромѣ того автору приходится опираться при томъ на вычисленіи площадей криволинейныхъ фигуръ, т. е.—на методы интегральнаго исчисленія, тогда какъ логически опредѣленіе мѣры области должно предшествовать вычисленію площадей, которое является его обобщеніемъ, и должно быть поэтому построено независимо отъ интегрированія; и это тѣмъ болѣе, что[2]) „площадь плоской криволинейной фигуры, какъ количество, наравнѣ съ длиной дуги, есть именно изъ тѣхъ геометрическихъ величинъ, которыя нашъ умъ ясно понимаетъ или думаетъ, что понимаетъ, но которыя должны быть точно опредѣлены, прежде чѣмъ ихъ вводить въ анализъ; и это особенно относится къ понятію о площади, такъ какъ на немъ обыкновенно основываются другія доказательства“.

Наконецъ нужно отмѣтить у *Harnack'a* второй, послѣ *Veltmann'a,* примѣръ построенія плоской точечной области.

Взявъ линейную точечную область на оси абсциссъ и возставивъ въ каждой ея точкѣ перпендикуляръ, равный единицѣ, составимъ область изъ всѣхъ точекъ всѣхъ перпендикуляровъ. Эта плоская область имѣетъ своей мѣрой мѣру линейной области. При этомъ авторъ

---

[1]) J. de M. 1903; C. R. 136, p. 1054.

[2]) См. *Peano*, Atti di Torino, 1883.

замѣчаетъ, что, если линейная область рѣдко разсѣяна, то плоская область, мѣра которой можетъ быть не равна нулю, имѣютъ ту особенность, что въ ней нѣтъ внутреннихъ точекъ.

Идеей *Harnack'a* можно воспользоваться для построенія плоскихъ областей, заранѣе заданнаго характера: взявъ—напримѣръ—извѣстныя линейныя области на обѣихъ осяхъ и составивъ плоскую область изъ точекъ пересѣченія соотвѣтственныхъ перпендикуляровъ къ осямъ, можно получать различныя области въ зависимости отъ характера линейныхъ областей.

22. Въ 1885 г. [1]) *Cantor*, сводя результаты предыдущихъ работъ [2]), приводитъ нѣсколько недосказанныхъ раньше слѣдствій; именно—онъ замѣчаетъ, „что каждая совершенная область замкнута и сгущена", и что „$P^{(\alpha)}$ замкнута".

Далѣе авторъ задается цѣлью обобщить предыдущую теорему [3]) $P = R + S$ для замкнутой области, установивъ ее для произвольныхъ областей, которыя замкнутыми могутъ и не быть, и опредѣляетъ предварительно понятіе объ *однородности*. Если около точекъ сгущенной области P описать достаточно малый шаръ, и если размѣръ области находящихся въ немъ точекъ P будетъ всегда одинъ и тотъ же, тогда область P называется *однородной*.

Взявъ произвольную область P, *Cantor* разбиваетъ ее на двѣ части

$$P = P_a + P_c ,$$

гдѣ P_a — область уединенныхъ и P_c — область предѣльныхъ точекъ; онъ называетъ P_a — *Adhärenz* и P_c — *Cohärenz* области P; при этомъ каждая сгущенная часть P входитъ P_c. Тотъ же процессъ возможно примѣнить къ P_c и получить

$$P_c = P_{ca} + P_{c^2}, \quad P = P_a + P_{ca} + P_{c^2},$$

гдѣ въ P_{ca} входятъ всѣ уединенныя точки P_c. Вообще

$$P = \sum_{\alpha' < \alpha} P_{c^{\alpha'} a} + P_{c^{\alpha}}$$

и затѣмъ

(1) $$P = \sum_{\alpha < \Omega} P_{c^{\alpha} a} + P_{c^{\Omega}},$$

---

[1]) **А. М.** 7.

[2]) **Главнымъ** образомъ—статьи **М. А.** 23.

[3]) **См. 16°.**

гдѣ α—произвольное число перваго или второго класса, а Ω—первое число третьяго класса. Здѣсь каждая изъ $P_c{}^{\alpha}{}_a$ *уединенна*, и $\sum P_c{}^{\alpha}{}_a$ *раздѣльна*.

„Если P раздѣльна, то $P_c{}^{\alpha} = 0$ для нѣкотораго наименьшаго числа α перваго или второго класса; если P не раздѣльна, то $P_c{}^{\alpha}$—сгущена".

Дѣйствительно:

A. Пусть P счетна; тогда сумма

$$\sum_{\alpha<\Omega} P_c{}^{\alpha}{}_a$$

должна состоять изъ счетнаго ряда элементовъ; слѣдовательно—должно быть нѣкоторое наименьшее α, для котораго

$$P_c{}^{\alpha}{}_a = 0, \quad P_c{}^{\alpha} = P_c{}^{\alpha}{}_a + P_c{}^{\alpha+1} = P_c{}^{\alpha+1} = P_c{}^{\alpha+\lambda};$$

если $P_c{}^{\alpha} \neq 0$, то $P_c{}^{\alpha}$ и слѣдовательно $P_c{}^{\alpha+\lambda}$ будутъ сгущенными, и P не раздѣльна; если же P раздѣльна, то $P_c{}^{\alpha} = 0$.

B. Если P несчетна, то имѣются въ непрерывномъ интервалѣ, въ которомъ расположена P, точки $\{q\}$, въ произвольной окрестности которыхъ лежитъ несчетная часть P; область Q этихъ точекъ должна быть замкнута, при чемъ

$$D(P, Q) = V \neq 0;$$

точки V не могутъ быть быть уединенными, такъ что V будетъ *сгущенной областью*.

Итакъ *каждая несчетная область заключаетъ въ себѣ сгущенную часть*. Отсюда слѣдуетъ, что *каждая раздѣльная область счетна*.

Такъ какъ въ (1)

$$\sum_{\alpha<\Omega} P_c{}^{\alpha}{}_a = R$$

всегда раздѣльна, то она будетъ счетна; а въ такомъ случаѣ для нѣкотораго наименьшаго α

$$P_c{}^{\alpha}{}_a = 0, \quad P_c{}^{\alpha} = P_c{}^{\alpha+1} = P_c{}^{\Omega},$$

при чемъ $P_c{}^{\alpha}$ для несчетной области не равна нулю, такъ-какъ V составляетъ часть $P_c{}^{\Omega}$.

Если назвать U—область точекъ $P_c{}^{\Omega}$, не входящихъ въ составъ V,

$$P_c{}^{\alpha} - P_c{}^{\Omega} = U + V,$$

то U можетъ быть нолемъ или будетъ однородной областью перваго порядка.

Итакъ всякая область можетъ быть разложена на такія составныя части

$$P = R + U + V.$$

Для *замкнутой* области

$$P_c = P', \quad P_a = P - P'$$

$$P_c{}^{\alpha} = P^{(\alpha)}, \quad P_c{}^{\alpha}{}_a = P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)}, \quad P_c{}^{\Omega} = V = P^{(\Omega)},$$

такъ-какъ здѣсь $P^{(\Omega)}$—нуль или совершенна, и слѣдовательно $U = 0$.

Cantor допускаетъ далѣе существованіе областей размѣра выше второго и сообразно съ этимъ раздѣляетъ V на однородныя части высшихъ порядковъ.

Наконецъ авторъ даетъ классификацію предѣльныхъ точекъ: уединенныя точки области P, составляющія P_a, называются *точками* $0^{го}$ *рода*; уединенныя точки P_c, дающія P_{ca}, называются *точками перваго рода* и т. д., вообще—уединенныя точки $P_c{}^{\alpha}$, образующія область $P_c{}^{\alpha}{}_a$, называются *точками* $\alpha^{го}$ *рода*.

Сообразно съ этимъ точки, входящія въ составъ $P_c{}^{(\Omega)}$, раздѣляются на *порядки*. Всѣ точки $\alpha^{го}$ рода даютъ уединенную область, всѣ точки $\beta^{го}$ порядка даютъ однородную область $\beta^{го}$ порядка. Изъ отсутствія точекъ рода α слѣдуетъ отсутствіе точекъ $\alpha + \lambda^{го}$ рода; тогда какъ для точекъ разныхъ порядковъ такой взаимозависимости не существуетъ. Всѣ точки области P будутъ предѣльными точками $\alpha^{го}$ рода или $\beta^{го}$ порядка, кромѣ точекъ P_a, которыя уединенны.

Какъ это ни странно, а *Schönflies* въ своемъ „Bericht"'ѣ ни однимъ словомъ не обмолвился объ этой весьма важной, съ точки зрѣнія строенія области, классификаціи точекъ области.

Изложенныя выше соображенія относительно строенія области являются очень существенными для его уясненія. Но, не смотря на это, они до сихъ поръ остались совсѣмъ не затронутыми никѣмъ изъ другихъ авторовъ; причиной—можетъ быть—до нѣкоторой степени служила крайняя отвлеченность всѣхъ разсужденій.

Вторая глава настоящаго изслѣдованія находится въ тѣсной связи съ предыдущимъ, хотя и исходитъ изъ другихъ соображеній.

23. Въ 1887 г. *Volterra* [1]) опредѣляетъ *окрестность* кривой въ пространствѣ L, которая предполагается замкнутой или простирающейся до границы области, если она принадлежитъ области, ограниченной нѣкоторой поверхностью; кромѣ того L не имѣетъ кратныхъ точекъ и допускаетъ касательную вездѣ, кромѣ конечнаго ряда точекъ.

Пусть для L взята нѣкоторая замкнутая кривая C, сцѣпленная (concatenata) съ L, т. е. такая, что L проходитъ внутри C.

Тогда, перемѣщая C и не нарушая сцѣпленности, мы получимъ нѣкоторую трубчатую поверхность, внутри которой будетъ лежать L. Точки внутри этой поверхности будутъ *окрестностью* линіи L (interno della linea). Взявъ C достаточно малой, мы можемъ получить произвольно малую окрестность L.

Разъ мы имѣемъ дѣло съ плоскостью или пространствомъ, распространеніе понятія объ окрестности сдѣлается существенно необходимымъ; поэтому опредѣленіе *Volterra* является важнымъ для теоріи многомѣрныхъ областей.

Въ 1889 г. *Arzelà* [2]), развивая идеи *Volterra*, разсматриваетъ въ плоскости, какъ элементы, точки и линіи, для которыхъ могутъ быть опредѣлены предѣльные элементы.

Предѣльнымъ элементомъ называется такой, что въ произвольной его окрестности, ограниченной линіями, разстояніе которыхъ отъ него конечно (maggiore di un numero assegnabile), находится *цѣликомъ* безконечно много другихъ элементовъ; при этомъ отъ каждаго изъ нихъ *всѣ* точки предѣльнаго элемента отстоятъ менѣе, чѣмъ на произвольно малое ε.

Для безконечно многихъ точекъ всегда существуетъ предѣльная точка; спрашивается, имѣетъ ли мѣсто то же самое для безконечнаго множества линій? *Arzelà* доказываетъ, что при извѣстныхъ условіяхъ это дѣйствительно осуществляется.

24. Въ 1887 г. *Peano* устанавливаетъ [3]) интересныя понятія.

Пусть P—линейная область (campo di punti); для нея x будетъ *внутренней* точкой, если возможно опредѣлить такую окрестность $(x-\rho, x+\rho)$, что всѣ ея точки будутъ точками P; x окажется *внѣшней* точкой, если всѣ точки ея окрестности $(x-\rho, x+\rho)$ не принадлежатъ P; точки, не удовлетворяющія ни тому, ни другому условію будутъ *пограничными* (punto limite); послѣднія точки существуютъ всегда, если область не обнимаетъ всѣхъ точекъ прямой; область этихъ точекъ есть *campo limite*.

---

[1]) Atti dell' Accademia dei Lincei, p. 226.

[2]) Atti dell' Accademia dei Lincei.

[3]) „Applicazioni Geometriche".

Точки прямой между двумя данными точками, включая сюда эти послѣднія или нѣтъ, образуютъ область, которая называется *прямолинейнымъ отрѣзкомъ*; длина его — „главная величина"; всякая область, состоящая изъ конечнаго числа отрѣзковъ, имѣетъ также длину, сравнимую съ длиной прямолинейнаго отрѣзка.

Для произвольной области P мы можемъ вообразить состоящія изъ конечнаго числа отрѣзковъ области Π и π, изъ которыхъ въ составъ первой входитъ P, а вторая напротивъ того заключается въ P; Π и π имѣютъ длину M(Π) и M(π), и M(Π) не меньше M(π).

Если при перемѣнныхъ Π и π нижняя граница M(Π) совпадаетъ съ верхней границей M(π), что мы обозначимъ [1] такъ

$$\mathrm{uGr}\, M(\Pi) = \mathrm{oGr}\, M(\pi),$$

то общее ихъ значеніе называется *длиной* прямолинейной области.

Если эти границы не равны, область P не имѣетъ длины, сравнимой съ длиной отрѣзка; тогда uGr M(Π) и oGr M(π) *Peano* называетъ *внѣшней и внутренней длиной* области.

Въ частномъ случаѣ, если нѣтъ области Π, обнимающей P, внѣшняя длина P равна безконечности; если нѣтъ области π, входящей въ составъ P, внутренняя длина P равна нолю.

Область пограничныхъ точекъ входитъ въ составъ области Π − π, которая состоитъ также изъ конечнаго числа отрѣзковъ, при чемъ

$$M(\Pi - \pi) = M(\Pi) - M(\pi)$$

есть внѣшняя длина области пограничныхъ точекъ.

Тѣ же самыя понятія *Peano* устанавливаетъ для областей двухъ и трехъ измѣреній, при чемъ campo limite онъ уже называетъ *контуромъ* (contorno); области Π и π состоятъ здѣсь изъ многоугольниковъ и призматическихъ тѣлъ.

Идеи *Peano* нашли дальнѣйшее развитіе въ трудахъ *Jordan'a*.

25. Въ 1892 г. [2]) *Jordan* кладетъ въ основаніе всего анализа теорію областей.

Въ эту теорію онъ вводитъ нѣкоторыя новыя понятія, необходимыя для распространенія ея на многомѣрныя области. Онъ называетъ *отклоненіемъ* (écart) двухъ данныхъ точекъ выраженіе

$$p = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + \ldots + |t_1 - t_2|.$$

---

[1]) Здѣсь uGr и oGr есть сокращенія „untere Grenze" и „obere Grenze".

[2]) Journal de Mathématiques, (4) 8 и въ 1893 г. — Cours d'Analyse, deuxième édition, t. I.

вводимое имъ вмѣсто разстоянія

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \ldots + (t_1 - t_2)^2;$$

наибольшее отклоненіе точекъ области есть ея *діаметръ*. Нижняя граница отклоненій точекъ, принадлежащихъ соотвѣтственно двумъ областямъ, есть отклоненіе областей.

Для данной области P, не обнимающей всевозможныхъ точекъ извѣстнаго пространства, всѣ точки, не входящія въ P, составляютъ дополнительную область П. *Jordan* опредѣляетъ затѣмъ [1]) *внутреннія и внѣшнія* точки области и точки *контура* (frontière).

Контуръ представляетъ всегда замкнутую область, потому что каждая его предѣльная точка будетъ точкой контура.

Затѣмъ *Jordan*, подобно *Peano*, опредѣляетъ E(P) и e(P)—внутреннее и внѣшнее протяженіе (étendue), взявъ за основаніе двѣ системы параллельныхъ прямыхъ и доказывая, что система дѣленій не оказываетъ вліянія на результатъ.

Если Q область внутренняя по отношенію къ P, то

$$e(Q) \leqq E(Q) < e(P);$$

если $P = \sum_1^n P_i$ то

$$E(P) \leqq \sum_1^n E(P_i), \quad e(P) \geqq \sum_1^n e(P_i);$$

если

$$E(P) = e(P),$$

то область называется *измѣримой* (mesurable).

26. Въ виду того обстоятельства, что во второй главѣ настоящаго изслѣдованія основной идеей строенія области взяты извѣстные *типы размѣщенія*, намъ нужно будетъ изложить, что подъ тѣмъ же терминомъ понимаетъ *Cantor*. и выяснить такимъ образомъ, что общаго имѣется между нашимъ общимъ пріемомъ построенія областей и теоріей *Cantor'a*, систематически изложенной въ 1895-97 г.г. [2]).

Область называется *просто размѣщенной* (einfach geordnete), если между элементами существуетъ такой порядокъ, что *a*) изъ двухъ элементовъ одинъ занимаетъ низшее, а другой высшее мѣсто, и *b*) изъ

---

[1]) См.—глава II настоящаго изслѣдованія.

[2]) M. A. 46 и 49.

трехъ элементовъ, если первый предшествуетъ второму, и второй третьему, то первый предшествуетъ третьему.

Всякой просто размѣщенной области отвѣчаетъ опредѣленный *типъ размѣщенія* (Ordnungstypus) ея элементовъ; подъ нимъ *Cantor* разумѣетъ общее понятіе, которое возникаетъ, если мы отвлечемся отъ индивидуальныхъ свойствъ элементовъ области, но удержимъ только ихъ порядокъ.

Для каждаго трансфинитнаго размѣра имѣется безконечное множество различныхъ типовъ размѣщенія, составляющихъ особый *классъ типовъ*. Простѣйшими безконечными типами будутъ ω и $^*\omega$, отвѣчающіе размѣщеніямъ первый—цѣлыхъ положительныхъ и второй—цѣлыхъ отрицательныхъ чиселъ

$$\ldots\ldots, -n, \ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots;$$

типъ размѣщенія всѣхъ цѣлыхъ чиселъ есть $^*\omega + \omega$.

Надъ типами размѣщенія *Cantor* производитъ сложеніе и умноженіе, при чемъ для сложенія вообще

$$\alpha + \beta \gtrless \beta + \alpha, \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

если n—конечный типъ размѣщенія, то—между прочимъ—

$$n + \omega = \omega, \quad \omega + n \gtrless \omega;$$

затѣмъ

$$\alpha\,\beta \gtrless \beta\,\alpha, \quad \alpha\,\beta.\,\gamma = \alpha.\,\beta\,\gamma, \quad \alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma.$$

Въ числѣ различныхъ типовъ размѣщенія *Cantor* разсматриваетъ, кромѣ *a*) ω и *b*) $^*\omega$, еще *c*) η—типъ размѣщенія положительныхъ раціональныхъ правильныхъ дробей въ ихъ естественномъ порядкѣ и *d*) типъ линейной непрерывности. Кромѣ нихъ можно еще взять типы размѣщенія *e*) сгущенной, *f*) замкнутой и *g*) совершенной области.

27. Въ 1895 году[1]) въ своей диссертаціи *Borel* устанавливаетъ теорему, которая теперь извѣстна какъ „теорема *Borel'я*“:

„Если на конечномъ отрѣзкѣ имѣется счетный[2]) рядъ интерваловъ такого рода, что каждая точка отрѣзка есть *внутренняя* точка по крайней мѣрѣ одного изъ интерваловъ, то уже нѣкоторое *конечное* число этихъ интерваловъ покрываетъ отрѣзокъ цѣликомъ, т. е. такъ, что всѣ его точки будутъ *внутренними* точками этого конечнаго ряда интерваловъ“.

---

[1]) Annales de l'École Normale, (3) 12.

[2]) См. Leçons, p. 42; въ первой редакціи (p. 51) было просто „une infinité d'intervalles“

Дѣйствительно: пусть a—правый конецъ всего интервала, и (a_1, b_1)—одинъ изъ интерваловъ, заключающихъ a внутри себя; (a_2, b_2)—одинъ изъ интерваловъ, обнимающихъ b_1, и т. д.; эти интервалы или достигаютъ праваго конца b всего интервала, или же этого нѣтъ, и тогда существуетъ

$$b_\omega = \lim_{i \to \infty} b_i.$$

Для b_ω находимъ соотвѣтственный интервалъ $(a_{\omega+1}, b_{\omega+1})$, при чемъ пусть $a_{\omega+1}$ падаетъ между b_{m-1} и b_m. Въ такомъ случаѣ достаточно удержать конечное число интерваловъ (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots, (a_m, b_m)$, $(a_{\omega+1}, b_{\omega+1})$, чтобы отъ a дойти до b_ω; и т. д.. Мы имѣемъ всегда возможность продолжать этотъ процессъ, переходя, когда это будетъ необходимо, къ предѣлу и замѣняя при этомъ счетный рядъ интерваловъ конечнымъ; мы достигнемъ такимъ образомъ конца b, потому что процессъ нахожденія интерваловъ (a_i, b_i) долженъ оборваться; иначе мы получили бы рядъ интерваловъ съ концами

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_\omega, \ldots,$$

гдѣ указатели пробѣгаютъ всѣ числа 2-го класса. Но эти указатели, такъ какъ область интерваловъ—счетна, являются числами натуральнаго ряда въ ихъ естественномъ порядкѣ, а это не возможно, такъ какъ 2-ой классъ чиселъ составляетъ область 2-го размѣра.

Мы приходимъ такимъ образомъ—на основаніи предыдущаго процесса—къ опредѣленію на дѣлѣ конечнаго числа интерваловъ, покрывающихъ отрѣзокъ прямой.

Въ 1898 году[1]) *Borel* даетъ своей теоремѣ другое доказательство, которое едва ли можно признать удовлетворительнымъ: оно заключаетъ въ себѣ petitio principii. Перенумеровавъ интервалы въ какомъ нибудь порядкѣ и желая доказать, что послѣ нѣкоторыхъ N интерваловъ не останется точекъ, не вошедшихъ *внутрь* по крайней мѣрѣ одного изъ нихъ, *Borel* предполагаетъ существованіе хотя одной такой точки; тогда интервалы, которые ее заключаютъ, *имѣютъ указатели, превышающіе какое угодно число n*. *Borel* дѣлитъ весь отрѣзокъ пополамъ, потомъ еще пополамъ, и т. д., и беретъ тѣ обнимающіе послѣдовательно другъ другъ части основного интервала, которыя всѣ будутъ имѣть свойство, присущее всему отрѣзку, именно—каждая изъ послѣдовательныхъ частей заключаетъ по крайней мѣрѣ одну точку, входящую только въ интервалы съ указателями, большими произвольнаго числа n.

---

[1]) Leçons, p. 42—43.

Убывающія части интервала протяженіемъ

$$l, \frac{l}{2}, \frac{l}{2^2}, \ldots, \frac{l}{2^m}, \ldots$$

имѣютъ предѣломъ нѣкоторую точку α, которая, какъ говоритъ *Borel*, „по предположенію лежитъ внутри опредѣленнаго интервала (a_k, b_k), такъ какъ мы предположили область интерваловъ счетной“. Въ этихъ словахъ *Borel* ссылается на то, что должно быть доказано. Причина, которая влечетъ за собою неудачу доказательства, заключается въ распредѣленіи интерваловъ въ опредѣленный порядокъ.

Болѣе простое доказательство теоремѣ *Borel'я* было дано *Lebesgue'омъ* [1]).

Если отъ лѣвой границы a всего интервала (a, b) можно съ помощью конечнаго числа интерваловъ дойти до точки x, *Lebesgue* называетъ эту точку *достигнутой*. Если x достигнута, достигнута и всякая точка интервала (a, x); въ противномъ случаѣ не будутъ достигнуты и всѣ точки (x, b). Если b не достигнута, имѣется послѣдняя достигнутая или первая недостигнутая точка x_0; эта точка лежитъ *внутри* нѣкотораго интервала (α_0, β_0); пусть

$$\alpha_0 < x_1 < x_0 < x_2 < \beta_0.$$

По предположенію относительно x_0, точка x_1 достигнута послѣ конечнаго числа n интерваловъ; добавляя къ нимъ интервалъ (α_0, β_0), мы достигаемъ точки x_2, что противно положенію относительно роли точки x_0; итакъ b должна быть достигнута. Здѣсь, какъ замѣчаетъ *Lebesgue*, не дѣлается ограниченія, что число всѣхъ интерваловъ счетно. Аналогичное доказательство даетъ *Lebesgue* и для двухмѣрной области, пользуясь при этомъ кривой *Peano*.

28. Такъ какъ въ счетномъ ряду интерваловъ, фигурирующихъ въ теоремѣ *Borel'я*, имѣются интервалы, которые покрываютъ другъ друга, то сумма всѣхъ интерваловъ $\sum\limits_{1}^{\infty} l_n$ будетъ превосходить длину основного интервала l. Тоже самое происходитъ и по отношенію къ интерваламъ $l', l'', \ldots, l^{(N)}$, покрывающимъ весь основной интервалъ и существующимъ въ силу предыдущей теоремы:

$$\sum_{j=1}^{N} l^{(j)} > l.$$

---

[1]) Leçons, p. 105.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что если сумма конечнаго или безконечнаго ряда интерваловъ меньше l, то *внѣ этихъ интерваловъ должны существовать точки основного интервала.*

Эти *точки будутъ несчетны;* дѣйствительно: пусть

$$\sum_{1}^{\infty} l_n = s < l,$$

и пусть невнутреннія точки образуютъ счетный рядъ

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\ldots, a_m, \ldots\ldots;$$

построивъ около нихъ интервалы

$$l'_m = \left(a_m - \frac{\varepsilon}{2^m}, \quad a_m + \frac{\varepsilon}{2^m}\right),$$

мы будемъ имѣть два счетныхъ ряда интерваловъ $\{l_n\}$ и $\{l'_m\}$, заключающихъ *всѣ* точки основного интервала l. Сумма этихъ интерваловъ, взятыхъ вмѣстѣ, будетъ не больше $s+\varepsilon$; такъ какъ ε можетъ быть взято удовлетворяющимъ условію $s+\varepsilon < l$, то отсюда слѣдуетъ, что внѣ l_n и l'_m должны быть точки l, что противно положенію. Итакъ невнутреннія точки счетнымъ рядомъ быть не могутъ.

Изъ предыдущаго вытекаетъ между прочимъ очень важная теорема, которой *Borel* коснулся только мимоходомъ: „Всякая счетная область можетъ быть включена въ интервалы, общую сумму которыхъ можно сдѣлать произвольно малой“.

29. Взявъ интервалы

$$(2) \qquad \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \quad \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}\right),$$

окружающіе всѣ раціональныя точки, *Borel* разсматриваетъ область точекъ невнутреннихъ для этихъ интерваловъ; интересно разобрать такую область подробнѣе.

Приведя раціональныя дроби въ видѣ счетнаго ряда

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5};\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6};\ \frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{7};\ldots,$$

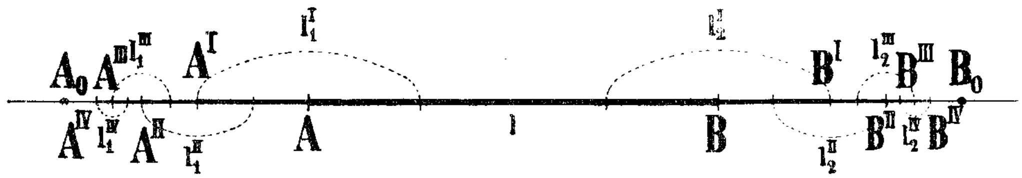
мы получимъ для нихъ соотвѣтственные интервалы

$$l_1 = \left(\frac{3}{8}, \ \frac{5}{8}\right),\ l_2 = \left(\frac{8}{27}, \ \frac{10}{27}\right),\ l_3 = \left(\frac{17}{27}, \ \frac{19}{27}\right),\ l_4 = \left(\frac{15}{64}, \ \frac{17}{64}\right),\ l_5 = \left(\frac{47}{64}, \ \frac{49}{64}\right),$$

$$l_6 = \left(\frac{24}{125}, \ \frac{26}{125}\right),\ l_7 = \left(\frac{49}{125}, \ \frac{51}{125}\right), \ldots .$$

Не трудно видѣть, что 1) одни изъ этихъ интерваловъ помѣщаются цѣликомъ на другихъ; къ такой категоріи принадлежатъ—напримѣръ—l_7, лежащій на l_1, такъ какъ

$$\frac{3}{8}=\frac{375}{1000}<\frac{392}{1000}=\frac{49}{125}, \quad \frac{51}{125}=\frac{408}{1000}<\frac{625}{1000}=\frac{5}{8};$$



и 2) середина однихъ интерваловъ совпадаетъ съ границами другихъ; дѣйствительно—границы интервала $\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$ будутъ раціональны, слѣдовательно—каждая изъ нихъ служитъ серединой интерваловъ

$$\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{8^3}, \frac{3}{8}+\frac{1}{8^3}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{5}{8}-\frac{1}{8^3}, \frac{5}{8}+\frac{1}{8^3}\right);$$

въ свою очередь точки

$$\frac{5}{8}-\frac{1}{8^3}=\frac{319}{2^9}, \quad \frac{5}{8}+\frac{1}{8^3}=\frac{321}{2^9}$$

служатъ срединами интерваловъ

$$\left(\frac{319}{2^9}-\frac{1}{2^{27}}, \frac{319}{2^9}+\frac{1}{2^{27}}\right), \quad \left(\frac{321}{2^9}-\frac{1}{2^{27}}, \frac{321}{2^9}+\frac{1}{2^{27}}\right);$$

и т. д.; мы получимъ такимъ образомъ влѣво и вправо отъ каждаго интервала $l = AB$ интервалы l_1^{I} и l_2^{I} съ серединами A, B; интервалы l_1^{II} и l_2^{II} съ серединами A^{I} и B^{I}, и т. д. Эти интервалы, ложась своею половиною на прежде взятые интервалы, другой половиной въ обѣ стороны удлиняютъ интервалъ; точки A, A^{I}, A^{II}, ... и B, B^{I}, B^{II} и т. д. стремятся къ нѣкоторымъ предѣламъ A_0 и B_0, которые лежатъ *внѣ* разростающагося интервала $A^{(i)} B^{(i)}$ при какомъ угодно значеніи i. Эти точки будутъ границами интервала $A_0 B_0$, къ которому стремится $A^{(i)} B^{(i)}$ съ возрастаніемъ i, и мы можемъ поэтому смотрѣть на $A^{(i)} B^{(i)}$, при перемѣнномъ i, какъ на *открытый интервалъ* $A_0 B_0$.

Мы видѣли, что нѣкоторые изъ интерваловъ l_j расположены на предшествующихъ интервалахъ, такъ что и отвѣчающія имъ границы A_0, B_0 могутъ лежать внутри другихъ интерваловъ. Это имѣетъ мѣсто—напримѣръ—для интервала $\left(\frac{49}{125}, \frac{51}{125}\right)$; спрашивается, не будетъ ли это общимъ явленіемъ, т. е.—не располагаются ли всѣ интервалы такимъ образомъ, что они постоянно покрываютъ другъ друга. Если это такъ, то внутри интерваловъ l_j должны находиться *всѣ* точки (0, 1) безъ исключенія.

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, мы возьмемъ сумму всевозможныхъ интерваловъ, не заботясь о томъ, покрываютъ они другъ друга или нѣтъ. Такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ правильными дробями, то для каждаго знаменателя q числитель можетъ принимать значенія отъ 1 до $q-1$; такимъ образомъ интерваловъ типа (2) будетъ $q-1$. Каждый изъ нихъ имѣетъ длину $\frac{2}{q^3}$, такъ что всѣ вмѣстѣ они даютъ $\frac{2(q-1)}{q^3}$. Придавая q всевозможныя значенія отъ 1 до безконечности, мы получимъ

$$s = \sum_{1}^{\infty} \frac{2(q-1)}{q^3} = 2\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^3}\right) = 2\,\mathrm{M} < 1,$$

такъ какъ M есть нѣкоторое опредѣленное число $< \frac{1}{2}$. Изъ теоремы же *Borel'я* слѣдуетъ, что въ такомъ случаѣ существуетъ несчетная область точекъ, не лежащихъ внутри интерваловъ (2).

Итакъ всѣ границы открытыхъ интерваловъ $A_0 B_0$ не могутъ лежать внутри другихъ интерваловъ l_j; слѣдовательно—найдутся такія границы A_0, B_0, которыя не принадлежатъ къ этой категоріи, и онѣ непремѣнно *должны быть ирраціональны.*

Мы получимъ такимъ образомъ область открытыхъ интерваловъ типа $A_0 B_0$, невнутренними точками которыхъ будутъ исключительно ирраціональныя точки; эти точки образуютъ совершенную область.

По поводу изложеннаго выше *Borel* говоритъ[1]): „Размысливъ о томъ фактѣ, что можно устранить изъ прямой всѣ точки, заключающіяся въ каждомъ изъ интерваловъ (2), и что остается еще несчетная область точекъ, мы будемъ менѣе склонны считать, что мы знаемъ, что такое непрерывность, и разсуждать о ней какъ о понятіи интуитивномъ и вполнѣ ясномъ".

30 Далѣе *Borel* дѣлаетъ важное указаніе, касающееся природы непрерывности и дающее возможность сдѣлать еще болѣе поразительный выводъ.

Около раціональныхъ точекъ $\frac{p}{q}$ строимъ интервалы

(3) $$\left(\frac{p}{q} - \frac{\varepsilon}{q^3},\ \frac{p}{q} + \frac{\varepsilon}{q^3}\right),$$

гдѣ

$$\varepsilon = \frac{1}{\nu} \quad \text{при} \quad \nu = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

---

[1]) Leçons. p. 44.

Сумма интерваловъ $l_n^{(\nu)}$, отвѣчающихъ нѣкоторому значенію ν, удовлетворяетъ неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n^{(\nu)} \leq 2\,\varepsilon \sum \left\{ \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^3} \right\} = 2\,\varepsilon\, \mathrm{M} = \frac{2\,\mathrm{M}}{\nu},$$

при чемъ эта сумма можетъ быть произвольно мала въ связи съ величиной ν.

Взявъ область точекъ, находящихся внутри интерваловъ (3), мы получимъ, въ зависимости отъ значенія ν, рядъ областей

$$\mathrm{E}_1,\ \mathrm{E}_2,\ \mathrm{E}_3, \ldots\ldots, \mathrm{E}_\nu, \ldots\ldots, \tag{4}$$

изъ которыхъ каждая входитъ во всѣ предыдущія; разсмотримъ же область тѣхъ точекъ, которыя общи всѣмъ областямъ (4)

$$\mathrm{E} = \mathrm{D}\left\{\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3, \ldots\ldots, \mathrm{E}_\nu, \ldots\ldots\right\}.$$

Что въ составъ E должны входить всѣ $\frac{p}{q}$, это ясно само собой; но оказывается, что кромѣ того въ составъ E входитъ еще несчетный рядъ нѣкоторыхъ другихъ точекъ. Чтобы убѣдиться въ этомъ, возьмемъ область чиселъ

$$\xi = \frac{\alpha_1}{10^{1!}} + \frac{\alpha_2}{10^{2!}} + \frac{\alpha_3}{10^{3!}} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_n}{10^{n!}} + \ldots\ldots, \tag{5}$$

гдѣ α_i можетъ принимать какія угодно значенія изъ ряда чиселъ отъ 0 до 9.

Такъ какъ область (5) можетъ быть взаимно-однозначно отнесена къ области чиселъ

$$x = \frac{\alpha_1}{10^1} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \ldots\ldots,$$

а эти послѣднія даютъ всѣ точки [1]) интервала (0, 1), которыя несчетны, то также несчетны будутъ и числа (5), и область $\{\xi\}$ имѣетъ размѣръ непрерывности.

Докажемъ теперь, что каждое изъ чиселъ ξ входитъ въ составъ каждой изъ областей E_ν при произвольномъ значеніи ν.

---

[1]) Счетный рядъ раціональныхъ чиселъ фигурируетъ здѣсь дважды, что не мѣняетъ сути дѣла.

Пусть ξ—одно изъ чиселъ (5): изображая его въ видѣ

$$\xi = \frac{p}{q} + \frac{\alpha_{m+1}}{q^{m+1}} + \frac{\alpha_{m+2}}{q^{(m+1)(m+2)}} + \ldots, \text{ гдѣ } q = 10^{m!},$$

мы видимъ, что

$$(6) \qquad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^m};$$

здѣсь $\frac{p}{q}$ — одно изъ приближеній числа ξ; такъ какъ m, а слѣдовательно и знаменатель q, могутъ быть взяты произвольно большими, то $\frac{p}{q}$ можетъ произвольно мало отличаться отъ ξ.

Числа, входящія въ любую изъ областей E_ν, удовлетворяютъ условію

$$(7) \qquad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{q^3}.$$

Если m выбрано такъ, что

$$(8) \qquad \frac{1}{q^m} < \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{q^3}, \qquad q^{m-3} = 10^{m!\,(m-3)} > \nu,$$

число ξ—въ силу (6)—будетъ удовлетворять условію (7) и является поэтому однимъ изъ чиселъ области E_ν. Неравенство же (8) всегда можетъ быть осуществлено подборомъ m при всякомъ заданномъ конечномъ ν.

Итакъ несчетная область $\{\xi\}$ входитъ, какъ составная часть, въ каждую изъ E_ν; слѣдовательно—она войдетъ и въ E, откуда вытекаетъ несчетность послѣдней области. Этотъ фактъ, установленный *Borel'емъ*, представляетъ очень большое значеніе.

Интервалы (3), которыми опредѣляются области E_ν, имѣютъ серединой и границами раціональныя точки. Безконечное убываніе интерваловъ происходитъ всегда такимъ образомъ, что границы остаются раціональными; слѣдовательно—область E *опредѣляется счетнымъ рядомъ безконечно малыхъ интерваловъ съ раціональными границами.*

Изъ того, что область E несчетна, слѣдуетъ далѣе, что *въ каждомъ изъ этихъ интерваловъ находится несчетная область точекъ.*

Дѣйствительно, если бы въ каждомъ изъ нихъ было конечное или счетное число точекъ, то счетный рядъ интерваловъ далъ бы счетный рядъ конечныхъ или счетныхъ рядовъ точекъ; а, какъ извѣстно, такой рядъ снова будетъ только счетенъ. Такимъ образомъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ интерваловъ (3) долженъ обладать несчетнымъ рядомъ точекъ.

Но не трудно видѣть, что если это имѣетъ мѣсто по отношенію къ одному изъ интерваловъ, то тоже самое справедливо и относительно всѣхъ. Въ самомъ дѣлѣ: при заданномъ значеніи ν, между каждыми двумя интервалами (3) области E_ν можно установить взаимнооднозначное соотвѣтствіе, которое будетъ сохраняться въ каждой стадіи измѣненія ν; оно сохранится поэтому и для интерваловъ области E.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ тому заключенію, что каждый изъ интерваловъ области E долженъ давать несчетную область точекъ E, или—иными словами—*между каждыми двумя произвольно мало различающимися другъ отъ друга раціональными числами лежитъ несчетная область другихъ чиселъ.*

31. Если мы примѣнимъ теорему конца § 28 къ раціональнымъ точкамъ интервала (0,1), которыя представляютъ счетный рядъ, мы придемъ къ небезъинтереснымъ результатамъ.

Пусть

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

—счетный рядъ всѣхъ раціональныхъ дробей; пусть далѣе ε нѣкоторое малое *ирраціональное* число; строимъ интервалы l_i протяженіемъ

$$\left(x_1 - \frac{\varepsilon}{2}, \; x_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \left(x_2 - \frac{\varepsilon}{2^2}, \; x_2 + \frac{\varepsilon}{2^2}\right), \ldots, \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, \; x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right), \ldots; \qquad (9)$$

на каждомъ изъ этихъ интерваловъ l_i, построенномъ около точки x_i, могутъ лежать другія раціональныя точки, такъ что интервалы будутъ захватывать другъ друга; на нихъ расположены также и нѣкоторыя ирраціональныя точки; наименьшее кратное [1]) интерваловъ (9) не можетъ быть больше суммы этихъ интерваловъ

$$\overset{\infty}{\underset{1}{\mathrm{M}}} \left\{\frac{2\varepsilon}{2^n}\right\} < \sum_1^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

Интервалы l_i могутъ—во первыхъ—захватывать другъ друга; изъ такихъ интерваловъ составятся удлиненные интервалы типа $A_0 B_0$ [2]) съ тою только разницей, что серединами удлиняющихъ интерваловъ будутъ служить внутреннія точки удлиняемыхъ; во вторыхъ—возможно, что одни изъ l_i располагаются цѣликомъ на другихъ.

Очевидно далѣе, что интервалы (9) не могутъ быть смежными; дѣйствительно—тогда должно было бы быть для нѣкоторыхъ m и n

$$x_m + \frac{\varepsilon}{2^m} = x_n - \frac{\varepsilon}{2^n},$$

---

[1]) Въ смыслѣ *Cantor'a.*

[2]) См. 29°.

откуда слѣдовало бы

$$x_n - x_m = \varepsilon\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n}\right),$$

т. е. разность двухъ раціональныхъ чиселъ была иррраціональна.

Изъ того обстоятельства, что сумма всѣхъ различныхъ интерваловъ не можетъ превышать 2ε,—на основаніи теоремы *Borel'я*—слѣдуетъ, что внѣ интерваловъ (9) имѣются точки интервала (0, 1).

Наименьшее кратное всевозможныхъ интерваловъ (9) представитъ изъ себя счетный рядъ часто разсѣянныхъ по (0, 1) интерваловъ, которые опредѣлятъ нѣкоторую область, состоящую исключительно изъ ирраціональныхъ точекъ. На возможность построенія такой области указалъ впервые *Scheeffer* [1]).

Если область состоитъ исключительно изъ ирраціональныхъ точекъ, точки раціональныя должны быть только внутренними точками свободныхъ интерваловъ.

Такое изолированіе раціональныхъ точекъ идетъ какъ будто бы въ разрѣзъ съ тѣмъ фактомъ, что каждое ирраціональное число опредѣляется какъ предѣлъ ряда раціональныхъ чиселъ. Но это не такъ.

Каждая ирраціональная точка ξ, лежащая внѣ интерваловъ (9), является предѣломъ границъ нѣкотораго ряда безконечно убывающихъ интерваловъ

$$l_{m_1},\ l_{m_2},\ l_{m_3},\ \ldots\ldots,\ l_{m_\nu}\ ,\ \ldots\ldots;$$

если мы возьмемъ на этихъ интервалахъ внутреннія раціональныя точки, то ξ будетъ также предѣломъ и этихъ точекъ въ силу того, что интервалы l_{m_ν} при приближеніи къ ξ убываютъ безконечно.—

Замѣтимъ еще, что *Borel* далъ[2]) прекрасное построеніе свободныхъ интерваловъ для совершенной области.

32. Крайне интереснымъ является опредѣленіе *Borel'емъ* [3]) *мѣры области*, не совпадающее на первый взглядъ съ тѣми опредѣленіями, которыя были даны до него. Ходъ разсужденія автора таковъ.

Пусть сначала область состоитъ изъ *всѣхъ* точекъ счетнаго ряда не захватывающихъ другъ друга интерваловъ, сумма которыхъ равна s; *Borel* говоритъ тогда, что „область имѣетъ мѣру s“.

Если двѣ такого рода области не имѣютъ общихъ точекъ, и s_1 и s_2 —ихъ мѣры, то s_1+s_2 будетъ мѣрой ихъ суммы. Вообще для счетнаго

---

[1]) См 18°.

[2]) Leçons, p. 49.

[3]) Leçons, p. 46

ряда областей E_i безъ общихъ точекъ и имѣющихъ мѣрами s_i

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots = s$$

будетъ мѣрой ихъ суммы E; при этомъ не важно, входятъ ли или нѣтъ въ составъ областей границы опредѣляющихъ ихъ интерваловъ.

Если E содержитъ точки E_1, и s, s_1 — ихъ мѣры, то $E - E_1$ имѣетъ мѣру $s - s_1$.

Области, для которыхъ можно опредѣлить мѣру въ силу предыдущихъ условій, *Borel* называетъ *измѣримыми* (mesurable) и говоритъ только объ измѣримыхъ областяхъ; этимъ названіемъ авторъ не хочетъ утверждать, что не возможно дать опредѣленіе мѣры для другихъ областей, но что его интересуютъ только области, измѣренныя въ указанномъ смыслѣ. Опредѣленіе *Borel'я* можно выразить чуточку иначе, и тогда простота и естественность его бросаются въ глаза.

Замѣтимъ сначала, что какъ у *Borel'я*, такъ и въ нашемъ изложеніи, подъ счетнымъ рядомъ можно понимать также и конечный; такимъ образомъ область точекъ $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ будетъ имѣть мѣру $\frac{1}{3}$, хотя опредѣляющій интервалъ здѣсь одинъ единственный.

Если область E состоитъ изъ ряда сплошныхъ отрѣзковъ, то сумма ихъ длинъ s, равная или меньшая l — длины основного отрѣзка, естественно берется за мѣру области, при чемъ — слѣдовательно — мѣра есть ничто иное, какъ длина, но составленная изъ многихъ слагаемыхъ. Такое опредѣленіе мѣры совершенно просто и естественно.

Если имѣются двѣ области E_1 и E_2 подобнаго рода, но безъ общихъ точекъ, то сплошные интервалы будутъ распредѣлятся по основному отрѣзку въ нѣкоторомъ порядкѣ, при чемъ захватывать другъ друга они не могутъ и могутъ самое большее примыкать другъ къ другу; въ этомъ послѣднемъ случаѣ общая граница можетъ входить въ составъ только одного изъ нихъ, такъ что по крайней мѣрѣ одинъ изъ интерваловъ оказывается открытымъ. Два счетныхъ ряда интерваловъ, опредѣляющихъ E_1 и E_2, даютъ снова счетный рядъ, и сумма $E_1 + E_2 = E$ опредѣлится этимъ счетнымъ рядомъ интерваловъ; очевидно, что здѣсь

$$M(E_1 + E_2) = s + s_1 = M(E_1) + M(E_2). \qquad \textbf{(10)}$$

Эта теорема является непосредственнымъ слѣдствіемъ опредѣленія.

Если мы имѣемъ рядъ областей

$$E_1,\ E_2,\ E_3, \ldots, E_n, \ldots \qquad \textbf{(11)}$$

безъ общихъ точекъ, и каждая изъ нихъ задается счетнымъ рядомъ интерваловъ, то эти интервалы могутъ быть только смежными, но никоимъ образомъ не должны захватывать другъ друга.

Счетный рядъ счетныхъ рядовъ такихъ интерваловъ даетъ снова счетный рядъ интерваловъ, всѣ точки которыхъ входятъ въ составъ области $E = \sum E_i$, являющейся суммой областей (12). Такъ какъ при этомъ

$$s = \sum s_i\,, \text{ то } M \sum E_i = \sum M(E_i). \tag{12}$$

Если далѣе E_1 входитъ въ составъ E, т. е. E_1 задается счетнымъ рядомъ сплошныхъ интерваловъ, расположенныхъ на интервалахъ E, то выдѣленіе E_1 изъ E будетъ имѣть слѣдствіемъ раздробленіе каждаго интервала E, вообще говоря, на счетный рядъ частныхъ интерваловъ и удаленіе ряда этихъ послѣднихъ.

Послѣ подобнаго удаленія область $E_1 - E_2$ будетъ состоять изъ оставшихся интерваловъ, если таковые имѣются, и изъ точекъ, не образующихъ сплошныхъ интерваловъ. Если $E_1 - E_2$ состоитъ только изъ сплошныхъ интерваловъ, общая длина которыхъ будетъ $s_1 - s_2$, равенство

$$M(E_1 - E_2) = s_1 - s_2 = M(E_1) - M(E_2) \tag{13}$$

является опять таки слѣдствіемъ опредѣленія.

Если же въ составъ $E_1 - E_2$ входятъ точки, не составляющія интерваловъ, *разность* $s_1 - s_2$ *принимается за опредѣленіе мѣры;* только здѣсь *Borel* выходитъ за предѣлы элементарныхъ соображеній и выставляетъ положеніе, неизбѣжность котораго едва ли можетъ быть оспариваема, если только мы хотимъ обобщить понятіе о длинѣ, съ тѣмъ чтобы распространить его на области, не состоящія изъ сплошныхъ интерваловъ.

Равенства (10) и (13) сохранятъ—очевидно—свою силу и для областей, являющихся суммами счетнаго ряда другихъ областей безъ общихъ точекъ, такъ какъ каждая сумма подходитъ подъ основное опредѣленіе мѣры.

Опредѣливъ мѣру s области E, мы находимъ—на основаніи (13)—

$$M(l - E) = l - s.$$

Отсюда слѣдуетъ вычисленіе мѣры для замкнутыхъ и совершенныхъ областей, такъ что тѣ и другія оказываются измѣримыми въ смыслѣ *Borel'я*.

Если область E счетна, то каждую ея точку можно разсматривать какъ составляющую область E_i, опредѣляемую единственнымъ интерваломъ длина котораго равна 0; такъ какъ въ этомъ случаѣ $M(E_i) = 0$, то — на основанiи (12) —

$$M(E) = M\sum_{1}^{\infty} E_i = 0,$$

т. е. мѣра счетной области всегда равна нолю; но не обратно: если мѣра равна нолю, это еще не значитъ, что область счетна. *Borel* ссылается при этомъ на примѣръ 30°. Отсюда слѣдуетъ далѣе, что если мѣра E не равна нолю, область не можетъ быть счетной. Итакъ

Borel называетъ измѣримыми всѣ тѣ области, которыя сами или ихъ дополнительныя области могутъ быть заданы счетнымъ рядомъ сплошныхъ интерваловъ.

Если всякая область можетъ быть задана такимъ образомъ, опредѣленiе мѣры *Borel'я* сдѣлается всеобъемлющимъ.

Schoenflies, говоря въ своемъ отчетѣ о *Borel'ѣ*, совершенно не уясняетъ хода его идей и приписываетъ ему между прочимъ то, чего *Borel* не говорилъ. *Schoenflies* пишетъ, что *Borel* „представляетъ себѣ каждую точку области окруженной произвольной окрестностью и имѣетъ дѣло съ заполненной ими частью пространства и съ предѣломъ ихъ".

Мы видѣли выше, что *Borel* ничего подобнаго не говорилъ, и что все это идетъ въ разрѣзъ съ самой идеей *Borel'я*.

Точно также по поводу теоремы (10) *Schoenflies* приписываетъ *Borel'ю* нѣчто не высказанное послѣднимъ: *Borel* предполагаетъ, что тѣ области, для которыхъ можетъ быть рѣчь о мѣрѣ, или ихъ дополнительныя области, заданы счетнымъ рядомъ *сплошныхъ* интерваловъ; *Schoenflies* же говоритъ: „въ случаѣ, если континуумъ C будетъ разбитъ *какъ нибудь* на двѣ области E_1 и E_2, то должно быть

$$M(C) = M(E_1) + M(E_2)\text{“};$$

это „какъ нибудь" противорѣчитъ идеѣ *Borel'я* [1]). Поэтому возраженiе *Schoenflies'а* противъ *Borel'я* кажется все построеннымъ на недоразумѣнiи.

33. Съ 1896 г. начинаются[2]) работы *Schoenflies'а*, котораго главнымъ образомъ интересуютъ двухмѣрныя области и — въ частности — дѣленiе плоскости съ помощью замкнутой кривой.

---

[1]) См. стр. 93.

[2]) Göttinger Nachrichten, S 79, 254.

Schoenflies является большимъ сторонникомъ арифметическаго построенія области съ помощью чиселъ, написанныхъ въ разныхъ системахъ, построенія, которымъ часто пользовался *Peano* [1]).

Онъ изображаетъ—напримѣръ—правильныя дроби написанными въ двойничной системѣ

$$x = 0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots . a_n \ldots . \qquad a_i = 0 \text{ или } 1,$$

устраняя при этомъ конечныя дроби, и читаетъ ихъ затѣмъ въ десятичной системѣ. Тогда область $\{x\}$ будетъ рѣдко разсѣянной совершенной областью, свободными интервалами которой будутъ

$$[0.(1),\ 1.0],\quad [0.0(1),\ 0.1],\quad [0.00(1),\ 0.01],\quad [0.10(1),\ 0.11],$$

$$[0.000(1),\ 0.001],\quad [0.010(1),\ 0.011],\quad [0.100(1),\ 0.101],\quad [0.110(1),\ 0{,}111],$$

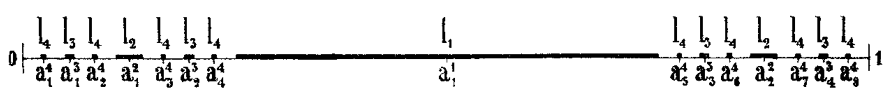
и т. д.

Сумма S этихъ интерваловъ оказывается

$$S = \frac{8}{9} + \frac{8}{90} + 2 \cdot \frac{8}{900} + 2^2 \cdot \frac{8}{9000} + \ldots . + 2^n \cdot \frac{8}{9.10^{n+1}} \ldots . = 1.$$

34. *Osgood* въ 1896 г. въ статьѣ [2]), посвященной вопросу о неравномѣрной сходимости и интегрированіи рядовъ, даетъ интересный примѣръ и нѣсколько важныхъ теоремъ относительно теоріи областей.

Онъ строитъ совершенную область слѣдующимъ образомъ, называя ее частнымъ случаемъ области *Harnack'a* [3]):



$$
\begin{aligned}
&l_1 && = \lambda - \frac{\lambda}{3}, \\
&l_1 + 2\, l_2 && = \lambda - \frac{\lambda}{4}, \\
&l_1 + 2\, l_2 + 2^2\, l_3 && = \lambda - \frac{\lambda}{5}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\
&l_1 + 2\, l_2 + 2^2\, l_3 + \ldots . + 2^{n-1}\, l_n && = \lambda - \frac{\lambda}{n+2},
\end{aligned}
$$

---

[1]) *Schoenflies* (Bericht, S. 64) указываетъ на статью *Peano* въ „Rivista di Matematica"; этой статьи въ рукахъ я не имѣлъ.

[2]) Göttinger Nachrichten; American Journal of Mathematics, 19.

[3]) M. A. 19, стр. 239.

гдѣ λ произвольное[4]) положительное число $0 < \lambda \leqq 1$; отсюда

$$\sum_{0}^{\infty} 2^i \, l_{i+1} = \lambda.$$

Затѣмъ *Osgood* разсматриваетъ счетный рядъ областей

(1) $$G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, \ldots$$

такихъ, что 1) всѣ G_i замкнуты и рѣдко разсѣяны, и 2) G_i входитъ въ G_{i+1}, и опредѣляетъ область

(2) $$Q = \lim_{i \ldots \infty} G_i,$$

каждая точка которой входитъ въ одну изъ G_i при достаточно большомъ i.

Онъ разсматриваетъ затѣмъ область, дополнительную Q по отношенiи къ основному интервалу l, и доказываетъ, что эта послѣдняя область несчетна въ произвольной части l. Отсюда слѣдуетъ, что

А. „Область Q не образуетъ континуума ни въ одной части интервала".

Пусть далѣе данъ рядъ

$$\eta_1 > \eta_2 > \eta_3 > \ldots, \quad \lim_{n \ldots \infty} \eta_n = 0.$$

Для замкнутой и рѣдко разсѣянной области G возьмемъ тѣ свободные интервалы

$$l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{1\,k_1}, \text{ длина которыхъ } > \eta_1,$$
$$l_{21}, l_{22}, \ldots, l_{2\,k_2}, \quad „ \quad „ \quad > \eta_2,$$

и т. д.; назовемъ

$$\sum_{1}^{k_1} l_{1i} = \lambda_1, \ \sum_{1}^{k_2} l_{2i} = \lambda_2, \ldots, \sum_{1}^{k_n} l_{ni} = \lambda_n, \ldots;$$

тогда

$$\sum_{1}^{\infty} \lambda_i = \lambda \overline{\gtrless} l.$$

---

[4]) Здѣсь $\lambda = \frac{3}{4}$, $l_1 = \frac{1}{2}$, $l_2 = \frac{1}{32}$, $l_3 = \frac{3}{320}$ и т. д

Выведя для области G такое число λ, *Osgood* опредѣляетъ затѣмъ *мѣру* (content) области

$$J = l - \lambda.$$

Отсюда слѣдуетъ, что точки G могутъ быть включены въ *конечное число* интерваловъ, сумма длинъ которыхъ превышаетъ $l - \lambda$ менѣе, чѣмъ на произвольно малую величину ε.

Наконецъ *Osgood* доказываетъ теорему относительно области (1) и (2)

$$J(Q) = \lim_{i \ldots \infty} J(G_i).$$

Въ 1900 году[1]) *Osgood*, возвращаясь къ теоремѣ A, доказываетъ ее, не предполагая G_i замкнутыми и разсматривая плоскую область, при чемъ ссылается при доказательствѣ на теорему A; но и безъ нея *Osgood* даетъ доказательство теоремы для линейной области, пользуясь процессомъ *Baire'a* [2]).

35. Въ 1897 г. *Burkhardt* устанавливаетъ[3]) для двухмѣрныхъ областей нѣкоторыя новыя опредѣленія; изъ нихъ для линейныхъ областей можетъ имѣть значеніе только слѣдующее:

Онъ называетъ область *flächenartig* (поверхностной), если въ ея составѣ находится по крайней мѣрѣ одна точка, нѣкоторая окрестность которой цѣликомъ принадлежитъ области; аналогично этому опредѣленію, при подобномъ же условіи можно сказать, что линейная область будетъ *linienartig* (линіеобразна).

Вообще линіеобразныя области можно опредѣлить какъ такія, для которыхъ существуютъ внутреннія точки.

Къ числу линіеобразныхъ областей относятся прежде всего тѣ области, которыя непосредственно *измѣримы* въ смыслѣ *Borel'я;* рѣдко разсѣянныя совершенныя и счетныя области къ этому числу не принадлежатъ.

36. Въ одной изъ интересныхъ работъ *Pringsheim'a* по теоріи двойного интеграла[4]) мы находимъ примѣръ арифметическаго построенія двухмѣрной области. Пусть x—правильная раціональная дробь; пусть n_x—число ея десятичныхъ или b'нарныхъ знаковъ, если x написано въ системѣ съ основаніемъ b. Пусть далѣе каждой раціональной дроби x отвѣчаютъ также дробныя раціональныя значенія y, у которыхъ число знаковъ n_y равно n_x.

---

[1]) M. A. 53.

[2]) Ниже см. стр. 55.

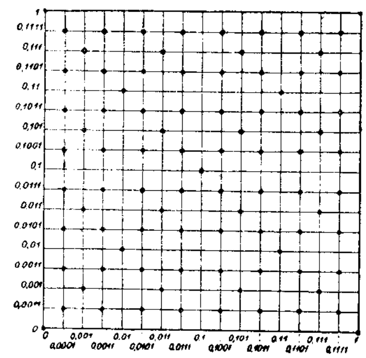
[3]) Functionentheoretische Vorlesungen, B. I, S. 67 etc.

[4]) Münchner Sitzungsberichte, 1899 S. 48.

Тогда для каждаго раціональнаго x существуетъ конечное число значеній y, т. е. на каждой вертикали съ раціональной абсциссой лежитъ конечное число точекъ области P. Очевидно—тоже самое справедливо и по отношенію къ каждой раціональной горизонтали[1]).

Посмотримъ теперь, какъ расположены точки области на прямой

$$y = a + x, \tag{1}$$



гдѣ a также раціональная дробь.

Изъ уравненія (1) для каждаго x съ $n_x > n_a$ возможно опредѣлить одну точку области, лежащую на прямой; значеніе x, для котораго $n_x = n_a$, можетъ опредѣлить соотвѣтственное значеніе y только въ томъ случаѣ, когда послѣдніе знаки x и a не дополняютъ друга друга до 0 или до b; наконецъ, если $n_x < n_a$, абсциссѣ x не отвѣчаетъ на (1) ни одной точки P.

Такимъ образомъ каждому раціональному x съ числомъ знаковъ, большимъ n_a отвѣчаетъ на прямой (1) точка P; слѣдовательно—точки P будутъ часто разсѣяны по прямой (1).

Придавая же a положительныя и отрицательныя дробныя значенія, мы получимъ часто разсѣянную область параллельныхъ прямыхъ. Отсюда слѣдуетъ, что точки P будутъ часто разсѣяны по квадрату (0, 1), не смотря на то, что на каждой раціональной горизонтали или вертикали ихъ можетъ лежать только конечное число, тогда какъ на на ирраціональныхъ прямыхъ точекъ области совершенно не имѣется.

Этотъ примѣръ представляетъ большой интересъ въ теоріи двойного и двукратныхъ интеграловъ; не менѣе важенъ онъ и въ теоріи областей, такъ какъ показываетъ, что, изучивъ детально линейныя области, мы еще очень далеки отъ того, чтобы выводить отсюда заключенія относительно строенія областей двухмѣрныхъ; для послѣднихъ требуется совершенно новыя излѣдованія, которыя и начались работами *Schoenflies'a*, и которыя должны быть основаны на нѣкоторыхъ новыхъ положеніяхъ.

37. Въ 1899 году *Baire* въ своемъ мемуарѣ относительно функцій дѣйствительной перемѣнной [2]) въ широкой степени пользуется теоріей

---

[1]) На чертежѣ $b = 2$, и точки взяты до четырехъ b'нарныхъ знаковъ включительно.

[2]) Annali di Matematica, (3) 3.

областей и вноситъ нѣкоторые новые результаты въ эту теорію. При этомъ, говоря о трансфинитныхъ числахъ *Cantor'a*, *Baire* замѣчаетъ [1]), что онъ не будетъ заниматься тѣми трудностями, которыя связаны съ отвлеченнымъ понятіемъ о трансфинитномъ числѣ, хотя онъ ими пользуется, какъ удобнымъ языкомъ для обозначенія вполнѣ опредѣленныхъ явленій.

Переходя къ построенію *рѣдко разсѣянной совершенной* области при помощи счетнаго ряда свободныхъ интерваловъ $\{ l_i \}$, *Baire* говоритъ: размѣстимъ интервалы въ нѣкоторый порядокъ, напримѣръ—по величинѣ. Выдѣливъ изъ основного интервала l интервалы

$$l_1,\ l_2,\ l_3,\ \ldots\ l_n,$$

мы получимъ $\{ \lambda_j \}$—конечный рядъ остальныхъ интерваловъ, на которыхъ расположены интервалы

$$l_{n+1},\quad l_{n+2},\ \ldots\ ; \tag{1}$$

на $\{ \lambda_j \}$ будутъ такимъ образомъ лежать всѣ точки совершенной области, при чемъ предѣлы границъ интерваловъ $\{ l_i \}$, не служащіе сами границами, окажутся внутренними точками $\{ \lambda_j \}$.

Пусть $\lambda^{(n)}$ наибольшій изъ интерваловъ $\{ \lambda_j \}$; при безконечномъ продолженіи процесса, изъ интерваловъ $\{ \lambda_j \}$ послѣдовательно выдѣляются интервалы (1); поэтому λ_j убываютъ. Не трудно видѣть, что должно быть

$$\lim_{n \ldots \infty} \lambda^{(n)} = 0.$$

Дѣйствительно: если бы это было не такъ, и было бы—слѣдовательно—

$$\lim \lambda^{(n)} = \lambda \neq 0,$$

изъ интервала λ мы не могли бы выдѣлить свободныхъ интерваловъ (1); тогда всѣ точки λ входили бы въ составъ P, что не возможно, такъ какъ P—по условію—рѣдко разсѣяна.

Обыкновенно теорія областей имѣетъ дѣло съ распредѣленіемъ точекъ по континууму; *Baire* беретъ произвольную совершенную область P и разсматриваетъ [2]) точечную область G по отношенію къ области P; это сводится въ сущности на то, что точки области G входятъ въ составъ P.

---

[1]) Стр. 36.

[2]) Стр. 46 и т. д.

Въ частности, предположивъ для рѣдко разсѣянной и замкнутой области P существованіе производной $P^{(\Omega)}$, онъ беретъ замкнутую область P_1 по отношенію къ $P^{(\Omega)}$; затѣмъ, допуская, что P_1 второго вида, такъ что $P_1^{(\Omega)} = 0$, онъ беретъ замкнутую область по отношенію къ $P_1^{(\Omega)}$ и называетъ ее P_2. Продолжая безконечно этотъ процессъ, аналогичный процессу *Cantor'a*, онъ получаетъ P_ω, $P_{2\omega}$ и т. д., и наконецъ область P_Ω, которая, аналогично съ $P^{(\Omega)}$, необходимо оказывается совершенной. Относительно появленія P_Ω *Baire* разсуждаетъ[1]) слѣдующимъ образомъ: для каждой точки области P или существуетъ послѣдняя P_α, въ которую она входитъ, или такой P_α нѣтъ; послѣднемъ случаѣ точки, обладающія этимъ свойствомъ, составляютъ P_Ω. Эти области играютъ существенную роль въ изслѣдованіи *Baire'a*.

Наконецъ *Baire* устанавливаетъ[2]) крайне важное и новое понятіе:

Пусть имѣется счетный рядъ рѣдко разсѣянныхъ областей

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots\ldots,\ P_n,\ \ldots\ldots; \tag{2}$$

возьмемъ область различныхъ точекъ, входящихъ въ (2),

$$P \equiv \mathfrak{M}\left\{P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots, P_n, \ldots\right\}; \tag{3}$$

легко убѣдиться, что во всякой части интервала существуютъ точки, не принадлежащія P. Дѣйствительно—въ произвольной части основного интервала l можетъ быть взятъ интервалъ (α_1, β_1) свободный отъ точекъ P_1, въ немъ—интервалъ (α_2, β_2), свободный отъ точекъ P_2; и т. д.; мы получимъ такимъ образомъ

$$lim\ \alpha_i = \alpha \overline{\gtrless} \beta = lim\ \beta_i\ .$$

Будетъ ли $\alpha \overline{\gtrless} \beta$, во всякомъ случаѣ имѣется по крайней мѣрѣ одна точка, которая навѣрное не входитъ ни въ одинъ P_i и—слѣдовательно—не принадлежитъ составу P.

Области строенія (3) *Baire* называетъ областями ***первой категоріи*** и всякія области, не обладающія этимъ строеніемъ,—областями ***второй категоріи.***

Область P можетъ быть совершенно иной природы, чѣмъ i; Рона можетъ быть—напримѣръ—часто разсѣяна по интервалу и не замкнута, въ то время какъ области P_i рѣдко разсѣяны и замкнуты; и т. д.[3])

---

[1]) Стр. 51.

[2]) Стр. 65.

[3]) См. глава II.

По поводу природы области P и ея дополнительной *Schoenflies* [1]) говоритъ, что она—„принципіальной важности"; эти области служатъ основаніемъ заключеній для многихъ теоремъ анализа и требуютъ поэтому ближайшаго изслѣдованія [2]). *Schoenflies* строитъ P еще подъ тѣмъ условіемъ, что сумма интерваловъ, занятыхъ точками каждой изъ P_i, произвольна мала [3]).

Такъ какъ области P_i не могутъ заполнить цѣликомъ всего интервала l, то континуумъ принадлежитъ къ числу областей второй категоріи.

Сумма конечнаго или счетнаго числа областей первой категоріи даетъ также область первой категоріи. Дѣйствительно: пусть имѣются ряды рѣдко разсѣянныхъ областей

$$\begin{array}{l} P_{11},\ P_{12},\ P_{13},\ldots, P_{1n},\ldots,\ P_1 = \mathfrak{M}\{P_{1i}\},\\ P_{21},\ P_{22},\ P_{23},\ldots, P_{2n},\ldots,\ P_2 = \mathfrak{M}\{P_{2i}\},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ P_{n1},\ P_{n2},\ P_{n3},\ldots, P_{nn},\ldots,\ P_n = \mathfrak{M}\{P_{ni}\},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

назовемъ

$$P = \mathfrak{M}(P_1,\ P_2,\ P_3,\ldots) = \mathfrak{M}\{P_{ij}\}.$$

Двойной рядъ рѣдко разсѣянныхъ областей P_{ij} можетъ быть легко преобразованъ въ простой рядъ, если мы положимъ—напримѣръ—

$$Q_1 = P_{11},\ Q_2 = P_{12} + P_{21},\ Q_3 = P_{13} + P_{22} + P_{31},\ldots, Q_n = \sum_{i=1}^{n} P_{i(n+1-i)};$$

тогда будетъ

$$P = \mathfrak{M}\{Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ldots Q_n,\ldots\}.$$

Такъ какъ каждая изъ областей Q_i состоитъ изъ конечнаго числа рѣдко разсѣянныхъ областей, P—на основаніи опредѣленія *Baire'a*—есть область первой категоріи.

Область Π, дополнительная для области первой категоріи, будетъ область второй категоріи. Дѣйствительно: допустимъ, что это не вѣрно.

---

[1]) Bericht, S. 107.

[2]) Этому изслѣдованію и посвящено много мѣста во II главѣ.

[3]) Bericht, S. 107.

Тогда П будетъ областью первой категоріи и — слѣдовательно — можетъ быть получена какъ $\mathop{\mathrm{M}}\limits_{1}^{\infty}\{ П_i \}$, при чемъ

$$\mathop{\mathrm{M}}\limits_{1}^{\infty}\{ P_i \} + \mathop{\mathrm{M}}\limits_{1}^{\infty}\{ П_i \} = \mathop{\mathrm{M}}\limits_{1}^{\infty}\{ P_i, П_i \} = \{ l \},$$

т. е. въ такомъ случаѣ область $\mathop{\mathrm{M}}\limits_{1}^{\infty}\{ P_i, П_i \}$ должна бы дать всѣ точки l, что противно опредѣленію области первой категоріи.

Если Р — область первой категоріи, П — ея дополнительная, и К — какая нибудь другая область второй категоріи, то П и К непремѣнно имѣютъ общія точки.

Дѣйствительно: если D (К, П) = 0, то К = D (Р), чего быть не можетъ, такъ какъ К — второй категоріи.

„Отсюда слѣдуетъ глубокая разница между областями обѣихъ категорій, основывающаяся ни на размѣрѣ, ни на разсѣянности по интервалу, такъ какъ области первой категоріи могутъ быть размѣра непрерывности и быть также часто разсѣяны, но — на нѣкоторой комбинаціи обоихъ этихъ понятій“ [1]).

Baire, имѣя въ виду интересы теоріи функцій, считаетъ еще необходимымъ[2]) создать болѣе общую теорію, заключающую въ себѣ, какъ частный случай, теорію точечныхъ областей n измѣреній; эти идеи автора стоятъ далеко отъ существа настоящей работы.

38. Въ статьѣ[3]), посвященной теоріи функцій, *de-Stefano* въ 1900 г. даетъ такое построеніе точечной области:

Раздѣливъ интервалъ l на n_1 равныхъ частей

$$l_1,\ l_2,\ l_3\ ,\ldots,\ l_{n_1}$$

и устранивъ одну изъ нихъ l_ν, авторъ дѣлитъ изъ остальныхъ $n_1 - 1$ каждую l_i на n_2 равныхъ частей

$$l_{i_1},\ l_{i_2},\ l_{i_3}\ \ldots,\ l_{in_2};$$

удаливъ снова на каждомъ изъ l_i одинъ изъ интерваловъ $l_{i\nu_i}$, *de-Stefano* предполагаетъ процессъ продолжающимся до безконечности. Получающаяся при этомъ область точекъ дѣленія будетъ рѣдко разсѣяна.

[1]) Стр. 66.
[2]) Comptes Rendus, 129, p. 946.
[3]) Giornale di Matematiche, 38, p. 178.

Дѣйствительно: возьмемъ на l какой нибудь интервалъ (α, β), при чемъ пусть

$$\beta - \alpha \overline{\gtrless} \frac{l}{n_1 n_2 \ldots . n_{m-2}};$$

на (α, β) лежитъ тогда по крайней мѣрѣ одна изъ $\frac{1}{n_1 n_2 n_3 \ldots . n_{m-1}}$ ’ыхъ частей всего интервала l, а ней—свободный интервалъ, равный

$$\frac{l}{n_1 n_2 n_3 \ldots . n_{m-1} n_m}.$$

Свободные интервалы послѣ перваго, второго, ..., n’аго дѣленія составятъ

$$\frac{1}{n_1}, \frac{n_1-1}{n_1 n_2}, \frac{(n_1-1)(n_2-1)}{n_1 n_2 n_3}, \ldots ., \frac{(n_1-1)(n_2-1)\ldots .(n_{m-1}-1)}{n_1 n_2 \ldots . n_{m-1} n_m}$$

часть отъ l, и сумма ихъ

$$\delta = \left\{\frac{1}{n_1} + \frac{n_1-1}{n_1} \cdot \frac{1}{n_2} + \frac{n_1-1}{n_1} \cdot \frac{n_2-1}{n_2} \cdot \frac{1}{n_3} + \ldots . + \frac{n_1-1}{n_1} \cdot \frac{n_2-1}{n_2} \ldots \frac{n_{m-1}-1}{n_{m-1}} \cdot \frac{1}{n_m} + \ldots\right\}; \quad (1)$$

сумма интерваловъ, на которыхъ расположены точки области, будетъ тогда

$$s = l - \delta = \frac{n_1-1}{n_1} \cdot \frac{n_2-1}{n_2} \ldots . \frac{n_{m-1}-1}{n_{m-1}} \ldots . l. \quad (2)$$

Смотря по выбору чиселъ n_i, можетъ быть

$$\frac{n_1-1}{n_1} \cdot \frac{n_2-1}{n_2} \ldots . \frac{n_{m-1}-1}{n_{m-1}} \ldots . = 0 \quad \text{или} \quad > 0;$$

первое имѣетъ мѣсто—напримѣръ—если всѣ n_i равны между собой, второе—если

$$n_1 = n > 1, \quad n_2 = n^2, \ldots ., \quad n_m = n^m, \ldots .; \quad (3)$$

первое ясно само собой, второе слѣдуетъ изъ того, что—въ силу (1) и при условіи (3)—

$$\delta < \left\{\frac{1}{n^1} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \ldots . + \frac{1}{n^m} + \ldots\right\} l = \frac{l}{n-1}.$$

Кромѣ построенія предыдущей области, *de-Stefano* даетъ еще теорему:

„Если область P **замкнута**, и для нея $s > 0$, то **часть** ея, **состоящая изъ двустороннихъ предѣльныхъ точекъ, несчетна**“.

39. Въ 1900 г. появился [1]) принадлежащій *Schoenflies'y* обширный обзоръ теоріи областей и ея приложеній; въ немъ авторъ задался цѣлью—такъ сказать—популяризировать эту теорію и привлечь къ ней болѣе широкое вниманіе математическаго міра; въ виду этого первыя двѣ главы [2]) носятъ, по признанію самого автора, характеръ учебника. Въ этомъ трудѣ авторъ признаетъ своими нѣкоторые результаты и пріемы доказательства и, что является самымъ важнымъ,—генетическое развитіе, которое онъ далъ своему обзору [3]).

Изъ всего этого мы считаемъ необходимымъ отмѣтить здѣсь то, что пополнило нашъ запасъ свѣдѣній относительно теоріи областей, и что съ новой точки зрѣнія освѣщаетъ уже извѣстные результаты.

Отмѣтимъ [4]) прежде всего теорему, обратную теоремѣ *Borel'я*:

„Пусть $P = \{x\}$—часто разсѣянная по основному интервалу l область, при чемъ каждая точка P—внутренняя для одного изъ интерваловъ области $\{l_i\}$; тогда невнутреннія точки интерваловъ $\{l_i\}$, если онѣ существуютъ, образуютъ рѣдко разсѣянную замкнутую область Q", потому что предѣльная точка Q не можетъ лежать внутри $\{l_i\}$.

Та-же теорема въ большей мѣрѣ относится и къ рѣдко-разсѣянной области P.

Отмѣтимъ далѣе новую формулировку теоремы *Cantor-Bendixson'a*[5]):

„Счетная область можетъ быть исчерпана счетнымъ рядомъ уединенныхъ областей; несчетная область, послѣ отдѣленія счетнаго ряда уединенныхъ областей, приводится къ совершенной области".

Какъ примѣръ постепеннаго исчерпыванія счетной области, *Schoenflies* выдѣляетъ [6]) изъ области раціональныхъ дробей область P_1 тѣхъ дробей, у которыхъ знаменателями служатъ степени 2; затѣмъ область P_2 съ знаменателями типа 3^m; и т. д.; по выдѣленіи счетнаго ряда областей $P_1, P_2, P_3, \ldots$, мы получимъ область дробей, знаменатели которыхъ—сложныя числа; изъ нихъ послѣдовательно выдѣляемъ области дробей съ знаменателями вида

$$(2.3)^n, \qquad (2.5)^n, \qquad (2.7)^n, \ldots;$$

затѣмъ съ знаменателями вида

$$(3.5)^n, \qquad (3.7)^n, \qquad (3.11)^n, \ldots;$$

и т. д.

---

[1]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, B. 8.

[2]) Собственно теоріи точечныхъ областей посвящена вторая глава.

[3]) Bericht S. III

[4]) ib. S. 109

[5]) ib. S. 69-70.

[6]) ib. S. 50.

Замкнутая область P задается счетнымъ рядомъ $D = \{\delta_i\}$ интерваловъ δ_i, не захватывающихъ другъ друга.

Если P_1—есть замкнутая область, входящая въ составъ P, то ея область интерваловъ $D_1 = \{\delta'_i\}$ получится изъ D или укороченіемъ всего основного интервала, или соединеніемъ смежныхъ или несмежныхъ интерваловъ δ_i въ одинъ; вообще говоря, переходъ отъ D къ D_1 будетъ сопровождаться изчезновеніемъ счетнаго ряда интерваловъ. Если P_2—также замкнутая составная часть P_1, и D_2—отвѣчающая ей область интерваловъ, то D_2 выводится изъ D_1 опять уменьшеніемъ числа свободныхъ интерваловъ; и т. д. Такъ какъ счетный рядъ интерваловъ D будетъ исчерпанъ счетнымъ рядомъ такихъ операцій, то мы можемъ[1]) сказать, что

„Замкнутая область можетъ быть разложена на счетный рядъ замкнутыхъ областей“.

Попытка *Schoenflies'a* строить свободные интервалы для двухмѣрной области[2]) находится въ связи съ его позднѣйшими работами, касающимися *анализа положенія*, и онѣ выходятъ за предѣлы настоящаго изслѣдованія; нужно замѣтить только, что, на нашъ взглядъ, бо̀льшихъ результатовъ въ интересахъ теоріи областей можно ожидать на томъ пути, на который вступилъ *Zoretti.*

Задаваясь вопросомъ[3]) о необходимыхъ и достаточныхъ условіяхъ, чтобы мѣра совершенной области была равна нолю, *Schoenflies* слѣдующимъ образомъ строитъ такую область P:

Пусть l—основной интервалъ, и $\{ l_i \}$—свободные отъ точекъ **P** интервалы, размѣщенные по величинѣ; назовемъ

$$l = t_1, \quad t_1 - l_1 = t_2, \quad t_2 - l_2 = t_3, \ldots, \quad t_{n-1} - l_{n-1} = t_n, \ldots,$$

гдѣ t_n—сумма интерваловъ, занятыхъ точками P и оставшихся по выдѣленіи $n-1$ первыхъ свободныхъ интерваловъ. Назвавъ еще ε_n отношеніе $l_n : t_n$, вслѣдствіе чего $l_n = \varepsilon_n t_n$, мы будемъ имѣть

$$t_1 = l, \quad t_2 = (1-\varepsilon_1)t_1, \quad t_3 = (1-\varepsilon_2)t_2, \ldots, \quad t_n = (1-\varepsilon_{n-1})t_{n-1}, \ldots,$$

откуда

$$t_n = (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\ldots(1-\varepsilon_{n-1})\,l,$$

и мѣра области P

$$t = \lim_{n \ldots \infty} t_n = l. \lim \prod_1^n (1-\varepsilon_i).$$

---

[1]) ib. S. 80.
[2]) ib. S. 81-85.
[3]) ib. S. 94.

Чтобы t было равно нолю, должно быть

$$\prod_{1}^{\infty}(1-\varepsilon_i)=0;$$

въ этомъ и заключается—по *Schoenflies'y*—искомое условіе.

Давая далѣе видоизмѣненіе подобнаго построенія, гдѣ входятъ отношенія каждаго l_n къ примыкающимъ къ нему интерваламъ, которые заняты точками P и входятъ въ составъ t_n, авторъ думаетъ[1]), что на этомъ пути желательна дальнѣйшая работа. Съ этими соображеніями находятся въ связи нѣкоторые результаты во второй главѣ настоящаго изслѣдованія.

Къ теоремамъ *Baire'a* относительно областей второй категоріи *Schoenflies* добавляетъ еще одну:

„Общія точки двухъ областей П и К второй категоріи даютъ также область второй категоріи“.

Дѣйствительно: пусть

$$P=\mathfrak{M}_{1}^{\infty}\{P_i\},\quad Q=\mathfrak{M}_{1}^{\infty}\{Q_i\}$$

—области первой категоріи, дополнительныя областямъ П и К; тогда для областей

$$\mathfrak{M}(P_1, Q_1),\qquad \mathfrak{M}(P_2, Q_2), \ldots\ldots,\qquad \mathfrak{M}(P_n, Q_n), \ldots\ldots$$

область $\mathfrak{M}_{1}^{\infty}\{P_i, Q_i\}\equiv L$ окажется первой, а ея дополнительная Λ—второй категоріи, область же Λ состоитъ изъ общихъ точекъ П и К.

По поводу областей P и П *Schoenflies* дѣлаетъ еще одно замѣчаніе: ни та, ни другая не будетъ непремѣнно замкнуты, и обѣ могутъ быть несчетны; авторъ ставитъ вопросъ[2]), будетъ ли всегда всякая часто разсѣянная, незамкнутая и несчетная область, областью первой или второй категоріи?

Говоря объ областяхъ *Baire'a*, отнесенныхъ къ непрерывному пространству и совершеннымъ областямъ, и о возможности установить по отношенію къ нимъ теоремы, аналогичныя теоремамъ, относящимся къ континууму, *Schoenflies* видитъ въ этомъ[3]) извѣстную равноцѣнность

---

[1]) ib. S. 95.

[2]) ib. S. 110

[3]) ib. S. 111.

всѣхъ совершенныхъ областей и находитъ, что здѣсь заключается одинъ изъ важнѣйшихъ результатовъ ученія объ областяхъ.

40. Развитіемъ идей *Borel'я* относительно мѣры области должны служить изслѣдованія *Lebesgue'a*, который говоритъ[1]), что онъ „пополнилъ и сдѣлалъ болѣе точными немного поспѣшныя указанія *Borel'я*"; мы увидимъ ниже, что это заявленіе не совсѣмъ согласно съ дѣйствительностью. *Lebesgue* приступаетъ къ понятію о мѣрѣ слѣдующимъ образомъ:

„Съ *каждой* ограниченною областью мы задаемся цѣлью связать нѣкоторое положительное число или ноль, которое мы называемъ ея мѣрой, и подчиняемъ слѣдующимъ условіямъ:

1) Существуютъ области, мѣра которыхъ не равна нолю;

2) Равныя области имѣютъ равныя мѣры;

3) Мѣра суммы конечнаго или счетнаго ряда областей безъ общихъ точекъ равна суммѣ ихъ мѣръ";

позже[2]), въ 1904 году, вмѣсто 1) введено другое условіе:

„1) Мѣра области всѣхъ точекъ интервала (0, 1) равна единицѣ". Области, для которыхъ обусловленная такимъ образомъ мѣра существуетъ, *Lebesgue* называетъ *измѣримыми*. Если подчиняющееся этимъ условіямъ опредѣленіе возможно[3]), область, состоящая изъ одной точки, имѣетъ мѣру 0, такъ какъ конечная область, состоящая изъ безконечнаго числа точекъ, должна имѣть конечную мѣру; мѣра открытаго или закрытаго отрѣзка не можетъ быть равна нолю, такъ какъ иначе будетъ тоже самое и со всякимъ конечнымъ отрѣзкомъ; за единицу можно взять мѣру области точекъ любого отрѣзка и именно—его длину.

Предпославъ эти замѣчанія, *Lebesgue* переходитъ къ самому опредѣленію мѣры, расходясь—на нашъ взглядъ—съ *Borel'емъ* въ самой идеѣ.

Предполагая область P—*какой угодно*, онъ включаетъ ее въ интервалы $\{l_i\}$, обозначивъ область *всѣхъ* точекъ, расположенныхъ на нихъ, черезъ $P_1 \equiv \{l_i\}$.

Такъ какъ точки P входятъ цѣликомъ въ составъ P_1, то

$$(1) \qquad m(P) \leqq m(P_1) = \sum_{1}^{\infty} l_\nu;$$

[1]) Annali di Matematica, (3) 7, p. 232.

[2]) Leçons sur l'intégration, p. 103.

[3]) Опредѣленія такого рода—*описательныя* (descriptives) въ отличіе отъ обычныхъ *конструктивныхъ*—см. Leçons, p. 99.

при всевозможныхъ выборахъ l_ν

$$\mathrm{m}\,(P) \overline{\overline{<}}\, \mathrm{u\,G\,r} \sum_{1}^{\infty} l_\nu;$$

эту нижнюю границу *Lebesgue* называетъ *внѣшней мѣрой области* P

$$\mathrm{m}_e\,(P) = \mathrm{u\,G\,r} \sum_{1}^{\infty} l_\nu,$$

такъ что

$$\mathrm{m}\,(P) < \mathrm{m}_e\,(P). \tag{2}$$

Опредѣливъ внѣшнюю мѣру также и для П—дополнительной области къ P по отношенію къ основному отрѣзку l, имѣемъ

$$\mathrm{m}\,(\Pi) \overline{\overline{<}}\, \mathrm{m}_e\,(\Pi); \tag{3}$$

такъ какъ—въ силу условія 3)—должно[1]) быть

$$\mathrm{M}\,(P) + \mathrm{M}\,(\Pi) = l. \tag{4}$$

то, благодаря (3),

$$\mathrm{m}\,(P) \overline{\overline{>}}\, l - \mathrm{m}_e\,(\Pi); \tag{5}$$

это число

$$l - \mathrm{m}_e\,(\Pi) = \mathrm{m}_i\,(P) \tag{6}$$

Lebesgue называетъ *внутренней мѣрой* P.

Изъ (6) и (5) слѣдуетъ, что

$$\mathrm{m}_i\,(P) + \mathrm{m}_e(\Pi) = l, \tag{7}$$

$$\mathrm{m}\,(P) \overline{\overline{>}}\, \mathrm{m}_i\,(P); \tag{8}$$

въ силу (2) и (8)—

$$\mathrm{m}_e\,(P) > \mathrm{m}\,(P) \overline{\overline{>}}\, \mathrm{m}_i\,(P), \tag{9}$$

если только возможна задача измѣренія въ смыслѣ *Lebesgue'a*.

Нужно замѣтить, что выводъ неравенствъ (9) не можетъ считаться безукоризненнымъ, такъ какъ онъ основывается на неравенствѣ (1), которое—на нашъ взглядъ—не достаточно мотивировано.

Области, для которыхъ

$$\mathrm{m}_e\,(P) = \mathrm{m}_i\,(P),$$

---

[1]) Leçons, p. 104.

авторъ называетъ *измѣримыми;* это опредѣленіе—въ силу (4)—равносильно такому:
„Область P измѣрима, если возможно включить ее и ея дополнительную П въ такіе интервалы, что сумма ихъ общихъ частей будетъ произвольно мала“.

Мы видимъ такимъ образомъ, что опредѣленіе *Lebesgue'a* есть опредѣленіе въ старомъ стилѣ, а никакъ не совпадаетъ по идеѣ съ опредѣленіемъ *Borel'я*, основанномъ на *сплошныхъ* интервалахъ, не зависимыхъ отъ какого бы то ни было произвола. Кромѣ того здѣсь должно быть еще доказано, что это опредѣленіе *Lebesgue'a* не противорѣчитъ тремъ указаннымъ выше условіямъ; что касается 1) и 2), это—ясно само собой; для 3) же нужно доказать что *сумма счетнаго ряда измѣримыхъ областей* $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ безъ общихъ точекъ *будетъ также измѣрима*, и что *мѣра суммы равна суммѣ мѣръ*[1]).

Пусть $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_\nu = \varepsilon$, гдѣ ε_ν —нѣкоторыя малыя положительныя величины; такъ какъ всѣ P_ν измѣримы, то возможно включить P_ν и ихъ дополнительныя области Π_ν въ такіе интервалы съ суммами α_ν и β_ν, что общая часть α_ν и β_ν будетъ равна ε_ν.

Если назвать α_2', β'_2 тѣ части α_2, β_2, которыя лежатъ на β_1; α'_3, β'_3—тѣ части α_3, β_3, которыя лежатъ на β'_2, и т. д., положивъ для симметріи $\alpha'_1 = \alpha_1$, то—очевидно—сумма интерваловъ, включающихъ точки всѣхъ P_ν будетъ равна

$$\alpha_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \ldots + \alpha'_\nu + \ldots = s;$$

отсюда

$$m_e(P) = \mathrm{u\,Gr}\; s.$$

Согласно опредѣленію мѣры

$$\sum_1^n [m(P_\nu) - \varepsilon_\nu] \overline{\overline{<}} \mathop{\mathrm{M}}_1^n \{\alpha_\nu\} = \sum_1^n \alpha'_\nu;$$

отсюда

$$\sum_1^\infty m(P_\nu) \overline{\overline{<}} s + \varepsilon. \tag{11}$$

Такъ какъ далѣе

$$\alpha_\nu - m(P_\nu) \overline{\overline{<}} D(\alpha_\nu, \beta_\nu) = \varepsilon_\nu,$$

то

$$\alpha_\nu' \overline{\overline{<}} \alpha_\nu \overline{\overline{<}} m(P_\nu) + \varepsilon_\nu;$$

---

[1]) Annali, p. 238-239; Leçons, p. 107.

поэтому

$$s = \sum_1^\infty \alpha_\nu' \overline{\overline{<}} \sum_1^\infty \mathrm{m}\,(\mathrm{P}_\nu) + \varepsilon; \tag{12}$$

изъ сопоставленія (11) и (12) имѣемъ

$$\sum_1^\infty \mathrm{m}\,(\mathrm{P}_\nu) - \varepsilon < s \overline{\overline{<}} \sum_1^\infty \mathrm{m}\,(\mathrm{P}_\nu) + \varepsilon; \tag{13}$$

отсюда

$$\mathrm{m}_e\,(\mathrm{P}) = \mathrm{uGr}\, s = \mathit{lim}\, s = \sum_1^\infty \mathrm{m}\,(\mathrm{P}_\nu). \tag{14}$$

Съ другой стороны область $\Pi = \overset{\infty}{\underset{1}{\mathrm{D}}}\,(\Pi_\nu)$, т. е. она входитъ въ составъ каждой изъ областей Π_ν; поэтому точки Π могутъ быть включены въ интервалы съ суммой $\beta_n' = \overset{n}{\underset{1}{\mathrm{D}}}\,(\beta_\nu)$, вслѣдствіе чего $\mathrm{m}_e\,(\Pi) \overline{\overline{<}} \beta_n'$.

Но

$$\sum_1^n \alpha_\nu' + \beta_n' < l + \sum_1^n \varepsilon_\nu\,,$$

слѣдовательно

$$\mathrm{m}_e\,(\Pi) \overline{\overline{<}} l - \sum_1^n \alpha_\nu' + \sum_1^n \varepsilon_\nu = l - s + \sum_1^n \varepsilon_\nu + \sum_{n+1}^\infty \alpha\,';$$

такъ какъ рядъ $\sum\limits_1^\infty \alpha_\nu'$ сходящійся, число n можетъ быть выбрано

такъ, что будетъ $\sum\limits_{n+1}^\infty \alpha_\nu' < \varepsilon$; тогда—въ силу (13)—

$$\mathrm{m}_e\,(\Pi) \overline{\overline{<}} l - s + 2\,\varepsilon \overline{\overline{<}} l - \sum_1^\infty \mathrm{m}\,(\mathrm{P}_\nu) + \varepsilon;$$

отсюда получается

$$\mathrm{m}_i\,(\mathrm{P}) = l - \mathrm{m}_e\,(\Pi) \overline{\overline{>}} \sum_1^\infty \mathrm{m}\,(\mathrm{P}_\nu) - \varepsilon,$$

и, въ связи съ (9) и (14),

$$\sum_1^\infty m(P_\nu) - \varepsilon \overline{<} m_i(P) \overline{<} m_e(P) = \sum_1^\infty m(P_\nu),$$

откуда слѣдуетъ, что

$$m_i(P) = m_e(P) = \sum_1^\infty m(P_\nu),$$

вслѣдствіе чего оказывается область P измѣримой, и

$$m(P) = \sum_1^\infty m(P_\nu).$$

Итакъ, допуская опредѣленіе мѣры *Lebesgue'a*, мы видимъ, что оно удовлетворяетъ предъявляемымъ къ нему условіямъ.

Если бы области P_ν имѣли общія точки, то также можно бы доказать, что $\mathfrak{M}_1^\infty \{P_\nu\}$ будетъ измѣрима, но только

$$m(P) \overline{<} \sum_1^\infty m(P_\nu).$$

Кромѣ нахожденія мѣры суммы приходится часто находить мѣру области P точекъ, входящихъ во всѣ области счетнаго ряда областей $\{P_i\}$.

Взявъ рядъ дополнительныхъ областей $\{\Pi_\nu\}$, мы видимъ, что общія точки всѣмъ P_ν не входятъ ни въ одну изъ Π_ν; если назвать наименьшее кратное всѣхъ Π_ν

$$\mathfrak{M}_1^\infty \{\Pi_\nu\} = \Pi,$$

то P будетъ дополнительной областью для Π. Если P_ν и—слѣдовательно—Π_ν измѣримы, то измѣрима Π, а также и P.

Затѣмъ, если P_1 обнимаетъ P_2,

$$P_1 - P_2 = \mathfrak{M}\{P_1, \Pi_2\};$$

поэтому, если P_1 и P_2 измѣримы, будетъ измѣрима также и $P_1 - P_2$.

Такимъ образомъ выполняя надъ измѣримой областью указанныя выше дѣйствія, мы будемъ всегда получать измѣримыя области; но отсюда еще не слѣдуетъ[1]), что задача измѣренія не возможна для такихъ областей, для которыхъ $m_i\,(P) \neq m_e\,(P)$.

Далѣе у *Lebesgue'a* представляется интереснымъ сопоставленіе областей, измѣримыхъ въ смыслѣ *Jordan'a* и въ его собственномъ смыслѣ.

Если мы сопоставимъ[2]) внѣшнее протяженіе E(P) области P съ внѣшней мѣрой *Lebesgue'a*, то окажется слѣдующее: въ первое входятъ цѣликомъ внутреннія и пограничныя точки области P; поэтому, не выходя изъ предѣловъ E(P), мы можемъ выбрать интервалы такимъ образомъ, что они будутъ включать всю область P; слѣдовательно

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{P}) \geqq \mathrm{m}_e\,(\mathrm{P}); \tag{15}$$

такъ какъ далѣе

$$\mathrm{e}\,(\mathrm{P}) = l - \mathrm{E}\,(\Pi), \qquad \mathrm{m}_i\,(\mathrm{P}) = l - \mathrm{m}_e(\Pi),$$

и, подобно (15),

$$\mathrm{E}\,(\Pi) \geqq \mathrm{m}_e\,(\Pi),$$

то

$$\mathrm{e}\,(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{m}_i\,(\mathrm{P});$$

итакъ

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{P}) \geqq \mathrm{m}_e\,(\mathrm{P}) \geqq \mathrm{m}_i\,(\mathrm{P}) \geqq \mathrm{e}\,(\mathrm{P}).$$

Отсюда слѣдуетъ, что, если область измѣрима по *Jordan'y*, т. е. если $\mathrm{E}\,(\mathrm{P}) = \mathrm{e}\,(\mathrm{P})$, то тѣмъ болѣе $\mathrm{m}_e\,(\mathrm{P}) = \mathrm{m}_i\,(\mathrm{P})$, т. е. она измѣрима и по *Lebesgue'y*, но не обратно.

Оцѣнивая значеніе пріема *Lebesgue'a*, мы должны будемъ признать, что фактически, расходясь съ *Borel'емъ* въ идеѣ, авторъ опредѣляетъ мѣру только для областей, измѣримыхъ по *Borel'ю;* нахожденіе же $\mathrm{m}_e\,(\mathrm{P})$ и $\mathrm{m}_i\,(\mathrm{P})$ представляетъ значительно большія затрудненія, чѣмъ опредѣленіе E(P) и e(P) *Jordan'a*, чего не отрицаетъ и самъ авторъ[3]).

Такимъ образомъ—на нашъ взглядъ—*Lebesgue* рѣшительно не подвинулъ вопроса о мѣрѣ области впередъ, сравнительно съ *Borel'емъ;* онъ вмѣстѣ съ тѣмъ не упростилъ и не сдѣлалъ болѣе точными легко доступныя и довольно простыя идеи *Borel'я.*

Свой пріемъ *Lebesgue* примѣняетъ далѣе къ плоскости, при чемъ беретъ треугольникъ за элементарный интервалъ.

---

[1]) Annali, p. 239.
[2]) См. 25°.
[3]) Annali p. 243; Leçons p. 109.

41. Въ 1903 г. *Borel*, говоря о построеніи интерваловъ типа 29°-30°, отмѣчаетъ существенную разницу двухъ пріемовъ, одного — когда дѣлится основной интервалъ на частные интервалы, при чемъ законъ дѣленія не обусловленъ той точечной областью, которая имѣется въ виду, и другого — когда исходнымъ пунктомъ берутся данныя точки, и строятся интервалы около этихъ точекъ. До какой степени различны оба эти пріема, видно изъ слѣдующаго примѣра: если отрѣзокъ $(0, 1)$ дѣлить на части, то, каковы бы онѣ не были, на нихъ будутъ лежать раціональныя точки, и сумма частныхъ интерваловъ съ такими точками равна единицѣ; если-же строить отрѣзки типа 30° около каждой раціональной точки $\frac{p_i}{q_i}$, то получится счетный рядъ интерваловъ, на которыхъ только и расположены такія точки; при этомъ сумма этихъ интерваловъ можетъ быть сдѣлана произвольно малой.

Занимаясь вопросомъ о приближенномъ представленіи ирраціональныхъ чиселъ посредствомъ раціональныхъ дробей, *Hurwitz* въ 1891 г.[1]) установилъ теорему: „къ каждому ирраціональному числу α можно подойти посредствомъ безконечнаго ряда несократимыхъ раціональныхъ дробей $\frac{p_i}{q_i}$ такимъ образомъ, что

$$\left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| < \frac{1}{q_i^2 \sqrt{5}} \text{ “.}$$

Borel, примыкая къ *Hurwitz*'у, называетъ[2]) интервалъ

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^2 \sqrt{5}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^2 \sqrt{5}} \right)$$

каноническимъ интерваломъ для дроби $\frac{p}{q}$. Теорему *Hurwitz*'а можно перефразировать такъ: „всякое ирраціональное число заключается внутри безконечнаго множества каноническихъ интерваловъ“. *Borel* добавляетъ къ этому, что тоже будетъ и со всякимъ соизмѣримымъ числомъ, если допустить, что дробь $\frac{p}{q}$ можетъ выражаться, при всякомъ цѣломъ n, въ видѣ $\frac{np}{nq}$, т. е. если допустить и сократимыя дроби.

Отсюда слѣдуетъ, что каждое число интервала (0,1) будетъ внутреннимъ для по крайней мѣрѣ одного каноническаго интервала, число которыхъ безконечно.

---

[1]) Mathematische Annalen, B. 39, S. 279.

[2]) Journal de Mathématiques, также—Comptes Rendus, t. 136, p. 1054.

А въ такомъ случаѣ — по теоремѣ *Borel'я* — можно безконечнымъ числомъ способовъ выбрать *конечное число* такихъ каноническихъ интерваловъ, что каждая точка (0,1) будетъ лежать внутри по крайней мѣрѣ одного изъ нихъ. Систему дробей, опредѣляющихъ такіе интервалы, *Borel* называетъ *полной системой.*

Затѣмъ *Borel* распространяетъ такъ свою теорему: „Если въ n'мѣрномъ пространствѣ имѣется Е — ограниченная замкнутая область, и P_1, P_2, $P_3, \ldots, P_n, \ldots$ — счетный рядъ такихъ областей, что каждая точка Е является внутренней точкой по крайней мѣрѣ одной изъ P_n, то среди P_n существуетъ *конечное* число областей съ тѣмъ же свойствомъ".

Доказывая это, авторъ пользуется своимъ вторымъ пріемомъ, основаннымъ на нумераціи интерваловъ.

42. Въ 1903 г. *Lindelöf* даетъ [1]) послѣдней теоремѣ *Borel'я* такое выраженіе:

А. „Если въ n'мѣрномъ пространствѣ около каждой точки ограниченной замкнутой области Р описанъ шаръ, то можно выбрать конечное число шаровъ такъ, что каждая точка Р будетъ внутренней точкой по крайней мѣрѣ одного шара".

Обобщеніемъ этой теоремы является теорема:

В. „Если область $P = \{x\}$ произвольна, и мы построимъ шары перемѣннаго радіуса ρ_x, то возможно избрать счетный рядъ шаровъ съ тѣмъ же свойствомъ".

Дѣйствительно: *a*) если область не простирается на безконечность, и всѣ ρ_x больше нѣкотораго ρ_0, ясно, что можетъ быть выбрано конечное число шаровъ; *b*) если область не простирается на безконечность, а ρ_x — могутъ быть произвольно малы, раздѣлимъ область Р на части $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$, гдѣ въ P_n входятъ всѣ точки, для которыхъ

$$\varepsilon_{\nu-1} \geqq \rho_x > \varepsilon_\nu ,$$

при чемъ ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots$ есть рядъ безконечно убывающихъ положительныхъ чиселъ; тогда каждая P_n подходитъ подъ условія *a*), а въ такомъ случаѣ вся область Р можетъ быть включена въ счетный рядъ шаровъ; наконецъ *c*) въ общемъ случаѣ Р можетъ быть раздѣлена на счетный рядъ конечныхъ частей.

Если точку x области Р можно окружить нѣкоторымъ шаромъ, внутри котораго будетъ только счетный рядъ другихъ точекъ Р, то *Lin-*

---

[1]) C. R., t. 137, p. 697.

delöf называетъ P—*областью счетной въ окрестности данной точки.* Это понятіе является развитіемъ понятія объ уединенныхъ и предѣльныхъ точкахъ: если внутри нѣкотораго шара около данной точки x_0 имѣется конечное число точекъ P, она будетъ *уединенная* точка; если число точекъ счетно, ее можно назвать *счетной предѣльной точкой*, въ противномъ случаѣ мы будемъ имѣть *несчетную предѣльную точку*; эти послѣднія точки *Lindelöf* называетъ *точками сгущенія.* Установивъ эти опредѣленія, авторъ даетъ теорему:

C. „Если область счетна въ окрестности каждой точки, то она счетна“.

Отсюда легко вывести *безъ помощи трансфинитныхъ чиселъ* теорему *Cantor-Bendixson'a*:

D. „Всякая несчетная замкнутая область P составляются изъ совершенной и счетной частей“.

Обозначимъ черезъ U область тѣхъ точекъ P, въ окрестности которыхъ P счетна, и S—область остальныхъ точекъ

$$P \equiv U + S.$$

На основаніи теоремы C область U счетна; что касается S, ясно, что каждая изъ ея точекъ—предѣльная точка, и каждая ея предѣльная точка ξ, будучи предѣльной точкой P, входитъ въ составъ P. такъ какъ P замкнута; слѣдовательно ξ, будучи несчетной предѣльной точкой, войдетъ въ составъ S; такимъ образомъ S будетъ совершенной.

Переходя къ *Cantor'ову* опредѣленію *мѣры областей* P, если она *замкнута и конечна*, *Lindelöf* описываетъ около точекъ x области P шары радіусовъ ρ_x; назовемъ объемъ занятой ими части пространства $\Pi(\rho_x, P)$; если всѣ радіусы равны ρ, то при $\rho > \rho_x$

$$\Pi(\rho, P) \overline{\overline{>}} \Pi(\rho_x, P); \tag{1}$$

согласно опредѣленію [1]) *Cantor'a*

$$\lim_{\rho \ldots 0} \Pi(\rho, P) = I(P)$$

есть *мѣра* (Inhalt) области; докажемъ, что

E. $$„\lim_{\rho \ldots 0} \Pi(\rho, P) = \lim_{\rho_x \ldots 0} \Pi(\rho_x, P).“$$

Дѣйствительно: взявъ $\Pi\left(\frac{\rho_x}{2}, P\right)$, мы можемъ—на основаніи A—избрать *конечное число* μ шаровъ съ радіусами $\frac{\rho_1}{2}, \frac{\rho_2}{2}, \ldots, \frac{\rho_\mu}{2}$, вклю-

---

[1]) См 17°.

чающихъ внутри себя всѣ точки P; назовемъ $\prod_{\mu}(\rho_x, P)$ сумму соотвѣтственныхъ μ шаровъ въ $\Pi(\rho_x, P)$; тогда

$$\Pi(\rho_x, P) \gtreqless \prod_{\mu}(\rho_x, P). \tag{2}$$

Назовемъ еще α наименьшій изъ радіусовъ $\frac{\rho_1}{2}, \frac{\rho_2}{2}, \ldots, \frac{\rho_\mu}{2}$; если мы опишемъ около всѣхъ точекъ области P шары радіуса α, то $\Pi(\alpha, P)$ обниметъ всѣ точки P. Съ другой стороны μ шаровъ радіуса $\frac{\rho_1}{2}, \frac{\rho_2}{2}, \ldots, \frac{\rho_\mu}{2}$ также заключаютъ внутри себя всѣ точки P; слѣдовательно μ шаровъ радіусовъ $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$, т. е. $\prod_{\mu}(\rho_x, P)$, не только обнимаютъ всѣ точки области P, но еще дѣлаютъ это такъ, что *разстояніе любой точки* P *отъ границы* $\prod_{\mu}(\rho_x, P)$ *будетъ не меньше* α. Поэтому всѣ шары α лежитъ внутри μ шаровъ ρ_x, т. е.

$$\prod_{\mu}(\rho_x, P) \gtreqless \Pi(\alpha, P); \tag{3}$$

изъ этого слѣдуетъ непосредственно, что $\Pi(\alpha, P)$ включается въ конечное, не больше μ, число отдѣльныхъ частей пространства; $\Pi(\rho_x, P)$ будетъ обладать тѣмъ же свойствомъ, если всѣ ρ_x меньше α.

На основаніи (1), (2) и (3)—при $\rho > \rho_x$

$$\Pi(\rho, P) \gtreqless \Pi(\rho_x, P) \gtreqless \prod_{\mu}(\rho_x, P) \gtreqless \Pi(\alpha, P), \tag{4}$$

откуда вытекаетъ теорема E. Изъ E слѣдуютъ далѣе теоремы *Cantor'a*:

F. „Мѣра замкнутой счетной области равна нолю",

такъ какъ ρ_x могутъ быть выбраны такъ, что $\Pi(\rho_x, P)$ будетъ произвольно мала.

G. „Если $P = U + S$, гдѣ U счетна, а P и S замкнуты, то $I(P) = I(S)$", такъ какъ $I(U) = 0$; затѣмъ—на основаніи D и G—

H. „Мѣра замкнутой области равна мѣрѣ ея совершенной части".

Мы видимъ, что маленькое сообщеніе *Lindelöf'a* крайне богато по содержанію, такъ какъ оно касается самыхъ важныхъ теоремъ, относящихся къ теоріи областей.

43. Интересно будетъ отмѣтить здѣсь отзывъ *Borel'я* о значеніи трудовъ *Cantor'a* [1]):

„Когда *Cantor*, лѣтъ двадцать тому назадъ, сообщилъ свои мысли о счетѣ за безконечность, ихъ приняли не безъ недовѣрія. Но ана-

---

[1]) Revue Philosophique, 1899.

листы, удивленные красотой его заключеній, не остановились передъ нѣсколько парадоксальной ихъ формой; а затѣмъ появились приложенія этой теоріи; ею заинтересовались и тѣ, кого интересуютъ границы математики, и идеи *Cantor'a* сдѣлались классическими для математиковъ и философовъ".

Нѣсколько позже въ 1903 г. *Borel* говоритъ [1]), что *Cantor* оказалъ значительное вліяніе на развитіе математики въ послѣдней четверти XIX вѣка, и это вліяніе сохранится, хотя бы нѣкоторыя формы, въ которыя вылилась мысль *Cantor'a*, пріобрѣли только историческій интересъ. Подъ этими формами *Borel* понимаетъ главнымъ образомъ трансфинитныя числа, философское значеніе которыхъ онъ не оспариваетъ.

Всѣ теоремы, которыя были доказаны *Cantor'омъ* и другими, въ томъ числѣ и самимъ *Borel'емъ*, при помощи трансфинитныхъ чиселъ, онъ признаетъ желательнымъ доказать инымъ путемъ, и думаетъ, что это скоро осуществится.

Въ этомъ отношеніи и интересна предыдущая статья *Lindelöf'a* съ доказательствомъ теоремы *Cantor-Bendixon'a*.

44. Съ 1902 г. начинаетъ появляться рядъ интересныхъ статей *Young'a*, посвященныхъ какъ разъ тому-же вопросу, какъ и настоящее изслѣдованіе, т. е. вопросу о строеніи и мѣрѣ линейныхъ областей [2]).

Въ первой работѣ [3]) авторъ даетъ, въ связи съ изслѣдованіемъ *Broden'a*, такое построеніе рѣдко разсѣянной сгущенной области:

Отрѣзокъ l_1 дѣлится точкой x_1 на двѣ такія части l_{01} и l_{11}, что

$$\frac{l_{01}}{l_{11}} = \frac{1+j_1}{1-j_1}, \qquad j_1 = 1 - \frac{1}{8 \cdot 1^2};$$

тогда

$$(1) \qquad l_{01} = \left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 1^2}\right) l_1, \qquad l_{11} = \frac{1}{4^2} l_1.$$

Каждый изъ отрѣзковъ (1) дѣлится точками x_{01} и x_{11} на два l_{001}, l_{011} и l_{101}, l_{111} при условіи, что

$$\frac{l_{001}}{l_{011}} = \frac{l_{101}}{l_{111}} = \frac{1+j_2}{1-j_2}, \qquad j_2 = -\left(1 - \frac{1}{8 \cdot 2^2}\right);$$

---

[1]) C. R., t. 137, p. 903.

[2]) Считаю долгомъ отмѣтить здѣсь, что вся вторая глава настоящей работы была написана и 1° - 43° первой главы сданы въ типографію и частью напечатаны раньше, чѣмъ я познакомился съ статьями *Young'a*.

[3]) Proceedings of London Mathematical Society, 34, p. 285.

въ такомъ случаѣ

$$l_{001} = \frac{1}{4^2 \,.\, 2^2}\, l_{01}, \quad l_{011} = \left(1 - \frac{1}{4^2 \,.\, 2^2}\right) l_{01} = \left(1 - \frac{1}{4^2 \,.\, 1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2 \,.\, 2^2}\right) l_1,$$

$$l_{1\;1} = \frac{1}{4^2 \,.\, 2^2}\, l_{11}, \quad l_{111} = \left(1 - \frac{1}{4^2 \,.\, 2^2}\right) l_{11} = \left(1 - \frac{1}{4^2 \,.\, 1^2}\right) \cdot \frac{1}{4^2}\, l_1 \tag{2}$$

Каждый изъ четырехъ отрѣзковъ (2) дѣлимъ снова на двѣ части въ отношенiи $\frac{1+j_3}{1-j_3}$ при $j_3 = +\left(1 - \frac{1}{8\,.\,3^2}\right)$; и т. д., при n'омъ дѣленiи

$$j_n = \left(-1\right)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{8\,n^2}\right), \tag{3}$$

при чемъ наибольшiй интервалъ n'го дѣленiя будетъ имѣть длину

$$\left(1 - \frac{1}{4^2 .\, 1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2 .\, 2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{4^2 .\, n^2}\right) l_1.$$

При безконечно возростающемъ n этотъ интервалъ имѣетъ предѣломъ $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\, l_1$, и его границы будутъ предѣльными точками ряда $\{x\}$. Подобные же свободные интервалы мы получимъ на каждомъ изъ интерваловъ любого дѣленiя, т. е. между каждыми двумя точками дѣленiя.

Взявъ, вмѣсто (3), другой законъ дѣленiя

$$j_n = \left(-1\right)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{p^2 n^2}\right),$$

гдѣ p—любое цѣлое число, мы получили бы различныя области указаннаго выше типа.

Очевидно, что область такого рода $\{x\}$, каждая точка которой есть двухсторонняя предѣльная точка, будетъ заключаться въ числѣ внѣшнихъ точекъ совершенной области, опредѣляемой предыдущими интервалами [1]).

Young еще отмѣчаетъ [2]) одинъ недосмотръ *Schoenflies*'*a*, который говоритъ [3]), что первый примѣръ рѣдко разсѣянной совершенной области далъ *Smith*, тогда какъ совершенной будетъ только производныя области *Smith*'*a* [4]); но вслѣдъ за этимъ *Young* самъ приписываетъ *Smith*'*y* идею и опредѣленiе совершенной области.

---

[1]) Во II главѣ мы часто встрѣчаемся съ подобными областями.

[2]) ib. p. 286.

[3]) Bericht, S. 101.

[4]) См. В 5°.

45. *Young* находитъ [1]), что „изученіе точечныхъ областей ведетъ къ изслѣдованію ряда интерваловъ, и въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ болѣе естественно начинать съ послѣднихъ, чѣмъ съ первыхъ; это особенно справедливо въ вопросѣ о *мѣрѣ* области“; съ такимъ заявленіемъ нельзя не согласиться, и только съ такой точки зрѣнія возможно установить всеобъемлющее и строго обусловленое строеніемъ области понятіе о мѣрѣ.

Устанавливая основныя теоремы относительно ряда интерваловъ, авторъ имѣетъ въ виду примѣнить ихъ къ изслѣдованію замкнутыхъ областей. Развитіе его мысли, по его собственному заявленію, идетъ здѣсь параллельно съ *Borel'емъ*, но исходитъ изъ другихъ соображеній. Придавая теоремѣ *Borel'я* второстепенное значеніе, *Young* замѣчаетъ, что ея второе „доказательство очень изящно по идеѣ, но едва-ли въ состояніи уяснить читателю ея raison d'être.“

Для ряда интерваловъ *Young* различаетъ *внѣшнія и полувнѣшнія* (external and semiexternal) точки, т. е. двустороннія и одностороннія предѣльныя точки области границъ, которыя играютъ значительную роль и въ нашемъ изложеніи [2]); область полувнѣшнихъ точекъ должна быть счетна.

Взявъ рядъ изъ конечнаго числа m интерваловъ $\{l_i\}$, *Young,* подобно *Borel'ю*, называетъ ихъ *мѣрой* (content)—сумму

$$l = \sum_1^m l_i. \tag{4}$$

Если l меньше длины основного интервала L, то кромѣ интерваловъ l_i имѣется рядъ дополнительныхъ интерваловъ $\{\lambda_i\}$, при чемъ

$$l + \lambda = \mathrm{L},$$

гдѣ

$$\lambda = \sum \lambda_i \, . \tag{5}$$

Если $l = \mathrm{L}$, то *a*) дополнительныхъ интерваловъ нѣтъ; *b*) нѣтъ внѣшнихъ точекъ, и *c*) каждая граница, кромѣ границъ основного интервала, раздѣляетъ другъ отъ друга два смежныхъ интервала.

Если число незахватывающихъ другъ друга интерваловъ $\{l_i\}$ безконечно, то рядъ ихъ будетъ, какъ извѣстно, счетенъ; въ такомъ

---

[1]) Proceedings, 35, p. 245.

[2]) См.—глава II.

случаѣ *Young*, въ согласіи съ *Borel'емъ*, называетъ

$$\sum_{1}^{\infty} l_i = \lim_{n.. \infty} \sum_{1}^{n} l_i = l \tag{6}$$

мѣрой ряда интерваловъ; удобнѣе всего размѣщать $\{l_i\}$ въ рядъ по ихъ величинѣ, и это мы будемъ всегда впередъ предполагать.

Изъ (6) при размѣщеніи l_i по величинѣ, слѣдуетъ, что—во первыхъ—для заданнаго σ можетъ быть найдено число m_1 такъ, что

$$l - \sigma < \sum_{1}^{n} l_i < l \quad \text{при} \quad n > m_1 \tag{7}$$

или

$$0 < l - \sum_{1}^{n} l_i < \sigma \quad \text{при} \quad n > m_1, \tag{8}$$

и—во вторыхъ—для заданнаго $\varepsilon < \sigma$

$$l_n < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > m_2. \tag{9}$$

Если m--наибольшее изъ чиселъ m_1, m_2, то одновременно

$$0 < l - \sum_{1}^{n} l_i < \sigma, \quad l_n < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > m. \tag{10}$$

Изъ (10) и (6) имѣемъ

$$0 < \sum_{n+1}^{\infty} l_i < \sigma, \quad l_i < \varepsilon, \tag{11}$$

т. е. сумма тѣхъ интерваловъ, которые меньше ε, будетъ сама меньше σ.

Если интервалъ L разбивается на рядъ другихъ интерваловъ $\{L_j\}$ такимъ образомъ, что каждый l_i лежатъ внутри одного изъ L_j, то

$$l = \sum l^{(j)},$$

гдѣ $l^{(j)}$ мѣра, относящаяся къ интервалу L_j.

При конечномъ числѣ L_j это ясно само собой; поэтому нужно предположить рядъ $\{L_j\}$ безконечнымъ. Опредѣлимъ m_1 согласно условію (8) и, расположивъ L_j по величинѣ, опредѣлимъ μ, чтобы было

$$L_j < l_{m_1+1} \quad \text{при} \quad j > \mu;$$

тогда интервалы $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_{m_1}, l_{m_1+1}$ могутъ располагаться только на интервалахъ $L_1, L_2, \ldots, L_\mu$; при этомъ

$$\sum_1^{\mu} l^{(j)} \geqq \sum_1^{m_1+1} l_i,$$

вслѣдствіе чего—въ силу (8)—

$$l - \sum_1^{\mu} l^{(j)} \leqq l - \sum_1^{m_1+1} l_i < \sigma;$$

отсюда вытекаетъ, что

$$l = \lim_{\mu \ldots \infty} \sum_1^{\mu} l^{(j)} = \sum_1^{\infty} l^{(j)}.$$

46. Если число интерваловъ безконечно, то, даже при $l < L$, не всегда существуютъ дополнительные интервалы; нарушаются также указанныя выше свойства b) и c).

Теорема I. Если число интерваловъ безконечно, существуетъ по крайней мѣрѣ одна предѣльная точка [1]).

Изъ этой теоремы *Young* выводитъ, какъ слѣдствіе, теорему *Borel'я*: размѣстивъ интервалы, внутри которыхъ лежатъ всѣ точки даннаго отрѣзка L, въ какой нибудь порядокъ, напримѣръ—по величинѣ, будемъ послѣдовательно удерживать только тѣ интервалы или части тѣхъ интерваловъ, которые выходятъ за границы предыдущихъ; каждая точка L окажется при этомъ или внутренней точкой одного какого нибудь интервала, можетъ быть—укороченнаго, или же границей двухъ смежныхъ интерваловъ; а въ такомъ случаѣ, вслѣдствіе непремѣннаго отсутствія предѣльныхъ точекъ, число укороченныхъ интерваловъ, а—слѣдовательно—и интерваловъ *Borel'я*, должно быть конечно.

По поводу этого простого повидимому доказательства нужно замѣтить, что оно едва ли дастъ большее проникновеніе въ смыслъ теоремы *Borel'я*, чѣмъ второе доказательство *Borel'я*.

---

[1]) Proceedings, 35, p. 351; ср. ниже—II гл.

Теорема II. Если для ряда незахватывающихъ другъ друга интерваловъ нѣтъ дополнительныхъ интерваловъ, каждая внѣшняя точка будетъ двустороннимъ предѣломъ.

Эта теорема ясна сама собой.

Среди примѣровъ, приводимыхъ авторомъ, отмѣтимъ одинъ: на отрѣзкѣ (0,1) беремъ въ тернарной системѣ интервалъ (0.(1), 1) и затѣмъ такіе интервалы, у которыхъ правыя границы будутъ конечныя дроби, выражающіяся только цыфрами 0 и 1, а лѣвыя границы получатся изъ правыхъ замѣной послѣдней 1 черезъ 0 (1); получающіеся при этомъ уединенные интервалы, съ суммой равной 1, опредѣлятъ совершенную область, внѣшнія точки которой выразятся всѣми остальными безконечными дробями безъ цыфры 2.

Этотъ примѣръ—видоизмѣненія примѣра B 5° *Smith'a*, при чемъ каждый интервалъ *Young'a* замѣщается счетнымъ рядомъ смежныхъ интерваловъ *Smith'a*, и лѣвыя границы интерваловъ *Young'a* оказываются внѣшними точками интерваловъ *Smith'a*.

Видоизмѣняя другой примѣръ C 5° *Smith'a*, авторъ строитъ совершенную область, для которой $l < 1$.

Изслѣдованіе мѣры ряда интерваловъ *Young* приводитъ къ мѣрѣ уединенныхъ интерваловъ, опредѣляющихъ совершенную область; въ этихъ видахъ авторъ строитъ *типичный тернарный рядъ интерваловъ*, дѣля (0, 1) на три части, взявъ $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ за первый интервалъ и примѣняя затѣмъ къ двумъ крайнимъ тотъ-же процессъ дѣленія.

Тогда всякій рядъ уединенныхъ интерваловъ можетъ быть взаимнооднозначно отнесенъ къ типичному ряду, и всякое свойство невнутреннихъ точекъ перваго приводится къ соотвѣтственному свойству точекъ типичнаго ряда.

Имѣя какой-нибудь рядъ не захватывающихъ другъ друга интервалы, мы можемъ всѣ смежные интервалы соединить въ одинъ, при чемъ предѣльная точка границъ смежныхъ интерваловъ окажется границей новаго интервала, или, если эта точка будетъ общей предѣльной точкой двухъ рядовъ смежныхъ интерваловъ, она окажется внутренней точкой интервала, обнимающихъ оба этихъ ряда.

Продолжая такой процессъ, мы придемъ или къ ряду уединенныхъ интерваловъ, или соединимъ послѣ счетнаго ряда операцій всѣ интервалы въ одинъ основной интервалъ; при этомъ въ каждый данный моментъ сумма измѣняемыхъ и сумма измѣненныхъ интерваловъ останется одна и та-же; что-же касается точекъ, изчезающихъ во время процесса соединенія интерваловъ, то ихъ можетъ быть не больше счетнаго числа. Окончательный рядъ интерваловъ, получающійся послѣ такого процесса, *Young* называетъ *послѣднимъ рядомъ* (ultimate set). Очевидно, что весь этотъ процессъ *Young'a* есть ничто иное, какъ геометрическая интерпретація теоремы *Cantor-Bendixson'a*, примѣненной къ замкнутой области P невнутреннихъ точекъ, и что „послѣдній рядъ“ это—рядъ свободныхъ интерваловъ совершенной области $P^{(\Omega)}$.

47. Двумъ типамъ областей, отмѣченныхъ еще *Lebesgue'омъ* [1]), посвящаетъ *Young* свои наиболѣе интересныя изслѣдованія. Прежде чѣмъ переходить къ нимъ, приведемъ одну лемму [2]):

A. „Пусть для каждаго значенія n имѣется рядъ интерваловъ $l_{n1}, l_{n2}, \ldots, l_{nk_n}$, не покрывающихъ другъ друга и съ возростаніемъ n располагающихся на интервалахъ предыдущихъ системъ, при чемъ при каждомъ значеніи n

$$s_n = \sum_{i=1}^{k_n} l_{ni} > \lambda;$$

тогда существуютъ точки, *лежащія внутри всѣхъ интерваловъ* l_{ni}“.

Если число k_n не можетъ возрастать съ увеличеніемъ n, теорема ясна сама собой, такъ какъ тогда по крайней мѣрѣ одинъ изъ l_{ni} при всякомъ n долженъ быть отличенъ отъ ноля; поэтому мы предполагаемъ, что k_n возрастаетъ вмѣстѣ съ n.

Отсѣкая отъ каждаго интервала l_{ni} на каждой изъ границъ часть $\frac{\mu}{2^{n+1}} \cdot \frac{l_{ni}}{s_n}$, гдѣ μ—нѣкоторое малое число, мы получимъ сумму отсѣченныхъ частей не больше $\frac{\mu}{2^n}$, и сумму усѣченныхъ интерваловъ l'_{ni} не меньше $s_n - \frac{\mu}{2^n}$.

Возьмемъ усѣченные интервалы l'_{1i}; интервалы l_{2i}, и ихъ части, которыя помѣщаются на l'_{1i}, имѣютъ сумму не меньшую $s_2 - \frac{\mu}{2}$, тогда какъ

$$\sum \quad i \geqq s_2 - \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2^2}.$$

[1]) См. Annali di Matematica, (3) 7, p. 239; Leçons, p. 108.

[2]) Proceedings, 35, p. 280.

Интервалы l_{3i} и ихъ части, располагающіяся на l'_{2i}, имѣютъ сумму не меньшую $s_3 - \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2^2}$, и

$$\sum l'_{3i} \geqq s_3 - \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2^2} - \frac{\mu}{2^3};$$

и т. д.; вообще

$$\sum l'_{ni} \geqq s_n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\mu > \lambda - \mu .$$

Взявъ цѣпь послѣдовательныхъ интерваловъ, расположенныхъ одинъ на другомъ, мы опредѣлимъ, при безконечно возрастающемъ n, по крайней мѣрѣ одну точку x какъ предѣлъ границъ интерваловъ l'_{ni}; эта точка можетъ быть одной изъ границъ или же внутренней точкой всѣхъ l'_{ni}; въ томъ и другомъ случаѣ она—внутренняя точка интерваловъ l_{ni}; такимъ образомъ существованіе внутреннихъ точекъ является доказаннымъ.

Первымъ типомъ является область

$$G = \lim_{n \ldots \infty} G_n , \tag{12}$$

гдѣ 1) G_n — замкнутыя и рѣдко разсѣянныя области, и 2) каждая G_n входитъ, какъ часть, въ G_{n+1}; такимъ образомъ G характеризуется тѣмъ обстоятельствомъ, что a) для каждаго значенія n всѣ точки G_n являются точками G, и b) въ G нѣтъ ни одной точки, которая не принадлежала бы цѣлому ряду областей G_n для n большаго нѣкотораго m. *Мы предполагаемъ* сверхъ того G *замкнутой и рѣдко разсѣянной*, предположеніе-же частаго разсѣянія представляетъ меньше интереса.

Построимъ свободные интервалы области G_1; эти интервалы, въ силу замкнутости G_1, должны быть открытыми. Такъ какъ G_2 обнимаетъ G_1, то точки $G_2 — G_1$ располагаются на свободныхъ интервалахъ G_1; точно также и вообще точки $G_{n+1} \dot{-} G_n$ лежатъ на открытыхъ интервалахъ области G_n. Отсюда ясно, что

B. „Всякій свободный интервалъ области G или G_n *восходитъ* къ нѣкоторому свободному интервалу каждой изъ областей G_ν при $\nu < n$, или совпадая съ нимъ или составляя его часть; поэтому сумма интерваловъ G или G_n не можетъ быть больше суммы тѣхъ интерваловъ, къ которымъ они восходятъ“.

C. „Для малаго положительнаго числа ε можетъ быть опредѣлено цѣлое число m такъ, что въ G и G_m интервалы, равные или большіе ε, будутъ тожественны".

Пусть $l^{(o)} = (x', x'')$ — свободный интервалъ G; тогда, въ силу замкнутости G, можетъ быть указана первая такая область G_{m_1}, что обѣ точки x', x'' принадлежатъ ей; отсюда вытекаетъ, что (x', x'') окажется свободнымъ интерваломъ для всѣхъ G_n при $n \geqq m_1$.

Число интерваловъ $l_i^{(o)}$, большихъ ε, конечно; для каждаго изъ нихъ $l_i^{(o)}$ можно, согласно предыдущему, опредѣлить число $m_1^{(o)}$. Если $m' > m_1^{(i)}$, то всѣ интервалы G, большіе ε, войдутъ неизмѣнно въ каждую изъ G_n при $n \geqq m'$.

Но въ каждую изъ этихъ G_n могутъ входить также и другіе интервалы, большіе ε, которые въ дальнѣйшемъ процессѣ подверглись раздробленію. Число такихъ интерваловъ опять таки должно быть конечно; пусть оно будетъ k_n. Такъ какъ на каждомъ изъ нихъ не можетъ быть интерваловъ G, большихъ ε, то можно указать для каждаго интервала конечное число ρ_{k_n} точекъ G, послѣдовательно отстоящихъ другъ отъ друга меньше чѣмъ на ε; такъ какъ общее число точекъ $\sum_1^{k_n} \rho_{k_n}$ должно быть конечнымъ, то мы можемъ найти первую область $G_{m''}$, въ которую всѣ онѣ входятъ.

Если m есть большее изъ чиселъ m' и m'', то G_n при $n > m$ будетъ удовлетворять условіямъ теоремы. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что

D. „При $n \geqq m$ всѣ необщіе для G_n и G интервалы будутъ меньше ε".

Суммы такихъ интерваловъ, меньшихъ ε, мы будемъ обозначать впередъ соотвѣтственно черезъ $R_n(\varepsilon)$ и $R(\varepsilon)$; очевидно, что — въ силу (6) — всегда

$$\lim_{\varepsilon \ldots 0} R(\varepsilon) = 0. \tag{13}$$

E. „Обратно: для всякой данной G_n можетъ быть опредѣлено такое единственное число ε_n, что всѣ интервалы G_n, равные или большіе ε_n, будутъ входить цѣликомъ въ G".

За ε_n мы можемъ взять длину наименьшаго изъ общихъ интерваловъ G и G_n, если онъ — единственный, или, если ихъ нѣсколько, но всѣ они входятъ цѣликомъ въ G; если же въ G встрѣчаются не всѣ такіе интервалы, то за ε_n мы должны взять длину непосредственно большаго интервала; въ частныхъ случаяхъ — для первыхъ областей G_1, G_2, G_3,..... число ε_n можно приравнять l, длинѣ всего основного интервала, когда въ началѣ ни одинъ интервалъ G_1, G_2, G_3,.... не ускользаетъ отъ раздробленія. Но въ виду сдѣланнаго въ началѣ предположенія, что G рѣдко разсѣяна, появленіе общихъ интерваловъ, въ согласіи съ теоремами B и C, дѣлается обязательнымъ.

Отсюда, въ связи съ теоремой D, для каждой области G_n имѣется вполнѣ опредѣленное зависящее отъ ε_n число $R_n(\varepsilon_n)$, которое есть *сумма интерваловъ* G_n *меньшихъ* ε_n *тогда какъ всѣ интервалы* G_n, *равные или большіе* ε_n, *входятъ цѣликомъ въ* G.

Согласно опредѣленію числа ε_n,

$$\varepsilon_n \overline{\overline{<}} \varepsilon_m \quad \text{при} \quad n > m. \tag{14}$$

Такъ какъ для всякаго малаго ε можетъ быть, въ силу C, опредѣлено число m и—слѣдовательно—область G_m, для которой $\varepsilon_m \overline{\overline{<}} \varepsilon$, то — вслѣдствіе (14) —

$$\lim_{n \ldots \infty} \varepsilon_n = 0. \tag{15}$$

Изъ теоремы B слѣдуетъ, что

$$R(\varepsilon_n) \overline{\overline{<}} R_n(\varepsilon_n) \overline{\overline{<}} R_m(\varepsilon_m) \quad \text{при} \quad n > m; \tag{16}$$

а въ такомъ случаѣ можетъ быть

$$\lim_{n \ldots \infty} R_n(\varepsilon_n) = 0 \text{ или } \neq 0, \tag{17}$$

тогда какъ—въ силу (13) и (15)—всегда

$$\lim_{n \ldots \infty} R(\varepsilon_n) = 0.$$

Въ первомъ случаѣ для даннаго малаго числа σ можетъ быть опредѣлено m такъ, что

$$R_n(\varepsilon_n) < \sigma \quad \text{при} \quad n \overline{\overline{>}} m. \tag{18}$$

F. „Если $\lim R_n(\varepsilon_n) \neq 0$, то область G не можетъ быть замкнутой“.

Дѣйствительно: пусть

$$\lim R_n(\varepsilon_n) = L, \quad \text{при чемъ всегда} \quad R_n(\varepsilon_n) \overline{\overline{>}} L; \tag{19}$$

въ силу (19) для произвольнаго $\tau < \frac{L}{2}$ могутъ быть найдены такія наименьшія числа m_1, m_2, m_3, ..., m_n, ..., что

$$R_{m_1}(\varepsilon_{m_1}) - L < \frac{\tau}{2},\ R_{m_2}(\varepsilon_{m_2}) - L < \frac{\tau}{2^2}, \ldots, R_{m_n}(\varepsilon_{m_n}) - L < \frac{\tau}{2^n}, \ldots; \tag{20}$$

точно также для каждаго n можно найти *конечное* число интерваловъ $l_{n1}, l_{n2}, \ldots, l_{nk_n}$ такъ, чтобы было, при $\sigma < \frac{L}{2}$,

$$(21) \qquad \sum_{1}^{\infty} \lambda_{ni} = R_{m_n}(\varepsilon_{m_n}) - \sum_{i=1}^{k_n} l_{ni} < \frac{\sigma}{2^n},$$

гдѣ λ_{ni} обозначены всѣ остальные, меньшіе интервалы R_{m_n}, кромѣ l_{ni}.

Отсюда—въ силу (19)—

$$(22) \qquad \sum_{1}^{k_n} l_{ni} > R_{m_n}(\varepsilon_{m_n}) - \frac{\sigma}{2^n} \overline{\overline{>}} L - \frac{\sigma}{2^n}.$$

Если мы будемъ отъ интерваловъ R_{m_n}, которые меньше ε_{m_n}, восходить къ соотвѣтствующимъ интерваламъ G_{m_ν}, при $m_\nu < m_n$ и—слѣдовательно—при $\varepsilon_{m_\nu} \overline{\overline{>}} \varepsilon_{m_n}$, то мы можемъ ихъ встрѣтить *только среди интерваловъ* R_{m_ν}, такъ какъ остальные интервалы G_{m_ν}, равные или большіе ε_{m_ν}, неизмѣнно переходятъ въ составъ G.

Предпославъ эти замѣчанія, назовемъ интервалы R_{m_1}, къ которымъ восходятъ интервалы l_{2i}, черезъ $\bar{l}_{2i}$; тогда—въ силу B и (22)—

$$\sum \bar{l}_{2i} \overline{\overline{>}} \sum l_{2i} \overline{\overline{>}} L - \frac{\sigma}{2^2} > \frac{\sigma}{2}.$$

Среди интерваловъ $\bar{l}_{2i}$, совпадающихъ съ различными интервалами R_{m_1}, нѣкоторые $\bar{l}_{2i}^{\,\prime}$ входятъ въ составъ l_{1i}, а другіе $\bar{l}_{2i}^{\,\prime\prime}$ относятся къ числу интерваловъ λ_{1i}; восходящіе къ нимъ интервалы R_{m_2} обозначимъ соотвѣтственно черезъ $l_{2i}^{\prime}$ и $l_{2i}^{\prime\prime}$. Такъ какъ вся сумма интерваловъ λ_{1i}—въ силу (21)—меньше $\frac{\sigma}{2}$, то тѣмъ болѣе должно быть

$$(23) \qquad \sum l_{2i}^{\prime\prime} < \sum \bar{l}_{2i}^{\,\prime\prime} < \frac{\sigma}{2}.$$

Но—въ силу (22)—

$$\sum l_{2i}^{\prime} + \sum l_{2i}^{\prime\prime} = \sum_{1}^{k_2} l_{2i} > L - \frac{\sigma}{2^2};$$

слѣдовательно—въ связи съ (23)—

$$(24) \qquad \sum l_{2i}^{\prime} > L - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)\sigma,$$

и тѣмъ болѣе

$$\sum \overline{l}_{2i}' > \mathrm{L} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)\sigma, \tag{25}$$

т. е. *сумма тѣхъ интерваловъ* l_{2i}, *которые восходятъ къ интерваламъ* l_{1i}, *и сумма этихъ послѣднихъ интерваловъ превышаютъ* $\mathrm{L} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)\sigma$.

Такъ какъ

$$\mathrm{R}_{m_2}(\varepsilon_{m_2}) = \sum l_{2i}' + \sum l_{2i}'' + \sum \lambda_{2i},$$

то—въ силу (24) и (20)—

$$\sum l_{2i}'' + \sum \lambda_{2i} = \mathrm{R}_{m_2}(\varepsilon_{m_2}) - \sum l_{2i}' < \mathrm{R}_{m_2}(\varepsilon_{m_2}) - \mathrm{L} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)\sigma$$

$$< \frac{\tau}{2^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)\sigma. \tag{26}$$

Далѣе: интервалы l_{3i} восходятъ къ интерваламъ G_{m_2} и G_{m_1}. Всѣ интервалы R_{m_3} распадаются на двѣ части l_{3i} и λ_{3i}, при чемъ первые снова на l_{3i}' и l_{3i}''; l_{3i}' черезъ интервалы l_{2i}' восходятъ къ интерваламъ $\overline{l}_{2i}'$, входящимъ въ составъ $\sum\limits_{1}^{k_1} l_{1i}$, тогда какъ l_{3i}'' восходятъ къ интерваламъ R_{m_1} черезъ интервалы l_{2i}'' и λ_{2i}.

Въ такомъ случаѣ—въ силу (26)—

$$\sum l_{3i}'' \overline{\gtrless} \sum l_{2i}'' + \sum \lambda_{2i} < \frac{\tau}{2^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)\sigma;$$

но—на основаніи (22)—

$$\sum l_{3i}' + \sum l_{3i}'' = \sum_{1}^{k_3} l_{3i} > \mathrm{L} - \frac{\sigma}{2^3},$$

слѣдовательно

$$\sum l_{3i}' > \mathrm{L} - \frac{\sigma}{2^3} - \sum l_{3i}'' > \mathrm{L} - \frac{\tau}{2^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)\sigma, \tag{27}$$

и тѣмъ болѣе

$$\sum \overline{l}_{3i}' > \mathrm{L} - \frac{\tau}{2^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)\sigma;$$

отсюда—въ силу (27) и (20)—

$$\sum l_{3i}'' + \sum \lambda_{3i} = \mathrm{R}_{m_3} - \sum l_{3i}' < \mathrm{R}_{m_3} - \mathrm{L} + \frac{\tau}{2^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)\sigma$$

$$(28) \qquad < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)\sigma + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)\tau;$$

и т. д.; вообще сумма тѣхъ интерваловъ l_{ni}', которые черезъ всѣ промежуточные интервалы $l_{n-1,i}'$, $l_{n-2,i}'$, ..., l_{2i}' восходятъ къ l_{1i}, будетъ

$$\sum l_{ni}' > \mathrm{L} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\sigma - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\tau;$$

тѣмъ болѣе при всякомъ n

$$(29) \qquad \sum \bar{l}_{ni}' \geqq \sum l_{ni}' > \mathrm{L} - \sigma - \tau;$$

такому же неравенству—въ силу B—удовлетворяютъ и суммы промежуточныхъ интерваловъ, черезъ которые производится восхожденіе; а въ такомъ случаѣ—въ силу леммы A—существуютъ точки, которыя лежатъ *внутри всѣхъ* l_{ni}' и служатъ предѣлами ихъ границъ; эти точки не принадлежатъ области G, которая оказывается такимъ образомъ незамкнутой.

Изъ теоремы F слѣдуетъ, что

G. „Если область G замкнута, то

$$\lim \mathrm{R}_n\,(\varepsilon_n) = 0“;$$

отсюда—въ силу (18)—имѣемъ

H. „Если G замкнута, то для малаго σ можетъ быть опредѣлено число m такъ, что

$$\mathrm{R}_n\,(\varepsilon_n) < \sigma \quad \text{при} \quad n \geqq m,$$

т. е. *для* G *и* G_n *всѣ интервалы, равные или большіе* ε_n, *будутъ одни и тѣ-же, тогда какъ сумма интерваловъ меньшихъ* ε_n, *будетъ меньше* σ“.

Young приводитъ еще два замѣчанія: если G не замкнута, и $\bar{\mathrm{G}}$ есть область, получающаяся отъ ея замыканія, то

$$\bar{\mathrm{G}} \equiv \mathrm{M}\,\{\mathrm{G},\ \mathrm{G}'\}.$$

Въ томъ случаѣ, когда $\bar{\mathrm{G}}$ совершенна, G должна быть сгущенной, и $\mathrm{G}' \equiv \bar{\mathrm{G}}$; если же G не совершенна, G′ не можетъ быть тожественна съ $\bar{\mathrm{G}}$; дѣйствительно—изъ $\mathrm{G}' \equiv \bar{\mathrm{G}}$ слѣдовало бы, что G сгущена, и $\mathrm{G}' \equiv \bar{\mathrm{G}}$ совершенна, чего быть не можетъ.

Если $\bar{G}$ совершенна, и—слѣдовательно G сгущена, но не замкнута, изъ опредѣленія $G = lim\, G_n$ еще нельзя выводить заключенія, что

$$lim\, G'_n = G' = \bar{G};$$

дѣйствительно: такъ какъ—по условію—G_n замкнута, $G'_n = D\,(G_n)$; слѣдовательно $lim\, G'_n = D\,(G)$, между тѣмъ какъ G' содержитъ точки, не входящія въ G.

Изъ теоремы H непосредственно вытекаетъ теорема *Osgood'a* [1]):

J. „*Если* G *замкнута*, то

$$J\,(G) = \lim_{n \ldots \infty} J\,(G_n)\text{“}. \tag{30}$$

Дѣйствительно: опредѣляя мѣру G_n и G какъ

$$J\,(G_n) = l - \sum_1^\infty l_{ni}, \quad J\,(G) = l - \sum_1^\infty l_{0i}\,.$$

гдѣ l_{ni}, l_{0i}—свободные интервалы этихъ областей, имѣемъ—согласно H и (16)—

$$\left| J\,(G_n) - J\,(G) \right| = \left| \sum_1^\infty l_{0i} - \sum_1^\infty l_{ni} \right| = \left| R\,(\varepsilon_n) - R_n\,(\varepsilon_n) \right| < 2\,\sigma,$$

откуда слѣдуетъ (30).

Если G не замкнута, опредѣлимъ [2]) наиболѣе общія условія, при которыхъ

$$lim\, J\,(G_n) = J\,(\bar{G}) \tag{31}$$

Въ такомъ случаѣ

M. „Для произвольно заданныхъ ε и σ можетъ быть опредѣлено такое число m, что для G_n и G при $n \geqq m$ суммы свободныхъ интерваловъ, равныхъ или большихъ ε, различаются другъ отъ друга меньше чѣмъ на σ“.

Эта теорема есть обобщеніе теоремы H, гдѣ было $\bar{G} = G$, и гдѣ тѣ и другіе интервалы совпадали вполнѣ.

---

[1]) См. 34^c, стр. 52.

[2]) Proceedings, 35, p 283.

Пусть $(\bar{x}', \bar{x}'')$—одинъ изъ интерваловъ $\bar{G}$, который $> \varepsilon$, и пусть такихъ интерваловъ будетъ k; удлиняя его на каждомъ концѣ на $\frac{\sigma}{2k}$, мы получимъ точки $\bar{x}_0'$, $\bar{x}_0''$; на этихъ малыхъ отрѣзкахъ лежитъ произвольно много точекъ G; дѣйствительно: если точки $\bar{x}'$, $\bar{x}''$—уединенныя точки $\bar{G}$, то они должны принадлежать G, и тогда процессъ удлиненія дѣлается безполезнымъ; если же одна или обѣ точки $\bar{x}'$, $\bar{x}''$—предѣльныя, то въ ихъ окрестностяхъ имѣется произвольно много точекъ G. Итакъ всегда возможно выбрать на $(\bar{x}_0', \bar{x}')$ и на $(\bar{x}'', \bar{x}_0'')$ точки x', x'', которыя будутъ точками G и—слѣдовательно—точками какой нибудь G_{m_1}. Тогда свободный интервалъ (x', x'') или его часть, на которой располагается $(\bar{x}', \bar{x}'')$, будутъ навѣрное принадлежать G_n при $n > m_1$. Опредѣляя такія числа $m_1^{(i)}$ для каждаго изъ k интерваловъ и взявъ m_2—большее изъ нихъ, мы получимъ, что для $n > m_2$ суммы свободныхъ интерваловъ G_n и $\bar{G}$ различаются другъ отъ друга на величину меньшую σ.

Но въ G_n могутъ быть интервалы равные или большіе ε, которые не входятъ въ G, и число которыхъ конечно; съ ними мы можемъ поступить также, какъ въ доказательствѣ теоремы C, и мы получимъ тогда число $m \overline{>} m_2$, удовлетворяющее условіямъ теоремы.

Мы имѣемъ такимъ образомъ, при $n > m$,

$$\left| \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l_{ni} - R_n(\varepsilon) \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l_n - R(\varepsilon) \right\} \right| < \sigma$$

или

$$\left\{ [l - J(G_n)] - R_n(\varepsilon) \right\} - \left\{ [l - J(G)] - R(\varepsilon) \right\} \Big| = \Big| J(G) - J(G_n) - R_n(\varepsilon) + R(\varepsilon) \Big| < \sigma;$$

такъ какъ—въ силу $D-\lim\limits_{\varepsilon \ldots 0} R(\varepsilon) = 0$, то для удовлетворенія (31) *необходимо и достаточно*, чтобы $R_n(\varepsilon)$ было произвольно мало при достаточно малыхъ ε и большихъ n.

Для поясненія всей предыдущей теоріи *Young* приводитъ слѣдующій примѣръ: на отрѣзкѣ (0, 1) строимъ 1) въ тернарной системѣ *замкнутый* первый рядъ *Smith'a*, назвавъ его G_1, и во 2) Г—замкнутый второй рядъ *Smith'a*[1]); у нихъ будетъ общимъ свободный интервалъ (0.₂, 1). Такъ какъ ряды въ интервалахъ (0, 0.₁) и (0.₁, 0.₂) тожественны, разсмотримъ только первый изъ нихъ. На трехъ наибольшихъ

---

[1]) См. B и C 5° и 46°.

свободныхъ интервалахъ ряда G_1 на $(0, 0._1)$ помѣщаемъ снова первые ряды *Smith'a;* тогда на $(0, 1)$ получится область G_2, у которой будутъ общими съ Γ три интервала, равные или большіе $\frac{1}{3^{1+2}}$. Ряды на шестнадцати интервалахъ $(0, 0._1)$ и $(0._1, 0._2)$ тожественны, и мы разсмотримъ только $(0, 0._{001})$; на трехъ наибольшихъ интервалахъ области G_2 на $(0, 0._{001})$ помѣстимъ снова первые ряды *Smith'a*, получивъ при этомъ на $(0, 1)$ область G_3, и затѣмъ съ 3^2 наибольшими интервалами G_3 на $(0, 0._{001})$ сдѣлаемъ тоже самое, получая на $(0, 1)$ область G_4; эта область имѣетъ съ Γ общими интервалы, равные или большіе $\frac{1}{3^{1+2+3}}$; и т. д. Мы получимъ такимъ образомъ область G какъ предѣлъ для G_n, при чемъ для заданнаго ε можетъ быть выбрано m такъ, что свободные интервалы G_n и Γ, равные или большіе ε, будутъ одни и тѣ-же; замыкая G, мы получимъ рядъ G, который будетъ совпадать съ Γ.

Сумма свободныхъ интерваловъ G_n равна 1, и $J(G_n) = 0$; слѣдовательно также и $\lim J(G_n) = 0$; тогда какъ $J(\Gamma) = J(G)$ заключается между $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$. Такимъ образомъ, не смотря на то, что всѣ интервалы, равные или большіе ε, общи у Γ и G_n, разность суммъ остальныхъ меньшихъ интерваловъ $R_n(\varepsilon_n) - R(\varepsilon_n)$ заключаетъ между $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

Общимъ областямъ такого типа посвящается много мѣста во II главѣ настоящаго изслѣдованія.

48. *Young* отмѣчаетъ далѣе [1]), что недостаточно установлено понятіе о разсѣяніи одной области по другой.

Если P есть часть замкнутой, рѣдко разсѣянной области Q, то *Schoenflies* [2]) называетъ P *часто разсѣянной по* Q, если

$$P' \equiv Q. \tag{32}$$

Young считаетъ такое опредѣленіе неудовлетворительнымъ, такъ какъ можетъ случиться, что ни одна часть области Q не имѣетъ Q своей производной; это будетъ всегда происходить для замкнутой, но не совершенной Q. Въ виду этого *Young* предлагаетъ опредѣленіемъ частаго разсѣянія принять условіе

$$Q \equiv M(P, P'). \tag{33}$$

[1]) Ib. p. 270.

[2]) Bericht, p. 80.

Чтобы выяснить на примѣрѣ разницу между тѣмъ и другимъ опредѣленіемъ, возьмемъ рядъ

$$(34) \qquad Q = \left\{ 0, \ldots\ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}, 1 \right\};$$

согласно опредѣленію *Schoenflies'а*—по такой области нѣтъ часто разсѣяннаго ряда; по *Young'у*—рядъ

$$P = \left\{ \ldots\ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, 1 \right\},$$

заключающій *всѣ* уединенныя точки Q, будетъ единственнымъ часто разсѣяннымъ по Q рядомъ.

Очевидно, по *Young'у*—присутствіе въ P всѣхъ уединенныхъ точекъ Q является обязательнымъ; дѣйствительно: разъ Q—по условію—замкнута,

$$Q = Q_i + Q',$$

гдѣ Q_i — область уединенныхъ точекъ Q; такъ P есть часть Q, то P' состоитъ изъ предѣльныхъ точекъ Q, т. е. $P' = D(Q')$; слѣдовательно $M(P, P')$ заключаетъ въ себѣ только тѣ уединенныя точки Q, которыя находятся въ P. Поэтому условіе (33) возможно выполнить только въ томъ случаѣ, если въ P включены всѣ точки Q_i.

Въ виду этого, можетъ быть, было бы желательно опредѣлить часто разсѣянную область такъ, чтобы это опредѣленіе, являясь развитіемъ соотвѣтствующаго опредѣленія для континуума, давало большій просторъ въ построеніи часто разсѣянныхъ областей.

Такимъ опредѣленіемъ могло бы быть слѣдующее: часть P замкнутой области Q называется часто разсѣянной по Q, если

$$(35) \qquad P' = Q';$$

при этомъ нѣтъ обязательности включать въ составъ P *всѣ* уединенныя точки Q.

Согласно этому опредѣленію, часто разсѣянными по Q для примѣра (34) будутъ, напримѣръ, области

$$\left\{ \ldots\ldots, \frac{1}{2^{kn}}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^{3k}}, \frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^0} \right\},$$

и т. д. при всякомъ цѣломъ значеніи k.

Очевидно, при опредѣленіи (35) изъ числа уединенныхъ точекъ въ составъ P должны входить только такія ихъ области, чтобы *не была потеряна ни одна предѣльная точка*. Для совершенныхъ областей Q всѣ три опредѣленія совпадаютъ.

Третьимъ опредѣленіемъ часто разсѣянной области нахожденіе такихъ областей является частнымъ случаемъ болѣе общей задачи, именно—возсозданія по производной $P' = Q'$ первоначальной области P, задачи, впервые поставленной *Bendixson*'омъ [1]).

Задача эта, какъ и неопредѣленное интегрированіе, вообще говоря, имѣетъ безконечно много рѣшеній; изъ такихъ рѣшеній отвѣчаютъ опредѣленію частаго разсѣянія тѣ области P, которыя являются составными частями Q; этимъ налагается на выборъ P добавочное условіе.

49. Изслѣдуя далѣе [2]) области захватывающихъ другъ друга интерваловъ, *Young* допускаетъ, въ противоположность условіямъ теоремы *Borel*'я, возможность существованія точекъ отрѣзка, невнутреннихъ для всѣхъ интерваловъ области. Эти невнутреннія точки могутъ принадлежать къ тремъ категоріямъ: 1) точки, служащія границами двухъ или нѣсколькихъ смежныхъ или налагающихся другъ на друга интерваловъ, 2) внѣшнія точки, служащія двусторонними предѣлами рядовъ границъ, и 3) односторонніе предѣльныя точки. Рядъ интерваловъ опредѣляемыхъ этими невнутренними точками, *Young* называетъ *эквивалентнымъ рядомъ незахватывающихъ другъ друга интерваловъ*. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что

N. „Каждая внутренняя точка интерваловъ эквивалентнаго ряда будетъ непремѣнно внутренней для по крайней мѣрѣ одного интервала даннаго ряда, и обратно".

Пользуясь этимъ понятіемъ, *Young* устанавливаетъ теорему, представляющую обобщеніе теоремы *Borel*'я:

O. „Если каждая точка замкнутой области $P = \{x\}$ лежитъ внутри по крайней мѣрѣ одного изъ интерваловъ $\{l_i\}$, то возможно опредѣлить конечное число интерваловъ съ такимъ свойствомъ".

Пусть $\{L_i\}$—эквивалентный рядъ интерваловъ; такъ какъ каждая точка x лежитъ внутри $\{l_i\}$, то она—въ силу N—будетъ находиться и внутри по крайней мѣрѣ одного изъ L_i. Число интерваловъ L_i должно быть конечно, такъ какъ иначе существовала бы для границъ интерваловъ L_i, а—слѣдовательно—и для точекъ x, на нихъ лежащихъ, предѣльная точка, которая 1) не лежала бы внутри $\{L_i\}$ и 2) была бы точкой x, такъ какъ $\{x\}$—замкнутая область; это противорѣчитъ опредѣленію $\{l_i\}$ и теоремѣ N. Пусть

$$L_1,\ L_2,\ \ldots\ldots,\ L_k \tag{36}$$

интервалы эквивалентнаго ряда, *внутри которыхъ лежатъ точки* $\{x\}$.

[1]) См. 14°.

[2]) Proceedings, 35, p. 384.

Въ такомъ случаѣ на каждомъ изъ интерваловъ (36) мы можемъ построить интервалъ $L_j' = \{\xi_j, \eta_j\}$ такъ, что $\{x\}$ будутъ лежать *внутри* L_j'; такъ какъ по построенію ξ_j, η_j не будутъ точками $\{x\}$, то часть P_j' области P, расположенная на L_j', будетъ замкнута. Въ силу того, что каждая точка L_j', въ томъ числѣ и всѣ точки P_j, будетъ внутренней точкой интервала L_j, она—въ силу N—будетъ внутренней и для $\{l_i\}$. Поэтому можно указать конечное число n_j интерваловъ $\{l_i\}$, обладающихъ тѣмъ-же свойствомъ. Взявъ такіе интервалы l_i для всѣхъ L_j, мы получимъ конечное число $\sum\limits_{j=1}^{k} n_j = n$ интерваловъ $\{l_i\}$, которые будутъ обладать искомымъ свойствомъ по отношенію къ точкамъ данной области.

Вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно [1]), что нельзя опредѣлить безконечнаго ряда не захватывающихъ другъ друга интерваловъ такъ, чтобы 1) каждая точка *замкнутой* области лежала внутри одного изъ нихъ, и 2) чтобы не было ни одного сплошного интервала, свободнаго отъ точекъ области.

50. *Мѣру* J (P) *замкнутой точечной области Young* опредѣляетъ [2]) какъ $l - J_l$, гдѣ J_l—сумма ея свободныхъ интерваловъ. Изъ этого опредѣленія непосредственно вытекаетъ старое опредѣленіе:

P. „Если включить точки замкнутой области *внутрь* конечнаго числа не захватывающихъ другъ друга интерваловъ, то сумма этихъ интерваловъ больше J (P), но можетъ быть сдѣлана произвольно близкой къ J (P)“.

Дѣйствительно: возьмемъ неопредѣленное пока ε и опредѣлимъ конечное число *свободныхъ* интерваловъ l_i, которые больше ε; тогда остается также конечное число k интерваловъ λ_j, на которыхъ, въ качествѣ границъ и внутреннихъ точекъ, лежатъ всѣ точки области P, и кромѣ того на λ_j лежатъ всѣ свободные интервалы $l_i < \varepsilon$, сумма которыхъ пусть будетъ R (ε) Если удлинить каждый изъ λ_j на каждомъ его концѣ на величину меньшую $\frac{\sigma}{2k}$, то всѣ точки P будутъ лежать уже внутри полученныхъ при этомъ интерваловъ λ_j', которые будутъ захватывать отчасти интервалы l_i; общая ихъ часть будетъ меньше σ. Отсюда мѣра тѣхъ частей свободныхъ интерваловъ, кото-

[1]) ib. (2) 1. p. 233.
[2]) ib. p. 232.

рые лежатъ внѣ λ_j', будетъ заключаться между $J_l - R(\varepsilon) - \sigma$ и $J_l - R(\varepsilon)$, и слѣдовательно

$$J(P) + R(\varepsilon) = l - \{J_l - R(\varepsilon)\} < \sum_1^k \lambda_j' < l - \{J_l - R(\varepsilon) - \sigma\} = J(P) + R(\varepsilon) + \sigma,$$

т. е.

$$R(\varepsilon) < \sum \lambda_j' - J(P) < R(\varepsilon) + \sigma;$$

но сумма $R(\varepsilon)$, при достаточно маломъ ε, можетъ быть сдѣлана произвольно малой, откуда вытекаетъ утвержденіе теоремы.

Этой теоремой сводится на опредѣленіе *Young'a* одной категоріи опредѣленій мѣры; точно также для другой категоріи авторъ даетъ слѣдующую теорему:

Q. „Если каждую точку замкнутой области сдѣлать серединой малаго интервала, то сумма конечнаго числа не захватывающихъ другъ друга интерваловъ, которые заполнены предыдущими интервалами, при безконечномъ убываніи ихъ длины, имѣетъ предѣломъ $J(P)$“.

Дѣйствительно: замѣтивъ, что—на основаніи теоремы O—рядъ малыхъ захватывающихъ другъ друга интерваловъ можетъ быть замѣщенъ конечнымъ числомъ ихъ, мы можемъ свести теорему Q на теорему P.

Опредѣленіе мѣры *Young'омъ* и эти двѣ теоремы водворяютъ наконецъ тотъ порядокъ, который былъ настоятельнымъ уже давно; теперь является только необходимымъ выяснить, въ какой мѣрѣ можно распространить опредѣленіе *Young'a* на незамкнутыя области.

Ясно, что замкнутый рядъ съ мѣрой l, равной длинѣ основного интервала, долженъ непремѣнно совпадать съ контимуумомъ, такъ какъ для него должно быть $J_l = 0$.

Исходя изъ тѣхъ интерваловъ, которыми опредѣляется точечная область P, *Young* уясняетъ геометрическое происхожденіе производной области P′: переходя отъ свободныхъ интерваловъ P къ такимъже интерваламъ P′, мы соединяемъ вмѣстѣ всѣ смежные интервалы вплоть до ихъ предѣльныхъ точекъ на обѣихъ сторонахъ; если два счетныхъ ряда интерваловъ имѣютъ общую предѣльную точку, которая будетъ внѣшней по отношенію къ тѣмъ и другимъ интерваламъ, эта точка будетъ теперь границей свободныхъ смежныхъ интерваловъ области P′.

Нахожденіе дальнѣйшихъ производныхъ P″, P‴, ... имѣетъ слѣдствіемъ новое соединеніе интерваловъ въ одинъ; при этомъ процессѣ послѣдовательно изчезаютъ одностороннія и двустороннія предѣльныя точки; изчезнувшихъ точекъ можетъ быть только счетное число.

Если область P счетна, то послѣ нѣкотораго ряда операцій свободные интервалы сольются въ одинъ сплошной основной интервалъ; если же она не счетна, то мы получимъ *послѣдній рядъ* (ultimate set) уединенныхъ интерваловъ; совершенную область $P^{(\Omega)}$ невнутреннихъ точекъ этихъ интерваловъ *Young* называетъ *остовомъ* или *ядромъ* (nucleus) области P.

Въ такомъ видѣ представляется у автора основная теорема *Cantor-Bendixson'a*; очевидно [1]), что

Ядро $P^{(\Omega)}$ имѣетъ ту-же мѣру, какъ и P, и тѣ-же внѣшнія точки, кромѣ—можетъ быть—счетнаго ряда.

Young замѣчаетъ еще, что часто приходится, имѣя счетный рядъ областей

$$P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots, P_n, \ldots, \qquad \text{при} \qquad P_{n+1} = D(P_n),$$

говорить о всѣхъ точкахъ, общихъ всѣмъ областямъ P_i; область этихъ точекъ P_ω онъ называетъ *изводной* (deduced) и самый процессъ — *изведеніемъ* (deduction).

„Если данъ конечный или счетный рядъ операцій нахожденія производныхъ и ихъ изводныхъ, можно построить счетную область точекъ, которая изчезнетъ, если надъ ней выполнить эти операціи.“

Это утвержденіе имѣетъ нѣкоторую аналогію съ теоріей размѣщенія, развитой нами во второй главѣ.

51. *Young* задается цѣлью [2]) изслѣдовать еще обобщенную область *Borel'я* [3]): дѣлаемъ каждую изъ точекъ области P серединой нѣкотораго интервала; заставляя всѣ интервалы $l_i^{(n)}$ стремиться къ нолю съ возрастаніемъ n, изслѣдуемъ область внутреннихъ точекъ этихъ интерваловъ. Относительно этой области, которую *Young* называетъ *внутреннимъ предѣльнымъ рядомъ*, онъ даетъ слѣдующія теоремы:

R. „Всякая точка $x^{(0)}$ внутренняго предѣльнаго ряда $P^{(0)}$ будетъ точкой P'“.

Дѣйствительно: $x^{(0)}$ должна быть внутренней точкой для каждаго ряда интерваловъ $\{ l_i^{(n)} \}$ при всякомъ n; интервалы, заключающіе вну-

---

[1]) Ср. 17°.

[2]) Proceedings, (2) 1, p. 262.

[3]) См. 30°.

три себя, кромѣ $x^{(0)}$, еще точки P, убываютъ безконечно. слѣдовательно—$x^{(0)}$ должна быть точкой P'.

Отсюда непосредственно вытекаетъ, что

„Для замкнутой области P всегда $P = P^{(0)}$".

S. „$P^{(0)}$ можетъ заключать въ себѣ каждую точку P'".

Возьмемъ всѣ интервалы $l_i^{(n)}$, при данномъ n, равными; тогда каждая точка P' будетъ внутренней для $\sum\limits_1^{\infty} l_i^{(n)}$ при всякомъ n, т. е. она войдетъ въ $P^{(0)}$; но, вообще говоря, P' можетъ не быть $D\{P^{(0)}\}$.

T. „Если P—раздѣльная область, и P' счетна[1]), то возможно размѣстить интервалы такъ, что будетъ $P^{(0)} = P$".

На основаніи R—изъ точекъ, не входящихъ въ P, могутъ заключаться въ $P^{(0)}$ только точки P'. Точки P', которыя принадлежатъ P, здѣсь не возбуждаютъ сомнѣнія; остается только доказать, что можно расположить интервалы такъ, что останется внѣ ихъ каждая точка P', не входящая въ составъ P.

Возьмемъ замкнутую область

$$\overline{P} \equiv M(P,\ P');$$

ея уединенныя точки $\{x_{0i}\} \equiv P_a$ будутъ тожественны съ уединенными точками P; пусть d_{0i}—разстояніе точки x_{0i} до ближайшей къ ней точки P_a. Тогда всѣ предѣльныя точки P не будутъ лежать внутри интерваловъ $l_{0i}^{(n)} \equiv \left(x_{0i} - \frac{1}{2^n} d_{0i},\ x_{0i} + \frac{1}{2^n} d_{0i}\right)$.

По выдѣленіи изъ P точекъ P_a, мы получимъ P_{ca}—область уединенныхъ точекъ области $\overline{P} - P_a$; нѣкоторыя изъ этихъ точекъ $\{x_{1i}\}$ войдутъ въ P, тогда какъ другія $\{\xi_{1j}\}$ туда не войдутъ. Область $\{x_{1i},\ \xi_{1j}\}$ будетъ снова уединенна, и около ея точекъ можно построить интервалы

$$l_{1i}^{(n)} \equiv \left(x_{1i} - \frac{1}{2^n} d_{1i},\ x_{1i} + \frac{1}{2^n} d_{1i}\right),\ \lambda_{1i}^{(n)} \equiv \left(\xi_{1j} - \frac{1}{2^n} \delta_{1j},\ \xi_{1j} + \frac{1}{2^n} \delta_{1j}\right),$$

внутри каждаго изъ которыхъ 1) не будетъ другихъ точекъ P_{ca}, кромѣ x_{1j} или ξ_{1j}, а—слѣдовательно—тѣмъ болѣе никакихъ другихъ точекъ P, которыя служатъ предѣльными для x_{1i}, ξ_{1j}, и 2) всѣ предѣльныя точки P_{ca} не лежатъ внутри $l_{1i}^{(n)}$ и $\lambda_{1i}^{(n)}$; d_{1i} и δ_{1i} здѣсь снова—разстоянія x_{1i} или ξ_{1j} до ближайшей точки P_{ca}.

[1]) т. е. P—приводима.

Уединенныя точки области $P - P_a - P_{ca}$ даютъ область P_{c^2a}, при чемъ одни входящія въ нее точки $\{x_{2i}\}$ могутъ принадлежать P, другія-же $\{\xi_{2j}\}$—нѣтъ.

Строя около нихъ интервалы l_{2i} и λ_{2i} и продолжая этотъ процессъ далѣе, мы включимъ точки P въ захватывающіе, вообще говоря, другъ друга интервалы

$$\{l_{0i}^{(n)}\}, \quad \{l_{1i}^{(n)}\}, \quad \{l_{2i}^{(n)}\}, \ldots\ldots, \{l_{\alpha i}^{(n)}\},$$

гдѣ α — число второго класса, съ которымъ предыдущій процессъ долженъ оборваться, такъ какъ область P—приводима; при достаточно большомъ значеніи n, ни одна точка $\{\xi_{kj}\}$ не лежитъ внутри нихъ; точка ξ_{kj} можетъ лежать внутри интерваловъ $l_{k+1,i}^{(n)}$, $l_{k+2,i}^{(n)}$, ..., но при возрастающемъ n она должна оказаться внѣ этихъ интерваловъ, такъ какъ ξ_{kj} лежитъ на конечномъ разстояніи отъ каждой изъ точекъ $x_{k+1,j}$, $x_{k+2,j}$ ....

Придавая n всѣ значенія натуральнаго ряда 1, 2, 3, ..., мы получимъ область $P^{(0)}$, въ составъ которой не войдетъ ни одна точка P', не принадлежащая P; а въ такомъ случаѣ—согласно R—должно быть $P^{(0)} = P$[1]).

U. „Если P рѣдко разсѣяна и не раздѣльна, $P^{(0)}$ имѣетъ размѣръ непрерывности".

Дѣйствительно: разъ P—не раздѣльна, не можетъ быть раздѣльной и $P^{(0)} = M(P)$; а въ такомъ случаѣ $P^{(0)}$ не счетна[2]).

V. „Если P—раздѣльная область, но P' не счетна, $P^{(0)}$ можетъ или быть счетна, или имѣть размѣръ непрерывности; при этомъ возможно размѣстить интервалы такъ, что будетъ $P^{(0)} = P$".

Если при несчетной P' область P раздѣльна, то точки P будутъ распредѣляться по свободнымъ интерваламъ нѣкоторой совершенной области Q, при чемъ въ каждомъ изъ интерваловъ помѣщается область перваго рода.

Отсюда является возможность построить на каждомъ свободномъ интервалѣ Q интервалы типа T такимъ образомъ, что окажется $P^{(0)} = P$, т. е. $P^{(0)}$ будетъ счетна, какъ и P.

---

[1]) Эта теорема не приведена у *Young'a;* она неявно заключается въ теоремѣ W. Доказательства теоремъ U и V приведены авторомъ въ Leipziger Berichte, 1903.

[2]) ib.

Если — напротивъ того — около точекъ P построимъ интервалы типа S, $P^{(0)}$ будетъ заключать въ своемъ составѣ совершенную область Q, и будетъ потому имѣть размѣръ непрерывности.

W. „Вообще возможно размѣстить интервалы такъ, что точки $P^{(0)}$, не входящія въ составъ P, будутъ предѣльными точками сгущенной части P".

Дѣйствительно: строя для точекъ сгущенной части P, часто разсѣянной по нѣкоторой совершенной области Q, интервалы типа S, а для точекъ, лежащихъ внутри свободныхъ интерваловъ Q, интервалы типа T, мы получимъ

$$P^{(0)} = M\,\{P, Q\}\,.$$

Кромѣ указанныхъ въ текстѣ, *Young* приводитъ еще одну теорему[1]):

X. „Если мѣра включающихъ $P^{(0)}$ интерваловъ $\lambda^{(n)}$ можетъ быть сдѣлана меньше мѣры P', то несчетная часть $D(P')$ не входитъ въ $P^{(0)}$".

Пусть $D(P') = \{x_i\}$ счетна, и пусть $J(P') - uGr.\,\lambda^{(n)} = 2\,\varepsilon$; построимъ около каждой точки x_i интервалъ $\left(x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}},\ x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)$; тогда мѣра области $\{P^{(0)}, D(P')\}$, включающей *всѣ* точки P' будетъ не больше $uGr.\,\lambda^{(n)} + \varepsilon$, т. е. меньше $J(P')$, чего быть не можетъ; слѣдовательно—нельзя предполагать область $D(P')$ счетной.

Аналогично можно доказать, что

Y. „Если область P_1 составляетъ часть P_2, и мѣра P_1 меньше мѣры P_2, то область $P_2 - P_1$ имѣетъ размѣръ непрерывности".

52. Доказательство[2]) теоремы *Cantor-Bendixson'a* опирается на понятіе объ Ω—первомъ числѣ третьяго класса, при чемъ это число, какъ замѣтилъ еще *Cantor*, не входитъ совершенно въ окончательный результатъ. Поэтому естественно было желаніе *Schoenflies'a* дать[3]) такое доказательство этой теоремы, которое было бы совершенно независимо отъ Ω.

Доказательство *Schoenflies'a* проведено въ духѣ *Young'a*, который самъ сдѣлалъ[4]) на это указаніе. Оно основывается на томъ, что

[1]) Proceedings. (2) 1, p. 262-263.

[2]) См. 13°-14°.

[3]) Göttinger Nachrichten. 1903; издано въ 1904 г.

[4]) Proceedings. (2) 1, 1904, p. 246.

a) каждому числу 2-го класса отвѣчаетъ типъ размѣщенія опредѣленной точно-размѣщенной[1]) счетной области, и обратно; и *b*) всякая точно размѣщенная область положительныхъ убывающихъ чиселъ счетна, и ея типъ размѣщенія есть опредѣленное число 2-го класса.

Въ силу опредѣленія—числа области могутъ быть даны въ видѣ

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots\ldots > a_\omega > a_{\omega+1} > \ldots\ldots > a_\alpha > a_{\alpha+1} > \ldots\ldots; \quad (1)$$

если обозначить $a_\nu - a_{\nu+1} = b_\nu$, то

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ldots,\ b_\omega,\ b_{\omega+1},\ \ldots\ldots,\ b_\alpha,\ b_{\alpha+1},\ \ldots\ldots \quad (2)$$

будетъ другой рядъ, въ которомъ всѣ числа b_ν конечны и положительны, и сумма произвольнаго числа чиселъ (2) не превышаетъ a_1. Поэтому, если взять какой нибудь рядъ безконечно убывающихъ чиселъ $\{\varepsilon_i\}$, то между каждыми двумя числами ε_i можетъ лежать по величинѣ только конечное число чиселъ b_ν; отсюда слѣдуетъ счетность рядовъ (2) и (1).

Въ доказательствѣ теоремы *Cantor-Bendixson'a Schoenflies* исходитъ изъ ряда $\{l_i\}$ опредѣляющихъ замкнутую область интерваловъ, которые послѣ счетнаго числа операцій должны дать или сплошной основной интервалъ, или рядъ уединенныхъ интерваловъ; доказательство сохраняетъ силу и въ томъ случаѣ, если данная область состоитъ изъ ряда рѣдко и часто разсѣянныхъ частей.

Затѣмъ авторъ такимъ же путемъ доказываетъ еще теорему *Baire'a*[2]):

„Если Q—замкнутая область, и

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots\ldots\ Q_\omega,\ Q_{\omega+1},\ \ldots\ldots\ Q_\alpha,\ Q_{\alpha+1},\ \ldots\ldots$$

—рядъ областей, изъ которыхъ Q_1—замкнутая часть Q, и вообще каждая $Q_{\beta+1}$ есть замкнутая часть Q_β, то существуетъ наименьшее число α перваго или второго класса, для котораго Q_α нуль или совершенна".

Оба доказательства отличаются крайней простотой и убѣдительностью.

---

[1]) Т. е. такой, которая сама и каждая ея часть имѣетъ низшій элементъ; см. Bericht, S. 36; *Jourdain*, Phil. Magaz. (6) 7, p. 65; изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что для каждой части точно размѣщенной области и поэтому для каждаго ея элемента имѣется непосредственно за ней слѣдующій элементъ.

[2]) См. 37°; Annali di Matematica, (3) 3, p. 51.

Дальнѣйшія работы [1]) автора по теоріи точечныхъ областей, какъ и статья *Zoretti* [2]), относятся къ двухмѣрнымъ областямъ и, опираясь на новые пріемы и новыя понятія, лежатъ внѣ круга идей настоящаго изслѣдованія.

53. Прослѣдивъ шагъ за шагомъ, какъ развивалась новая отрасль чистой математики, какъ она вырабатывала свои методы и положенія, попробуемъ теперь представить общую картину этого развитія и указать тѣ направленія, въ которыхъ должна происходить ея дальнѣйшая разработка.

На теоріи областей, возникшей и развившейся почти на нашихъ глазахъ, интереснымъ является прослѣдить исторію новой дисциплины, исторію, которая въ миніатюрѣ повторяетъ исторію развитія науки вообще. Начала всякой науки теряются во мракѣ временъ, и отдѣльные моменты ея развитія отмѣчаются столѣтіями, тогда какъ въ теоріи областей весь циклъ проходитъ въ чрезвычайно короткій періодъ времени.

Изъ отдѣльныхъ фактовъ у *Bolzano*, любопытныхъ въ качествѣ „парадоксовъ“, ученіе объ областяхъ получаетъ у *Cantor'a* уже форму теоріи; но до какой степени эта теорія была своеобразна, указываетъ уже то обстоятельство, что *Cantor* долго не рѣшался опубликовать свои изслѣдованія. Первое время послѣ ихъ опубликованія было очень немного лицъ, кто занимался этой новой вѣтвью математики, но чѣмъ дальше шло время, тѣмъ работниковъ въ области Mengenlehre дѣлается все больше и больше, ея вліяніе проникаетъ въ различные отдѣлы науки и начинаетъ уже входить въ элементарные курсы [3]).

Такимъ образомъ право на существованіе и роль ученія объ областяхъ въ общей системѣ науки является упроченнымъ: съ этимъ ученіемъ считаются, и въ настоящее время нельзя уже избѣжать его вліянія въ цѣломъ рядѣ отдѣловъ анализа. И вся эта эволюція произошла въ теченіе какихъ-нибудь 30 лѣтъ, не считая ея т. с. доисторическаго періода.

Затѣмъ интересно прослѣдить, какъ различныя идеи ученія объ областяхъ постоянно возникаютъ, независимо другъ отъ друга, у различныхъ изслѣдователей; это явленіе до такой степени частое, что сравнительно немногое ведетъ свое начало отъ кого-либо одного, большею же частью понятія приходится возводить къ двумъ, а то и больше, авторамъ.

---

[1]) M. A. 58, S. 195; 59, S. 129.
[2]) C. R. 138, p. 674.
[3]) См. нпр. de la Vallée-Poussin, Cours d'analyse.

Далѣе—участіе каждаго изъ отдѣльныхъ изслѣдователей въ развитіи теоріи оказывается обыкновенно очень небольшимъ: часто какой нибудь одинъ примѣръ, одна теорема или одно понятіе оказываетъ существенное вліяніе на весь дальнѣйшій ходъ развитія. Кромѣ самого *Cantor'a*, только *Borel'ю* и *Young'у* принадлежатъ болѣе обширныя изслѣдованія въ теоріи линейныхъ, *Jordan'у* и *Schoenflies'у*—въ теоріи плоскихъ областей.

54. Ученіе объ областяхъ (*Mengenlehre*) разбилось прежде всего на два теченія; одно занялось трансфинитной арифметикой и теоріей трансфинитныхъ чиселъ, тогда какъ другое обратило преимущественное вниманіе на точечныя области; это послѣднее относится до нѣкоторой степени недружелюбно къ трансфинитнымъ числамъ, и все болѣе и болѣе проявляется стремленіе обосновать теорію точечныхъ областей внѣ зависимости отъ нихъ; представителемъ этого теченія является *Borel*.

Ожидать полнаго успѣха въ этомъ направленіи едва ли возможно: если удастся обосновать теоремы, относящіяся къ точечнымъ областямъ, независимо отъ Ω — перваго числа 3-го класса, то—надо думать—числа 2 го класса всегда сохранятъ за собой подобающее значеніе.

Не смотря на свою тѣсную связь, теорія трансфинитныхъ чиселъ и теорія точечныхъ областей имѣютъ каждая особый кругъ работниковъ, которые только изрѣдка и не охотно выходятъ за предѣлы своей теоріи; и какъ разъ тѣ математики, какъ *Borel* и *Schoenflies*, которые удѣлили вниманіе и той, и другой вѣтви ученія объ областяхъ, направляютъ свои усилія на то, чтобы отдалить ихъ другъ отъ друга, и привѣтствуютъ успѣхи другихъ на этомъ поприщѣ.

Теорія точечныхъ областей, которымъ посвящено настоящее изслѣдованіе, имѣетъ задачей изучать *a)* размѣръ области, *b)* ея строеніе и *c)* ея мѣру.

Что касается размѣра, то еще *Cantor'омъ* было установлено, что точечныя области могутъ быть конечны, счетны или имѣть размѣръ непрерывности. Выясненіе-же того, въ какомъ отношеніи послѣдній размѣръ находится къ ряду *алефовъ*, входитъ въ задачи теоріи трансфинитныхъ чиселъ и насъ здѣсь не занимаетъ [1]).

Изученіе строенія и мѣры области по большей части шло также до нѣкоторой степени независимо одно отъ другого, и математики, занимавшіеся однимъ, мало удѣляли вниманія другому; въ этомъ отношеніи особенно характернымъ примѣромъ является *G. Cantor*—творецъ ученія объ областяхъ, сравнительно мало интересовавшійся вопросомъ о мѣрѣ.

---

[1]) Въ только что появившейся книжкѣ Jahresber. d. Deut. Math.-Ver. (B. XIV. S. 447) Bernstein сообщаетъ, что ему удалось установить что этотъ размѣръ есть алефъ-одинъ.

55. *Bolzano*, къ которому восходитъ все ученіе, коснулся всѣхъ трехъ вопросовъ, составившихъ содержаніе теоріи точечныхъ областей.

Затѣмъ до *Cantor'a* вниманіе аналистовъ было привлечено на установленіе условія интегрируемости, и въ связи съ этимъ началъ развиваться вопросъ о мѣрѣ.

Раздѣляя основной интервалъ на части и суммируя тѣ изъ нихъ, на которыхъ расположены точки области, мы получимъ *мѣру* области, какъ предѣлъ такихъ суммъ при безконечно возрастающемъ числѣ частей и—слѣдовательно—при безконечномъ ихъ убываніи.

Это опредѣленіе, совершенно не считающееся съ природой области, появилось первымъ въ наукѣ; его принимали послѣдовательно, иногда съ маленькими варіаціями, *Riemann*, *Stolz*, *Harnack* (для двухмѣрныхъ областей), *Peano*, *Jordan* и *Lebesgue*; два предпослѣднихъ автора, не ограничиваясь предыдущимъ опредѣленіемъ, вводятъ еще *внутреннюю мѣру* области, опредѣляя ее какъ предѣлъ суммъ тѣхъ интерваловъ, *всѣ* точки которыхъ принадлежатъ данной области.

Это первое опредѣленіе мѣры, которые мы будемъ называть *Riemann'овымъ*, принадлежитъ тѣмъ аналистамъ, которыхъ теорія точечныхъ областей мало интересовала сама по себѣ; имѣя свои задачи внѣ этой теоріи они пользовались ея услугами мимоходомъ и не останавливались особенно долго, кромѣ *Harnack'a* и отчасти *Jordan'a*, на томъ, что могло бы дать болѣе естественное опредѣленіе мѣры.

Вторая группа изслѣдователей строитъ около каждой точки области обнимающіе ее интервалы и беретъ суммы ихъ не покрывающихъ другъ друга частей; мѣра области опредѣляется тогда какъ предѣлъ этой суммы, при безконечномъ убываніи каждаго интервала; такого опредѣленія придерживаются *Hankel*, *Dini*, *Harnack* (ранняя работа), *Cantor* и *Lindelöf*, предложившій болѣе гибкій пріемъ *Cantor'ова* опредѣленія мѣры.

Второе опредѣленіе мѣры, которое мы назовемъ *Hankel'евымъ*, болѣе считается съ природой области, чѣмъ первое, но заключаетъ въ себѣ также элементъ произвола: именно—величины интерваловъ, обнимающихъ различныя точки области, могутъ находиться другъ по отношенію къ другу въ разныхъ соотношеніяхъ. Что различный выборъ интерваловъ можетъ включать, вмѣстѣ съ точками данной области, крайне различающіяся другъ отъ друга добавочныя области, мы видимъ въ примѣрахъ *Borel'я* и *Young'a*.

Произволъ въ выборѣ величины интерваловъ, какъ и произволъ въ выборѣ системы дѣленій, отвѣчающихъ первому опредѣленію мѣры, далъ поводъ [1]) *Schoenflies'у* высказать мнѣніе, что „опредѣленіе

[1]) Bericht, S. 87

мѣры, какъ и каждое математическое опредѣленіе, имѣетъ извѣстный субъективный характеръ, и только вытекающія изъ него слѣдствія рѣшаютъ, выбрано ли оно цѣлесообразно." Съ этимъ едва ли въ настоящемъ случаѣ возможно согласиться, такъ какъ третье опредѣленіе мѣры, какъ увидимъ, логически является единственнымъ законнымъ.

Промежуточное положеніе между первымъ и вторымъ опредѣленіемъ занимаетъ *Lebesgue;* затѣмъ неустойчиво положеніе *du-Bois-Beymond'a*, который пользуется то первымъ, то третьимъ опредѣленіемъ [1]).

Наконецъ третье опредѣленіе кладетъ въ основу свободные интервалы, предполагая—разумѣется,—что рѣчь идетъ о рѣдко разсѣянныхъ областяхъ.

При опредѣляющемъ мѣру области суммированіи *длинъ* свободныхъ интерваловъ не оказываютъ вліянія на отдѣльныя длины, а слѣдовательно—и на ихъ сумму, наличность или отсутствіе въ составѣ области границъ этихъ интерваловъ; поэтому при вычисленіи мѣры всѣ смежные интервалы сливаются въ одинъ, такъ что уединенныя точки не могутъ оказывать вліянія на мѣру; затѣмъ не вліяютъ на мѣру границы свободныхъ интерваловъ, которыя являются предѣльными точками области, также и общія предѣльныя точки для двухъ рядовъ интерваловъ; такое возможное устраненіе счетнаго ряда точекъ области, уединенныхъ и предѣльныхъ, устраненіе, не отражающееся на величинѣ мѣры, является одинаково неизбѣжнымъ для всѣхъ трехъ опредѣленій; въ этомъ отношеніи третье опредѣленіе не является исключеніемъ.

Такимъ образомъ вопросъ объ опредѣленіи мѣры произвольной области сразу сводится на вопросъ о мѣрѣ совершенной области или ея части; этого вопроса мы касаемся ниже въ III главѣ.

Первымъ, кому принадлежитъ такая идея опредѣленія мѣры области, является *Smith*, при чемъ его области [2])—второго рода, имѣющія своими производными совершенныя области.

Вслѣдъ за *Smith'омъ* то-же опредѣленіе было принято *Volterra* и *de-Stefano* для областей, построенныхъ по тому-же образцу, какъ и у *Smith'a*. Всѣ другіе изслѣдователи, примыкающіе къ *Smith'y*, кромѣ *Harnack'a* и отчасти *Osgood'a*, предполагаютъ свои области совершенными или замкнутыми; къ этимъ аналистамъ относятся *Veltmann*, *Borel*, *Schoenflies* и *Young*. *Harnack* вообще не дѣлаетъ никакихъ ограничительныхъ предположеній, что же касается *Osgood'a*, то онъ въ началѣ принимаетъ область замкнутой и затѣмъ распространяетъ свое опредѣленіе.

---

[1]) Functionentheorie, S. 189, 190

[2]) См. B, C 5°.

Borel, какъ мы видѣли выше, не даетъ опредѣленіе мѣры для заданной области, а наоборотъ выдѣляетъ тѣ области, къ которымъ можетъ быть примѣнено его опредѣленіе, основывающееся на сплошныхъ интервалахъ; но въ конечномъ счетѣ его измѣримыя области— согласно теоремѣ *Schoenflies'a* [1])—являются областями замкнутыми или дополнительными замкнутымъ.

Итакъ третье, *Smith'ово*, опредѣленіе развѣтвляется на два теченія *Smith'ово* и другое, которое можно назвать *Veltmann'овымъ;* является поэтому желательнымъ выяснить, въ какой мѣрѣ можно ихъ объединить.

Изъ общихъ теоремъ касающихся мѣры области, нужно отмѣтить теоремы *Cantor'a*, *Borel'я* и *Young'a*. Теоремы послѣдняго автора въ особенности представляютъ значительный интересъ, такъ какъ онѣ даютъ возможность разсматривать первое и второе опредѣленіе мѣры какъ слѣдствіе *Smith'ова* опредѣленія. Этими теоремами поконченъ разговоръ о субъективности опредѣленія и т. д., такъ какъ третье опредѣленіе выводится изъ самой природы области и не связано ни съ какими ограниченіями вопроса, которыхъ можно было бы избѣжать.

Взявъ исходнымъ третье опредѣленіе мѣры, мы избавляемся отъ необходимости для линейныхъ областей доказывать, что это опредѣленіе не зависитъ отъ послѣдовательности выбора интерваловъ.

Для часто разсѣянныхъ областей свободные интервалы отсутствуютъ; поэтому здѣсь нужно еще разобраться, какъ распространить на нихъ третье опредѣленіе мѣры.

Классификацію областей въ зависимости отъ того, будетъ ли мѣра области равна или больше ноля, предложилъ первый *Harnack*; мы будемъ называть первыя—*полыми* (*unausgedehnte*), а вторыя—*полными* (*ausgedehnte*).

56. Вопросъ о строеніи области привлекъ большее число работниковъ и въ большей мѣрѣ можетъ считаться законченнымъ.

Послѣ того какъ изъ понятій о взаимно однозначномъ отнесеніи областей, о предѣльной точкѣ (*Bolzano*) и о разсѣяніи областей по интервалу (*Hankel*), *Cantor*, установивъ понятіе о производной области, положилъ основаніе новой теоріи, развитіе ея шло довольно быстро.

Изъ двухъ вопросовъ, которые можно предложить въ этой теоріи, 1) изслѣдовать свойства данной области и 2) по заданнымъ условіямъ построить область, въ началѣ привлекла къ себѣ почти все вниманіе первая задача.

Изученіе данной области привело къ теоремѣ *Cantor-Bendixson'a*, касающейся замкнутыхъ областей, и къ понятіямъ о *ад-* и *кохэренціи*. Теорема *Cantor-Bendixson'a* по справедливости можетъ быть названа

---

[1]) См. 39°.

основной теоремой въ теоріи областей; геометрическому ея уясненію способствовали *Schoenflies* и *Young*. Тотъ фактъ, что эта теорема относится къ замкнутымъ областямъ, не умаляетъ ея общаго значенія, такъ какъ изученіе незамкнутыхъ областей такъ или иначе должно опираться на соотвѣтственныя замкнутыя области и—слѣдовательно—на основную теорему.

Обращеніе къ свободнымъ интерваламъ (*Dini*) имѣло слѣдствіемъ классификацію точекъ на границы, внутреннія и внѣшнія точки (*Pincherle* и *Veltmann*), играющую значительную роль въ выясненіи строенія области. *Cantor'ова* классификація областей по родамъ и порядкамъ влекла за собой классификацію предѣльныхъ точекъ (*du-Bois-Beymond* и *Cantor*), которая дѣйствовала въ томъ же направленіи. Благодаря всему этому строеніе всякой безконечной области является для насъ настолько же яснымъ, какъ простѣйшія теоремы элементарной геометріи.

Помимо областей общаго вида, особенно въ приложеніяхъ ученія объ областяхъ часто приходится наталкиваться еще на области особаго строенія; это 1) области, состоящія изъ различныхъ точекъ, входящихъ въ составъ безконечнаго ряда областей, и 2) области точекъ, общихъ безконечному ряду областей.

Первыя области отъ *Ascoli* и *du-Bois-Beymond'a* привели къ классификаціи областей (*Baire*) на двѣ *категоріи*, открывающей новыя перспективы; тоже самое мы видимъ и относительно вторыхъ областей, изслѣдованія которыхъ въ работахъ *Borel'я* и *Young'a* привели къ весьма интереснымъ результатамъ.

Съ тѣми и другими областями мы переходимъ въ кругъ вѣдѣнія другой задачи: установленія областей, удовлетворяющихъ заданнымъ напередъ условіямъ.

Въ началѣ здѣсь все ограничивалось только построеніемъ отдѣльныхъ примѣровъ, которые должны были или доказать, или опровергнуть извѣстное утвержденіе или же пояснить вновь вводимое понятіе. Съ теченіемъ времени набралось этихъ примѣровъ достаточно, и являлось желательнымъ внести сюда нѣкоторый порядокъ; необходимо было установить общій пріемъ, при наличности котораго всѣ отдѣльныя построенныя раньше области оказались бы только частными случаями.

Установленію такого пріема посвящена вторая глава настоящаго изслѣдованія; взявъ тамъ три *основныхъ типа размѣщенія*, мы старались вывести изъ нихъ все разнообразіе мыслимыхъ областей. Кромѣ того, введя обозначеніе извѣстнаго типа, мы можемъ простымъ символомъ выразить строеніе данной области и, установивъ по даннымъ условіямъ соотвѣтственный *типъ размѣщенія,* строить области, отвѣчающія этому типу.