

ИЗВѢСТІЯ

Томскаго Технологическаго Института

Императора Николая II.

т. 5. 1907. № 2.

В. Л. Некрасовъ.

СТРОЕНІЕ И МѢРА ЛИНЕЙНЫХЪ ТОЧЕЧНЫХЪ ОБЛАСТЕЙ.

Предисловіе. Глава первая. I—VIII, 1—102.

Теорія точечныхъ областей, созданная *G. Cantor'*омъ, къ началу XX вѣка представляла собой уже вліятельную вѣтвь математики, вѣтвь, которая съ каждымъ днемъ расширяла кругъ своего примѣненія. Но всѣ данныя этой теоріи были разбросаны по различнымъ журналамъ, и не было такого трактата, гдѣ всѣ результаты теоріи были бы собраны и классифицированы¹⁾. Эту задачу отчасти выполнилъ *É. Borel* въ 1898 г. въ его „*Leçons sur la théorie des fonctions*“, преслѣдуя впрочемъ при этомъ свои особенныя задачи; и только въ 1900 г. *Schoenflies* въ отчетѣ, представленномъ нѣмецкому обществу математиковъ, и годомъ раньше—въ „*Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*“ далъ систематическое изложеніе всего ученія, какъ оно стояло къ 1900 г.

Преслѣдуя цѣли систематизаціи, *Schoenflies* почти не интересовался исторической перспективой развитія всего ученія; поэтому, если начать знакомиться съ теоріей областей только по отчету *Schoenflies'a*, трудно себѣ представить, какъ развивалось это ученіе, и кому обязано своимъ появленіемъ то или другое новое понятіе.

Первая и третья глава настоящей работы имѣютъ цѣлью дополнить въ этомъ отношеніи работу *Schoenflies'a*, поскольку дѣло идетъ о строеніи и мѣрѣ точечныхъ областей, но не касается теоріи трансфинитныхъ чиселъ и приложений теоріи областей къ теоріи функций и геометріи²⁾. Историческій очеркъ, заключающійся въ этихъ главахъ, дастъ, я надѣюсь, достаточно полную картину развитія ученія съ самаго его возникновенія и до послѣдняго времени.

Слѣдя за наростаніемъ новой теоріи, я могъ быть очень сжатымъ, пока рѣчь шла о сочиненіяхъ болѣе ранняго періода, отчасти—въ виду того, что ихъ отношеніе къ теоріи областей было сравнительно отдаленное, если не считать работъ *G. Cantor'a*, отчасти-же потому, что въ этихъ работахъ все болѣе важное съ изчерпывающей полнотой было изложено въ отчетѣ *Schoenflies'a*; по мѣрѣ-же того, какъ я переходилъ къ работамъ болѣе новымъ, въ особенности появившимся послѣ этого отчета, я старался извлечь изъ нихъ все существенное,

¹⁾ Я долженъ оговориться, что мнѣ не удалось познакомиться съ работой *Vivanti*, напечатанной въ „*Bibliotheca Mathematica*“, 1892.

²⁾ См. ниже стр. 98, 101-102.

чтобы, помимо историческаго обзора, моя работа могла до нѣкоторой степени быть продолженіемъ соотвѣтственныхъ главъ отчета *Schoenflies'a*. Мнѣ приходилось при этомъ сдѣлать нѣкоторыя измѣненія въ доказательствахъ теоремъ, нѣкоторыя теоремы добавить и предложить кой-гдѣ измѣненія въ формулировкѣ и опредѣленіи. Такимъ образомъ первая и третья главы должны, по своему замыслу, служить частью — дополненіемъ, съ другой только точки зрѣнія, работы *Schoenflies'a*, частью же ея продолженіемъ.

Въ главѣ второй, посвященной строенію линейной области, собравъ все установленныя до сихъ поръ результаты, я перехожу къ изученію трехъ *типовъ размѣщенія* ω , $*\omega$, $\tilde{\omega}$ и показываю, какимъ образомъ конечная или трансфинитная комбинація этихъ типовъ даетъ области все возрастающей сложности, обладающія строеніемъ, вполне характеризующимъ ихъ типомъ размѣщенія. Въ концѣ главы я показываю, что для всякой заданной замкнутой области можетъ быть указанъ вполне опредѣленный типъ; что же касается областей незамкнутыхъ, для нѣкоторыхъ изъ нихъ такой типъ также можетъ быть опредѣленъ, но еще не удастся доказать, что этотъ типъ существуетъ для *каждой* незамкнутой области. Пользуясь типами размѣщенія, мы можемъ характеризовать прерывную функцію дѣйствительной переменнѣйшей опредѣленнымъ символомъ, указывающимъ размѣщеніе ея точекъ разрыва.

По поводу содержанія четвертой главы я долженъ замѣтить, что, благодаря ряду внѣшнихъ условій, печатанье настоящей работы, начатое осенью 1904 г., растянулось на два съ половиной года. Само собой понятно, что за это время появились въ печати новыя изслѣдованія, которыя нельзя было не отмѣтить, и которыя не могли не оказать вліянія на содержаніе моей работы. Эта работа по первоначальному плану должна была состоять изъ трехъ главъ, посвященныхъ вторая и третья — строенію и мѣрѣ области и первая — исторіи развитія этихъ ученій. Въ виду указанныхъ выше условій къ первой главѣ пришлось добавить новую третью главу, посвященную новѣйшимъ работамъ въ соотвѣтственныхъ областяхъ науки; что же касается прежней третьей главы, превратившейся теперь въ четвертую, то она подверглась, сравнительно съ первоначальнымъ предположеніемъ, почти полной переработкѣ. Сохранивъ ея начало въ томъ видѣ, какъ оно проектировалось раньше, я, въ виду изчерпывающихъ работъ *W. H. Young'a* въ теоріи мѣры незамкнутыхъ областей, отказался отъ своихъ попытокъ въ этомъ отношеніи. Мнѣ приходилось такимъ образомъ или совершенно выбросить эту послѣднюю главу изъ своей работы, нарушивъ при этомъ тотъ планъ, который былъ въ началѣ

составленъ, и въ предположеніи котораго была изложена и уже напечатана первая глава; или-же—удержать эту главу и слѣдовать въ ученіи о мѣрѣ за *Young'омъ*; я остановился на послѣдней мысли и рѣшилъ провести все касающееся измѣренія области въ систематическій видъ, такъ чтобы придать соотвѣтствующему матеріалу форму достаточно полного „ученія о мѣрѣ“, какое названіе я и придалъ этой главѣ. Въ ней мы находимъ такимъ образомъ только объединеніе добытыхъ до сихъ поръ результатовъ, при чемъ окончательное рѣшеніе вопроса о мѣрѣ находится въ связи съ изслѣдованіемъ характера нѣкоторой незамкнутой области, которую я назвалъ *элементарной*; эта элементарная область нѣсколько отличается отъ той незамкнутой области, о которой говоритъ *Young*, въ смыслѣ указанія нѣсколькихъ свойствъ, которыми она должна обладать; но обладаетъ ли она теоремой внутренняго сложения, что является рѣшающимъ моментомъ въ ученіи о мѣрѣ области, это остается еще вопросомъ открытымъ.

Затѣмъ по первоначальному плану я предполагалъ посвятить свою работу не только линейнымъ областямъ, но также и областямъ двухъ измѣреній; слѣды этого намѣренія встрѣчаются въ первой главѣ; но потомъ оказалось, что и безъ включенія послѣднихъ областей работа приняла довольно значительные размѣры; да кромѣ того за послѣднее время появился рядъ изслѣдованій, касающихся теоріи двухмѣрныхъ областей и слишкомъ далеко уходящихъ въ сторону отъ того круга идей, которому посвящена настоящая работа. Поэтому я счелъ за лучшее ограничить ея планъ, оставивъ двухмѣрныя области за ея границами, не смотря даже на то, что я занимался вопросомъ объ этихъ областяхъ еще раньше, чѣмъ выяснился планъ работы въ ея настоящемъ видѣ.

Замѣчу еще, что я только что прочелъ публикацію о выходѣ въ Лондонѣ сочиненія *W. H. Young'a* и *G. C. Young'a* „Theory of sets of points“, которое вѣроятно даетъ систематическое изложеніе всего ученія объ областяхъ; но я не считаю возможнымъ задерживать еще выпускъ въ свѣтъ настоящей работы, главной частью которой является глава вторая; „теорія областей—по выраженію *Schoenflies'a* ¹⁾—есть нѣкотораго рода молекулярная теорія математическихъ величинъ“, и вотъ это-то молекулярное изслѣдованіе точечной области и возсозданіе ея изъ элементовъ ω , $^*\omega$, $\tilde{\omega}$ и служитъ какъ разъ цѣлью второй главы. И такъ какъ ²⁾ „теорія областей—вся въ будущемъ, но ея вліяніе растеть съ каждымъ днемъ“, что доказываетъ все возра-

¹⁾ Bericht, S. 113.

²⁾ ib., S. III.

стающее число статей, ей посвященныхъ, я позволяю себѣ надѣяться, что изученіе типовъ размѣщенія будетъ и въ настоящемъ его видѣ не бесполезно для уясненія структуры областей.

Прилагая въ концѣ книги литературу ученія объ областяхъ, я указалъ всѣ извѣстныя мнѣ сочиненія, даже въ видахъ полноты—тѣ, которыя не имѣютъ непосредственнаго отношенія къ теоріи строенія и мѣры линейной области, а касаются только теоріи трансфинитныхъ чиселъ или двухмѣрныхъ областей; эти послѣднія сочиненія отмѣчены у меня звѣздочкой и ноликомъ отмѣчены тѣ, познакомиться съ которыми мнѣ не удалось.

Томскъ,
9 января 1907 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

| | Стр. |
|---|------|
| ГЛАВА I. | |
| Историческій очеркъ | 1 |
| ГЛАВА II. | |
| Строеніе линейныхъ областей. | |
| 1. Предварительныя понятія и опредѣленія | 103 |
| 2. Рѣдко разсѣянныя области | 117 |
| 3. Основные и производные типы размѣщенія | 120 |
| 4. Сложные типы размѣщенія | 140 |
| 5. Смѣшанные типы размѣщенія | 176 |
| 6. Строеніе произвольной области. | 201 |
| ГЛАВА III. | |
| Новѣйшія работы | 208 |
| ГЛАВА IV. | |
| Ученіе о мѣрѣ области | 227 |
| Литература | |
| | 245 |

ИСПРАВЛЕНИЯ.

| Стр. | Строка. | Напечатано: | Должно быть: |
|------|-----------|--|--|
| 25 | 6 св. | m_1 | m_p |
| " | 10 " | $(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$ | $-(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$ |
| " | 14-16 св. | m_n | m_p |
| 55 | 6 сн. | i ; Рона | P_i ; она |
| 78 | 3 " | $\sum i$ | $\sum l'_{2i}$ |
| 92 | 12 " | серединой | внутренней для |
| " | 7 " | $P^{(0)}$ будетъ | $P^{(0)}$, не входящая въ P , будетъ |
| 99 | 13 св. | <i>Peano, Jordan</i> и <i>Lebesgue</i> ; два предпоследнихъ | <i>Peano</i> и <i>Jordan</i> ; два по- следнихъ |
| 100 | 15 сн. | III | IV |
| 128 | 9 " | 83. Положимъ | Положимъ |
| 144 | 4 " | 44° | 95° |
| 208 | 15 св. | v_1 'ой | v_1 'ого |

ГЛАВА I.

Историческій очеркъ.

1. Теорія точечныхъ областей—одна изъ самыхъ юныхъ вѣтвей чистой математики; ея идеи приняли нѣкоторую опредѣленную форму только какихъ нибудь двадцать лѣтъ тому назадъ.

Медленно, но вѣрно эта теорія завоевывала себѣ право на существованіе, и теперь уже не можетъ быть сомнѣній относительно ея будущей роли въ обоснованіи самыхъ деликатныхъ понятій математическаго анализа.

Со времени *Leibnitz'a* и *Newton'a*, создавшихъ анализъ бесконечно малыхъ, изъ двухъ элементовъ, на которыхъ строился этотъ анализъ,—функции и аргумента, привлекла на себя вниманіе только *функция*, тогда какъ относительно *аргумента* какъ будто все молчаливо соглашались, что тамъ изучать нечего.

Но понемногу выяснилось, что и съ аргументомъ дѣло стоитъ далеко не такъ просто, какъ казалось сначала; поэтому пришлось и ему удѣлить надлежащее вниманіе. Создалась *теорія аргумента* въ видѣ *теоріи точечныхъ областей*.

Впервые понятіе объ *области* (Menge) появились у *Bolzano* (1847); онъ опредѣляетъ ¹⁾ область, какъ совокупность (Inbegriff), размѣщеніе частей которой безразлично, т. е. относительно которой ничто существенное для насъ не мѣняется, если мѣняется только размѣщеніе. Область единицъ извѣстнаго рода *Bolzano* называетъ *множественностью* (Vielheit) ²⁾; онъ различаетъ ³⁾ конечныя или счетныя (zählbare) области и области бесконечныя и ведетъ рѣчь ⁴⁾ объ области *всѣхъ иррациональныхъ чиселъ*.

Затѣмъ ⁵⁾ *Bolzano* говоритъ, что „не все бесконечныя области, относительно ихъ множественности, можно считать равными между

¹⁾ Paradoxien des Unendlichen. 1889, стр. 4

²⁾ Стр. 4.

³⁾ Стр. 6.

⁴⁾ Стр. 21.

⁵⁾ Стр. 27.

собой“; но въ этомъ отношеніи онъ еще не пришелъ къ установленію понятія о *равномѣрности* въ смыслѣ *Cantor'a*, хотя понятіе о взаимно-однозначномъ отнесеніи разныхъ областей у него выражено вполне точно ¹⁾: „Двѣ безконечныя области могутъ стоять другъ къ другу въ такомъ отношеніи, что возможно—съ одной стороны—каждый предметъ, принадлежащій одной области, соединить съ предметомъ другой такъ, что ни одинъ предметъ этихъ областей не останется безъ пары и не войдетъ въ двѣ или нѣсколько разныхъ паръ; при этомъ—съ другой стороны—возможно, что одна изъ этихъ областей заключаетъ въ себѣ другую, какъ часть, такъ что множественности, которыя онѣ представляютъ, если мы предметы разсматриваемъ какъ единицы, имѣютъ другъ по отношенію къ другу самыя разнообразныя соотношенія“. Это же соотношеніе взялъ исходной точкой для изслѣдованія безконечныхъ областей *G. Cantor* ²⁾ и послѣ него—*Dedekind* ³⁾.

Затѣмъ нужно отмѣтить ⁴⁾ связанные съ понятіемъ о счетности „парадоксы“; *Bolzano* признаетъ ⁵⁾ далѣе требующимъ ближайшаго выясненія понятіе о *величинѣ* протяженія“, т. е. понятіе о мѣрѣ непрерывной области; при этомъ онъ обращаетъ ⁶⁾ вниманіе на значеніе границы областей, на вліяніе ⁷⁾ на мѣру области удаленія счетнаго ряда точекъ, при чемъ впервые появляются въ наукѣ *предѣльныя точки*, играющія такую большую роль въ теоріи областей.

Такимъ образомъ приходится признать, что родоначальникомъ современной теоріи областей былъ *Bolzano*, но развилъ ее и поставилъ на строго научную почву *G. Cantor*.

2. Главные вопросы, которые сдѣлались задачей теоріи областей это—вопросы о *мѣрѣ* и *строеніи* области.

Понятіе о *мѣрѣ* области возникло при изслѣдованіи возможности интегрированія прерывной функціи; поэтому это понятіе является въ той или иной формѣ вездѣ, гдѣ идетъ рѣчь объ опредѣленномъ интегралѣ.

Первымъ, кто направилъ въ 1854 году математическую мысль на „измѣреніе“ области, нужно назвать *Riemann'a*. Устанавливая извѣстное условіе интегрируемости, *Riemann* дѣлитъ интервалъ (a, b) , въ которомъ производится интегрированіе, на части δ_i и разсматриваетъ ⁸⁾

¹⁾ Стр. 28.

²⁾ А. М. 2. Стр. 311.

³⁾ Was sind und was sollen die Zahlen стр. 19.

⁴⁾ § 29 и § 33.

⁵⁾ Стр. 80.

⁶⁾ § 41

⁷⁾ Стр. 83.

⁸⁾ Werke, 1876, стр. 226.

общую длину (Gesamtgrösse) тѣхъ интерваловъ δ_i , гдѣ колебаніе функціи превышаетъ нѣкоторое малое число σ ; здѣсь еще нѣтъ этого понятія о мѣрѣ въ тѣсномъ смыслѣ, но *Riemann* дѣлаетъ еще шагъ къ его установленію; онъ примѣняетъ свой признакъ къ изслѣдованію функціи

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2},$$

которая дѣлаетъ разрывы для всѣхъ значеній переменнѣй, равныхъ $\frac{p}{2n}$, гдѣ p и n —числа взаимно простые. Здѣсь *Riemann* еще не включаетъ *всѣ* разрывы въ нѣкоторые интервалы; преслѣдуя свою цѣль, онъ дѣлаетъ это только относительно тѣхъ точекъ $x = \frac{p}{2n}$, въ которыхъ разрывы $> \sigma$, и говоритъ, что общая длина такихъ интерваловъ можетъ быть произвольно мала.

3. Слѣдующимъ, кто взялся въ 1870 г. за мысль, брошенную *Riemann*'омъ, былъ *Hankel*, который формулировалъ ее уже болѣе полно и точно, установивъ ¹⁾ понятіе о *часто разсыянныхъ областяхъ* (überall dicht—въ терминологіи *Cantor*'а), точки которыхъ онъ назвалъ *точками, заполняющими отръзокъ* (Punkte, die Strecke erfüllen), и *рѣдко разсыянныхъ* (по *Cantor*'у—nirgends dicht), точки которыхъ на отръзкѣ zerstreut liegen. *Hankel* старается доказать теорему, которую можно выразить такъ: „Если область рѣдко разсыяна, то общая длина s включающихъ ее интерваловъ можетъ быть произвольно мала, и обратно“.

Эта теорема, какъ было доказано впоследствии, не справедлива. Для насъ же представляется только интереснымъ посмотрѣть, какимъ путемъ *Hankel* приходитъ къ этой *общей длинѣ*. Онъ говоритъ: если область состоитъ изъ конечнаго числа точекъ, s составляется изъ интерваловъ, которые лежатъ около каждой изъ нихъ; такъ какъ каждый изъ этихъ интерваловъ можетъ быть сдѣланъ произвольно малымъ, то будетъ произвольно мала и s . Если число точекъ бесконечно, между ними—по опредѣленію рѣдко разсыянной области—лежатъ еще свободные интервалы; дѣлимъ тогда весь отръзокъ на интервалы такъ, чтобы—во первыхъ—каждый изъ нихъ обнималъ одну изъ точекъ области, и—во вторыхъ—чтобы они вмѣстѣ взятые *заполнили весь интервалъ* (a, b) . Если затѣмъ каждый изъ интерваловъ будетъ

¹⁾ М. А. 16. Стр. 87.

сведенъ до его $\frac{1}{n}$ части, при соблюденіи перваго условія, то остальная $\frac{n-1}{n}$ часть (a, b) будетъ свободна отъ точекъ области. Такимъ образомъ s можетъ быть сдѣлана произвольно малой.

Центральный пунктъ предыдущаго доказательства заключается—во первыхъ—въ предположеніи, что, выражаясь современнымъ языкомъ, число точекъ области счетно ¹⁾, и—во вторыхъ—что можно построить около каждой точки области интервалы такимъ образомъ, чтобы они не захватывали другъ друга; послѣднее можетъ быть до нѣкоторой степени выполнено для рѣдко разсѣянной *счетной* области: именно—для всѣхъ уединенныхъ ея точекъ построение этихъ интерваловъ возможно; что же касается предѣльныхъ точекъ, то интервалы, отвѣчающіе такимъ точкамъ, не могутъ не захватывать другихъ интерваловъ. Но все таки, несмотря на этотъ фактъ, для этихъ областей s можетъ быть произвольно малой, какъ это можно доказать инымъ путемъ. Что же касается перваго несознаннаго *Hankel'емъ* предположенія, то оно является совершенно произвольнымъ и невѣрнымъ; извѣстно, что существуютъ несчетныя рѣдко разсѣянныя области, именно—совершенныя, для которыхъ построение интерваловъ *Hankel'я* дѣлается невозможнымъ.

Интереснымъ будетъ замѣтить, что идея *Hankel'я* относительно построения интерваловъ около каждой изъ точекъ данной области нашла впослѣдствіи свое развитіе въ работахъ *Borel'я* и дала тамъ очень интересные результаты.

4. Затѣмъ на путь изученія точечныхъ областей вступилъ съ 1872 года *G. Cantor*, когда онъ ²⁾, какъ основу для своихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій, выставилъ положеніе, что „каждому численному значенію отвѣчаетъ единственная точка прямой, и обратно“; такимъ образомъ были поставлены въ тѣсную связь одноѣрный континуумъ и геометрія прямой. Въ этой же статьѣ *Cantor* устанавливаетъ понятіе о *предѣльной* точкѣ и о *производныхъ* областяхъ, *классифицируя* области по видамъ въ зависимости отъ существованія извѣстнаго ряда производныхъ.

Въ томъ-же году ³⁾ *Cantor* впервые обращаетъ вниманіе на *счетность* области, устанавливая взаимно однозначное соотвѣтствіе между областями алгебраическихъ и цѣлыхъ чиселъ и доказывая несчетность всѣхъ дѣйствительныхъ чиселъ.

¹⁾ Здѣсь и вездѣ ниже мы понимаемъ подъ *счетными* областями, области конечныя и области перваго разряда.

²⁾ М. А. 5.—А. М. 2. Стр. 342.

³⁾ Сг. J. 77.

До настоящей минуты изучение областей носило случайный характер; послѣ же того, какъ *Cantor* далъ опредѣленіе *предѣльной точки* и *производной* области, учение объ областяхъ имѣло задатки къ тому, чтобы сдѣлаться самостоятельной *теоріей* съ своимъ особеннымъ содержаніемъ и своими методами изслѣдованія.

5. Далѣе въ 1875 году¹⁾ въ работѣ *Smith'a* вопросъ о мѣрѣ области получаетъ новое выясненіе; *Smith* даетъ нѣсколько примѣровъ рѣдко разсѣянныхъ областей и вычисляетъ общую сумму занятыхъ ими интерваловъ.

А. Построивъ на интервалѣ (0, 1) рѣдко разсѣянные области

$$P_1 \equiv \left\{ \frac{1}{n'} \right\}, P_2 \equiv \left\{ \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} \right\}, \dots, P_m \equiv \left\{ \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \dots + \frac{1}{n^{(m)}} \right\},$$

гдѣ независимо другъ отъ друга

$$n^{(i)} = 1, 2, 3, 4, \dots, n \dots,$$

и гдѣ точки каждой P_{i-1} служатъ предѣльными для P_i , *Smith* слѣдующимъ образомъ включаетъ точки P_m въ интервалы; онъ беретъ сначала интервалъ δ_0 вправо отъ точки 0. Въ интервалѣ $(\delta_0, 1)$ имѣется конечное число n_1 точекъ области P_1 ; вправо отъ каждой изъ этихъ точекъ P_1 строимъ интервалы δ_1 , сумма которыхъ будетъ $n_1 \delta_1$; въ каждомъ изъ остающихся послѣ этого интерваловъ, а слѣдовательно и во всѣхъ вмѣстѣ взятыхъ, лежитъ конечное число n_2 точекъ P_2 ; вправо отъ каждой изъ нихъ строимъ интервалы δ_2 ; и т. д. Такимъ образомъ всѣ точки P_m окажутся лежащими внутри или на границахъ конечнаго числа

$$N = 1 + n_1 + n_2 + \dots + n_m$$

интерваловъ, общая сумма которыхъ будетъ

$$\delta_0 + n_1 \delta_1 + n_2 \delta_2 + n_3 \delta_3 + \dots + n_m \delta_m = \delta;$$

если при заданномъ ε взять

$$\delta_0 < \frac{\varepsilon}{3(m+1)}, \quad \delta_i < \frac{\varepsilon}{3(m+1)n_i},$$

то будетъ

$$\delta < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Назвавъ $\bar{\delta}$ —наименьшій изъ интерваловъ δ_i , построимъ вправо и влево отъ cadaго изъ нихъ еще интервалы δ ; тогда всѣ точки P_m

¹⁾ Proceedings of Lond Math Soc. 6, p 140.

будутъ лежать *внутри* новыхъ интерваловъ, общая сумма которыхъ будетъ

$$\delta + 2 N \cdot \bar{\delta} < 3 \delta < \varepsilon.$$

В. Отрѣзокъ $(0, 1)$ дѣлится на m частей; $m - 1$ первая изъ нихъ дѣлится снова на m частей; къ каждой изъ нихъ примѣняется тотъ же процессъ, и т. д., такъ что послѣ каждого дѣленія остается исключенной $\frac{1}{m}$ предыдущаго интервала; точки дѣленія даютъ область P . Для нея сумма исключенныхъ интерваловъ, которые—слѣдовательно—не будутъ заключать внутри себя точекъ P , будетъ

$$\frac{1}{m}, \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m^2}, \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m^2} + \frac{(m-1)^2}{m^3}, \dots,$$

или

$$1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right), 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2, \dots, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n;$$

при безконечномъ возрастаніи n

$$\lim \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \right\} = 1.$$

С. Отрѣзокъ $(0, 1)$ дѣлится на m частей, каждая изъ $m - 1$ первыхъ дѣлится на m^2 , каждая изъ $(m - 1)(m^2 - 1)$ на m^3 ; и т. д. Тогда сумма несвободныхъ интерваловъ послѣ перваго, втораго, третьаго и т. д. дѣленія будетъ

$$\frac{m-1}{m}, \frac{m-1}{m} \frac{m^2-1}{m^2}, \dots, \frac{m-1}{m} \frac{m^2-1}{m^2} \dots \frac{m^n-1}{m^n}$$

или

$$1 - \frac{1}{m}, \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right), \dots, \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{m^n}\right);$$

слѣдовательно сумма свободныхъ интерваловъ окажется

$$1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right), 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right), \dots, 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{m^n}\right).$$

При безконечномъ возрастаніи n предѣлъ суммы s_n этихъ свободныхъ интерваловъ

$$\lim s_n = 1 - \lim \prod_1^n \left(1 - \frac{1}{m^n}\right) = 1 - E\left(\frac{1}{m}\right)$$

оказывается отличнымъ отъ 1; слѣдовательно сумма несвободныхъ интерваловъ, равная $E\left(\frac{1}{m}\right)$, для данной рѣдко разсѣянной области не будетъ равна нулю.

Этотъ послѣдній примѣръ имѣлъ своей задачей опровергнуть утверждение *Hankel'*а относительно рѣдко разсѣянныхъ областей.

Работа *Smith'a* представляетъ интересъ въ двухъ отношеніяхъ: во первыхъ—*Smith* даетъ первый примѣръ для установленныхъ *Cantor'*омъ понятій о предѣльной точкѣ и производной, повидимому—не зная о работахъ *Cantor'a*, и—во вторыхъ—онъ строитъ области В и С и вычисляетъ для нихъ мѣру, положивъ въ основаніе *интервалы, свободные отъ точекъ области.*

6. *Ascoli* ¹⁾ строитъ систему часто разсѣянныхъ областей

$$P_1, P_2, \dots, P_{s_1}, P_{s_1+1}, P_{s_1+2}, \dots, P_{s_2}, \dots,$$

точки которыхъ удовлетворяютъ условію

$$\overline{x_i x_{i+1}} < \eta_n \quad \text{для } P_{s_{n-1}+1}, P_{s_{n-1}+2}, \dots, P_{s_n}$$

при рядѣ бесконечно убывающихъ положительныхъ величинъ

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n, \dots$$

Въ 1875 г. *du-Bois-Reymond* ведетъ рѣчь ²⁾ о часто и рѣдко разсѣянныхъ областяхъ Р, о *точкахъ сущенія* (*Verdichtungspunkt*) различныхъ порядковъ, объ областяхъ, для которыхъ существуютъ Р', Р'', и т. д., и приводитъ, какъ примѣръ, корни *Kettensinus'a*

$$\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{\sin \dots \sin \frac{1}{\sin x}}}$$

Относительно роли теории областей въ большомъ трактатѣ *Dini* (1878 г.) самъ *Cantor*, упоминая о производной Р' области Р, говоритъ ³⁾, что тамъ „мы видимъ это понятіе еще болѣе развитымъ, потому что оно послужило исходной точкой для ряда замѣчательныхъ обобщеній извѣстныхъ аналитическихъ теоремъ“.

Между прочимъ *Dini* первый—кажется ⁴⁾—высказалъ и доказалъ ⁵⁾ теорему:

„Для области перваго рода въ каждой части основного интервала имѣются интервалы, свободные отъ точекъ области; и эта часть мо-

¹⁾ Atti d. Accademia dei Lincei (2) 2, 1875 г. и (3) 2, 1878 г.

²⁾ Сг. J. 79.

³⁾ А. М. 2. Стр. 350.

⁴⁾ Въ настоящее время у меня нѣтъ въ рукахъ итальянскаго изданія „*Fondamenti*“, отъ котораго нѣмецкое изданіе мѣстами отличается. См. *Encyklopädie*, I. р. 200.

⁵⁾ Grundzüge, 26.

жетъ быть раздѣлена на интервалы такимъ образомъ, что сумма не-свободныхъ интерваловъ будетъ произвольно мала“.

7. Въ виду установленнаго ¹⁾ *Cantor'омъ* (1877 г.) понятія о *раз-мѣрнѣ* (*Mächtigkeit, puissance*) и возможности однозначно относить не-прерывныя области *n'* мѣрнаго пространства къ отрѣзку прямой, яви-лось прежде всего необходимымъ изучить и классифицировать области на прямой, такъ называемыя *линейныя* области, что и дѣлаетъ *Cantor* въ рядѣ статей въ *Mathematische Annalen*. Въ 1879 г. *Cantor* вво-дитъ ²⁾ области перваго и втораго рода, вводитъ терминъ *область ча-сто разсѣянная* по интервалу; говоритъ, что для такой области P' тождественна съ интерваломъ, такъ что часто разсѣяныя области всѣ будутъ областями втораго рода. Здѣсь же онъ указываетъ, что об-ласти перваго рода будутъ непременно счетныя, также какъ и нѣко-торыя области втораго рода.

Въ 1880 г. *du-Bois-Reymond*, упоминая о *G. Cantor'н*, утверж-даетъ ³⁾, что о существованіи точекъ сгущенія порядка бесконечно-сти онъ писалъ *Cantor'у* еще за нѣсколько лѣтъ до 1880 г. „Къ точ-камъ сгущенія безпрестанно убывающихъ отрѣзковъ, при чемъ поря-докъ этихъ точекъ конеченъ или бесконечно великъ, къ выбору тер-мина *panachisch*, вмѣсто позже введеннаго *Cantor'омъ* *überall dicht*, *du-Bois-Reymond* предполагалъ вернуться позже. Это и имѣло мѣсто въ 1882 г. въ „*Allgemeine Functionentheorie*.“

Въ 1880 г. *Pincherle* въ своемъ трактатѣ по теоріи функций даетъ ⁴⁾ нѣкоторыя свѣдѣнія изъ теоріи областей. Область одного или многихъ измѣреній онъ называетъ *varietà*, элементы области—точками (*posto o punto*); онъ говоритъ еще объ окрестности точки.

Если для точекъ области можетъ быть построена окрестность, сво-бодная отъ точекъ области, область образуетъ *serie discreta*.

Затѣмъ *Pincherle* различаетъ точки *внутреннія* отъ точекъ *контура*, но только для континуума; онъ говоритъ, что непрерывная область можетъ имѣть контуръ, но не имѣть внутреннихъ точекъ, какъ напри-мѣръ—область точекъ, опредѣляемыхъ условіемъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Наконецъ онъ доказываетъ по *Weierstrass'у* существованіе предѣль-ныхъ точекъ для области, состоящей изъ бесконечнаго числа точекъ.

¹⁾ Сг. J. 84

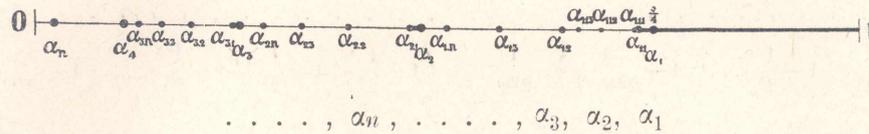
²⁾ А. М. 15

³⁾ А. М. 16, стр. 128.

⁴⁾ *Giornale de Matematiche*, 18, p. 234.

8. Примѣры, относящiеся къ вопросу о мѣрѣ области, мы находимъ ¹⁾ въ работѣ *Volterra* (1881). Все съ тою же цѣлью опровергнуть утверждение *Hankel'*я, *Volterra* строить рѣдко разсѣянную область такъ:

Взявъ на отрѣзкѣ $(0, 1)$ отъ праваго конца интервалъ $(\alpha_1, 1)$ равный $\frac{1}{2^2}$, онъ помѣщаетъ между 0 и α_1 счетный рядъ точекъ



такъ, чтобы онѣ имѣли 0 предѣльной точкой

$$\lim_{n \dots \infty} \alpha_n = 0.$$

Интервалъ $(\alpha_1, 1)$ остается свободнымъ; на немъ въ дальнѣйшемъ не распредѣляется болѣе никакихъ точекъ области.

На каждомъ изъ остальныхъ отрѣзковъ (α_{n+1}, α_n) мы помѣщаемъ снова счетный рядъ точекъ

$$\dots, \alpha_{nn'}, \dots, \alpha_{n3}, \alpha_{n2}, \alpha_{n1},$$

для котораго—во первыхъ— α_{n+1} служитъ предѣльной точкой

$$\lim_{n' \dots \infty} \alpha_{nn'} = \alpha_{n+1},$$

и—во вторыхъ—интервалъ $(\alpha_{nn'}, \alpha_n)$ составляетъ $\frac{1}{2^4}$ часть интервала (α_{n+1}, α_n) .

Этотъ послѣднiй интервалъ мы оставляемъ свободнымъ, въ каждомъ же изъ остальныхъ $(\alpha_{nn'+1}, \alpha_{nn'})$ помѣщаемъ снова по счетному ряду

$$\dots, \alpha_{nn'n''}, \dots, \alpha_{nn'3}, \alpha_{nn'2}, \alpha_{nn'1},$$

для котораго

$$\lim \alpha_{nn'n''} = \alpha_{nn'+1}, (\alpha_{nn'1}, \alpha_{nn'}) = \frac{1}{2^6} (\alpha_{nn'+1}, \alpha_{nn'}); \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что получающаяся при этомъ процессѣ область $\{a\}$ будетъ рѣдко разсѣяна. Для этой области суммы длинъ свободныхъ и несвободныхъ отрѣзковъ будутъ для перваго, втораго, . . . , *m*'аго дѣленiя таковы:

¹⁾ Giornale di Matematiche 19

свободные интервалы

несвободные

1) $\frac{1}{2^2}$,

$1 - \frac{1}{2^2}$,

2) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \frac{1}{2^4}$,

$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)$,

3) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \cdot \frac{1}{2^6}$,

$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \left(1 - \frac{1}{2^6}\right)$,

.....
 m) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^{2m-2}}\right) \cdot \frac{1}{2^{2m}}$

.....
 $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \left(1 - \frac{1}{2^6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right)$.

Слѣдовательно, при безконечномъ продолженіи процесса, сумма не- свободныхъ интерваловъ

$$\prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right) = E\left(\frac{1}{4}\right)$$

будетъ отлична отъ 0.

9. *Harnack* въ своихъ „Elemente“ (1881)¹⁾ включаетъ всѣ точки x данной области въ окрестности $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ и интересуется суммой этихъ окрестностей; если возможно при уменьшеніи ихъ числа сдѣлать эту сумму произвольно малой, то такую область *Harnack* — называетъ раздѣльной (discrete); это будетъ — область рѣдко разсѣянная и полая, т. е. съ мѣрой равной нулю.

Если же эти окрестности не могутъ быть уменьшаемы произвольно, область — по *Harnack*'у — называется *линейной*. Онъ обращаетъ въ М. А. вниманіе на то, что „раздѣльная“ область не можетъ быть часто разсѣяна ни въ одномъ произвольно маломъ интервалѣ, но не обратно, и *Harnack* приводитъ примѣръ того, какъ „линейная“ область можетъ быть распределена, чтобы она была рѣдко разсѣяной.

Беремъ на (a, b) n точекъ x_i и дѣлаемъ ихъ серединами интерваловъ длиной δ , при чемъ выбираемъ эти интервалы такъ, чтобы было

$$n \delta < b - a.$$

На каждомъ изъ интерваловъ δ беремъ n' точекъ и соотвѣтственно имъ интервалы δ' , такъ чтобы было

$$n' n \delta' < n \delta < b - a$$

и т. д.,

$$n^{(m)} n^{(m-1)} \dots n' n' n' \delta^{(m)} < n^{(m-1)} \dots n'' n' n' \delta^{(m-1)} < \dots < n \delta < b - a.$$

¹⁾ Также — М. А 19 (1882).

Тогда въ зависимости отъ того, будетъ ли

$$\lim n^{(m)} n^{(m-1)} \dots n'' n' n \delta^{(m)} = 0 \text{ или } < 0,$$

область точекъ $\{x\}$ окажется „раздѣльной или линейной“, при чемъ она по построению рѣдко разсѣяна.

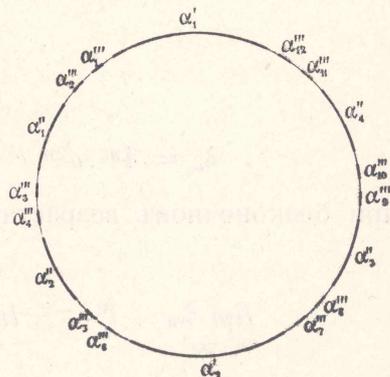
10. Въ статьяхъ *Veltmann'a* (1882)²⁾ мы имѣемъ дальнѣйшій шагъ къ установленію болѣе точнаго представленія о рѣдко разсѣянныхъ и совершенныхъ областяхъ.

Онъ первый даетъ общее построеніе совершенной области, которое нужно признать классическимъ, и которое должно служить основаніемъ для теоріи областей.

При построеніи *Veltmann* особенно указываетъ на то обстоятельство, что получающіяся при этомъ безконечныя области будутъ рѣдко разсѣяны; въ терминологіи *Veltmann'a* это звучитъ такъ: „ни одинъ даже произвольно малый отрѣзокъ не разлагается точками дѣленія на явственно безконечно малыя части“, такъ что вездѣ „можно взять части конечной длины“, свободныя отъ точекъ области.

Особенность перваго его построенія та, что онъ строитъ совершенныя области на окружности и внутри квадрата; такимъ образомъ ему принадлежитъ также и первое построеніе плоской совершенной области.

На окружности радіуса единицы *Veltmann* беретъ двѣ равныя дуги, симметрично расположенныя и свободныя отъ точекъ области; на двухъ остающихся дугахъ симметрично помѣщаются четыре равныя и свободныя дуги; и т. д.; сумма свободныхъ дугъ можетъ при этомъ быть равна 2π или меньше 2π въ зависимости отъ закона, по которому убываютъ дуги. Если обозначить длины свободныхъ дугъ n 'аго дѣленія черезъ $\alpha_i^{(n)}$ и взять

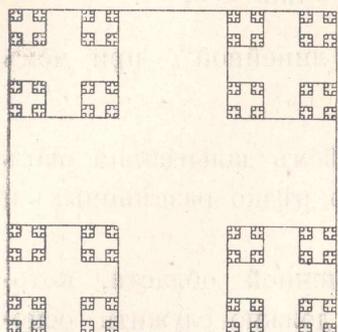


$$\sum \alpha'_i = \frac{\pi}{2}, \quad \sum \alpha''_i = \frac{\pi}{2^2}, \quad \dots, \quad \sum \alpha_i^{(n)} = \frac{\pi}{2^n}, \quad \dots,$$

то сумма всѣхъ свободныхъ дугъ будетъ π , и слѣдовательно равна π и сумма несвободныхъ дугъ.

²⁾ Zeitschrift für Mathematik, 27.

Второй примѣръ, относящійся къ теоріи плоскихъ областей, таковъ: изъ квадрата стороны l , съ помощію четырехъ равныхъ квадратовъ на углахъ, исключимъ крестъ, внутри котораго нѣтъ точекъ области; изъ каждаго изъ четырехъ квадратовъ исключимъ снова кресты; и т. д.



Законъ убыванія сторонъ s_m квадратовъ установимъ такой

$$s_m = ae^{-\frac{1}{2^m}} s_{m-1} \text{ при } a \leq \frac{1}{2}, s_0 = l;$$

• тогда длины соотвѣствующихъ сторонъ будутъ

$$s_1 = ae^{-\frac{1}{2}} l, s_2 = a^2 e^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)} l, \dots, s_m = a^m e^{-\sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i}} l, \dots,$$

площадь m 'аго квадрата—

$$a^{2m} e^{-2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i}} l^2$$

и число квадратовъ m 'аго дѣленія— 4^m , такъ что сумма δ_m площадей квадратовъ m 'аго дѣленія окажется

$$\delta_m = 4^m \cdot a^{2m} e^{-2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i}} l^2 = (2a)^{2m} l^2 \cdot e^{-2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i}};$$

при безконечномъ возрастаніи числа дѣленій

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m = l^2 e^{-2} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} (2a)^{2m} = \begin{cases} 0, & a < \frac{1}{2}, \\ l^2 e^{-2}, & a = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Если за точки области мы возьмемъ вершины крестовъ, то въ первомъ случаѣ площадь крестовъ, т. е. площадь свободной отъ точекъ области части квадрата, будетъ равна площади квадрата, во второмъ— площадь свободныхъ крестовъ будетъ только

$$l^2 - l^2 e^{-2} = (1 - e^{-2}) l^2,$$

такъ что точки области не могутъ быть включены въ интервалы съ произвольно малой площадью.

Во второй статьѣ *Veltmann* даетъ примѣръ построения рѣдко разсѣянной совершенной области на прямой, аналогично построению предыдущихъ областей.

По поводу послѣдняго примѣра *Veltmann* говоритъ: „если назвать замкнутой — такую область, которая дѣлится интервалъ на явственно безконечно малые отрѣзки, то предыдущая область имѣетъ ту особенность, что каждая ея точка — предѣльная¹⁾, и тѣмъ не менѣе въ ней нѣтъ ни одной замкнутой части“.

Въ обычной терминологіи — замкнутая область *Veltmann'a* есть часто разсѣянная; такимъ образомъ *Veltmann* говоритъ, что построенная область — сгущенная (*in sich dicht*)²⁾, хотя она рѣдко разсѣяна.

Въ третьей статьѣ, говоря о первомъ примѣрѣ, онъ различаетъ

1) внутреннія точки свободныхъ дугъ,

2) ихъ конечныя точки и

3) точки, „которыя никогда не дѣлаются ни внутренними, ни конечными“, т. е. внѣшнія; такими точками будутъ середины несвободныхъ дугъ; точки второй и третьей категоріи являются здѣсь предѣльными точками.

Такимъ образомъ *Veltmann* даетъ теоріи областей точныя приемы построения совершенныхъ областей, которые дѣлаются въ этой теоріи руководящими. Затѣмъ онъ первый строитъ плоскую рѣдко разсѣянную совершенную область.

11. Въ 1882 г. появилась „Allgemeine Functionentheorie“ *du-Bois-Reymond'a*. Подвергая здѣсь критикѣ основныя понятія анализа и въ частности — стараясь дать теорію аргумента, авторъ посвящаетъ много мѣста точечнымъ областямъ. Уступая *Cantor'у* первенство въ установленіи понятій о *размѣрѣ* области и *счетности* и признавая заслуги *Cantor'a* въ изученіи возможныхъ группировокъ значеній аргумента, возрастающаго ихъ сгущенія, въ изученіи области всѣхъ значеній аргумента и отношенія ея къ болѣе бѣднымъ точками областямъ, *du-Bois-Reymond* говоритъ, что его собственныя работы по общей теоріи функций давно его привели на тотъ же путь, гдѣ онъ имѣлъ дѣло съ распределеніемъ точекъ на отрѣзкѣ и съ способами представленія ирраціональностей.

Свое изложеніе *du-Bois-Reymond* ведетъ съ своей точки зрѣнія и пользуясь своими обозначеніями; въ этомъ отношеніи онъ считаетъ себя тѣмъ болѣе правымъ, что кое что онъ опубликовалъ уже раньше, а необходимость своей основной классификаціи областей онъ письменно

¹⁾ Можно было бы добавить, что въ нее кромѣ того входятъ всѣ ея предѣльныя точки.

²⁾ Правильнѣе — совершенная.

сообщилъ *Cantor*'у болѣе чѣмъ за годъ до его статьи въ М. А. 15. Поэтому *du-Bois-Reymond* считалъ своею собственностью общее понятіе о *пантахіи*, которое явилось не изъ умозрѣнія, но вызвано потребностями теоріи функціи.

Онъ указываетъ, что нельзя вполне отождествлять значенія аргумента съ длинами, что имѣется между ними существенная разница, состоящая въ томъ, что въ первыхъ каждая точка появляется только одинъ разъ; именно—если x_0 дѣлитъ отрезокъ (a, b) , то мы будемъ имѣть три разнаго рода дѣленія, смотря потому, причислимъ ли мы x_0 къ (a, x_0) , или къ (x_0, b) , или ни къ тому, ни къ другому интервалу.

Здѣсь мы такимъ образомъ встрѣчаемся съ впервые сознаннымъ различіемъ между *открытыми* отрезками и отрезками *закрытыми*, если не считать аналогичнаго „парадокса“ *Bolzano*, о сочиненіи котораго большинство изъ авторовъ того періода—видимо—не знало. Это различіе должно быть такъ или иначе принято въ расчетъ при установленіи понятія о мѣрѣ.

Переходя къ распредѣленію точекъ по интервалу, *du-Bois-Reymond* называетъ *пантахичнымъ* или *пантахіей* такое распредѣленіе, которое нынче носитъ названіе часто разсѣянной области; рѣдко разсѣянной области онъ даетъ названіе *апантахичнаго* распредѣленія; кромѣ тѣхъ и другихъ имѣются еще такія распредѣленія, которыя, не подходя ни подъ одинъ изъ этихъ типовъ, не разлагаются даже на конечное число пантахичныхъ или апантахичныхъ частей.

Пантахіи авторъ дѣлитъ дальше на слѣдующіе классы¹⁾: если область заключаетъ конечное число точекъ, возрастающее однако такъ, что точки появляются въ произвольно маломъ интервалѣ, то такая пантахія называется *безграничной*; это есть тѣ области, которыя получили въ послѣдствіи у *Baire*'а названіе *областей первой категоріи*. Всѣ не безграничныя пантахіи *du-Bois-Reymond* называетъ *безконечными* пантахіями; это будутъ—*области второй категоріи*.

Континуумъ есть *полная пантахія* и относится—очевидно—къ безконечнымъ пантахіямъ; удаленіе изъ полной пантахіи произвольнаго числа какихъ бы то ни было безграничныхъ пантахій не можетъ превратить ее въ безграничную пантахію.

Къ апантахичнымъ системамъ относятся прежде всего *уединенныя*, или области *уединенныхъ точекъ*; это—системы изъ конечнаго числа точекъ, достаточно сгущенныхъ, но не могущихъ быть сгущаемыми произвольно, какъ у безграничныхъ пантахій; затѣмъ—системы съ точ-

¹⁾ Стр. 184—5.

ками сгущеній разныхъ порядковъ, т. е. области перваго рода и n 'аго вида, или—по *du-Bois-Reymond*'у — до точекъ n 'аго порядка уединенныя системы.

По поводу нихъ авторъ говоритъ, что можно исключить точки сгущенія произвольно малыми протяженіями такъ, что сумма этихъ протяженій будетъ произвольно мала. Точки сгущенія *du-Bois-Reymond*'а являются ничѣмъ другимъ, какъ предѣльными точками *Cantor*'а и не совпадаютъ съ точками сгущенія *Lindelöf*'а¹⁾. Здѣсь *du-Bois-Reymond* дѣлаетъ важное замѣчаніе, что точки сгущенія точекъ будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ и точками сгущенія отрезковъ. Далѣе, какъ примѣръ апантахичной системы, *du-Bois-Reymond* строитъ совершенную область, очевидно—не зная объ аналогичномъ построеніи *Veltmann*'а; по крайней мѣрѣ онъ о немъ не упоминаетъ.

Областямъ этого типа *du-Bois-Reymond* придаетъ большое значеніе, обращая между прочимъ вниманіе на то, что у нихъ нѣтъ ни одной уединенной точки.

Кромѣ этихъ системъ, анализъ даетъ еще точечныя распредѣленія, которыя *du-Bois-Reymond* называетъ *интегрируемыми*; это—полыя (*unausgedehnte*) системы по современному обозначенію.

Можно было думать, говорить *du-Bois-Reymond*, что интегрируемая области совпадутъ съ апантахичными, но оказывается противное: апантахичныя системы образуютъ болѣе обширный классъ.

Такимъ образомъ *du-Bois-Reymond* принадлежитъ честь введенія въ науку понятій о пантахіи и апантахіи и о различіи безграничныхъ и бесконечныхъ пантахій; что касается терминологіи *du-Bois-Reymond*'а то она не укоренилась въ наукѣ и были замѣнена болѣе удобными обозначеніями *Cantor*'а; классификаціи пантахій на бесконечныя и безграничныя суждено было, послѣ двадцатилѣтняго перерыва, снова явиться на свѣтъ въ мемуарѣ *Baire*'а²⁾.

12. Въ 1882 г. *Cantor* говоритъ³⁾ о точечныхъ областяхъ n измѣреній, доказываетъ теорему относительно того, что въ n 'мѣрномъ пространствѣ всякая область *внѣшнихъ или примыкающихъ другъ къ другу интерваловъ* n измѣреній будетъ *счетна*, какъ бы эти интервалы ни были малы; указываетъ наконецъ на тотъ фактъ, что удаленіе изъ n 'мѣрнаго пространства, при $n > 2$, счетнаго ряда даже часто разсѣянныхъ точекъ оставляетъ пространство непрерывнымъ и связнымъ.

Далѣе⁴⁾ *Cantor* опредѣляетъ *уединенную* область Q равенствомъ

$$D(Q, Q') = 0,$$

¹⁾ С. R. 137. 2^o sem стр. 697.

²⁾ Annali di Matematica, (3) 3.

³⁾ М. А. 20.

⁴⁾ М. А. 21.

тогда какъ вообще

$$P = Q + D(P, P').$$

Онъ доказываетъ затѣмъ, что область P будетъ счетна въ слѣдующихъ случаяхъ: если *a*) она уединенна, *b*) P' счетна, *c*) P —перваго рода и *n*'аго вида и *d*) $P^{(\omega)}$ или вообще $P^{(\alpha)}$ счетна.

Въ этой статьѣ *Cantor* впервые заводитъ рѣчь о мѣрѣ области. Онъ говоритъ, что *du-Bois-Reymond* и *Harnack* пользовались системами точекъ на прямой, которыя можно заключить въ конечное число интерваловъ съ произвольно малой суммой. Чтобы это было возможно, область точекъ не должна быть часто разсѣяна ни въ одной части интервала; но одного этого условія не достаточно.

Cantor доказываетъ, что такимъ свойствомъ обладаютъ прежде всего тѣ области, для которыхъ P' счетна. При доказательствѣ этой теоремы *Cantor* имѣетъ дѣло съ счетнымъ рядомъ точекъ

$$(1) \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

и говоритъ, что точки интервала (a, b) , не входящія въ (1), могутъ быть включены въ безконечный рядъ интерваловъ

$$(c_1, d_1), (c_2, d_2), \dots, (c_n, d_n), \dots,$$

самое большое—примыкающихъ другъ къ другу; *Cantor* доказываетъ затѣмъ, что сумма этихъ интерваловъ имѣетъ предѣломъ длину $b-a$, откуда вытекаетъ утверждение теоремы.

Это доказательство является очень важнымъ, потому что здѣсь, какъ и у *Veltmann'a*, впервые мысль была направлена не на интервалы, включающія точки области, а напротивъ того—на интервалы, свободные отъ этихъ точекъ.

Очевидно, что идеи *Cantor'a* и *Veltmann'a* развивались въ этомъ отношеніи совершенно независимо другъ отъ друга, и оба они освѣтили одинъ и тотъ же вопросъ съ разныхъ точекъ зрѣнія и дополнили такимъ образомъ другъ друга: *Cantor* для заданной области строить рядъ свободныхъ интерваловъ, тогда какъ *Veltmann* по заданному ряду свободныхъ интерваловъ опредѣляетъ область; *Cantor* имѣетъ при этомъ дѣло со счетной областью, тогда какъ *Veltmann*—съ областями совершенными. Такимъ образомъ *Veltmann'у* и *Cantor'у* принадлежитъ заслуга установленію твердыхъ основаній для изученія строенія и мѣры области.

Интересно между прочимъ, что главное вниманіе большинства математиковъ привлекало понятіе о мѣрѣ области, тогда какъ у творца теоріи областей *Cantor'a* оно все время занимаетъ второстепенное мѣсто.

13. Въ томъ же томѣ М. А.¹⁾ *Cantor* высказываетъ важную теорему, объединяющую теоремы 12°:

В. Если $P^{(\alpha)} \equiv 0$, то P' и слѣдовательно P счетны, и обратно, гдѣ α — есть произвольное число перваго или втораго класса. Затѣмъ, возбуждая вопросъ, какими необходимыми и достаточными условіями опредѣляется континуумъ, онъ классифицируетъ области по размѣру ихъ первыхъ производныхъ P' : первый классъ это — тѣ, для которыхъ P' счетна и слѣдовательно $P^{(\alpha)} \equiv 0$; для тѣхъ P , у которыхъ P' несчетна, она можетъ быть²⁾ единственнымъ образомъ разложена на двѣ части

$$P' = R + S, \quad (2)$$

при чемъ для нѣкотораго числа α перваго или втораго класса

$$R^{(\alpha)} \equiv 0, \quad S = S' = S^{(\alpha)}; \quad (3)$$

первую область онъ назвалъ *приводимой* и вторую — *совершенной*.

Затѣмъ *Cantor* опредѣляетъ континуумъ какъ *совершенную и связную* область.

Перепечатывая ту же статью въ А. М. 2., *Cantor*, согласно указанію *Bendixson'a*, измѣняетъ свою послѣднюю теорему, именно — условіе, которому удовлетворяетъ R ; въ новомъ изложеніи R опредѣляется условіемъ

$$D \{R, R^{(\alpha)}\} \equiv 0.$$

Наконецъ *Cantor* дѣлаетъ еще нѣсколько замѣчаній; онъ говоритъ, что

А. совершенная область несчетна,

даетъ примѣръ рѣдко разсѣянной области

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \dots + \frac{c_n}{3^n} + \dots, \quad c_i = 0 \text{ или } 2;$$

не трудно видѣть³⁾, что задание этой области есть ничто иное, какъ процессъ, примѣненный *Veltmann'омъ*.

Cantor ведетъ далѣе рѣчь объ *открытыхъ* областяхъ, открытомъ отрѣзкѣ или кругѣ, которые онъ называетъ *полуконтинуумами*; вообще полуконтинуумъ это — связная несовершенная область, двѣ точки которой могутъ быть соединены совершеннымъ континуумомъ, входящимъ въ составъ области.

¹⁾ См. „Fondements“, А. М. 2, стр. 397.

²⁾ М. А. 21, стр. 575.

³⁾ См. Vaire, p. 38; также — Lebesgue, Leçons, p. 26-27.

14. *Bendixson* (1883) доказывает¹⁾ прежде всего теорему:

А. „Если $D(P, P') \equiv P$, то $P' \equiv P''$ “,

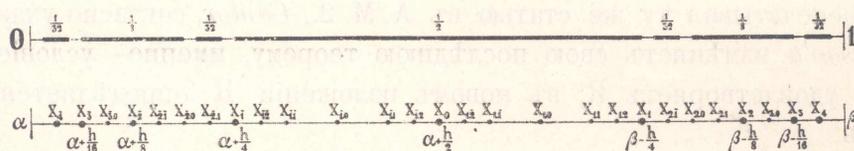
т. е. P' совершенна, а затѣмъ даетъ примѣръ области, опровергающей утверждение (3) *Cantor'a*. *Bendixson* опредѣляетъ при этомъ понятие о симметричномъ расположеніи интервала (a, b) на интервалѣ (α, β) равенствомъ

$$a - \alpha = \beta - b.$$

Построивъ симметрично на $(0, 1)$ интервалъ $\frac{1}{2}$, затѣмъ на $(0, \frac{1}{4})$ и $(\frac{3}{4}, 1)$ два интервала по $\frac{1}{8}$, затѣмъ четыре интервала по $\frac{1}{32}$ и т. д., назовемъ Q —область концовъ этихъ интерваловъ.

Очевидно, что каждая точка q входитъ въ Q' ; слѣдовательно—въ силу теоремы А—производная Q' будетъ совершенна.

Въ каждомъ изъ свободныхъ интерваловъ (α, β) области Q помѣщаемъ области $\{x_i\} \equiv P_{(\alpha\beta)}$, построенныя по такому образцу:



гдѣ $\beta - \alpha = h$ и гдѣ x — только внутреннія точки интервала (α, β) . Очевидно, что

$$P'_{(\alpha\beta)} \equiv (\alpha, \beta).$$

Въ каждомъ изъ интерваловъ области $P_{(\alpha\beta)}$ помѣщаемъ области того же типа; совокупность счетнаго ряда такихъ областей назовемъ $P_{((\alpha\beta))} \equiv \{x_{ij}\}$; очевидно

$$P'_{((\alpha\beta))} \equiv P_{(\alpha\beta)} + (\alpha, \beta), \quad P''_{((\alpha\beta))} \equiv (\alpha, \beta).$$

Помѣстивъ области $P_{((\alpha\beta))}$ въ каждый изъ свободныхъ интерваловъ (α, β) области Q и назвавъ

$$\sum P_{((\alpha\beta))} \equiv P, \tag{4}$$

разсмотримъ ея производныя; не трудно видѣть, что

$$P' \equiv \sum P_{(\alpha\beta)} + Q', \quad P'' \equiv Q'.$$

¹⁾ А. М. 2.

Итакъ P' дѣлится на двѣ части—совершенную область Q' и счетную

$$R \equiv \sum P_{(\alpha\beta)},$$

при чемъ

$$R' \equiv Q' \equiv Q^{(\alpha)} \equiv 0,$$

что и опровергаетъ теорему *Cantor'a*. Очевидно однако, что R удовлетворяетъ условию

$$D(R, R') \equiv 0$$

или вообще

$$D(R, R^{(\alpha)}) \equiv 0.$$

Далѣе *Bendixson* доказываетъ теоремы:

D. Если P' несчетна, существуютъ точки, входящія во всѣ $P^{(\alpha)}$,

E. $P^{(\alpha)}$ —область такихъ точекъ—совершена,

F. $P' - P^{(\alpha)} \equiv R$ счетна.

Эти три теоремы были выведены одновременно и независимо другъ отъ друга *Cantor'омъ* и *Bendixson'омъ*; наконецъ послѣдняя теорема принадлежитъ исключительно *Bendixson'у*:

G. Существуетъ число перваго или втораго класса, для котораго

$$D(R, R^{(\alpha)}) \equiv 0.$$

Такимъ образомъ P' всегда можетъ быть приведена къ виду

$$P' \equiv R + P^{(\alpha)},$$

при чемъ $P^{(\alpha)} \equiv P^{(\alpha)}$ совершенна и точки $R^{(\alpha)}$, которыя входятъ въ составъ $P^{(\alpha)}$ и отличны отъ точекъ R , должны непременно входить въ $P^{(\alpha)}$.

Итакъ для P' существуетъ такое число α , что

$$P' \equiv R + P^{(\alpha)}, \quad \text{гдѣ} \begin{cases} P^{(\alpha)} \text{ совершенна,} \\ R^{(\alpha)} \equiv D(P^{(\alpha)}). \end{cases} \quad (5)$$

Это равенство имѣетъ мѣсто для какихъ угодно P' : для несчетныхъ P' —въ силу предъидущаго, а для счетныхъ, потому что $P^{(\alpha)} \equiv 0$.

Помимо того, что теорема (2)—капитальной важности въ теоріи областей, и что—слѣдовательно—замѣчаніе *Bendixson'a* относительно ея формулировки представляется крайне цѣннымъ и существеннымъ огромное значеніе имѣетъ самое заданіе области (4), такъ какъ оно

воплотило въ конкретныя формы довольно отвлеченныя разсужденія *Cantor'a* и можетъ служить исходной точкой общей теоріи ¹⁾ строенія.

Наконецъ *Bendixson* дѣлаеть еще важное замѣчаніе: образованіе послѣдовательныхъ производныхъ областей аналогично дифференцированию, и теорія производныхъ аналогична дифференціальному исчисленію; *Bendixson* устанавливаетъ основаніе не получившей пока развитія теоріи, аналогичной интегральному исчисленію; онъ даетъ теорему:

Для совершенной рѣдко разсѣянной области P возможно опредѣлить бесконечно много уединенныхъ областей Q такихъ, что

$$Q' = P.$$

Эту теорему *Bendixson* доказываетъ, кладя въ основаніе разсужденій свободные интервалы данной совершенной области.

15. Въ *Atti della Academia dei Lincei* въ 1883 г. *Ascoli* напечаталъ статью, къ которой впослѣдствіи сдѣлалъ дополненія ²⁾ въ 1888 г.

Въ ней, разсматривая области P точекъ на прямой, ихъ предѣльныя точки и области P' этихъ предѣльныхъ точекъ, *Ascoli* ни единымъ словомъ не упоминаеть, что эти понятія обязаны своимъ происхожденіемъ *Cantor'у*. Отличіе идей *Ascoli* отъ *Cantor'a* только то, что *Ascoli* допускаеть, что одно и то же значеніе x можетъ встрѣчаться конечное или даже бесконечно большое число разъ, т. е. одна и та же точка можетъ считаться нанесеной на прямую неоднократно. Точка бесконечной кратности *eo ipso* является точкой предѣльной и входитъ въ P' уже какъ простая точка; такимъ образомъ всѣ точки области P' будутъ простыми.

Ascoli даетъ далѣе развитіе идей *Cantor'a*, примѣняя ихъ къ системамъ линій, которыя, какъ и точки, могутъ быть кратными и даже бесконечно кратными.

Ascoli устанавливаетъ существованіе *предѣльныхъ линій*, къ которымъ стремится известная переменная область линій такъ, что въ произвольной окрестности каждой изъ ея точекъ имѣются точки кривыхъ области.

Разсматривая для данной области линій совокупность всѣхъ предѣльныхъ линій, *Ascoli* называетъ ее первой производной областью; затѣмъ онъ образуетъ производныя второго, . . . , n 'аго порядка и распредѣляетъ области линій на два класса въ зависимости отъ существованія конечнаго или бесконечнаго ряда производныхъ областей.

¹⁾ См. — глава II.

²⁾ *Rendiconti di Palermo*.

Всякая линия бесконечной кратности непременно войдетъ въ первую производную, какъ простая.

Затѣмъ *Ascoli* переходитъ къ понятію о мѣрѣ плоской области; онъ говоритъ, „совокупность (*insieme*) площадей, каждой изъ которыхъ принадлежитъ по крайней мѣрѣ одна точка ограниченаго числа линий въ площади A , можетъ быть сдѣлана произвольно малой“, и затѣмъ: „сумма такихъ площадей для области конечнаго порядка можетъ быть произвольно мала“, при чемъ доказываетъ эту теорему, примѣняя обычный приемъ *Cantor'a* и опять не упоминая о немъ ни слова.

Если область линий R такова, что, при наличности ряда бесконечно убывающихъ чиселъ

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n, \dots,$$

число линий, проекціи которыхъ на оси координатъ равны или больше ε_n , конечно, то предѣльныхъ линий для R быть не можетъ; для нея получатся только предѣльные точки, такъ что R' будетъ только точечной областью.

16. Въ 1884 году напечатано ¹⁾ извлечение изъ письма *Cantor'a* къ *Mittag-Leffler'y*; въ примѣчаніи къ нему *Mittag-Leffler* говоритъ, что *Bendixson*, по предложенію *Cantor'a*, рѣшилъ вопросъ о размѣрѣ совершенной области независимо отъ *Cantor'a* и сдѣлалъ сообщеніе въ семинаріи Стокгольмскаго Университета.

Въ М. А. 23 *Cantor* доказываетъ рядъ теоремъ, высказанныхъ имъ еще раньше, между ними — теоремы:

С. Если P' счетна, то $P^{(\alpha)} \equiv 0$ при нѣкоторомъ наименьшемъ α .

Д-Е. Если P' несчетна, то существуетъ совершенная область $P^{(\omega)}$, которая тождественна съ $P^{(\alpha)}$,

замѣчая между прочимъ, что „если $P^{(\beta)} \equiv 0$, и β — число второго вида, то $P^{(\alpha)} \equiv 0$, гдѣ α нѣкоторое число перваго вида“.

Здѣсь опредѣляется замкнутая область равенствомъ

$$D(P, P') \equiv P';$$

такую замкнутую область можно образовать изъ всякой области P , взявъ $M(P, P')$.

Cantor даетъ дальше теорему: „Каждая первая производная P' другой области будетъ замкнута, и обратно — каждая замкнутая область можетъ быть представлена бесконечнымъ числомъ способовъ какъ

¹⁾ А М. 4, стр. 381.

производная другой области“. Здѣсь *Cantor* опять сходится въ своихъ выводахъ съ *Bendixson'омъ*.

Разъ Q' всегда можетъ быть приведена къ виду $R + S$, и всякая замкнутая область P можетъ быть представлена какъ производная нѣкоторой области Q

$$P \equiv Q',$$

то для замкнутой области имѣютъ мѣсто теоремы C, D, E , т. е.

„Если P замкнута, то для нѣкотораго числа α первого или второго класса

$$P \equiv R + S, \quad S \equiv S^{(\alpha)}, \quad D(R, R^{(\alpha)}) \equiv 0“.$$

Затѣмъ *Cantor* опредѣляетъ сущенную область равенствомъ

$$D(P, P') \equiv P,$$

такъ что всѣ точки такой области будутъ предѣльными.

„Для сгущенной области $P' \equiv P''$ “; дѣйствительно: пусть $P' \equiv P + P_g$ тогда

$$P'' \equiv M(P', P_g'), \quad \text{т. е. } P' \equiv D(P'');$$

но вообще

$$P'' \equiv D(P'); \quad \text{слѣдовательно } P' \equiv P''.$$

Если область не имѣетъ ни одной сгущенной части, то она называется *раздѣльной* (*separirt*)¹⁾.

Къ раздѣльнымъ областямъ принадлежатъ *уединенныя* и *счетныя замкнутыя* области, и въ частности $R \equiv P' - P^{(\Omega)}$; дѣйствительно—если бы это было не такъ, то было бы

$$P \equiv P_1 + P_2,$$

гдѣ P_2 сгущенная часть P ; тогда

$$P' \equiv M(P_1', P_2'), \quad \text{гдѣ } P_2'' \equiv P_2',$$

т. е. P' , входящая въ P , заключала бы въ своемъ составѣ совершенную часть, и P не могла бы быть счетной областью. Раздѣльна будетъ и область первого рода

$$P - D\{P, P^{(\Omega)}\}.$$

Очевидно, что *сущенная область можетъ не быть часто раздѣльной* по нѣкоторому интервалу, и область часто раздѣнная по нѣкоторому

¹⁾ Вездѣ ниже подъ раздѣльной понимается именно эта область, а не область *Harnack'a*—см. 9°.

интервалу можетъ не быть сгущенной, если она имѣетъ еще уединенныя точки внѣ этого интервала; если этого нѣтъ, часто разсѣяная область будетъ ео ipso сгущенной.

Затѣмъ *Cantor* доказываетъ, что размѣръ всякой совершенной области равенъ размѣру континуума; отсюда слѣдуетъ, что замкнутая область или счетна, или имѣетъ размѣръ континуума.

17. Переходя ¹⁾ къ мѣрѣ области, *Cantor* говоритъ, что для непрерывныхъ областей мы имѣемъ нѣкоторое неотрицательное число—интеграль

$$\int \int \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

распространенный на всѣ точки области: это ничто иное, какъ *объемъ*; но и во всѣхъ другихъ случаяхъ, мы можемъ установить соответственное понятіе, которое *Cantor* называетъ *Inhalt* или *Volumen*; число, отвѣчающее этому понятію, имѣетъ опредѣленный смыслъ и единственное значеніе.

Такимъ образомъ здѣсь *Cantor* впервые высказываетъ ту точку зрѣнія, что мѣра области является обобщеніемъ понятія о длинѣ и объемѣ, но приходитъ къ этому обобщенію съ помощью известной функции $F(\rho)$, зависящей отъ положительной бесконечно-убывающей переменн^{ой} ρ . Ходъ его разсужденія таковъ:

Для области P онъ образуетъ сначала $M(P, \rho)$, затѣмъ около каждой точки p такой замкнутой области описываетъ полный n ' мѣрный шаръ радіуса ρ ; область точекъ внутри и на границѣ шара *Cantor* обозначаетъ $K(\rho)$ и беретъ затѣмъ область точекъ, представляющую наименьшее кратное всѣхъ такихъ шаровъ

$$M_P \{ K(\rho, p) \} = \Pi(\rho).$$

Область $\Pi(\rho)$ состоитъ изъ конечнаго числа отдѣльныхъ непрерывныхъ частей; распространенный на всѣ эти части

$$\int \int \dots \int_{\Pi(\rho)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = F(\rho)$$

Cantor называетъ *характеристической функцией* области P ; эта функция есть ничто иное, какъ объемъ части пространства, занимаемаго областью $\Pi(\rho)$; предѣлъ этой функции

$$\lim_{\rho \dots 0} F(\rho) = I(P)$$

и есть то, что *Cantor* называетъ *Inhalt* области.

¹⁾ А. М. 23, стр. 473.

Такое опредѣленіе является—во первых—крайне сложнымъ само по себѣ, да кромѣ того оно требуетъ предварительнаго вычисленія объема съ помощью кратнаго интегрированія, которому оно логически должно предшествовать. Это опредѣленіе мѣры нашло себѣ въ послѣдствіи весьма простое выраженіе въ статьѣ *Lindelöf'a*.

Если область P состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ частей P_1 и P_2 , то очевидно

$$I(P) = I(P_1) + I(P_2);$$

въ противномъ случаѣ это равенство можетъ и не имѣть мѣста.

Далѣе ¹⁾ *Cantor* доказываетъ весьма важную теорему, что

$$I(P) = I(P').$$

Отсюда слѣдуетъ—во первых—, что

$$I(P) = I(P^{(\alpha)}),$$

если α —любое число перваго или втораго класса, и—во вторых—для приводимыхъ областей ²⁾

$$I(P) = I(P^{(\alpha)}) = I(0) = 0,$$

и для неприводимыхъ

$$I(P) = I(P^{(\alpha)}) = I(P^{(2)}).$$

Мы приходимъ теперь къ важному результату, что *опредѣленіе мѣры* всегда сводится къ мѣрѣ совершенныхъ областей. Что касается послѣднихъ, то ихъ мѣра можетъ быть равна нулю, ³⁾ но она можетъ быть и отлична отъ нуля.

Мѣра области цѣликомъ зависитъ отъ того пространства, въ которомъ она разсматривается; на примѣръ—область точекъ квадрата со стороной, равной единицѣ, имѣетъ мѣру, равную 1 и 0, соответственно въ пространствѣ двухъ и трехъ измѣреній. *Cantor* говоритъ еще, что для линейныхъ областей мѣра опредѣляется легко при помощи свободныхъ интерваловъ ⁴⁾, но дальше въ этомъ направленіи не идетъ.

18. Въ 1884 г. ⁵⁾ *Mittag-Leffler*, пользуясь ученіемъ *Cantor'a* въ теоріи функцій комплекснаго переменнаго, даетъ нѣсколько примѣровъ областей разнаго рода.

¹⁾ Стр. 475

²⁾ Обобщеніе теоремы 12⁰

³⁾ Такъ—для области $\{z\}$ 13⁰ мѣра $I(P)$ равна нулю.

⁴⁾ А. М. 4, стр. 390.

⁵⁾ А. М. 4, стр. 58-59

Взявъ

$$P_n \equiv \{2^{-m_1} + 2^{-(m_1+m_2)} + \dots + 2^{-(m_1+m_2+\dots+m_n)}\},$$

гдѣ m_i независимо другъ отъ друга пробѣгаютъ все цѣлыя положительныя значенія, мы имѣемъ область P_n , для которой $P_n^{(n)} = \{0\}$.

Если

$$P \equiv \{2^{-\nu} + 2^{-(\nu+m_1)} + 2^{-(\nu+m_1+m_2)} + \dots + 2^{-(\nu+m_1+m_2+\dots+m_n)}\},$$

при чемъ ν также, независимо отъ m_i , послѣдовательно приравнивается всеѣмъ числамъ натурального ряда, то $P^{(\omega)} = \{0\}$.

Для области

$$\{2^{-m_1} + 2^{-(m_1+m_2)} + \dots + 2^{-(m_1+m_2+\dots+m_n)} + 2^{-(m_1+m_2+\dots+m_n+\nu)} + \\ + 2^{-(m_1+m_2+\dots+m_n+\nu+\rho_1)} + \dots + 2^{-(m_1+m_2+\dots+m_n+\nu+\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_\nu)}\}$$

мы получимъ $P^{(\omega+n)} = \{0\}$, и $P^{(2\omega)}$ будетъ состоять изъ одной точки 0 для области

$$P \equiv \{2^{-\nu} + 2^{-(\nu+m_1)} + 2^{-(\nu+m_1+m_2)} + \dots + 2^{-(\nu+m_1+m_2+\dots+m_n)} + \\ + 2^{-(\nu+m_1+m_2+\dots+m_n+\nu)} + 2^{-(\nu+m_1+m_2+\dots+m_n+\nu+\rho_1)} + \dots \\ + 2^{-(\nu+m_1+m_2+\dots+m_n+\nu+\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_\nu)}\}.$$

Въ 1884 г. въ двухъ статьяхъ¹⁾ *Scheffer'a*, посвященныхъ одна—понятію о длинѣ дуги кривой и другая—теоріи функцій, ученіе объ областяхъ играетъ большую роль, но новаго въ нихъ имѣется только одна лемма, изъ которой слѣдуетъ, что совершенная область можетъ состоять изъ исключительно ирраціональныхъ точекъ.

Кромѣ того *Scheffer* даетъ примѣръ совершенной области, взявъ въ интервалѣ (0,1) все десятичныя дроби, въ которыя не входитъ цифра 5; свободные интервалы будутъ здѣсь имѣть границами

$$0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n 4^{(9)} \text{ и } 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n 6$$

Phragmen въ томъ же томѣ А. М. приводитъ для n' мѣрнаго пространства доказательство теоремы $F^{(2)}$ *Bendixson'a*.

19. Въ 1884 г.³⁾ появилась работа *Stolz'a*, посвященная вопросу о мѣрѣ области: въ этомъ отношеніи авторъ примыкаетъ къ *Hankel'ю*.

¹⁾ А. М. 5.

²⁾ См. 14^с.

³⁾ М А 23.

Основной интервал (a, b) онъ дѣлитъ на интервалы

$$\tau_{11}, \tau_{12}, \dots, \tau_{1m_1},$$

которые составляютъ первую систему дѣленія; затѣмъ каждый изъ τ_{1i} дѣлится на новыя части, составляющія вторую систему съ интервалами $\{\tau_{2i}\}$; и т. д.; при этомъ законъ этого дѣленія таковъ, что при произвольно заданномъ маломъ σ

$$\tau_{ni} < \sigma \quad \text{для } n > n_0.$$

Если въ каждой системѣ мы будемъ брать тѣ интервалы τ_{nvi} , на которыхъ лежатъ точки области P , то

$$\lim_{n \dots \infty} s_n = \lim \sum \tau_{nvi} = L$$

есть нѣкоторая вполне опредѣленная величина, не зависящая отъ закона дѣленія (a, b) на интервалы; этотъ предѣлъ *Stolz* называетъ *Intercallgrenze*.

Тотъ же процессъ онъ примѣняетъ и къ плоской точечной области, которая находится въ конечной части плоскости, ограниченной простымъ контуромъ.

Эту часть плоскости *Stolz* раздѣляетъ на прямолинейныя клѣточки и аналогично предыдущему доказываетъ существованіе единственнаго предѣла L для суммы клѣточекъ съ точками P ; L есть *Flächengrenze* плоской точечной области. Клѣточки представляются въ видѣ многоугольниковъ, у которыхъ наибольшая хорда убываетъ безконечно.

Возвращаясь въ 1897 году ¹⁾ къ тѣмъ же идеямъ, *Stolz*, уже подъ вліяніемъ *Peano* и *Jordan'a*, помимо предѣла L , опредѣляетъ еще

$$L' = \lim \sum \tau'_{nvi}$$

гдѣ τ'_{nvi} —тѣ изъ элементарныхъ клѣточекъ, *снѣ* точки которыхъ принадлежатъ P ; L и L' *Stolz* присваиваетъ теперь названія *äussere und innere Flächenzahl*. Въ своихъ „Grundzüge“ *Stolz* считаетъ элементами площади—треугольники ²⁾. Характерно въ статьяхъ *Stolz'a* то обстоятельство, что онъ не придерживается общепринятой теперь терминологіи *Cantor'a* и вообще какъ то мало о немъ упоминаетъ.

20. Въ 1885 г. появилась ³⁾ интересная статья *Harnack'a*, посвященная вопросу о *мѣрѣ* области P , т. е. ⁴⁾ о предѣлѣ суммы ея

¹⁾ Wiener Berichte 106, стр 453.

²⁾ Т. 3, стр. 40-41, 1899.

³⁾ А. М. 25.

⁴⁾ Стр. 241.

интерваловъ. Если P — часто разсѣяна, то $I(P) = l$; въ противномъ случаѣ, чтобы опредѣлить $I(P)$, *Harnack* беретъ рядъ величинъ

$$\frac{1}{2}l, \frac{1}{3}l, \dots, \frac{1}{n}l, \dots$$

и строить интервалы равные или большіе $\frac{1}{n}l$ и свободные отъ точекъ P . Выдѣливъ первый интервалъ η_1 , онъ примѣняетъ на каждой изъ оставшихся частей l тотъ же процессъ; и т. д.; вообще получится конечное число ν свободныхъ интерваловъ η_i равныхъ или большихъ $\frac{l}{n}$; пусть ихъ сумма будетъ

$$\sum_1^{\nu} \eta_i = s_n \quad \text{при } \eta_i \geq \frac{l}{n}.$$

Точки области P , которая лежатъ внѣ этихъ интерваловъ или — въ крайнемъ случаѣ — служатъ ихъ границами, располагаются на также конечномъ числѣ интерваловъ $\{\varepsilon_i\}$, сумма которыхъ равна $l - s_n$.

Слѣдовательно — точки области могутъ быть *включены* въ конечное число интерваловъ, общая длина которыхъ произвольно мало отличается отъ $l - s_n$; для этого стоитъ только произвольно мало уменьшить интервалы η_i . Предѣлъ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (l - s_n) = s$$

есть искомая *Intervallgrenze*.

На основаніи этого опредѣленія, въ $l - s_n$ будутъ входить не только тѣ интервалы, всѣ точки которыхъ — точки P , но также и тѣ, гдѣ точки P только часто разсѣяны, безразлично — будутъ ли онѣ счетны или несчетны.

Въ опредѣленіи *Harnack'a* являются чрезвычайно важными два пункта: во первыхъ — въ основаніе его положены свободные отъ точекъ P интервалы, расположеніе которыхъ обусловливается самой природой области P ; а во вторыхъ — онъ указываетъ на возможность включать точки P въ *конечное* число интерваловъ, сумма которыхъ произвольно близка къ s . Оба эти обстоятельства, хотя они въ частныхъ случаяхъ и фигурировали у *Cantor'a* и *du-Bois-Reymond'a*, являются существенными; много лѣтъ спустя къ *Harnack'у* въ этомъ отношеніи примкнулъ *Osgood*¹⁾.

¹⁾ См. 29°.

Затѣмъ *Harnack* является предшественникомъ *Peano* и *Jordan'a* въ смыслѣ опредѣленія *внутренней* и *внѣшней мѣры* области, хотя здѣсь онѣ немного и противорѣчатъ собственному опредѣленію.

Дѣло въ слѣдующемъ: предѣльные точки области P могутъ не входить въ составъ этой области; возможно, что эти точки, составляющія область

$$P' - D(P, P') = T,$$

таковы, что включающіе ихъ — согласно опредѣленію *Harnack'a* — интервалы могутъ имѣть сумму s_1 , неравную нулю; пусть съ другой стороны сумма интерваловъ, занятыхъ сплошь ¹⁾ точками P , будетъ s . Тогда сумма свободныхъ интерваловъ должна быть $l - s - s_1$; такимъ образомъ, по словамъ *Harnack'a*, „мѣра области P будетъ $s + s_1$, не смотря на то, что P можетъ быть включена въ безконечный рядъ интерваловъ съ общей длиной s “.

Высказанное здѣсь положеніе не совсѣмъ точно: такъ какъ на каждомъ интервалѣ, несущемъ на себѣ точки T , должны быть вмѣстѣ съ тѣмъ и точки P , мѣра области, какъ ее опредѣляетъ *Harnack*, непременно будетъ $s + s_1$, въ этомъ онѣ совершенно правъ, но что P можетъ быть включена въ рядъ интерваловъ съ общей длиной s , это не справедливо. Въ позднѣйшей терминологіи s будетъ *внутренней*, а $s + s_1$ — *внѣшней мѣрой* области.

Затѣмъ *Harnack* первый высказалъ ²⁾ мысль, что всякая, даже часто разсѣянная, счетная область имѣетъ то свойство, что ея точки могутъ быть включены въ интервалы, сумма которыхъ произвольно мала; въ случаѣ часто разсѣянной области, по поводу точекъ, „которыя не покрыты этими интервалами“, авторъ замѣчаетъ ³⁾, что онѣ не будутъ часто разсѣяны ни въ одномъ интервалѣ, но имѣютъ мѣру большую $1 - \delta$.

21. Далѣе *Harnack* возбуждаетъ, подобно *Stolz'y*, вопросъ, будетъ ли процессъ опредѣленія мѣры однозначенъ, т. е. то ли самое число получится, какъ мѣра области, если выборъ свободныхъ отрѣзковъ будетъ производиться по иному закону, чѣмъ прежде. Этотъ вопросъ — особенно не лишній для плоскихъ многомѣрныхъ областей, гдѣ выборъ свободныхъ отъ точекъ области сферъ можетъ быть произведенъ весьма разнообразно.

¹⁾ Только въ этомъ смыслѣ можно понимать *Harnack'a*.

²⁾ Стр. 242.

³⁾ Стр. 243.

Для линейной области *Harnack* рассуждаетъ такъ: пусть два разныхъ процесса намъ послѣдовательно давали суммы интерваловъ

$$(1) \quad s_1, s_2, s_3, \dots, s_m, \dots,$$

$$(2) \quad t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots,$$

получающіеся послѣ выдѣленія свободныхъ интерваловъ. Такъ какъ s_i и t_i не возрастаютъ, то для нихъ существуютъ предѣлы

$$\lim s_m = \sigma, \quad \lim t_n = \tau.$$

Возьмемъ какой нибудь членъ s_m изъ ряда (1) такой, что

$$s_m = \sigma + \delta,$$

гдѣ δ нѣкоторое малое положительное число.

Если мы возьмемъ какую нибудь систему интерваловъ изъ ряда (2), то эти интервалы частью будутъ лежать на s_m , частью же они находятся внѣ s_m ; такъ какъ эта послѣдняя часть не входитъ въ составъ s_m , на ней нѣтъ точекъ P , и она должна отпасть въ теченіе дальнѣйшаго процесса; такимъ образомъ мы имѣемъ возможность найти такой членъ t_n ряда (2), что часть t_n , выходящая за границы s_m , будетъ меньше нѣкоторой малой величины ε ; въ такомъ случаѣ окажется

$$t_n < s_m + \varepsilon.$$

Разсуждая аналогично относительно t_n мы можемъ найти такую сумму $s_{m'}$ изъ ряда (1), что

$$s_{m'} < t_n + \varepsilon.$$

Поэтому мы имѣемъ

$$s_{m'} - \varepsilon < t_n < s_m + \varepsilon,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\sigma = \tau.$$

Тотъ процессъ, который предлагаетъ *Harnack* для опредѣленія мѣры двухмѣрныхъ областей, существенно отличается отъ предыдущаго и не является его развитіемъ.

Представимъ себѣ плоскую область, заключающуюся въ кругѣ нѣ котораго радиуса l ; внутренность круга разобьемъ на такія части, которыя удовлетворяли бы слѣдующимъ условіямъ: *a*) площади ихъ могутъ быть опредѣлены обычными приемами интегрированія, *b*) эти площади допускаютъ произвольное уменьшеніе, при чемъ *c*) убываетъ безконечно и наибольшее разстояніе точекъ этихъ площадей.

Пусть площади первой системы дѣленія меньше δ ; устранимъ тѣ изъ нихъ, внутри или на границѣ которыхъ нѣтъ точекъ области. Остальныя площади дѣлимъ на части, меньшія δ' при $\delta' < \delta$; изъ нихъ снова устранимъ площади свободныя отъ точекъ области; и т. д. Остающіяся послѣ такого процесса площади дадутъ невозрастающія суммы

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots,$$

для которыхъ существуетъ предѣлъ

$$\lim s_n = s,$$

не зависящій отъ закона дѣленія.

Шагъ назадъ въ томъ разсужденіи *Harnack'a* надо видѣть въ томъ отношеніи, что здѣсь онъ не опредѣляетъ свободные интервалы, обусловливаемые строеніемъ области, а дѣлитъ основной интервалъ на части, не находящіяся ни въ какой связи съ этимъ строеніемъ. Что эти два процесса могутъ приводить къ совершенно различнымъ результатамъ, указано было *Borel'емъ*¹⁾.

Итакъ опредѣленіе *Harnack'омъ* мѣры плоской области исходитъ совсѣмъ изъ другихъ основаній, чѣмъ его же опредѣленіе мѣры линейной области. Кромѣ того автору приходится опираться при томъ на вычисленіи площадей криволинейныхъ фигуръ, т. е.—на методы интегральнаго исчисленія, тогда какъ логически опредѣленіе мѣры области должно предшествовать вычисленію площадей, которое является его обобщеніемъ, и должно быть поэтому построено независимо отъ интегрированія; и это тѣмъ болѣе, что²⁾ „площадь плоской криволинейной фигуры, какъ количество, наравнѣ съ длиной дуги, есть именно изъ тѣхъ геометрическихъ величинъ, которыя нашъ умъ ясно понимаетъ или думаетъ, что понимаетъ, но которыя должны быть точно опредѣлены, прежде чѣмъ ихъ вводить въ анализъ; и это особенно относится къ понятію о площади, такъ какъ на немъ обыкновенно основываются другія доказательства“.

Наконецъ нужно отмѣтить у *Harnack'a* второй, послѣ *Veltmann'a*, примѣръ построенія плоской точечной области.

Бзявъ линейную точечную область на оси абсциссъ и возставивъ въ каждой ея точкѣ перпендикуляръ, равный единицѣ, составимъ область изъ всѣхъ точекъ всѣхъ перпендикуляровъ. Эта плоская область имѣетъ своей мѣрой мѣру линейной области. При этомъ авторъ

¹⁾ J. de M. 1903; C. R. 136, p. 1054.

²⁾ См. *Peano*, Atti di Torino, 1883.

замѣчаетъ, что, если линейная область рѣдко разсѣяна, то плоская область, мѣра которой можетъ быть не равна нулю, имѣютъ ту особенность, что въ ней нѣтъ внутреннихъ точекъ.

Идеей *Harnack'a* можно воспользоваться для построения плоскихъ областей, гаранѣе заданнаго характера: взявъ—напримѣръ—извѣстныя линейныя области на обѣихъ осяхъ и составивъ плоскую область изъ точекъ пересѣченія соотвѣтственныхъ перпендикуляровъ къ осямъ, можно получать различныя области въ зависимости отъ характера линейныхъ областей.

22. Въ 1885 г. ¹⁾ *Cantor*, сводя результаты предыдущихъ работъ ²⁾, приводитъ нѣсколько недосказанныхъ раньше слѣдствій; именно—онъ замѣчаетъ, „что каждая совершенная область замкнута и сгущена“, и что „ $P^{(x)}$ замкнута“.

Далѣе авторъ задается цѣлью обобщить предыдущую теорему ³⁾ $P \equiv R + S$ для замкнутой области, установивъ ее для произвольныхъ областей, которыя замкнутыми могутъ и не быть, и опредѣляетъ предварительно понятіе объ *однородности*. Если около точекъ сгущенной области P описать достаточно малый шаръ, и если размѣръ области находящихся въ немъ точекъ P будетъ всегда одинъ и тотъ же, тогда область P называется *однородной*.

Взявъ произвольную область P , *Cantor* разбиваетъ ее на двѣ части

$$P \equiv P_a + P_c,$$

гдѣ P_a —область уединенныхъ и P_c —область предѣльныхъ точекъ; онъ называетъ P_a —*Adhärenz* и P_c —*Cohärenz* области P ; при этомъ каждая сгущенная часть P входитъ P_c . Тотъ же процессъ возможно примѣнить къ P_c и получить

$$P_c \equiv P_{ca} + P_c^2, \quad P \equiv P_a + P_{ca} + P_c^2,$$

гдѣ въ P_{ca} входятъ всѣ уединенныя точки P_c . Вообще

$$P \equiv \sum_{\alpha' < \alpha} P_c^{\alpha' a} + P_c^\alpha$$

и затѣмъ

$$(1) \quad P \equiv \sum_{\alpha < \Omega} P_c^{\alpha a} + P_c^\Omega,$$

¹⁾ А. М. 7.

²⁾ Главнымъ образомъ—статья М. А. 23.

³⁾ См. 16^o.

гдѣ α —произвольное число перваго или втораго класса, а Ω —первое число третьаго класса. Здѣсь каждая изъ $P_c^\alpha a$ *уединенна*, и $\sum P_c^\alpha a$ *раздѣльна*.

„Если P раздѣльна, то $P_c^\alpha \equiv 0$ для нѣкотораго наименьшаго числа α перваго или втораго класса; если P не раздѣльна, то P_c^α —сгущена“.

Дѣйствительно:

А. Пусть P счетна; тогда сумма

$$\sum_{\alpha < \Omega} P_c^\alpha a$$

должна состоять изъ счетнаго ряда элементовъ; слѣдовательно—должно быть нѣкоторое наименьшее α , для котораго

$$P_c^\alpha a \equiv 0, \quad P_c^\alpha \equiv P_c^{\alpha a} \dashv P_c^{\alpha+1} \equiv P_c^{\alpha+1} \equiv P_c^{\alpha+\lambda};$$

если $P_c^\alpha \equiv 0$, то P_c^α и слѣдовательно $P_c^{\alpha+\lambda}$ будутъ сгущенными, и P не раздѣльна; если же P раздѣльна, то $P_c^\alpha \equiv 0$.

В. Если P несчетна, то имѣются въ непрерывномъ интервалѣ, въ которомъ расположена P , точки $\{q\}$, въ произвольной окрестности которыхъ лежитъ несчетная часть P ; область Q этихъ точекъ должна быть замкнута, при чемъ

$$D(P, Q) \equiv V \equiv 0;$$

точки V не могутъ быть уединенными, такъ что V будетъ *сущенной областью*.

Итакъ каждая несчетная область заключаетъ въ себя сущенную часть. Отсюда слѣдуетъ, что каждая раздѣльная область счетна.

Такъ какъ въ (1)

$$\sum_{\alpha < \Omega} P_c^\alpha a \equiv R$$

всегда раздѣльна, то она будетъ счетна; а въ такомъ случаѣ для нѣкотораго наименьшаго α

$$P_c^\alpha a \equiv 0, \quad P_c^\alpha \equiv P_c^{\alpha+1} \equiv P_c^\Omega,$$

при чемъ P_c^α для несчетной области не равна нулю, такъ-какъ V составляетъ часть P_c^Ω .

Если назвать U —область точек P_c^Ω , не входящихъ въ составъ V ,

$$P_c^\alpha \equiv P_c^\Omega \equiv U + V,$$

то U можетъ быть полемъ или будетъ однородной областью первого порядка.

Итакъ всякая область можетъ быть разложена на такія составныя части

$$P \equiv R + U + V.$$

Для замкнутой области

$$P_c \equiv P', \quad P_a \equiv P - P'$$

$$P_c^\alpha \equiv P^{(\alpha)}, \quad P_c^{\alpha a} \equiv P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)}, \quad P_c^\Omega \equiv V \equiv P^{(\Omega)},$$

такъ-какъ здѣсь $P^{(\Omega)}$ —нуль или совершенна, и слѣдовательно $U \equiv 0$.

Cantor допускаетъ далѣе существованіе областей размѣра выше второго и сообразно съ этимъ раздѣляетъ V на однородныя части высшихъ порядковъ.

Наконецъ авторъ даетъ классификацію предѣльныхъ точекъ: уединенныя точки области P , составляющія P_a , называются *точками 0^{го} рода*; уединенныя точки P_c , дающія P_{ca} , называются *точками первого рода* и т. д., вообще—уединенныя точки P_c^α , образующія область $P_c^{\alpha a}$, называются *точками α го рода*.

Сообразно съ этимъ точки, входящія въ составъ $P_c^{(\Omega)}$, раздѣляются на *порядки*. Всѣ точки α го рода даютъ уединенную область, всѣ точки β го порядка даютъ однородную область β го порядка. Изъ отсутствія точекъ рода α слѣдуетъ отсутствіе точекъ $\alpha + \lambda$ го рода; тогда какъ для точекъ разныхъ порядковъ такой взаимозависимости не существуетъ. Всѣ точки области P будутъ предѣльными точками α го рода или β го порядка, кромѣ точекъ P_a , которыя уединенны.

Какъ это ни странно, а *Schönflies* въ своемъ „Bericht“ѣ ни однимъ словомъ не обмолвился объ этой весьма важной, съ точки зрѣнія строенія области, классификаціи точекъ области.

Изложенныя выше соображенія относительно строенія области являются очень существенными для его уясненія. Но, не смотря на это, они до сихъ поръ остались совсѣмъ не затронутыми никѣмъ изъ другихъ авторовъ; причиной—можетъ быть—до нѣкоторой степени служила крайняя отвлеченность всѣхъ разсужденій.

Вторая глава настоящаго изслѣдованія находится въ тѣсной связи съ предыдущимъ, хотя и исходитъ изъ другихъ соображеній.

23. Въ 1887 г. *Volterra*¹⁾ опредѣляетъ *окрестность* кривой въ пространствѣ L , которая предполагается замкнутой или простирающейся до границы области, если она принадлежитъ области, ограниченной нѣкоторой поверхностью; кромѣ того L не имѣетъ кратныхъ точекъ и допускаетъ касательную вездѣ, кромѣ конечнаго ряда точекъ.

Пусть для L взята нѣкоторая замкнутая кривая C , сдѣлленная (*concatenata*) съ L , т. е. такая, что L проходитъ внутри C .

Тогда, перемѣщая C и не нарушая сдѣлленности, мы получимъ нѣкоторую трубчатую поверхность, внутри которой будетъ лежать L . Точки внутри этой поверхности будутъ *окрестностью* линіи L (*interno della linea*). Взявъ C достаточно малой, мы можемъ получить произвольно малую окрестность L .

Разъ мы имѣемъ дѣло съ плоскостью или пространствомъ, распространение понятія объ окрестности сдѣлается существенно необходимымъ; поэтому опредѣленіе *Volterra* является важнымъ для теоріи многомѣрныхъ областей.

Въ 1889 г. *Arzelà*²⁾, развивая идеи *Volterra*, разсматриваетъ въ плоскости, какъ элементы, точки и линіи, для которыхъ могутъ быть опредѣлены предѣльные элементы.

Предѣльнымъ элементомъ называется такой, что въ произвольной его окрестности, ограниченной линіями, разстояніе которыхъ отъ него конечно (*maggiore di un numero assegnabile*), находится *инfinity* бесконечно много другихъ элементовъ; при этомъ отъ каждаго изъ нихъ *всѣ* точки предѣльнаго элемента отстоятъ менѣе, чѣмъ на произвольно малое ϵ .

Для бесконечно многихъ точекъ всегда существуетъ предѣльная точка; спрашивается, имѣетъ ли мѣсто то же самое для бесконечнаго множества линій? *Arzelà* доказываетъ, что при извѣстныхъ условіяхъ это дѣйствительно осуществляется.

24. Въ 1887 г. *Peano* устанавливаетъ³⁾ интересныя понятія.

Пусть P —линейная область (*campo di punti*); для нея x будетъ *внутренней* точкой, если возможно опредѣлить такую окрестность $(x - \rho, x + \rho)$, что всѣ ея точки будутъ точками P ; x окажется *внѣшней* точкой, если всѣ точки ея окрестности $(x - \rho, x + \rho)$ не принадлежать P ; точки, не удовлетворяющія ни тому, ни другому условію будутъ *пограничными* (*punto limite*); послѣднія точки существуютъ всегда, если область не обнимаетъ всѣхъ точекъ прямой; область этихъ точекъ есть *campo limite*.

¹⁾ Atti dell' Accademia dei Lincei, p. 226.

²⁾ Atti dell' Accademia dei Lincei.

³⁾ „Applicazioni Geometriche“.

Точки прямой между двумя данными точками, включая сюда эти послѣднія или нѣтъ, образуютъ область, которая называется *прямолинейнымъ отрѣзкомъ*; длина его—„главная величина“; всякая область, состоящая изъ конечнаго числа отрѣзковъ, имѣетъ также длину, сравнимую съ длиной прямолинейнаго отрѣзка.

Для произвольной области P мы можемъ вообразить состоящія изъ конечнаго числа отрѣзковъ области Π и π , изъ которыхъ въ составъ первой входитъ P , а вторая напротивъ того заключается въ P ; Π и π имѣютъ длину $M(\Pi)$ и $M(\pi)$, и $M(\Pi)$ не меньше $M(\pi)$.

Если при перемѣнныхъ Π и π нижняя граница $M(\Pi)$ совпадаетъ съ верхней границей $M(\pi)$, что мы обозначимъ ¹⁾ такъ

$$uGr M(\Pi) = oGr M(\pi),$$

то общее ихъ значеніе называется *длиной* прямолинейной области.

Если эти границы не равны, область P не имѣетъ длины, сравнимой съ длиной отрѣзка; тогда $uGr M(\Pi)$ и $oGr M(\pi)$ *Peano* называютъ *внѣшней и внутренней длиной* области.

Въ частномъ случаѣ, если нѣтъ области Π , обнимающей P , внѣшняя длина P равна безконечности; если нѣтъ области π , входящей въ составъ P , внутренняя длина P равна нулю.

Область пограничныхъ точекъ входитъ въ составъ области $\Pi - \pi$, которая состоитъ также изъ конечнаго числа отрѣзковъ, при чемъ

$$M(\Pi - \pi) = M(\Pi) - M(\pi)$$

есть внѣшняя длина области пограничныхъ точекъ.

Тѣ же самыя понятія *Peano* устанавливаетъ для областей двухъ и трехъ измѣреній, при чемъ *campo limite* онъ уже называетъ *контуромъ* (*contorno*); области Π и π состоятъ здѣсь изъ многоугольниковъ и призматическихъ тѣлъ.

Идеи *Peano* нашли дальнѣйшее развитіе въ трудахъ *Jordan'a*.

25. Въ 1892 г. ²⁾ *Jordan* кладетъ въ основаніе всего анализа теорію областей.

Въ эту теорію онъ вводитъ нѣкоторыя новыя понятія, необходимыя для распространенія ея на многомѣрныя области. Онъ называетъ *отклоненіемъ* (*écart*) двухъ данныхъ точекъ выраженіе

$$p = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + \dots + |t_1 - t_2|,$$

¹⁾ Здѣсь uGr и oGr есть сокращенія „untere Grenze“ и „obere Grenze“.

²⁾ Journal de Mathématiques, (4) 8 и въ 1893 г.—Cours d'Analyse, deuxième édition, t. I.

вводимое имъ вмѣсто разстоянія

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \dots + (t_1 - t_2)^2;$$

наибольшее отклоненіе точекъ области есть ея *діаметръ*. Нижняя граница отклоненій точекъ, принадлежащихъ соотвѣтственно двумъ областямъ, есть отклоненіе областей.

Для данной области P , не обнимающей всевозможныхъ точекъ извѣстнаго пространства, всѣ точки, не входящія въ P , составляютъ дополнительную область Π . *Jordan* опредѣляетъ затѣмъ ¹⁾ *внутреннія и внѣшнія* точки области и точки *контура* (*frontière*).

Контуръ представляетъ всегда замкнутую область, потому что каждая его предѣльная точка будетъ точкой контура.

Затѣмъ *Jordan*, подобно *Peano*, опредѣляетъ $E(P)$ и $e(P)$ —внутреннее и внѣшнее протяженіе (*étendue*), взявъ за основаніе двѣ системы параллельныхъ прямыхъ и доказывая, что система дѣленій не оказываетъ вліянія на результатъ.

Если Q область внутренняя по отношенію къ P , то

$$e(Q) \leq E(Q) < e(P);$$

если $P = \sum_1^n P_i$ то

$$E(P) \leq \sum_1^n E(P_i), \quad e(P) \geq \sum_1^n e(P_i);$$

если

$$E(P) = e(P),$$

то область называется *измѣримой* (*mesurable*).

26. Въ виду того обстоятельства, что во второй главѣ настоящаго изслѣдованія основной идеей строенія области взяты извѣстные *типы размѣщенія*, намъ нужно будетъ изложить, что подъ тѣмъ же терминомъ понимаетъ *Cantor*, и выяснитъ такимъ образомъ, что общаго имѣется между нашимъ общимъ приемомъ построенія областей и теоріей *Cantor'a*, систематически изложенной въ 1895-97 г.г. ²⁾

Область называется *просто размѣщенной* (*einfach geordnet*), если между элементами существуетъ такой порядокъ, что *a*) изъ двухъ элементовъ одинъ занимаетъ низшее, а другой высшее мѣсто, и *b*) изъ

¹⁾ См.—глава II настоящаго изслѣдованія.

²⁾ М. А. 46 и 49.

трехъ элементовъ, если первый предшествуетъ второму, и второй третьему, то первый предшествуетъ третьему.

Всякой просто размѣщенной области отвѣчаетъ опредѣленный *типъ размѣщенія* (Ordnungstypus) ея элементовъ; подъ нимъ *Cantor* разумѣетъ общее понятіе, которое возникаетъ, если мы отвлечемся отъ индивидуальныхъ свойствъ элементовъ области, но удержимъ только ихъ порядокъ.

Для каждаго трансфинитнаго размѣра имѣется безконечное множество различныхъ типовъ размѣщенія, составляющихъ особый *классъ типовъ*. Простейшими безконечными типами будутъ ω и $^*\omega$, отвѣчающіе размѣщеніямъ первый—цѣлыхъ положительныхъ и второй—цѣлыхъ отрицательныхъ чиселъ

$$\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots;$$

типъ размѣщенія всѣхъ цѣлыхъ чиселъ есть $^*\omega + \omega$.

Надъ типами размѣщенія *Cantor* производитъ сложене и умноженіе, при чемъ для сложенея вообще

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

если n —конечный типъ размѣщенія, то—между прочимъ—

$$n + \omega = \omega, \omega + n = \omega;$$

затѣмъ

$$\alpha \beta = \beta \alpha, \alpha \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta \gamma, \alpha (\beta + \gamma) = \alpha \beta + \alpha \gamma.$$

Въ числѣ различныхъ типовъ размѣщенія *Cantor* рассматриваетъ, кромѣ *a)* ω и *b)* $^*\omega$, еще *c)* η —типъ размѣщенія положительныхъ рациональныхъ правильныхъ дробей въ ихъ естественномъ порядкѣ и *d)* типъ линейной непрерывности. Кромѣ нихъ можно еще взять типы размѣщенія *e)* сгущенной, *f)* замкнутой и *g)* совершенной области.

27. Въ 1895 году¹⁾ въ своей диссертациі *Borel* устанавливаетъ теорему, которая теперь извѣстна какъ „теорема *Borel'a*“:

„Если на конечномъ отрѣзкѣ имѣется счетный²⁾ рядъ интерваловъ такого рода, что каждая точка отрѣзка есть *внутренняя* точка по крайней мѣрѣ одного изъ интерваловъ, то уже нѣкоторое *конечное* число этихъ интерваловъ покрываетъ отрѣзокъ цѣликомъ, т. е. такъ, что всѣ его точки будутъ *внутренними* точками этого конечнаго ряда интерваловъ“.

¹⁾ Annales de l'École Normale, (3) 12.

²⁾ См. Leçons, p. 42; въ первой редакціи (p. 51) было просто „une infinité d'intervalles“

Дѣйствительно: пусть a —правый конецъ всего интервала, и (a_1, b_1) —одинъ изъ интерваловъ, заключающихъ a внутри себя; (a_2, b_2) —одинъ изъ интерваловъ, обнимающихъ b_1 , и т. д.; эти интервалы или достигаютъ праваго конца b всего интервала, или же этого нѣтъ, и тогда существуетъ

$$b_\omega = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i.$$

Для b_ω находимъ соотвѣтственный интервалъ $(a_{\omega+1}, b_{\omega+1})$, при чемъ пусть $a_{\omega+1}$ падаетъ между b_{m-1} и b_m . Въ такомъ случаѣ достаточно удержать конечное число интерваловъ $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m), (a_{\omega+1}, b_{\omega+1})$, чтобы отъ a дойти до b_ω ; и т. д. Мы имѣемъ всегда возможность продолжать этотъ процессъ, переходя, когда это будетъ необходимо, къ предѣлу и замѣняя при этомъ счетный рядъ интерваловъ конечнымъ; мы достигнемъ такимъ образомъ конца b , потому что процессъ нахождения интерваловъ (a_i, b_i) долженъ оборваться; иначе мы получили бы рядъ интерваловъ съ концами

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_\omega, \dots,$$

гдѣ указатели пробѣгаютъ всѣ числа 2-го класса. Но эти указатели, такъ какъ область интерваловъ—счетна, являются числами натурального ряда въ ихъ естественномъ порядкѣ, а это не возможно, такъ какъ 2-ой классъ чиселъ составляетъ область 2-го размѣра.

Мы приходимъ такимъ образомъ—на основаніи предыдущаго процесса—къ опредѣленію на дѣлѣ конечнаго числа интерваловъ, покрывающихъ отрѣзокъ прямой.

Въ 1898 году¹⁾ *Borel* даетъ своей теоремѣ другое доказательство, которое едва ли можно признать удовлетворительнымъ: оно заключаетъ въ себѣ *petitio principii*. Перенумеровавъ интервалы въ какомъ нибудь порядкѣ и желая доказать, что послѣ нѣкоторыхъ N интерваловъ не останется точекъ, не вошедшихъ *внутри* по крайней мѣрѣ одного изъ нихъ, *Borel* предполагаетъ существованіе хотя одной такой точки; тогда интервалы, которые ее заключаютъ, *имѣютъ указатели, превышающіе какое угодно число n* . *Borel* дѣлитъ весь отрѣзокъ пополамъ, потомъ еще пополамъ, и т. д., и беретъ тѣ обнимающіе послѣдовательно другъ другъ части основнаго интервала, которыя всѣ будутъ имѣть свойство, присущее всему отрѣзку, именно—каждая изъ послѣдовательныхъ частей заключаетъ по крайней мѣрѣ одну точку, входящую только въ интервалы съ указателями, большими произвольнаго числа n .

¹⁾ Leçons, p. 42—43.

Убывающія части интервала протяженіемъ

$$l, \frac{l}{2}, \frac{l}{2^2}, \dots, \frac{l}{2^m}, \dots$$

имѣютъ предѣломъ нѣкоторую точку α , которая, какъ говоритъ *Borel*, „по предположенію лежитъ внутри опредѣленнаго интервала (a_k, b_k) , такъ какъ мы предположили область интерваловъ счетной“. Въ этихъ словахъ *Borel* ссылается на то, что должно быть доказано. Причина, которая влечетъ за собою неудачу доказательства, заключается въ распредѣленіи интерваловъ въ опредѣленный порядокъ.

Болѣе простое доказательство теоремъ *Borel*'я было дано *Lebesgue*'омъ¹⁾.

Если отъ лѣвой границы a всего интервала (a, b) можно съ помощью конечнаго числа интерваловъ дойти до точки x , *Lebesgue* называетъ эту точку *достигнутой*. Если x достигнута, достигнута и всякая точка интервала (a, x) ; въ противномъ случаѣ не будутъ достигнуты и всѣ точки (x, b) . Если b не достигнута, имѣется послѣдняя достигнутая или первая недостигнутая точка x_0 ; эта точка лежитъ *внутри* нѣкотораго интервала (α_0, β_0) ; пусть

$$\alpha_0 < x_1 < x_0 < x_2 < \beta_0.$$

По предположенію относительно x_0 , точка x_1 достигнута послѣ конечнаго числа n интерваловъ; добавляя къ нимъ интервалъ (α_0, β_0) , мы достигаемъ точки x_2 , что противно положенію относительно роли точки x_0 ; итакъ b должна быть достигнута. Здѣсь, какъ замѣчаетъ *Lebesgue*, не дѣлается ограниченія, что число всѣхъ интерваловъ счетно. Аналогичное доказательство даетъ *Lebesgue* и для двухмѣрной области, пользуясь при этомъ кривой *Peano*.

28. Такъ какъ въ счетномъ ряду интерваловъ, фигурирующихъ въ теоремѣ *Borel*'я, имѣются интервалы, которые покрываютъ другъ друга,

то сумма всѣхъ интерваловъ $\sum_1^{\infty} l_n$ будетъ превосходить длину основнаго интервала l . Тоже самое происходитъ и по отношенію къ интерваламъ $l', l'', \dots, l^{(N)}$, покрывающимъ весь основной интервалъ и существующимъ въ силу предыдущей теоремы:

$$\sum_{j=1}^N l^{(j)} > l.$$

¹⁾ Leçons, p. 105.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что если сумма конечнаго или безконечнаго ряда интерваловъ меньше l , то *внѣ этихъ интерваловъ должны существовать точки основнаго интервала.*

Эти точки будутъ несчетны; дѣйствительно: пусть

$$\sum_1^{\infty} l_n = s < l,$$

и пусть невнутреннія точки образуютъ счетный рядъ

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots;$$

построивъ около нихъ интервалы

$$l'_m = \left(a_m - \frac{\varepsilon}{2^m}, a_m + \frac{\varepsilon}{2^m} \right),$$

мы будемъ имѣть два счетныхъ ряда интерваловъ $\{l_n\}$ и $\{l'_m\}$, заключающихъ *всѣ* точки основнаго интервала l . Сумма этихъ интерваловъ, взятыхъ вмѣстѣ, будетъ не больше $s + \varepsilon$; такъ какъ ε можетъ быть взято удовлетворяющимъ условію $s + \varepsilon < l$, то отсюда слѣдуетъ, что внѣ l_n и l'_m должны быть точки l , что противно положенію. Итакъ невнутреннія точки счетнымъ рядомъ быть не могутъ.

Изъ предыдущаго вытекаетъ между прочимъ очень важная теорема, которой *Borel* коснулся только мимоходомъ: „Всякая счетная область можетъ быть включена въ интервалы, общую сумму которыхъ можно сдѣлать произвольно. малой“.

29. Взявъ интервалы

$$(2) \quad \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3} \right),$$

окружающіе всѣ раціональныя точки, *Borel* рассматриваетъ область точекъ невнутреннихъ для этихъ интерваловъ; интересно разобрать такую область подробнѣе.

Приведемъ раціональныя дроби въ видѣ счетнаго ряда

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; \frac{1}{6}, \frac{5}{6}; \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}; \dots,$$

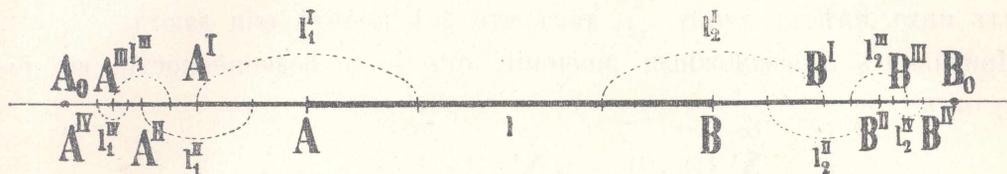
мы получимъ для нихъ соотвѣтственные интервалы

$$l_1 = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right), l_2 = \left(\frac{8}{27}, \frac{10}{27} \right), l_3 = \left(\frac{17}{27}, \frac{19}{27} \right), l_4 = \left(\frac{15}{64}, \frac{17}{64} \right), l_5 = \left(\frac{47}{64}, \frac{49}{64} \right),$$

$$l_6 = \left(\frac{24}{125}, \frac{26}{125} \right), l_7 = \left(\frac{49}{125}, \frac{51}{125} \right), \dots$$

Не трудно видѣть, что 1) одни изъ этихъ интерваловъ помѣщаются цѣликомъ на другихъ; къ такой категоріи принадлежатъ — напри- мѣръ — l_7 , лежащій на l_1 , такъ какъ

$$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} < \frac{392}{1000} = \frac{49}{125}, \quad \frac{51}{125} = \frac{408}{1000} < \frac{625}{1000} = \frac{5}{8};$$



и 2) середина однихъ интерваловъ совпадаетъ съ границами другихъ; дѣйствительно — границы интервала $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ будутъ рациональны, слѣ- довательно — каждая изъ нихъ служитъ серединой интерваловъ

$$\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8^3}, \frac{3}{8} + \frac{1}{8^3}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{8^3}, \frac{5}{8} + \frac{1}{8^3}\right);$$

въ свою очередь точки

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{8^3} = \frac{319}{2^9}, \quad \frac{5}{8} + \frac{1}{8^3} = \frac{321}{2^9}$$

служатъ срединами интерваловъ

$$\left(\frac{319}{2^9} - \frac{1}{2^{27}}, \frac{319}{2^9} + \frac{1}{2^{27}}\right), \quad \left(\frac{321}{2^9} - \frac{1}{2^{27}}, \frac{321}{2^9} + \frac{1}{2^{27}}\right);$$

и т. д.; мы получимъ такимъ образомъ влѣво и вправо отъ cadaго интервала $l = AB$ интервалы l_1^I и l_2^I съ серединами A, B ; интерва- лы l_1^{II} и l_2^{II} съ серединами A^I и B^I , и т. д. Эти интервалы, ложась своею половиною на прежде взятые интервалы, другой половиною въ обѣ стороны удлиняютъ интервалъ; точки A, A^I, A^{II}, \dots и B, B^I, B^{II} и т. д. стремятся къ нѣкоторымъ предѣламъ A_0 и B_0 , которые лежатъ *внѣ* разрастающагося интервала $A^{(i)} B^{(i)}$ при какомъ угодно значеніи i . Эти точки будутъ границами интервала $A_0 B_0$, къ которому стремится $A^{(i)} B^{(i)}$ съ возрастаніемъ i , и мы можемъ поэтому смотрѣть на $A^{(i)} B^{(i)}$, при перемѣнномъ i , какъ на *открытый интервалъ* $A_0 B_0$.

Мы видѣли, что нѣкоторые изъ интерваловъ l_j расположены на предшествующихъ интервалахъ, такъ что и отвѣчающія имъ границы A_0, B_0 могутъ лежать внутри другихъ интерваловъ. Это имѣетъ мѣсто — напри- мѣръ — для интервала $(\frac{49}{125}, \frac{51}{125})$; спрашивается, не будетъ ли это общимъ явленіемъ, т. е. — не располагаются ли всѣ интервалы та- кимъ образомъ, что они постоянно покрываютъ другъ друга. Если это такъ, то внутри интерваловъ l_j должны находиться *всѣ* точки $(0, 1)$ безъ исключенія.

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, мы возьмемъ сумму всевозможныхъ интерваловъ, не заботясь о томъ, покрываютъ они другъ друга или нѣтъ. Такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ правильными дробями, то для каждаго знаменателя q числитель можетъ принимать значенія отъ 1 до $q-1$; такимъ образомъ интерваловъ типа (2) будетъ $q-1$. Каждый изъ нихъ имѣетъ длину $\frac{2}{q^3}$, такъ что всѣ вмѣстѣ они даютъ $\frac{2(q-1)}{q^3}$. Придавая q всевозможныя значенія отъ 1 до безконечности, мы получимъ

$$s = \sum_1^{\infty} \frac{2(q-1)}{q^3} = 2 \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^3} \right) = 2M < 1,$$

такъ какъ M есть нѣкоторое определенное число $< \frac{1}{2}$. Изъ теоремы же *Borel'*я слѣдуетъ, что въ такомъ случаѣ существуетъ несчетная область точекъ, не лежащихъ внутри интерваловъ (2).

Итакъ всѣ границы открытыхъ интерваловъ $A_0 B_0$ не могутъ лежать внутри другихъ интерваловъ l_j ; слѣдовательно—найдутся такія границы A_0, B_0 , которыя не принадлежатъ къ этой категоріи, и онѣ непременно *должны быть ирраціональны*.

Мы получимъ такимъ образомъ область открытыхъ интерваловъ типа $A_0 B_0$, невнутренними точками которыхъ будутъ исключительно ирраціональныя точки; эти точки образуютъ совершенную область.

По поводу изложеннаго выше *Borel* говорит¹⁾: „Размысливъ о томъ фактѣ, что можно устранить изъ прямой всѣ точки, заключающіяся въ каждомъ изъ интерваловъ (2), и что остается еще несчетная область точекъ, мы будемъ менѣе склонны считать, что мы знаемъ, что такое непрерывность, и разсуждать о ней какъ о понятіи интуитивномъ и вполне ясномъ“.

30 Далѣе *Borel* дѣлаетъ важное указаніе, касающееся природы непрерывности и дающее возможность сдѣлать еще болѣе поразительный выводъ.

Около раціональныхъ точекъ $\frac{p}{q}$ строимъ интервалы

$$(3) \quad \left(\frac{p}{q} - \frac{\varepsilon}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{\varepsilon}{q^3} \right),$$

гдѣ

$$\varepsilon = \frac{1}{\nu} \quad \text{при} \quad \nu = 1, 2, 3, 4, \dots$$

¹⁾ Leçons, p. 44.

Сумма интерваловъ $l_n^{(\nu)}$, отвѣчающихъ нѣкоторому значенію ν , удовлетворяетъ неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n^{(\nu)} \leq 2 \varepsilon \sum \left\{ \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^3} \right\} = 2 \varepsilon M = \frac{2 M}{\nu},$$

при чемъ эта сумма можетъ быть произвольно мала въ связи съ величиной ν .

Взявъ область точекъ, находящихся внутри интерваловъ (3), мы получимъ, въ зависимости отъ значенія ν , рядъ областей

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_\nu, \dots, \quad (4)$$

изъ которыхъ каждая входитъ во всѣ предыдущія; рассмотримъ же область тѣхъ точекъ, которыя общи всѣмъ областямъ (4)

$$E = D \{ E_1, E_2, E_3, \dots, E_\nu, \dots \}.$$

Что въ составъ E должны входить всѣ $\frac{p}{q}$, это ясно само собой; но оказывается, что кромѣ того въ составъ E входитъ еще несчетный рядъ нѣкоторыхъ другихъ точекъ. Чтобы убѣдиться въ этомъ, возьмемъ область чиселъ

$$\xi = \frac{\alpha_1}{10^{1!}} + \frac{\alpha_2}{10^{2!}} + \frac{\alpha_3}{10^{3!}} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^{n!}} + \dots, \quad (5)$$

гдѣ α_i можетъ принимать какія угодно значенія изъ ряда чиселъ отъ 0 до 9.

Такъ какъ область (5) можетъ быть взаимно-однозначно отнесена къ области чиселъ

$$x = \frac{\alpha_1}{10^1} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \dots,$$

а эти послѣднія даютъ всѣ точки¹⁾ интервала (0, 1), которыя несчетны, то также несчетны будутъ и числа (5), и область $\{\xi\}$ имѣетъ размѣръ непрерывности.

Докажемъ теперь, что каждое изъ чиселъ ξ входитъ въ составъ каждой изъ областей E_ν при произвольномъ значеніи ν .

¹⁾ Счетный рядъ рациональных чиселъ фигурируетъ здѣсь дважды, что не мѣняетъ сути дѣла.

Пусть ξ —одно изъ чиселъ (5): изображая его въ видѣ

$$\xi = \frac{p}{q} + \frac{\alpha_{m+1}}{q^{m+1}} + \frac{\alpha_{m+2}}{q^{(m+1)(m+2)}} + \dots, \text{ гдѣ } q = 10^{m!},$$

мы видимъ, что

$$(6) \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^m};$$

здѣсь $\frac{p}{q}$ — одно изъ приближеній числа ξ ; такъ какъ m , а слѣдовательно и знаменатель q , могутъ быть взяты произвольно большими, то $\frac{p}{q}$ можетъ произвольно мало отличаться отъ ξ .

Числа, входящія въ любую изъ областей E_ν , удовлетворяютъ условію

$$(7) \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{q^3}.$$

Если m выбрано такъ, что

$$(8) \quad \frac{1}{q^m} < \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{q^3}, \quad q^{m-3} = 10^{m!(m-3)} > \nu,$$

число ξ —въ силу (6)—будетъ удовлетворять условію (7) и является поэтому однимъ изъ чиселъ области E_ν . Неравенство же (8) всегда можетъ быть осуществлено подборомъ m при всякомъ заданномъ конечномъ ν .

Итакъ несчетная область $\{\xi\}$ входитъ, какъ составная часть, въ каждую изъ E_ν ; слѣдовательно—она войдетъ и въ E , откуда вытекаетъ несчетность послѣдней области. Этотъ фактъ, установленный *Borel'емъ*, представляетъ очень большое значеніе.

Интервалы (3), которыми опредѣляются области E_ν , имѣютъ серединой и границами раціональныя точки. Безконечное убываніе интерваловъ происходитъ всегда такимъ образомъ, что границы остаются раціональными; слѣдовательно—область E *опредѣляется счетнымъ рядомъ бесконечно малыхъ интерваловъ съ раціональными границами.*

Изъ того, что область E несчетна, слѣдуетъ далѣе, что *въ каждомъ изъ этихъ интерваловъ находится несчетная область точекъ.*

Дѣйствительно, если бы въ каждомъ изъ нихъ было конечное или счетное число точекъ, то счетный рядъ интерваловъ далъ бы счетный рядъ конечныхъ или счетныхъ рядовъ точекъ; а, какъ извѣстно, такой рядъ снова будетъ только счетенъ. Такимъ образомъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ интерваловъ (3) долженъ обладать несчетнымъ рядомъ точекъ.

Но не трудно видѣть, что если это имѣетъ мѣсто по отношенію къ одному изъ интерваловъ, то тоже самое справедливо и относи-

тельно всѣхъ. Въ самомъ дѣлѣ: при заданномъ значеніи ν , между каждыми двумя интервалами (3) области E , можно установить взаимно-однозначное соотвѣтствіе, которое будетъ сохраняться въ каждой стадіи измѣненія ν ; оно сохранится поэтому и для интерваловъ области E .

Мы приходимъ такимъ образомъ къ тому заключенію, что каждый изъ интерваловъ области E долженъ давать несчетную область точекъ E , или—иными словами—*между каждыми двумя произвольно мало различающимися другъ отъ друга рациональными числами лежитъ несчетная область другихъ чиселъ.*

31. Если мы примѣнимъ теорему конца § 28 къ рациональнымъ точкамъ интервала $(0,1)$, которыя представляютъ счетный рядъ, мы придемъ къ небезынтереснымъ результатамъ.

Пусть

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

—счетный рядъ всѣхъ рациональныхъ дробей; пусть далѣе ε нѣкоторое малое *иррациональное* число; строимъ интервалы l_i протяженіемъ

$$\left(x_1 - \frac{\varepsilon}{2}, x_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \left(x_2 - \frac{\varepsilon}{2^2}, x_2 + \frac{\varepsilon}{2^2}\right), \dots, \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right), \dots; \quad (9)$$

на каждомъ изъ этихъ интерваловъ l_i , построенномъ около точки x_i , могутъ лежать другія рациональныя точки, такъ что интервалы будутъ захватывать другъ друга; на нихъ расположены также и нѣкоторыя иррациональныя точки; наименьшее кратное ¹⁾ интерваловъ (9) не можетъ быть больше суммы этихъ интерваловъ

$$\sum_1^{\infty} \left\{ \frac{2\varepsilon}{2^n} \right\} \leq \sum_1^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

Интервалы l_i могутъ—во первыхъ—захватывать другъ друга; изъ такихъ интерваловъ составятся удлиненные интервалы типа $A_0 B_0$ ²⁾ съ тою только разницей, что серединами удлиняющихся интерваловъ будутъ служить внутреннія точки удлиняемыхъ; во вторыхъ—возможно, что одни изъ l_i располагаются цѣликомъ на другихъ.

Очевидно далѣе, что интервалы (9) не могутъ быть смежными; дѣйствительно—тогда должно было бы быть для нѣкоторыхъ m и n

$$x_m + \frac{\varepsilon}{2^m} = x_n - \frac{\varepsilon}{2^n},$$

¹⁾ Въ смыслѣ Cantor'a.

²⁾ См. 29^c.

откуда слѣдовало бы

$$x_n - x_m = \varepsilon \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n} \right),$$

т. е. разность двухъ рациональныхъ чиселъ была ирраціональна.

Изъ того обстоятельства, что сумма всѣхъ различныхъ интерваловъ не можетъ превышать 2ε , — на основаніи теоремы *Borel'*я — слѣдуетъ, что внѣ интерваловъ (9) имѣются точки интервала (0, 1).

Наименьшее кратное всевозможныхъ интерваловъ (9) представить изъ себя счетный рядъ часто разсѣянныхъ по (0, 1) интерваловъ, которые опредѣляютъ нѣкоторую область, состоящую исключительно изъ ирраціональныхъ точекъ. На возможность построения такой области указалъ впервые *Scheeffer* ¹⁾.

Если область состоитъ исключительно изъ ирраціональныхъ точекъ, точки рациональныя должны быть только внутренними точками свободныхъ интерваловъ.

Такое изолированіе рациональныхъ точекъ идетъ какъ будто бы въ разрѣзъ съ тѣмъ фактомъ, что каждое ирраціональное число опредѣляется какъ предѣлъ ряда рациональныхъ чиселъ. Но это не такъ.

Каждая ирраціональная точка ξ , лежащая внѣ интерваловъ (9), является предѣломъ границъ нѣкотораго ряда бесконечно убывающихъ интерваловъ

$$l_{m_1}, l_{m_2}, l_{m_3}, \dots, l_{m_n}, \dots;$$

если мы возьмемъ на этихъ интервалахъ внутреннія рациональныя точки, то ξ будетъ также предѣломъ и этихъ точекъ въ силу того, что интервалы l_{m_n} при приближеніи къ ξ убываютъ бесконечно. —

Замѣтимъ еще, что *Borel* далъ ²⁾ прекрасное построение свободныхъ интерваловъ для совершенной области.

32. Крайне интереснымъ является опредѣленіе *Borel'*емъ ³⁾ *мѣры области*, не совпадающее на первый взглядъ съ тѣми опредѣленіями, которыя были даны до него. Ходъ разсужденія автора таковъ.

Пусть сначала область состоитъ изъ *всѣхъ* точекъ счетнаго ряда не захватывающихъ другъ друга интерваловъ, сумма которыхъ равна s ; *Borel* говоритъ тогда, что „область имѣетъ мѣру s “.

Если двѣ такого рода области не имѣютъ общихъ точекъ, и s_1 и s_2 — ихъ мѣры, то $s_1 + s_2$ будетъ мѣрой ихъ суммы. Вообще для счетнаго

¹⁾ См 18°.

²⁾ Leçons, p. 49.

³⁾ Leçons, p. 46

ряда областей E_i безъ общихъ точекъ и имѣющихъ мѣрами s_i

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots = s$$

будетъ мѣрой ихъ суммы E ; при этомъ не важно, входятъ ли или нѣтъ въ составъ областей границы опредѣляющихъ ихъ интерваловъ.

Если E содержитъ точки E_1 , и s, s_1 —ихъ мѣры, то $E - E_1$ имѣетъ мѣру $s - s_1$.

Области, для которыхъ можно опредѣлить мѣру въ силу предыдущихъ условий, *Borel* называетъ *измѣримыми* (mesurable) и говоритъ только объ измѣримыхъ областяхъ; этимъ названіемъ авторъ не хочетъ утверждать, что не возможно дать опредѣленіе мѣры для другихъ областей, но что его интересуютъ только области, измѣренныя въ указанномъ смыслѣ. Опредѣленіе *Borel*'я можно выразить чуточку иначе, и тогда простота и естественность его бросаются въ глаза.

Замѣтимъ сначала, что какъ у *Borel*'я, такъ и въ нашемъ изложеніи, подъ счетнымъ рядомъ можно понимать также и конечный; такимъ образомъ область точекъ $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ будетъ имѣть мѣру $\frac{1}{3}$, хотя опредѣляющій интервалъ здѣсь единственный.

Если область E состоитъ изъ ряда сплошныхъ отрѣзковъ, то сумма ихъ длинъ s , равная или меньшая l —длины основного отрѣзка, естественно берется за мѣру области, при чемъ—слѣдовательно—мѣра есть ничто иное, какъ длина, но составленная изъ многихъ слагаемыхъ. Такое опредѣленіе мѣры совершенно просто и естественно.

Если имѣются двѣ области E_1 и E_2 подобнаго рода, но безъ общихъ точекъ, то сплошные интервалы будутъ распредѣляться по основному отрѣзку въ нѣкоторомъ порядкѣ, при чемъ захватывать другъ друга они не могутъ и могутъ самое большее примыкать другъ къ другу; въ этомъ послѣднемъ случаѣ общая граница можетъ входить въ составъ только одного изъ нихъ, такъ что по крайней мѣрѣ одинъ изъ интерваловъ оказывается открытымъ. Два счетныхъ ряда интерваловъ, опредѣляющихъ E_1 и E_2 , даютъ снова счетный рядъ, и сумма $E_1 + E_2 = E$ опредѣлится этимъ счетнымъ рядомъ интерваловъ; очевидно, что здѣсь

$$M(E_1 + E_2) = s + s_1 = M(E_1) + M(E_2). \quad (10)$$

Эта теорема является непосредственнымъ слѣдствіемъ опредѣленія.

Если мы имѣемъ рядъ областей

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots \quad (11)$$

безъ общихъ точекъ, и каждая изъ нихъ задается счетнымъ рядомъ

интерваловъ, то эти интервалы могутъ быть только смежными, но никоимъ образомъ не должны захватывать другъ друга.

Счетный рядъ счетныхъ рядовъ такихъ интерваловъ даетъ снова счетный рядъ интерваловъ, всѣ точки которыхъ входятъ въ составъ области $E = \sum E_i$, являющейся суммой областей (12). Такъ какъ при этомъ

$$(12) \quad s = \sum s_i, \text{ то } M \sum E_i = \sum M(E_i).$$

Если далѣе E_1 входитъ въ составъ E , т. е. E_1 задается счетнымъ рядомъ сплошныхъ интерваловъ, расположенныхъ на интервалахъ E , то выдѣленіе E_1 изъ E будетъ имѣть слѣдствіемъ раздробленіе каждаго интервала E , вообще говоря, на счетный рядъ частныхъ интерваловъ и удаленіе ряда этихъ послѣднихъ.

Послѣ подобнаго удаленія область $E_1 - E_2$ будетъ состоять изъ оставшихся интерваловъ, если таковые имѣются, и изъ точекъ, не образующихъ сплошныхъ интерваловъ. Если $E_1 - E_2$ состоитъ только изъ сплошныхъ интерваловъ, общая длина которыхъ будетъ $s_1 - s_2$, равенство

$$(13) \quad M(E_1 - E_2) = s_1 - s_2 = M(E_1) - M(E_2)$$

является опять таки слѣдствіемъ опредѣленія.

Если же въ составъ $E_1 - E_2$ входятъ точки, не составляющія интерваловъ, *разность $s_1 - s_2$ принимается за опредѣленіе мѣры*; только здѣсь *Borel* выходитъ за предѣлы элементарныхъ соображеній и выставляетъ положеніе, неизбѣжность котораго едва ли можетъ быть оспариваема, если только мы хотимъ обобщить понятіе о длинѣ, съ тѣмъ чтобы распространить его на области, не состоящія изъ сплошныхъ интерваловъ.

Равенства (10) и (13) сохраняютъ—очевидно—свою силу и для областей, являющихся суммами счетнаго ряда другихъ областей безъ общихъ точекъ, такъ какъ каждая сумма подходитъ подъ основное опредѣленіе мѣры.

Опредѣливъ мѣру s области E , мы находимъ—на основаніи (13)—

$$M(l - E) = l - s.$$

Отсюда слѣдуетъ вычисленіе мѣры для замкнутыхъ и совершенныхъ областей, такъ что тѣ и другія оказываются измѣримыми въ смыслѣ *Borel'*я.

Если область E счетна, то каждую ее точку можно разсматривать какъ составляющую область E_i , опредѣляемую единственнымъ интерваломъ длина котораго равна 0; такъ какъ въ этомъ случаѣ $M(E_i) = 0$, то — на основаніи (12) —

$$M(E) = M \sum_1^{\infty} E_i = 0,$$

т. е. мѣра счетной области всегда равна нулю; но не обратно: если мѣра равна нулю, это еще не значитъ, что область счетна. *Borel* ссылается при этомъ на примѣръ 30°. Отсюда слѣдуетъ далѣе, что если мѣра E не равна нулю, область не можетъ быть счетной. Итакъ

Borel называетъ измеримыми всѣ тѣ области, который сами или ихъ дополнительныя области могутъ быть заданы счетнымъ рядомъ сплошныхъ интерваловъ.

Если всякая область можетъ быть задана такимъ образомъ, опредѣленіе мѣры *Borel*'я сдѣлается всеобъемлющимъ.

Schoenflies, говоря въ своемъ отчетѣ о *Borel*'н, совершенно не уясняетъ хода его идей и приписываетъ ему между прочимъ то, чего *Borel* не говорилъ. *Schoenflies* пишетъ, что *Borel* „представляетъ себѣ каждую точку области окруженной произвольной окрестностью и имѣетъ дѣло съ заполненной ими частью пространства и съ предѣломъ ихъ“.

Мы видѣли выше, что *Borel* ничего подобнаго не говорилъ, и что все это идетъ въ разрѣзъ съ самой идеей *Borel*'я.

Точно также по поводу теоремы (10) *Schoenflies* приписываетъ *Borel*'ю нѣчто не высказанное послѣднимъ: *Borel* предполагаетъ, что тѣ области, для которыхъ можетъ быть рѣчь о мѣрѣ, или ихъ дополнительныя области, заданы счетнымъ рядомъ сплошныхъ интерваловъ; *Schoenflies* же говоритъ: „въ случаѣ, если континуумъ C будетъ разбитъ какъ нибудь на двѣ области E_1 и E_2 , то должно быть

$$M(C) = M(E_1) + M(E_2)“;$$

это „какъ нибудь“ противорѣчитъ идеѣ *Borel*'я¹⁾. Поэтому возраженіе *Schoenflies*'а противъ *Borel*'я кажется все построеннымъ на недоразумѣніи.

33. Съ 1896 г. начинаются²⁾ работы *Schoenflies*'а, котораго главнымъ образомъ интересуютъ двухмѣрные области и — въ частности — дѣленіе плоскости съ помощью замкнутой кривой.

¹⁾ См. стр. 93.

²⁾ Göttinger Nachrichten, S. 79, 254.

Schoenflies является большимъ сторонникомъ арифметическаго построения области съ помощью чиселъ, написанныхъ въ разныхъ системахъ, построения, которымъ часто пользовался *Peano* ¹⁾).

Онъ изображаетъ — на примѣръ — правильныя дроби написанными въ двойничной системѣ

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \quad a_i = 0 \text{ или } 1,$$

устраняя при этомъ конечныя дроби, и читаетъ ихъ затѣмъ въ десятичной системѣ. Тогда область $\{x\}$ будетъ рѣдко разсѣянной совершенной областью, свободными интервалами которой будутъ

$$[0.(1), 1.0], [0.0(1), 0.1], [0.00(1), 0.01], [0.10(1), 0.11], \\ [0.000(1), 0.001], [0.010(1), 0.011], [0.100(1), 0.101], [0.110(1), 0.111],$$

и т. д.

Сумма S этихъ интерваловъ оказывается

$$S = \frac{8}{9} + \frac{8}{90} + 2 \cdot \frac{8}{900} + 2^2 \cdot \frac{8}{9000} + \dots + 2^n \cdot \frac{8}{9 \cdot 10^{n+1}} + \dots = 1.$$

34. *Osgood* въ 1896 г. въ статьѣ ²⁾, посвященной вопросу о неравномѣрной сходимости и интегрированіи рядовъ, даетъ интересный примѣръ и нѣсколько важныхъ теоремъ относительно теоріи областей.

Онъ строитъ совершенную область слѣдующимъ образомъ, называя ее частнымъ случаемъ области *Harnack'a* ³⁾:

$$0 \left| \frac{l_1 \ l_3 \ l_4}{a_1^4 \ a_1^3 \ a_2^2} \ \frac{l_2 \ l_4 \ l_3 \ l_4}{a_1^2 \ a_3^4 \ a_3^2 \ a_4^4} \right. \frac{l_1}{a_1} \left. \frac{l_4 \ l_3 \ l_4 \ l_2 \ l_4 \ l_3 \ l_4}{a_5^4 \ a_5^3 \ a_6^4 \ a_2^2 \ a_7^4 \ a_4^3 \ a_3^4} \right| 1$$

$$l_1 = \lambda - \frac{\lambda}{3},$$

$$l_1 + 2 l_2 = \lambda - \frac{\lambda}{4},$$

$$l_1 + 2 l_2 + 2^2 l_3 = \lambda - \frac{\lambda}{5},$$

.....

$$l_1 + 2 l_2 + 2^2 l_3 + \dots + 2^{n-1} l_n = \lambda - \frac{\lambda}{n+2},$$

¹⁾ *Schoenflies* (Bericht, S. 64) указываетъ на статью *Peano* въ „Rivista di Matematica“; этой статьи въ рукахъ я не имѣлъ.

²⁾ Göttinger Nachrichten; American Journal of Mathematics, 19.

³⁾ М. А. 19, стр. 239.

гдѣ λ произвольное⁴⁾ положительное число $0 < \lambda \leq 1$; отсюда

$$\sum_0^{\infty} 2^i l_{i+1} = \lambda.$$

Затѣмъ *Osgood* разсматриваетъ счетный рядъ областей

$$(1) \quad G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, \dots$$

такихъ, что 1) всѣ G_i замкнуты и рѣдко разсѣяны, и 2) G_i входитъ въ G_{i+1} , и опредѣляетъ область

$$(2) \quad Q \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} G_i,$$

каждая точка которой входитъ въ одну изъ G_i при достаточно большомъ i .

Онъ разсматриваетъ затѣмъ область, дополнительную Q по отношению къ основному интервалу l , и доказываетъ, что эта послѣдняя область несчетна въ произвольной части l . Отсюда слѣдуетъ, что

А. „Область Q не образуетъ континуума ни въ одной части интервала“.

Пусть далѣе данъ рядъ

$$\eta_1 > \eta_2 > \eta_3 > \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0.$$

Для замкнутой и рѣдко разсѣянной области G возьмемъ тѣ свободные интервалы

$$l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1k_1}, \text{ длина которыхъ } > \eta_1,$$

$$l_{21}, l_{22}, \dots, l_{2k_2}, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad > \eta_2,$$

и т. д.; назовемъ

$$\sum_1^{k_1} l_{1i} = \lambda_1, \quad \sum_1^{k_2} l_{2i} = \lambda_2, \quad \dots, \quad \sum_1^{k_n} l_{ni} = \lambda_n, \quad \dots;$$

тогда

$$\sum_1^{\infty} \lambda_i = \lambda \leq l.$$

⁴⁾ Здѣсь $\lambda = \frac{3}{4}$, $l_1 = \frac{1}{2}$, $l_2 = \frac{1}{32}$, $l_3 = \frac{3}{320}$ и т. д.

Выведа для области G такое число λ , *Osgood* опредѣляетъ затѣмъ *мѣру* (content) области

$$J = l - \lambda.$$

Отсюда слѣдуетъ, что точки G могутъ быть включены въ *конечное число* интерваловъ, сумма длинъ которыхъ превышаетъ $l - \lambda$ менѣе, чѣмъ на произвольно малую величину ε .

Наконецъ *Osgood* доказываетъ теорему относительно области (1) и (2)

$$J(Q) = \lim_{i \rightarrow \infty} J(G_i).$$

Въ 1900 году¹⁾ *Osgood*, возвращаясь къ теоремѣ А, доказываетъ ее, не предполагая G_i замкнутыми и рассматривая плоскую область, при чемъ ссылается при доказательствѣ на теорему А; но и безъ нея *Osgood* даетъ доказательство теоремы для линейной области, пользуясь процессомъ *Baire'a* ²⁾.

35. Въ 1897 г. *Burkhardt* устанавливаетъ³⁾ для двухмѣрныхъ областей нѣкоторыя новыя опредѣленія; изъ нихъ для линейныхъ областей можетъ имѣть значеніе только слѣдующее:

Онъ называетъ область *flächenartig* (поверхностной), если въ ея составѣ находится по крайней мѣрѣ одна точка, нѣкоторая окрестность которой цѣликомъ принадлежитъ области; аналогично этому опредѣленію, при подобномъ же условіи можно сказать, что линейная область будетъ *linienartig* (линіеобразна).

Вообще лініеобразныя области можно опредѣлить какъ такія, для которыхъ существуютъ внутреннія точки. ●

Къ числу лініеобразныхъ областей относятся прежде всего тѣ области, которыя непосредственно *измѣримы* въ смыслѣ *Borel'a*; рѣдко разсѣянныя совершенныя и счетныя области къ этому числу не принадлежатъ.

36. Въ одной изъ интересныхъ работъ *Pringsheim'a* по теоріи двойного интеграла⁴⁾ мы находимъ примѣръ арифметическаго построения двухмѣрной области. Пусть x —правильная раціональная дробь; пусть n_x —число ея десятичныхъ или b 'нарныхъ знаковъ, если x написано въ системѣ съ основаніемъ b . Пусть далѣе каждой раціональной дроби x отвѣчаютъ также дробныя раціональныя значенія y , у которыхъ число знаковъ n_y равно n_x .

¹⁾ М. А. 53.

²⁾ Ниже см. стр. 55.

³⁾ Functionentheoretische Vorlesungen, B. I, S. 67 etc.

⁴⁾ Münchner Sitzungsberichte, 1899 S. 48.

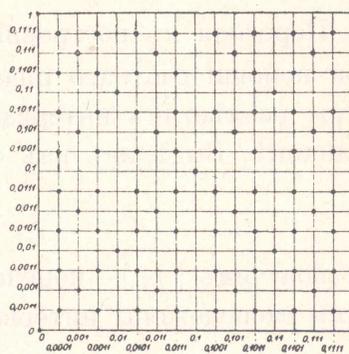
Тогда для каждого рационального x существует конечное число значений y , т. е. на каждой вертикали съ рациональной абсциссой лежит конечное число точекъ области P . Очевидно—тоже самое справедливо и по отношению къ каждой рациональной горизонтали¹⁾.

Посмотримъ теперь, какъ расположены точки области на прямой

$$y = a + x, \quad (1)$$

гдѣ a также рациональная дробь.

Изъ уравненія (1) для каждого x съ $n_x > n_a$ возможно опредѣлить одну точку области, лежащую на прямой; значение x , для котораго $n_x = n_a$, можетъ опредѣлить соответственное значение y только въ томъ случаѣ, когда послѣдніе знаки x и a не дополняютъ друга друга до 0 или до b ; наконецъ, если $n_x < n_a$, абсциссѣ x не отвѣчаетъ на (1) ни одной точки P .



Такимъ образомъ каждому рациональному x съ числомъ знаковъ, большимъ n_a отвѣчаетъ на прямой (1) точка P ; слѣдовательно—точки P будутъ часто разсѣяны по прямой (1).

Придавая же a положительныя и отрицательныя дробныя значенія, мы получимъ часто разсѣянную область параллельныхъ прямыхъ. Отсюда слѣдуетъ, что точки P будутъ часто разсѣяны по квадрату $(0, 1)$, не смотря на то, что на каждой рациональной горизонтали или вертикали ихъ можетъ лежать только конечное число, тогда какъ на на иррациональныхъ прямыхъ точекъ области совершенно не имѣется.

Этотъ примѣръ представляетъ большой интересъ въ теоріи двойного и двукратныхъ интеграловъ; не менѣе важенъ онъ и въ теоріи областей, такъ какъ показываетъ, что, изучивъ детально линейныя области, мы еще очень далеки отъ того, чтобы выводить отсюда заключенія относительно строенія областей двухмѣрныхъ; для послѣднихъ требуется совершенно новыя излѣдованія, которыя и начались работами *Schoenflies'a*, и которыя должны быть основаны на нѣкоторыхъ новыхъ положеніяхъ.

37. Въ 1899 году *Baire* въ своемъ мемуарѣ относительно функций дѣйствительной переменн²⁾ въ широкой степени пользуется теоріей

¹⁾ На чертежѣ $b = 2$, и точки взяты до четырехъ b -нарныхъ знаковъ включительно.

²⁾ *Annali di Matematica*, (3) 3.

областей и вносить нѣкоторые новые результаты въ эту теорію. При этомъ, говоря о трансфинитныхъ числахъ *Cantor'a*, *Baire* замѣчаетъ ¹⁾, что онъ не будетъ заниматься тѣми трудностями, которыя связаны съ отвлеченнымъ понятіемъ о трансфинитномъ числѣ, хотя онъ ими пользуется, какъ удобнымъ языкомъ для обозначенія вполне опредѣленныхъ явленій.

Переходя къ построению *редко разсыянной совершенной области* при помощи счетнаго ряда свободныхъ интерваловъ $\{l_i\}$, *Baire* говоритъ: размѣстимъ интервалы въ нѣкоторый порядокъ, на примѣръ—по величинѣ. Выдѣливъ изъ основного интервала l интервалы

$$l_1, l_2, l_3, \dots, l_n,$$

мы получимъ $\{\lambda_j\}$ —конечный рядъ остальныхъ интерваловъ, на которыхъ расположены интервалы

$$(1) \quad l_{n+1}, l_{n+2}, \dots;$$

на $\{\lambda_j\}$ будутъ такимъ образомъ лежать всѣ точки совершенной области, при чемъ предѣлы границъ интерваловъ $\{l_i\}$, не служащія сами границами, окажутся внутренними точками $\{\lambda_j\}$.

Пусть $\lambda^{(n)}$ наибольшій изъ интерваловъ $\{\lambda_j\}$; при безконечномъ продолженіи процесса, изъ интерваловъ $\{\lambda_j\}$ послѣдовательно выдѣляются интервалы (1); поэтому λ_j убываютъ. Не трудно видѣть, что должно быть

$$\lim_{n \dots \infty} \lambda^{(n)} = 0.$$

Дѣйствительно: если бы это было не такъ, и было бы—слѣдовательно—

$$\lim \lambda^{(n)} = \lambda \neq 0,$$

изъ интервала λ мы не могли бы выдѣлить свободныхъ интерваловъ (1); тогда всѣ точки λ входили бы въ составъ P , что не возможно, такъ какъ P —по условію—редко разсыяна.

Обыкновенно теорія областей имѣетъ дѣло съ распредѣленіемъ точекъ по континууму; *Baire* беретъ произвольную совершенную область P и рассматриваетъ²⁾ точечную область G по отношенію къ области P ; это сводится въ сущности на то, что точки области G входятъ въ составъ P .

¹⁾ Стр. 36.

²⁾ Стр. 46 и т. д.

Въ частности, предположивъ для рѣдко разсѣянной и замкнутой области P существованіе производной $P^{(\Omega)}$, онъ беретъ замкнутую область P_1 по отношенію къ $P^{(\Omega)}$; затѣмъ, допуская, что P_1 второго вида, такъ что $P_1^{(\Omega)} \equiv 0$, онъ беретъ замкнутую область по отношенію къ $P_1^{(\Omega)}$ и называетъ ее P_2 . Продолжая безконечно этотъ процессъ, аналогичный процессу *Cantor'a*, онъ получаетъ $P_\omega, P_{2\omega}$ и т. д., и наконецъ область P_Ω , которая, аналогично съ $P^{(\Omega)}$, необходимо оказывается совершенной. Относительно появленія P_Ω *Baire* рассуждаетъ¹⁾ слѣдующимъ образомъ: для каждой точки области P или существуетъ послѣдняя P_α , въ которую она входитъ, или такой P_α нѣтъ; послѣднемъ случаѣ точки, обладающія этимъ свойствомъ, составляютъ P_Ω . Эти области играютъ существенную роль въ изслѣдованіи *Baire'a*.

Наконецъ *Baire* устанавливаетъ²⁾ крайне важное и новое понятіе:

Пусть имѣется счетный рядъ рѣдко разсѣянныхъ областей

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots; \quad (2)$$

возьмемъ область различныхъ точекъ, входящихъ въ (2),

$$P \equiv M \{ P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots \}; \quad (3)$$

легко убѣдиться, что во всякой части интервала существуютъ точки, не принадлежащія P . Дѣйствительно—въ произвольной части основного интервала l можетъ быть взятъ интервалъ (α_1, β_1) свободный отъ точекъ P_1 , въ немъ—интервалъ (α_2, β_2) , свободный отъ точекъ P_2 ; и т. д.; мы получимъ такимъ образомъ

$$\lim \alpha_i = \alpha \leq \beta = \lim \beta_i.$$

Будетъ ли $\alpha \leq \beta$, во всякомъ случаѣ имѣется по крайней мѣрѣ одна точка, которая навѣрное не входитъ ни въ одинъ P_i и—слѣдовательно—не принадлежитъ составу P .

Области строенія (3) *Baire* называетъ областями *первой категоріи* и всякія области, не обладающія этимъ строеніемъ,—областями *второй категоріи*.

Область P можетъ быть совершенно иной природы, чѣмъ i ; Рона можетъ быть—напримѣръ—часто разсѣяна по интервалу и не замкнута, въ то время какъ области P_i рѣдко разсѣяны и замкнуты; и т. д.³⁾

¹⁾ Стр. 51.

²⁾ Стр. 65.

³⁾ См. глава II.

Тогда Π будетъ областью первой категоріи и — слѣдовательно — можетъ

быть получена какъ $\prod_1^{\infty} \{ \Pi_i \}$, при чемъ

$$\prod_1^{\infty} \{ P_i \} + \prod_1^{\infty} \{ \Pi_i \} \equiv \prod_1^{\infty} \{ P_i, \Pi_i \} \equiv \{ l \},$$

т. е. въ такомъ случаѣ область $\prod_1^{\infty} \{ P_i, \Pi_i \}$ должна бы дать всѣ точки l , что противно опредѣленію области первой категоріи.

Если P —область первой категоріи, Π —ея дополнительная, и K —какая нибудь другая область второй категоріи, то Π и K непремѣнно имѣютъ общія точки.

Дѣйствительно: если $D(K, \Pi) = 0$, то $K = D(P)$, чего быть не можетъ, такъ какъ K —второй категоріи.

„Отсюда слѣдуетъ глубокая разница между областями обѣихъ категорій, основывающаяся ни на размѣрѣ, ни на разсѣянности по интервалу, такъ какъ области первой категоріи могутъ быть размѣра непрерывности и быть также часто разсѣяны, но — на нѣкоторой комбинаціи обоихъ этихъ понятій“¹⁾.

Baire, имѣя въ виду интересы теоріи функцій, считаетъ еще необходимымъ²⁾ создать болѣе общую теорію, заключающую въ себѣ, какъ частный случай, теорію точечныхъ областей и измѣреній; эти идеи автора стоятъ далеко отъ существа настоящей работы.

38. Въ статьѣ³⁾, посвященной теоріи функцій, *de-Stefano* въ 1900 г. даетъ такое построение точечной области:

Раздѣливъ интервалъ l на n_1 равныхъ частей

$$l_1, l_2, l_3, \dots, l_{n_1}$$

и устранивъ одну изъ нихъ l_v , авторъ дѣлитъ изъ остальныхъ $n_1 - 1$ каждую l_i на n_2 равныхъ частей

$$l_{i_1}, l_{i_2}, l_{i_3}, \dots, l_{in_2};$$

удаливъ снова на каждомъ изъ l_i одинъ изъ интерваловъ l_{i_v} , *de-Stefano* предполагаетъ процессъ продолжающимся до бесконечности. Получающаяся при этомъ область точекъ дѣленія будетъ рѣдко разсѣяна.

¹⁾ Стр. 66.

²⁾ Comptes Rendus, 129, p. 946.

³⁾ Giornale di Matematiche, 38, p. 178.

Дѣйствительно: возьмемъ на l какой нибудь интервалъ (α, β) , причѣмъ пусть

$$\beta - \alpha \geq \frac{l}{n_1 n_2 \dots n_{m-2}} ;$$

на (α, β) лежитъ тогда по крайней мѣрѣ одна изъ $\frac{1}{n_1 n_2 n_3 \dots n_{m-1}}$,ыхъ частей всего интервала l , а ней—свободный интервалъ, равный

$$\frac{l}{n_1 n_2 n_3 \dots n_{m-1} n_m} .$$

Свободные интервалы послѣ перваго, втораго, \dots , n 'аго дѣленія составляютъ

$$\frac{1}{n_1}, \frac{n_1 - 1}{n_1 n_2}, \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{n_1 n_2 n_3}, \dots, \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{m-1} - 1)}{n_1 n_2 \dots n_{m-1} n_m}$$

часть отъ l , и сумма ихъ

$$\delta = \left\{ \frac{1}{n_1} + \frac{n_1 - 1}{n_1} \cdot \frac{1}{n_2} + \frac{n_1 - 1}{n_1} \cdot \frac{n_2 - 1}{n_2} \cdot \frac{1}{n_3} + \dots + \frac{n_1 - 1}{n_1} \cdot \frac{n_2 - 1}{n_2} \dots \frac{n_{m-1} - 1}{n_{m-1}} \cdot \frac{1}{n_m} + \dots \right\}; \quad (1)$$

сумма интерваловъ, на которыхъ расположены точки области, будетъ тогда

$$s = l - \delta = \frac{n_1 - 1}{n_1} \cdot \frac{n_2 - 1}{n_2} \dots \frac{n_{m-1} - 1}{n_{m-1}} \dots l. \quad (2)$$

Смотря по выбору чиселъ n_i , можетъ быть

$$\frac{n_1 - 1}{n_1} \cdot \frac{n_2 - 1}{n_2} \dots \frac{n_{m-1} - 1}{n_{m-1}} \dots = 0 \quad \text{или} \quad > 0;$$

первое имѣетъ мѣсто—напримѣръ—если всѣ n_i равны между собой, второе—если

$$n_1 = n > 1, \quad n_2 = n^2, \dots, \quad n_m = n^m, \dots; \quad (3)$$

первое ясно само собой, второе слѣдуетъ изъ того, что—въ силу (1) и при условіи (3)—

$$\delta < \left\{ \frac{1}{n^1} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^m} + \dots \right\} l = \frac{l}{n - 1} .$$

Кромѣ построения предыдущей области, *de-Stefano* даетъ еще теорему:

„Если область P замкнута, и для нея $s > 0$, то часть ея, состоящая изъ двустороннихъ предѣльныхъ точекъ, несчетна“.

39. Въ 1900 г. появился ¹⁾ принадлежащій *Schoenflies'у* обширный обзоръ теории областей и ея приложений; въ немъ авторъ задался цѣлью—такъ сказать—популяризировать эту теорію и привлечь къ ней болѣе широкое вниманіе математическаго міра; въ виду этого первыя двѣ главы ²⁾ носятъ, по признанію самого автора, характеръ учебника. Въ этомъ трудѣ авторъ признаетъ своими нѣкоторые результаты и приемы доказательства и, что является самымъ важнымъ,—генетическое развитіе, которое онъ далъ своему обзору ³⁾.

Изъ всего этого мы считаемъ необходимымъ отмѣтить здѣсь то, что пополнило нашъ запасъ свѣдѣній относительно теории областей, и что съ новой точки зрѣнія освѣщаетъ уже извѣстные результаты.

Отмѣтимъ ⁴⁾ прежде всего теорему, обратную теоремѣ *Borel'а*:

„Пусть $P \equiv \{x\}$ —часто разсѣянная по основному интервалу l область, при чемъ каждая точка P —внутренняя для одного изъ интерваловъ области $\{l_i\}$; тогда невнутреннія точки интерваловъ $\{l_i\}$, если онѣ существуютъ, образуютъ рѣдко разсѣянную замкнутую область Q “, потому что предѣльная точка Q не можетъ лежать внутри $\{l_i\}$.

Та-же теорема въ большей мѣрѣ относится и къ рѣдко-разсѣянной области P .

Отмѣтимъ далѣе новую формулировку теоремы *Cantor-Bendixson'a*⁵⁾:

„Счетная область можетъ быть исчерпана счетнымъ рядомъ уединенныхъ областей; несчетная область, послѣ отдѣленія счетнаго ряда уединенныхъ областей, приводится къ совершенной области“.

Какъ примѣръ постепеннаго исчерпыванія счетной области, *Schoenflies* выдѣляетъ ⁶⁾ изъ области рациональныхъ дробей область P_1 тѣхъ дробей, у которыхъ знаменателями служатъ степени 2; затѣмъ область P_2 съ знаменателями типа 3^m ; и т. д.; по выдѣленіи счетнаго ряда областей P_1, P_2, P_3, \dots , мы получимъ область дробей, знаменатели которыхъ—сложныя числа; изъ нихъ послѣдовательно выдѣляемъ области дробей съ знаменателями вида

$$(2.3)^n, \quad (2.5)^n, \quad (2.7)^n, \dots;$$

затѣмъ съ знаменателями вида

$$(3.5)^n, \quad (3.7)^n, \quad (3.11)^n, \dots;$$

и т. д.

¹⁾ Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, B. 8.

²⁾ Собственно теорія точечныхъ областей посвящена вторая глава.

³⁾ Bericht S. III

⁴⁾ ib. S. 109

⁵⁾ ib. S. 69-70.

⁶⁾ ib. S. 50.

Замкнутая область P задается счетным рядом $D \equiv \{\delta_i\}$ интервалов δ_i , не захватывающих друг друга.

Если P_1 —есть замкнутая область, входящая въ составъ P , то ея область интерваловъ $D_1 \equiv \{\delta'_i\}$ получится изъ D или укороченіемъ всего основнаго интервала, или соединеніемъ смежныхъ или несмежныхъ интерваловъ δ_i въ одинъ; вообще говоря, переходъ отъ D къ D_1 будетъ сопровождаться исчезновеніемъ счетнаго ряда интерваловъ. Если P_2 —также замкнутая составная часть P_1 , и D_2 —отвѣчающая ей область интерваловъ, то D_2 выводится изъ D_1 опять уменьшеніемъ числа свободныхъ интерваловъ; и т. д. Такъ какъ счетный рядъ интерваловъ D будетъ исчерпанъ счетнымъ рядомъ такихъ операций, то мы можемъ¹⁾ сказать, что

„Замкнутая область можетъ быть разложена на счетный рядъ замкнутыхъ областей“.

Попытка *Schoenflies'a* строить свободные интервалы для двухмѣрной области²⁾ находится въ связи съ его позднѣйшими работами, касающимися *анализа положенія*, и онѣ выходятъ за предѣлы настоящаго изслѣдованія; нужно замѣтить только, что, на нашъ взглядъ, большихъ результатовъ въ интересахъ теоріи областей можно ожидать на томъ пути, на который вступилъ *Zoretti*.

Задаваясь вопросомъ³⁾ о необходимыхъ и достаточныхъ условіяхъ, чтобы мѣра совершенной области была равна нулю, *Schoenflies* слѣдующимъ образомъ строитъ такую область P :

Пусть l —основной интервалъ, и $\{l_i\}$ —свободные отъ точекъ P интервалы, размѣщенные по величинѣ; назовемъ

$$l = t_1, \quad t_1 - l_1 = t_2, \quad t_2 - l_2 = t_3, \dots, \quad t_{n-1} - l_{n-1} = t_n, \dots,$$

гдѣ t_n —сумма интерваловъ, занятыхъ точками P и оставшихся по выдѣленіи $n-1$ первыхъ свободныхъ интерваловъ. Назвавъ еще ε_n отношеніе $l_n: t_n$, вслѣдствіе чего $l_n = \varepsilon_n t_n$, мы будемъ имѣть

$$t_1 = l, \quad t_2 = (1 - \varepsilon_1)t_1, \quad t_3 = (1 - \varepsilon_2)t_2, \dots, \quad t_n = (1 - \varepsilon_{n-1})t_{n-1}, \dots,$$

откуда

$$t_n = (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \dots (1 - \varepsilon_{n-1}) l,$$

и мѣра области P

$$t = \lim_{n \dots \infty} t_n = l \cdot \lim_{n \dots \infty} \prod_1^n (1 - \varepsilon_i).$$

¹⁾ ib. S. 80.

²⁾ ib. S. 81-85.

³⁾ ib. S. 94.

Чтобы t было равно нулю, должно быть

$$\prod_1^{\infty} (1 - \varepsilon_i) = 0;$$

въ этомъ и заключается—по *Schoenflies'у*—искомое условіе.

Давая далѣе видоизмѣненіе подобнаго построенія, гдѣ входятъ отношенія каждаго l_n къ примыкающимъ къ нему интерваламъ, которые заняты точками P и входятъ въ составъ t_n , авторъ думаетъ¹⁾, что на этомъ пути желательна дальнѣйшая работа. Съ этими соображеніями находятся въ связи нѣкоторые результаты во второй главѣ настоящаго изслѣдованія.

Къ теоремамъ *Baire'a* относительно областей второй категоріи *Schoenflies* добавляетъ еще одну:

„Общія точки двухъ областей Π и K второй категоріи даютъ также область второй категоріи“.

Дѣйствительно: пусть

$$P = \bigcup_1^{\infty} \{P_i\}, \quad Q = \bigcup_1^{\infty} \{Q_i\}$$

—области первой категоріи, дополнительныя областямъ Π и K ; тогда для областей

$$M(P_1, Q_1), \quad M(P_2, Q_2), \dots, \quad M(P_n, Q_n), \dots$$

область $\bigcup_1^{\infty} \{P_i, Q_i\} \equiv L$ окажется первой, а ея дополнительная Λ —

второй категоріи, область же Λ состоитъ изъ общихъ точекъ Π и K .

По поводу областей P и Π *Schoenflies* дѣлаетъ еще одно замѣчаніе: ни та, ни другая не будетъ непременно замкнутой, и обѣ могутъ быть несчетны; авторъ ставитъ вопросъ²⁾, будетъ ли всегда всякая часто разсѣянная, незамкнутая и несчетная область, областью первой или второй категоріи?

Говоря объ областяхъ *Baire'a*, отнесенныхъ къ непрерывному пространству и совершеннымъ областямъ, и о возможности установить по отношенію къ нимъ теоремы, аналогичныя теоремамъ, относящимся къ континууму, *Schoenflies* видитъ въ этомъ³⁾ извѣстную равноцѣнность

¹⁾ ib. S. 95.

²⁾ ib. S. 110.

³⁾ ib. S. 111.

всѣхъ совершенныхъ областей и находить, что здѣсь заключается одинъ изъ важнѣйшихъ результатовъ ученія объ областяхъ.

40. Развитіемъ идей *Borel'*я относительно мѣры области должны служить изслѣдованія *Lebesgue'a*, который говорит¹⁾, что онъ „пополнилъ и сдѣлалъ болѣе точными немного поспѣшныя указанія *Borel'*я“; мы увидимъ ниже, что это заявленіе не совсѣмъ согласно съ дѣйствительностью. *Lebesgue* приступаетъ къ понятію о мѣрѣ слѣдующимъ образомъ:

„Съ каждой ограниченной областью мы задаемся цѣлью связать нѣкоторое положительное число или ноль, которое мы называемъ ея мѣрой, и подчиняемъ слѣдующимъ условіямъ:

1) Существуютъ области, мѣра которыхъ не равна нулю;

2) Равныя области имѣютъ равныя мѣры;

3) Мѣра суммы конечнаго или счетнаго ряда областей безъ общихъ точекъ равна суммѣ ихъ мѣръ“;

позже²⁾, въ 1904 году, вмѣсто 1) введено другое условіе:

„1) Мѣра области всѣхъ точекъ интервала (0, 1) равна единицѣ“³⁾. Области, для которыхъ обусловленная такимъ образомъ мѣра существуетъ, *Lebesgue* называетъ *измѣримыми*. Если подчиняющееся этимъ условіямъ опредѣленіе возможно³⁾, область, состоящая изъ одной точки, имѣетъ мѣру 0, такъ какъ конечная область, состоящая изъ безконечнаго числа точекъ, должна имѣть конечную мѣру; мѣра открытаго или закрытаго отрѣзка не можетъ быть равна нулю, такъ какъ иначе будетъ тоже самое и со всякимъ конечнымъ отрѣзкомъ; за единицу можно взять мѣру области точекъ любого отрѣзка и именно—его длину.

Предпославъ эти замѣчанія, *Lebesgue* переходитъ къ самому опредѣленію мѣры, расходясь—на нашъ взглядъ—съ *Borel'em* въ самой идеѣ.

Предполагая область P —какой угодно, онъ включаетъ ее въ интервалы $\{l_i\}$, обозначивъ область *всѣхъ* точекъ, расположенныхъ на нихъ, черезъ $P_1 \equiv \{l_i\}$.

Такъ какъ точки P входятъ цѣликомъ въ составъ P_1 , то

$$(1) \quad m(P) \leq m(P_1) = \sum_1^{\infty} l_i;$$

¹⁾ Annali di Matematica, (3) 7, p. 232.

²⁾ Leçons sur l'intégration, p. 103.

³⁾ Опредѣленія такого рода—*описательныя* (descriptives) въ отличіе отъ обычныхъ *конструктивныхъ*—см. Leçons, p. 99.

при всевозможныхъ выборахъ l_v

$$m(P) \leq \text{u Gr} \sum_1^{\infty} l_v;$$

эту нижнюю границу *Lebesgue* называетъ *внѣшней мѣрой области P*

$$m_e(P) = \text{u Gr} \sum_1^{\infty} l_v,$$

такъ что

$$m(P) \leq m_e(P). \quad (2)$$

Опредѣливъ внѣшнюю мѣру также и для Π —дополнительной области къ P по отношенію къ основному отрѣзку l , имѣемъ

$$m(\Pi) \leq m_e(\Pi); \quad (3)$$

такъ какъ—въ силу условія 3)—должно¹⁾ быть

$$M(P) + M(\Pi) = l. \quad (4)$$

то, благодаря (3),

$$m(P) \leq l - m_e(\Pi); \quad (5)$$

это число

$$l - m_e(\Pi) = m_i(P) \quad (6)$$

Lebesgue называетъ *внутренней мѣрой P*.

Изъ (6) и (5) слѣдуетъ, что

$$m_i(P) + m_e(\Pi) = l, \quad (7)$$

$$m(P) \leq m_i(P); \quad (8)$$

въ силу (2) и (8)—

$$m_e(P) \leq m(P) \leq m_i(P), \quad (9)$$

если только возможна задача измѣренія въ смыслѣ *Lebesgue'a*.

Нужно замѣтить, что выводъ неравенствъ (9) не можетъ считаться безукоризненнымъ, такъ какъ онъ основывается на неравенствѣ (1), которое—на нашъ взглядъ—не достаточно мотивировано.

Области, для которыхъ

$$m_e(P) = m_i(P),$$

¹⁾ Leçons, p. 104.

авторъ называетъ *измѣримыми*; это опредѣленіе—въ силу (4)—равно- сильно такому:

„Область P измѣрима, если возможно включить ее и ея дополнитель- ную Π въ такіе интервалы, что сумма ихъ общихъ частей будетъ произвольно мала“.

Мы видимъ такимъ образомъ, что опредѣленіе *Lebesgue'a* есть опредѣленіе въ старомъ стилѣ, а никакъ не совпадаетъ по идеѣ съ опредѣленіемъ *Borel'я*, основанномъ на *сплошныхъ* интервалахъ, не зависящихъ отъ какого бы то ни было произвола. Кроме того здѣсь должно быть еще доказано, что это опредѣленіе *Lebesgue'a* не противорѣчитъ тремъ указаннымъ выше условіямъ; что касается 1) и 2), это— ясно само собой; для 3) же нужно доказать что *сумма счетнаго ряда измѣримыхъ областей* $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ безъ общихъ точекъ *будетъ также измѣрима*, и что *мѣра суммы равна суммѣ мѣръ*¹⁾.

Пусть $\sum_1^{\infty} \varepsilon_v = \varepsilon$, гдѣ ε_v —нѣкоторыя малыя положительныя величины;

такъ какъ всѣ P_v измѣримы, то возможно включить P_v и ихъ до- полнительныя области Π_v въ такіе интервалы съ суммами α_v и β_v , что общая часть α_v и β_v будетъ равна ε_v .

Если назвать α'_2, β'_2 тѣ части α_2, β_2 , которыя лежатъ на β_1 ; α'_3, β'_3 —тѣ части α_3, β_3 , которыя лежатъ на β'_2 , и т. д., положивъ для сим- метріи $\alpha'_1 = \alpha_1$, то—очевидно—сумма интерваловъ, включающихъ точ- ки всѣхъ P_v будетъ равна

$$\alpha_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \dots + \alpha'_v + \dots = s;$$

отсюда

$$m_e(P) = uGr s.$$

Согласно опредѣленію мѣры

$$\sum_1^n [m(P_v) - \varepsilon_v] \leq \sum_1^n \alpha'_v = \sum_1^n \alpha'_v;$$

отсюда

$$\sum_1^{\infty} m(P_v) \leq s + \varepsilon. \quad (11)$$

Такъ какъ далѣе

$$\alpha_v - m(P_v) \leq D(\alpha_v, \beta_v) = \varepsilon_v,$$

то

$$\alpha'_v \leq \alpha_v \leq m(P_v) + \varepsilon_v;$$

¹⁾ Annali, p. 238-239; Leçons, p. 107.

поэтому

$$s = \sum_1^{\infty} \alpha'_v \leq \sum_1^{\infty} m(P_v) + \varepsilon; \quad (12)$$

изъ сопоставленія (11) и (12) имѣемъ

$$\sum_1^{\infty} m(P_v) - \varepsilon \leq s \leq \sum_1^{\infty} m(P_v) + \varepsilon; \quad (13)$$

отсюда

$$m_e(P) = \text{uGr } s = \lim s = \sum_1^{\infty} m(P_v). \quad (14)$$

Съ другой стороны область $\Pi \equiv D_1^{\infty}(\Pi_v)$, т. е. она входитъ въ составъ каждой изъ областей Π_v ; поэтому точки Π могутъ быть включены въ интервалы съ суммой $\beta'_n = D_1^n(\beta_v)$, вслѣдствіе чего $m_e(\Pi) \leq \beta'_n$.

Но

$$\sum_1^n \alpha'_v + \beta'_n \leq l + \sum_1^n \varepsilon_v,$$

слѣдовательно

$$m_e(\Pi) \leq l - \sum_1^n \alpha'_v + \sum_1^n \varepsilon_v = l - s + \sum_1^n \varepsilon_v + \sum_{n+1}^{\infty} \alpha'_v;$$

такъ какъ рядъ $\sum_1^{\infty} \alpha'_v$ сходящійся, число n можетъ быть выбрано

такъ, что будетъ $\sum_{n+1}^{\infty} \alpha'_v < \varepsilon$; тогда—въ силу (13)—

$$m_e(\Pi) \leq l - s + 2\varepsilon \leq l - \sum_1^{\infty} m(P_v) + \varepsilon;$$

отсюда получается

$$m_i(P) = l - m_e(\Pi) \geq \sum_1^{\infty} m(P_v) - \varepsilon,$$

и, въ связи съ (9) и (14),

$$\sum_1^{\infty} m(P_\nu) - \varepsilon < m_i(P) < m_e(P) = \sum_1^{\infty} m(P_\nu),$$

откуда слѣдуетъ, что

$$m_i(P) = m_e(P) = \sum_1^{\infty} m(P_\nu),$$

вслѣдствіе чего оказывается область P измѣримой, и

$$m(P) = \sum_1^{\infty} m(P_\nu).$$

Итакъ, допуская опредѣленіе мѣры *Lebesgue'a*, мы видимъ, что оно удовлетворяетъ предъявляемымъ къ нему условіямъ.

Если бы области P_ν имѣли общія точки, то также можно бы доказать, что $\bigcup_1^{\infty} \{P_\nu\}$ будетъ измѣрима, но только

$$m(P) < \sum_1^{\infty} m(P_\nu).$$

Кромѣ нахождения мѣры суммы приходится часто находить мѣру области P точекъ, входящихъ во всѣ области счетнаго ряда областей $\{P_i\}$.

Взявъ рядъ дополнительныхъ областей $\{P_\nu\}$, мы видимъ, что общія точки всѣмъ P_ν не входятъ ни въ одну изъ P_ν ; если назвать наименьшее кратное всѣхъ P_ν

$$\bigcup_1^{\infty} \{P_\nu\} = P,$$

то P будетъ дополнительной областью для P . Если P_ν и — слѣдовательно — P измѣримы, то измѣрима P , а также и P .

Затѣмъ, если P_1 обнимаетъ P_2 ,

$$P_1 - P_2 = \bigcup \{P_1, P_2\};$$

поэтому, если P_1 и P_2 измѣримы, будетъ измѣрима также и $P_1 - P_2$.

Такимъ образомъ выполняя надъ измѣримой областью указанная выше дѣйствія, мы будемъ всегда получать измѣримыя области; но отсюда еще не слѣдуетъ¹⁾, что задача измѣренія не возможна для такихъ областей, для которыхъ $m_i(P) \neq m_e(P)$.

Далѣе у *Lebesgue'a* представляется интереснымъ сопоставленіе областей, измѣримыхъ въ смыслѣ *Jordan'a* и въ его собственномъ смыслѣ.

Если мы сопоставимъ²⁾ внѣшнее протяженіе $E(P)$ области P съ внѣшней мѣрой *Lebesgue'a*, то окажется слѣдующее: въ первое входятъ цѣликомъ внутреннія и пограничныя точки области P ; поэтому, не выходя изъ предѣловъ $E(P)$, мы можемъ выбрать интервалы такимъ образомъ, что они будутъ включать всю область P ; слѣдовательно

$$E(P) \supseteq m_e(P); \quad (15)$$

такъ какъ далѣе

$$e(P) = l - E(\Pi), \quad m_i(P) = l - m_e(\Pi),$$

и, подобно (15),

$$E(\Pi) \supseteq m_e(\Pi),$$

то

$$e(P) \subseteq m_i(P);$$

итакъ

$$E(P) \supseteq m_e(P) \supseteq m_i(P) \supseteq e(P).$$

Отсюда слѣдуетъ, что, если область измѣрима по *Jordan'y*, т. е. если $E(P) = e(P)$, то тѣмъ болѣе $m_e(P) = m_i(P)$, т. е. она измѣрима и по *Lebesgue'y*, но не обратно.

Оцѣнивая значеніе приѣма *Lebesgue'a*, мы должны будемъ признать, что фактически, расходясь съ *Borel'емъ* въ идеѣ, авторъ опредѣляетъ мѣру только для областей, измѣримыхъ по *Borel'ю*; нахождение же $m_e(P)$ и $m_i(P)$ представляетъ значительно большія затрудненія, чѣмъ опредѣленіе $E(P)$ и $e(P)$ *Jordan'a*, чего не отрицаетъ и самъ авторъ³⁾.

Такимъ образомъ—на нашъ взглядъ—*Lebesgue* рѣшительно не подвинулъ вопроса о мѣрѣ области впередъ, сравнительно съ *Borel'емъ*; онъ вмѣстѣ съ тѣмъ не упростилъ и не сдѣлалъ болѣе точными легко доступными и довольно простыми идеи *Borel'a*.

Свой приѣмъ *Lebesgue* примѣняетъ далѣе къ плоскости, при чемъ беретъ треугольникъ за элементарный интервалъ.

¹⁾ Annali, p. 239.

²⁾ См. 25°.

³⁾ Annali p. 243; Leçons p. 109.

41. Въ 1903 г. *Borel*, говоря о построении интерваловъ типа $29^\circ\text{-}30^\circ$, отмѣчаетъ существенную разницу двухъ приѣмовъ, одного — когда дѣлится основной интервалъ на частные интервалы, при чемъ законъ дѣленія не обусловленъ той точечной областью, которая имѣется въ виду, и другого — когда исходнымъ пунктомъ берутся данныя точки, и строятся интервалы около этихъ точекъ. До какой степени различны оба эти приѣма, видно изъ слѣдующаго примѣра: если отрѣзокъ $(0, 1)$ дѣлится на части, то, каковы бы онѣ не были, на нихъ будутъ лежать раціональныя точки, и сумма частныхъ интерваловъ съ такими точками равна единицѣ; если-же строить отрѣзки типа 30° около каждой раціональной точки $\frac{p_i}{q_i}$, то получится счетный рядъ интерваловъ, на которыхъ только и расположены такія точки; при этомъ сумма этихъ интерваловъ можетъ быть сдѣлана произвольно малой.

Занимаясь вопросомъ о приближенномъ представленіи ирраціональныхъ чиселъ посредствомъ раціональныхъ дробей, *Hurwitz* въ 1891 г.¹⁾ установилъ теорему: „къ каждому ирраціональному числу α можно подойти посредствомъ безконечнаго ряда несократимыхъ раціональныхъ дробей $\frac{p_i}{q_i}$ такимъ образомъ, что

$$\left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| < \frac{1}{q_i^2 \sqrt{5}}.$$

Borel, примыкая къ *Hurwitz*'у, называетъ²⁾ интервалъ

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^2 \sqrt{5}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^2 \sqrt{5}} \right)$$

каноническимъ интерваломъ для дроби $\frac{p}{q}$. Теорему *Hurwitz*'а можно перефразировать такъ: „всякое ирраціональное число заключается внутри безконечнаго множества каноническихъ интерваловъ“. *Borel* добавляетъ къ этому, что тоже будетъ и со всякимъ соизмѣримымъ числомъ, если допустить, что дробь $\frac{p}{q}$ можетъ выражаться, при всякомъ цѣломъ n , въ видѣ $\frac{np}{nq}$, т. е. если допустить и сократимыя дроби.

Отсюда слѣдуетъ, что каждое число интервала $(0, 1)$ будетъ внутреннимъ для по крайней мѣрѣ одного каноническаго интервала, число которыхъ безконечно.

¹⁾ Mathematische Annalen, B. 39, S. 279.

²⁾ Journal de Mathématiques, также—Comptes Rendus, t. 136, p. 1054.

А въ такомъ случаѣ—по теоремѣ *Borel'*я—можно безконечнымъ числомъ способовъ выбрать *конечное число* такихъ каноническихъ интерваловъ, что каждая точка $(0,1)$ будетъ лежать внутри по крайней мѣрѣ одного изъ нихъ. Систему дробей, опредѣляющихъ такіе интервалы, *Borel* называетъ *полной системой*.

Затѣмъ *Borel* распространяетъ такъ свою теорему: „Если въ n -мѣрномъ пространствѣ имѣется E —ограниченная замкнутая область, и $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ —счетный рядъ такихъ областей, что каждая точка E является внутренней точкой по крайней мѣрѣ одной изъ P_n , то среди P_n существуетъ *конечное* число областей съ тѣмъ же свойствомъ“.

Доказывая это, авторъ пользуется своимъ вторымъ приѣмомъ, основаннымъ на нумераціи интерваловъ.

42. Въ 1903 г. *Lindelöf* даетъ ¹⁾ послѣдней теоремѣ *Borel'*я такое выраженіе:

А. „Если въ n -мѣрномъ пространствѣ около каждой точки ограниченной замкнутой области P описанъ шаръ, то можно выбрать конечное число шаровъ такъ, что каждая точка P будетъ внутренней точкой по крайней мѣрѣ одного шара“.

Обобщеніемъ этой теоремы является теорема:

В. „Если область $P \equiv \{x\}$ произвольна, и мы построимъ шары переменнаго радіуса ρ_x , то возможно избрать счетный рядъ шаровъ съ тѣмъ же свойствомъ“.

Дѣйствительно: *a)* если область не простирается на безконечность, и всѣ ρ_x больше нѣкотораго ρ_0 , ясно, что можетъ быть выбрано конечное число шаровъ; *b)* если область не простирается на безконечность, а ρ_x —могутъ быть произвольно малы, раздѣлимъ область P на части $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$, гдѣ въ P_n входятъ всѣ точки, для которыхъ

$$\varepsilon_{v-1} \geq \rho_x > \varepsilon_v,$$

при чемъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ есть рядъ безконечно убывающихъ положительныхъ чиселъ; тогда каждая P_n подходитъ подъ условія *a)*, а въ такомъ случаѣ вся область P можетъ быть включена въ счетный рядъ шаровъ; наконецъ *c)* въ общемъ случаѣ P можетъ быть раздѣлена на счетный рядъ конечныхъ частей.

Если точку x области P можно окружить нѣкоторымъ шаромъ, внутри котораго будетъ только счетный рядъ другихъ точекъ P , то *Lin-*

¹⁾ C R., t 137, p 697.

Lindelöf называетъ P —областью счетной въ окрестности данной точки. Это понятие является развитіемъ понятія объ уединенныхъ и предѣльныхъ точкахъ: если внутри нѣкотораго шара около данной точки x_0 имѣется конечное число точекъ P , она будетъ *уединенная* точка; если число точекъ счетно, ее можно назвать *счетной предѣльной точкой*, въ противномъ случаѣ мы будемъ имѣть *несчетную предѣльную точку*; эти послѣднія точки *Lindelöf* называетъ *точками сгущенія*. Установивъ эти опредѣленія, авторъ даетъ теорему:

С. „Если область счетна въ окрестности каждой точки, то она счетна“.

Отсюда легко вывести *безъ помощи трансфинитныхъ чиселъ* теорему *Cantor-Bendixson'a*:

Д. „Всякая несчетная замкнутая область P составляются изъ совершенной и счетной частей“.

Обозначимъ черезъ U область тѣхъ точекъ P , въ окрестности которыхъ P счетна, и S —область остальныхъ точекъ

$$P \equiv U + S.$$

На основаніи теоремы С область U счетна; что касается S , ясно, что каждая изъ ея точекъ—предѣльная точка, и каждая ея предѣльная точка ξ , будучи предѣльной точкой P , входитъ въ составъ P , такъ какъ P замкнута; слѣдовательно ξ , будучи несчетной предѣльной точкой, войдетъ въ составъ S ; такимъ образомъ S будетъ совершенной.

Переходя къ *Cantor'ovu* опредѣленію *мѣры областей* P , если она замкнута и конечна, *Lindelöf* описываетъ около точекъ x области P шары радіусовъ ρ_x ; назовемъ объемъ занятой ими части пространства $\Pi(\rho_x, P)$; если всѣ радіусы равны ρ , то при $\rho > \rho_x$

$$(1) \quad \Pi(\rho, P) \supseteq \Pi(\rho_x, P);$$

согласно опредѣленію ¹⁾ *Cantor'a*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \Pi(\rho, P) = I(P)$$

есть *мѣра* (Inhalt) области; докажемъ, что

$$E. \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \Pi(\rho, P) = \lim_{\rho_x \rightarrow 0} \Pi(\rho_x, P).$$

Дѣйствительно: взявъ $\Pi\left(\frac{\rho_x}{2}, P\right)$, мы можемъ—на основаніи А—избрать *конечное число* μ шаровъ съ радіусами $\frac{\rho_1}{2}, \frac{\rho_2}{2}, \dots, \frac{\rho_\mu}{2}$, вклю-

¹⁾ См 17°.

чающихъ внутри себя всѣ точки P ; назовемъ $\Pi(\rho_x, P)$ сумму соответственныхъ μ шаровъ въ $\Pi(\rho_x, P)$; тогда

$$\Pi(\rho_x, P) \supseteq \Pi(\rho_x, P). \quad (2)$$

Назовемъ еще α наименьшій изъ радиусовъ $\frac{\rho_1}{2}, \frac{\rho_2}{2}, \dots, \frac{\rho_\mu}{2}$; если мы опишемъ около всѣхъ точекъ области P шары радиуса α , то $\Pi(\alpha, P)$ обниметъ всѣ точки P . Съ другой стороны μ шаровъ радиуса $\frac{\rho_1}{2}, \frac{\rho_2}{2}, \dots, \frac{\rho_\mu}{2}$ также заключаютъ внутри себя всѣ точки P ; слѣдовательно μ шаровъ радиусовъ $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\mu$, т. е. $\Pi(\rho_x, P)$, не только обнимаютъ всѣ точки области P , но еще дѣлаютъ это такъ, что *разстояніе любой точки P отъ границы $\Pi(\rho_x, P)$ будетъ не меньше α* . Поэтому всѣ шары α лежатъ внутри μ шаровъ ρ_x , т. е.

$$\Pi(\rho_x, P) \supseteq \Pi(\alpha, P); \quad (3)$$

изъ этого слѣдуетъ непосредственно, что $\Pi(\alpha, P)$ включается въ конечное, не больше μ , число отдѣльныхъ частей пространства; $\Pi(\rho_x, P)$ будетъ обладать тѣмъ же свойствомъ, если всѣ ρ_x меньше α .

На основаніи (1), (2) и (3) — при $\rho > \rho_x$

$$\Pi(\rho, P) \supseteq \Pi(\rho_x, P) \supseteq \Pi(\rho_x, P) \supseteq \Pi(\alpha, P), \quad (4)$$

откуда вытекаетъ теорема Е. Изъ Е слѣдуютъ далѣе теоремы *Cantor'a*:

Г. „Мѣра замкнутой счетной области равна нулю“, такъ какъ ρ_x могутъ быть выбраны такъ, что $\Pi(\rho_x, P)$ будетъ произвольно мала.

Г. „Если $P \equiv U + S$, гдѣ U счетна, а P и S замкнуты, то $I(P) = I(S)$ “, такъ какъ $I(U) = 0$; затѣмъ — на основаніи D и G —

Н. „Мѣра замкнутой области равна мѣрѣ ея совершенной части“.

Мы видимъ, что маленькое сообщеніе *Lindelöf'a* крайне богато по содержанію, такъ какъ оно касается самыхъ важныхъ теоремъ, относящихся къ теоріи областей.

43. Интересно будетъ отмѣтить здѣсь отзывъ *Borel'a* о значеніи трудовъ *Cantor'a*¹⁾:

„Когда *Cantor*, лѣтъ двадцать тому назадъ, сообщилъ свои мысли о счетѣ за безконечность, ихъ приняли не безъ недоумѣнія. Но ана-

¹⁾ Revue Philosophique, 1899.

листы, удивленные красотой его заключений, не остановились передъ нѣсколько парадоксальной ихъ формой; а затѣмъ появились приложенія этой теоріи; ею заинтересовались и тѣ, кого интересуютъ границы математики, и идеи *Cantor'a* сдѣлались классическими для математиковъ и философовъ“.

Нѣсколько позже въ 1903 г. *Borel* говоритъ ¹⁾, что *Cantor* оказалъ значительное вліяніе на развитіе математики въ послѣдней четверти XIX вѣка, и это вліяніе сохранится, хотя бы нѣкоторыя формы, въ которыя вылилась мысль *Cantor'a*, приобрѣли только историческій интересъ. Подъ этими формами *Borel* понимаетъ главнымъ образомъ трансфинитныя числа, философское значеніе которыхъ онъ не оспариваетъ.

Всѣ теоремы, которыя были доказаны *Cantor'омъ* и другими, въ томъ числѣ и самимъ *Borel'емъ*, при помощи трансфинитныхъ чиселъ, онъ признаетъ желательнымъ доказать инымъ путемъ, и думаетъ, что это скоро осуществится.

Въ этомъ отношеніи и интересна предыдущая статья *Lindelöf'a* съ доказательствомъ теоремы *Cantor-Bendixon'a*.

44. Съ 1902 г. начинаетъ появляться рядъ интересныхъ статей *Young'a*, посвященныхъ какъ разъ тому-же вопросу, какъ и настоящее изслѣдованіе, т. е. вопросу о строеніи и мѣрѣ линейныхъ областей ²⁾.

Въ первой работѣ ³⁾ авторъ даетъ, въ связи съ изслѣдованіемъ *Brodèn'a*, такое построеніе рѣдко разсѣянной сгущенной области:

Отрѣзокъ l_1 дѣлится точкой x_1 на двѣ такія части l_{01} и l_{11} , что

$$\frac{l_{01}}{l_{11}} = \frac{1 + j_1}{1 - j_1}, \quad j_1 = 1 - \frac{1}{8 \cdot 1^2};$$

тогда

$$(1) \quad l_{01} = \left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 1^2}\right) l_1, \quad l_{11} = \frac{1}{4^2} l_1.$$

Каждый изъ отрѣзковъ (1) дѣлится точками x_{01} и x_{11} на два l_{001} , l_{011} и l_{101} , l_{111} при условіи, что

$$\frac{l_{001}}{l_{011}} = \frac{l_{101}}{l_{111}} = \frac{1 + j_2}{1 - j_2}, \quad j_2 = - \left(1 - \frac{1}{8 \cdot 2^2}\right);$$

¹⁾ C R., t. 137, p. 903.

²⁾ Считаю долгомъ отмѣтить здѣсь, что вся вторая глава настоящей работы была написана и 1° - 43° первой главы сданы въ типографію и частью напечатаны раньше, чѣмъ я познакомился съ статьями *Young'a*.

³⁾ Proceedings of London Mathematical Society, 34, p. 285.

въ такомъ случаѣ

$$l_{001} = \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} l_{01}, \quad l_{011} = \left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 2^2}\right) l_{01} = \left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 2^2}\right) l_1, \quad (2)$$

$$l_{111} = \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} l_{11}, \quad l_{111} = \left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 2^2}\right) l_{11} = \left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 1^2}\right) \cdot \frac{1}{4^2} l_1$$

Каждый изъ четырехъ отрѣзковъ (2) дѣлимъ снова на двѣ части въ отношеніи $\frac{1+j_3}{1-j_3}$ при $j_3 = +\left(1 - \frac{1}{8 \cdot 3^2}\right)$; и т. д., при n омъ дѣленіи

$$j_n = (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{8n^2}\right), \quad (3)$$

при чемъ наибольшій интервалъ n го дѣленія будетъ имѣть длину

$$\left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot n^2}\right) l_1.$$

При безконечно возрастающемъ n этотъ интервалъ имѣетъ предѣломъ $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} l_1$, и его границы будутъ предѣльными точками ряда $\{x\}$. Подобные же свободные интервалы мы получимъ на каждомъ изъ интерваловъ любого дѣленія, т. е. между каждыми двумя точками дѣленія.

Взявъ, вмѣсто (3), другой законъ дѣленія

$$j_n = (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{p^2 n^2}\right),$$

гдѣ p —любое цѣлое число, мы получили бы различныя области указанного выше типа.

Очевидно, что область такого рода $\{x\}$, каждая точка которой есть двухсторонняя предѣльная точка, будетъ заключаться въ числѣ внѣшнихъ точекъ совершенной области, опредѣляемой предыдущими интервалами¹⁾.

Young еще отмѣчаетъ²⁾ одинъ недосмотръ *Schoenflies'a*, который говоритъ³⁾, что первый примѣръ рѣдко разсѣянной совершенной области далъ *Smith*, тогда какъ совершенной будетъ только производная область *Smith'a*⁴⁾; но вслѣдъ за этимъ *Young* самъ приписываетъ *Smith'у* идею и опредѣленіе совершенной области.

¹⁾ Во II главѣ мы часто встречаемся съ подобными областями.

²⁾ ib. p. 286.

³⁾ Bericht, S. 101.

⁴⁾ См. В 5°.

45. *Young* находит¹⁾, что „изученіе точечныхъ областей ведетъ къ изслѣдованію ряда интерваловъ, и въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ болѣе естественно начинать съ послѣднихъ, чѣмъ съ первыхъ; это особенно справедливо въ вопросѣ о *мѣрѣ* области“; съ такимъ заявленіемъ нельзя не согласиться, и только съ такой точки зрѣнія возможно установить всеобъемлющее и строго обусловленное строеніемъ области понятіе о мѣрѣ.

Устанавливая основныя теоремы относительно ряда интерваловъ, авторъ имѣетъ въ виду примѣнить ихъ къ изслѣдованію замкнутыхъ областей. Развитие его мысли, по его собственному заявленію, идетъ здѣсь параллельно съ *Borel'емъ*, но исходитъ изъ другихъ соображеній. Придавая теоремѣ *Borel'я* второстепенное значеніе, *Young* замѣчаетъ, что ея второе „доказательство очень изящно по идеѣ, но едва ли въ состояніи уяснить читателю ея *raison d'être*.“

Для ряда интерваловъ *Young* различаетъ *внѣшнія* и *полувнѣшнія* (external and semiexternal) точки, т. е. двустороннія и одностороннія предѣльныя точки области границъ, которыя играютъ значительную роль и въ нашемъ изложеніи²⁾; область полувнѣшнихъ точекъ должна быть счетна.

Взявъ рядъ изъ конечнаго числа m интерваловъ $\{l_i\}$, *Young*, подобно *Borel'ю*, называетъ ихъ *мѣрой* (content) — сумму

$$(4) \quad l = \sum_1^m l_i.$$

Если l меньше длины основнаго интервала L , то кромѣ интерваловъ l_i имѣется рядъ дополнительныхъ интерваловъ $\{\lambda_i\}$, при чемъ

$$l + \lambda = L,$$

гдѣ

$$(5) \quad \lambda = \sum \lambda_i.$$

Если $l = L$, то *a)* дополнительныхъ интерваловъ нѣтъ; *b)* нѣтъ внѣшнихъ точекъ, и *c)* каждая граница, кромѣ границъ основнаго интервала, раздѣляетъ другъ отъ друга два смежныхъ интервала.

Если число захватывающихъ другъ друга интерваловъ $\{l_i\}$ бесконечно, то рядъ ихъ будетъ, какъ извѣстно, счетенъ; въ такомъ

¹⁾ Proceedings, 35, p. 245.

²⁾ См.—глава II.

случаѣ *Young*, въ согласіи съ *Borel'емъ*, называетъ

$$\sum_1^{\infty} l_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n l_i = l \quad (6)$$

мѣрой ряда интерваловъ; удобнѣе всего размѣщать $\{l_i\}$ въ рядъ по ихъ величинѣ, и это мы будемъ всегда впередъ предполагать.

Изъ (6) при размѣщеніи l_i по величинѣ, слѣдуетъ, что—во первыхъ—для заданнаго σ можетъ быть найдено число m_1 такъ, что

$$l - \sigma < \sum_1^n l_i < l \quad \text{при} \quad n > m_1 \quad (7)$$

или

$$0 < l - \sum_1^n l_i < \sigma \quad \text{при} \quad n > m_1, \quad (8)$$

и—во вторыхъ—для заданнаго $\varepsilon < \sigma$

$$l_n < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > m_2. \quad (9)$$

Если m —наибольшее изъ чиселъ m_1, m_2 , то одновременно

$$0 < l - \sum_1^n l_i < \sigma, \quad l_n < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > m. \quad (10)$$

Изъ (10) и (6) имѣемъ

$$0 < \sum_{n+1}^{\infty} l_i < \sigma, \quad l_i < \varepsilon, \quad (11)$$

т. е. сумма тѣхъ интерваловъ, которые меньше ε , будетъ сама меньше σ .

Если интервалъ L разбивается на рядъ другихъ интерваловъ $\{L_j\}$ такимъ образомъ, что каждый l_i лежатъ внутри одного изъ L_j , то

$$l = \sum l^{(j)},$$

гдѣ $l^{(j)}$ мѣра, относящаяся къ интервалу L_j .

При конечномъ числѣ L_j это ясно само собой; поэтому нужно предположить рядъ $\{L_j\}$ бесконечнымъ. Опредѣлимъ m_1 согласно

условію (8) и, расположивъ L_j по величинѣ, опредѣлимъ μ , чтобы было

$$l_j < l_{m_1+1} \quad \text{при} \quad j > \mu;$$

тогда интервалы $l_1, l_2, l_3, \dots, l_{m_1}, l_{m_1+1}$ могутъ располагаться только на интервалахъ L_1, L_2, \dots, L_μ ; при этомъ

$$\sum_1^\mu l^{(j)} \geq \sum_1^{m_1+1} l_i,$$

вслѣдствіе чего—въ силу (8)—

$$l - \sum_1^\mu l^{(j)} \leq l - \sum_1^{m_1+1} l_i < \sigma;$$

отсюда вытекаетъ, что

$$l = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_1^\mu l^{(j)} = \sum_1^\infty l^{(j)}.$$

46. Если число интерваловъ бесконечно, то, даже при $l < L$, не всегда существуютъ дополнительные интервалы; нарушаются также указанные выше свойства *b)* и *c)*.

Теорема I. Если число интерваловъ бесконечно, существуетъ по крайней мѣрѣ одна предѣльная точка¹⁾.

Изъ этой теоремы *Young* выводитъ, какъ слѣдствіе, теорему *Borel'*я: размѣстивъ интервалы, внутри которыхъ лежатъ всѣ точки даннаго отрезка L , въ какойнибудь порядокъ, на примѣръ—по величинѣ, будемъ послѣдовательно удерживать только тѣ интервалы или части тѣхъ интерваловъ, которые выходятъ за границы предыдущихъ; каждая точка L окажется при этомъ или внутренней точкой одного какогонибудь интервала, можетъ быть—укороченнаго, или же границей двухъ смежныхъ интерваловъ; а въ такомъ случаѣ, вслѣдствіе непрерывнаго отсутствія предѣльныхъ точекъ, число укороченныхъ интерваловъ, а—слѣдовательно—и интерваловъ *Borel'*я, должно быть конечно.

По поводу этого простого повидимому доказательства нужно замѣтить, что оно едва ли дастъ большее проникновеніе въ смыслъ теоремы *Borel'*я, чѣмъ второе доказательство *Borel'*я.

¹⁾ Proceedings, 35, p. 351; ср. ниже—II гл.

Теорема II. Если для ряда захватывающих друг друга интервалов нѣтъ дополнительныхъ интерваловъ, каждая внѣшняя точка будетъ двустороннимъ предѣломъ.

Эта теорема ясна сама собой.

Среди примѣровъ, приводимыхъ авторомъ, отмѣтимъ одинъ: на отрезкѣ $(0,1)$ беремъ въ тернарной системѣ интервалъ $(0.(1), 1)$ и затѣмъ такіе интервалы, у которыхъ правыя границы будутъ конечныя дроби, выражающіяся только цифрами 0 и 1, а лѣвыя границы получатся изъ правыхъ замѣной послѣдней 1 черезъ 0 (1); получающіеся при этомъ уединенные интервалы, съ суммой равной 1, опредѣляютъ совершенную область, внѣшнія точки которой выразятся всѣми остальными безконечными дробями безъ цифры 2.

Этотъ примѣръ—видоизмѣненія примѣра В 5° *Smith'a*, при чемъ каждый интервалъ *Young'a* замѣщается счетнымъ рядомъ смежныхъ интерваловъ *Smith'a*, и лѣвыя границы интерваловъ *Young'a* оказываются внѣшними точками интерваловъ *Smith'a*.

Видоизмѣняя другой примѣръ С 5° *Smith'a*, авторъ строитъ совершенную область, для которой $l < 1$.

Ислѣдованіе мѣры ряда интерваловъ *Young* приводитъ къ мѣрѣ уединенныхъ интерваловъ, опредѣляющихъ совершенную область; въ этихъ видахъ авторъ строитъ *типичный тернарный рядъ интерваловъ*, дѣля $(0, 1)$ на три части, взявъ $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ за первый интервалъ и примѣняя затѣмъ къ двумъ крайнимъ тотъ-же процессъ дѣленія.

Тогда всякій рядъ уединенныхъ интерваловъ можетъ быть взаимно-однозначно отнесенъ къ типичному ряду, и всякое свойство внутреннихъ точекъ перваго приводится къ соотвѣтственному свойству точекъ типичнаго ряда.

Имѣя какой-нибудь рядъ не захватывающихъ друг друга интервалы, мы можемъ всѣ смежные интервалы соединить въ одинъ, при чемъ предѣльная точка границъ смежныхъ интерваловъ окажется границей новаго интервала, или, если эта точка будетъ общей предѣльной точкой двухъ рядовъ смежныхъ интерваловъ, она окажется внутренней точкой интервала, обнимающихъ оба этихъ ряда.

Продолжая такой процессъ, мы придемъ или къ ряду уединенныхъ интерваловъ, или соединимъ послѣ счетнаго ряда операций всѣ интервалы въ одинъ основной интервалъ; при этомъ въ каждый данный моментъ сумма измѣняемыхъ и сумма измѣненныхъ интерваловъ останется одна и та-же; что-же касается точекъ, исчезающихъ во время процесса соединенія интерваловъ, то ихъ можетъ быть не больше счетнаго числа. Окончательный рядъ интерваловъ, получающійся послѣ

такого процесса, *Young* называет *последнимъ рядомъ* (ultimate set). Очевидно, что весь этотъ процессъ *Young'a* есть ничто иное, какъ геометрическая интерпретація теоремы *Cantor-Bendixson'a*, примененной къ замкнутой области P невнутреннихъ точекъ, и что „последній рядъ“ это—рядъ свободныхъ интерваловъ совершенной области $P^{(\Omega)}$.

47. Двумъ типамъ областей, отмѣченныхъ еще *Lebesgue'омъ* ¹⁾, посвящаетъ *Young* свои наиболее интересныя изслѣдованія. Прежде чѣмъ переходить къ нимъ, приведемъ одну лемму ²⁾:

А. „Пусть для каждаго значенія n имѣется рядъ интерваловъ $l_{n1}, l_{n2}, \dots, l_{nk_n}$, не покрывающихъ другъ друга и съ возрастаніемъ n располагающихся на интервалахъ предыдущихъ системъ, при чемъ при каждомъ значеніи n

$$s_n = \sum_{i=1}^{k_n} l_{ni} > \lambda;$$

тогда существуютъ точки, лежащія внутри всѣхъ интерваловъ l_{ni} “.

Если число k_n не можетъ возрастать съ увеличеніемъ n , теорема ясна сама собой, такъ какъ тогда по крайней мѣрѣ одинъ изъ l_{ni} при всякомъ n долженъ быть отличенъ отъ нуля; поэтому мы предполагаемъ, что k_n возрастаетъ вмѣстѣ съ n .

Отсѣкая отъ каждаго интервала l_{ni} на каждой изъ границъ часть $\frac{\mu}{2^{n+1}} \cdot \frac{l_{ni}}{s_n}$, гдѣ μ —нѣкоторое малое число, мы получимъ сумму отсѣченныхъ частей не больше $\frac{\mu}{2^n}$, и сумму усѣченныхъ интерваловъ l'_{ni} не меньше $s_n - \frac{\mu}{2^n}$.

Возьмемъ усѣченные интервалы l'_{1i} ; интервалы l_{2i} , и ихъ части, которыя помѣщаются на l'_{1i} , имѣютъ сумму не меньшую $s_2 - \frac{\mu}{2}$, тогда какъ

$$\sum_i l_{2i} \geq s_2 - \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2^2}.$$

1) См. *Annali di Matematica*, (3) 7, p. 239; *Leçons*, p. 108.

2) *Proceedings*, 35, p. 280.

Интервалы l'_{3i} и ихъ части, располагающіяся на l'_{2i} , имѣютъ сумму не меньшую $s_3 = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2^2}$, и

$$\sum l'_{3i} \geq s_3 = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2^2} - \frac{\mu}{2^3};$$

и т. д.; вообще

$$\sum l'_{ni} \geq s_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \mu > \lambda - \mu.$$

Взявъ цѣпь послѣдовательныхъ интерваловъ, расположенныхъ одинъ на другомъ, мы опредѣлимъ, при безконечно возрастающемъ n , по крайней мѣрѣ одну точку x какъ предѣлъ границъ интерваловъ l'_{ni} ; эта точка можетъ быть одной изъ границъ или же внутренней точкой всѣхъ l'_{ni} ; въ томъ и другомъ случаѣ она—внутренняя точка интерваловъ l_{ni} ; такимъ образомъ существованіе внутреннихъ точекъ является доказаннымъ.

Первымъ типомъ является область

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n, \quad (12)$$

гдѣ 1) G_n —замкнутыя и рѣдко разсѣянныя области, и 2) каждая G_n входитъ, какъ часть, въ G_{n+1} ; такимъ образомъ G характеризуется тѣмъ обстоятельствомъ, что а) для каждаго значенія n всѣ точки G_n являются точками G , и б) въ G нѣтъ ни одной точки, которая не принадлежала бы цѣлому ряду областей G_n для n большого нѣкотораго m . Мы предполагаемъ сверхъ того G замкнутой и рѣдко разсѣянной, предположеніе же частаго разсѣянія представляетъ меньше интереса.

Построимъ свободные интервалы области G_1 ; эти интервалы, въ силу замкнутости G_1 , должны быть открытыми. Такъ какъ G_2 обнимаетъ G_1 , то точки $G_2 - G_1$ располагаются на свободныхъ интервалахъ G_1 ; точно также и вообще точки $G_{n+1} - G_n$ лежатъ на открытыхъ интервалахъ области G_n . Отсюда ясно, что

В. „Всякій свободный интервалъ области G или G_n восходитъ къ нѣкоторому свободному интервалу каждой изъ областей G_ν , при $\nu < n$, или совпадая съ нимъ или составляя его часть; поэтому сумма интерваловъ G или G_n не можетъ быть больше суммы тѣхъ интерваловъ, къ которымъ они восходятъ“.

С. „Для малаго положительнаго числа ε можетъ быть опредѣлено цѣлое число m такъ, что въ G и G_m интервалы, равные или большіе ε , будутъ тождественны“.

Пусть $l^{(0)} = (x', x'')$ — свободный интервалъ G ; тогда, въ силу замкнутости G , можетъ быть указана первая такая область G_{m_1} , что обѣ точки x', x'' принадлежатъ ей; отсюда вытекаетъ, что (x', x'') окажется свободнымъ интерваломъ для всѣхъ G_n при $n \geq m_1$.

Число интерваловъ $l_i^{(0)}$, большихъ ε , конечно; для каждаго изъ нихъ $l_i^{(0)}$ можно, согласно предыдущему, опредѣлить число $m_1^{(i)}$. Если $m' \geq m_1^{(i)}$, то всѣ интервалы G , большіе ε , войдутъ неизмѣнно въ каждую изъ G_n при $n \geq m'$.

Но въ каждую изъ этихъ G_n могутъ входить также и другіе интервалы, большіе ε , которые въ дальнѣйшемъ процессѣ подверглись раздробленію. Число такихъ интерваловъ опять таки должно быть конечно; пусть оно будетъ k_n . Такъ какъ на каждомъ изъ нихъ не можетъ быть интерваловъ G , большихъ ε , то можно указать для каждаго интервала конечное число ρ_{k_n} точекъ G , послѣдовательно отстоящихъ другъ отъ друга меньше чѣмъ на ε ; такъ какъ общее число точекъ k_n

$\sum_1 \rho_{k_n}$ должно быть конечнымъ, то мы можемъ найти первую область $G_{m''}$, въ которую всѣ онѣ входятъ.

Если m есть большее изъ чиселъ m' и m'' , то G_n при $n \geq m$ будутъ удовлетворять условіямъ теоремы. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что

D. „При $n \geq m$ всѣ необіе для G_n и G интервалы будутъ меньше ε “.

Суммы такихъ интерваловъ, меньшихъ ε , мы будемъ обозначать впередъ соотвѣтственно черезъ $R_n(\varepsilon)$ и $R(\varepsilon)$; очевидно, что — въ силу (6) — всегда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\varepsilon) = 0. \quad (13)$$

E. „Обратно: для всякой данной G_n можетъ быть опредѣлено такое единственное число ε_n , что всѣ интервалы G_n , равные или большіе ε_n , будутъ входить цѣликомъ въ G “.

За ε_n мы можемъ взять длину наименьшаго изъ общихъ интерваловъ G и G_n , если онъ — единственный, или, если ихъ нѣсколько, но всѣ они входятъ цѣликомъ въ G ; если же въ G встрѣчаются не всѣ такіе интервалы, то за ε_n мы должны взять длину непосредственно большаго интервала; въ частныхъ случаяхъ — для первыхъ областей G_1, G_2, G_3, \dots число ε_n можно приравнять l , длинѣ всего основнаго

интервала, когда въ началѣ ни одинъ интервалъ G_1, G_2, G_3, \dots не ускользаетъ отъ раздробленія. Но въ виду сдѣланнаго въ началѣ предположенія, что G рѣдко разсѣяна, появленіе общихъ интерваловъ, въ согласіи съ теоремами В и С, дѣлается обязательнымъ.

Отсюда, въ связи съ теоремой D, для каждой области G_n имѣется вполне опредѣленное зависящее отъ ε_n число $R_n(\varepsilon_n)$, которое есть *сумма интерваловъ G_n меньшихъ ε_n тогда какъ всѣ интервалы G_n , равные или большіе ε_n , входятъ цѣликомъ въ G .*

Согласно опредѣленію числа ε_n ,

$$\varepsilon_n \overline{\overline{<}} \varepsilon_m \quad \text{при} \quad n > m. \quad (14)$$

Такъ какъ для всякаго малаго ε можетъ быть, въ силу С, опредѣлено число m и—слѣдовательно—область G_m , для которой $\varepsilon_m \overline{\overline{<}} \varepsilon$, то — вслѣдствіе (14) —

$$\lim_{n \dots \infty} \varepsilon_n = 0. \quad (15)$$

Изъ теоремы В слѣдуетъ, что

$$R(\varepsilon_n) \overline{\overline{<}} R_n(\varepsilon_n) \overline{\overline{<}} R_m(\varepsilon_m) \quad \text{при} \quad n > m; \quad (16)$$

а въ такомъ случаѣ можетъ быть

$$\lim_{n \dots \infty} R_n(\varepsilon_n) = 0 \quad \text{или} \quad \neq 0, \quad (17)$$

тогда какъ—въ силу (13) и (15)—всегда

$$\lim_{n \dots \infty} R(\varepsilon_n) = 0.$$

Въ первомъ случаѣ для даннаго малаго числа σ можетъ быть опредѣлено m такъ, что

$$R_n(\varepsilon_n) < \sigma \quad \text{при} \quad n \overline{\overline{>}} m. \quad (18)$$

Г. „Если $\lim R_n(\varepsilon_n) \neq 0$, то область G не можетъ быть замкнутой“.

Дѣйствительно: пусть

$$\lim R_n(\varepsilon_n) = L, \quad \text{при} \quad \text{чемъ} \quad \text{всегда} \quad R_n(\varepsilon_n) \overline{\overline{>}} L; \quad (19)$$

въ силу (19) для произвольнаго $\tau < \frac{L}{2}$ могутъ быть найдены такія наименьшія числа $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n, \dots$, что

$$R_{m_1}(\varepsilon_{m_1}) - L < \frac{\tau}{2}, R_{m_2}(\varepsilon_{m_2}) - L < \frac{\tau}{2^2}, \dots, R_{m_n}(\varepsilon_{m_n}) - L < \frac{\tau}{2^n}, \dots; \quad (20)$$

точно также для каждого n можно найти *конечное* число интерваловъ $l_{n1}, l_{n2}, \dots, l_{nk_n}$ такъ, чтобы было, при $\sigma < \frac{L}{2}$,

$$(21) \quad \sum_1^{\infty} \lambda_{ni} = R_{m_n}(\varepsilon_{m_n}) - \sum_{i=1}^{k_n} l_{ni} < \frac{\sigma}{2^n},$$

гдѣ λ_{ni} обозначены всѣ остальные, меньшіе интервалы R_{m_n} , кромѣ l_{ni} .

Отсюда — въ силу (19) —

$$(22) \quad \sum_1^{k_n} l_{ni} > R_{m_n}(\varepsilon_{m_n}) - \frac{\sigma}{2^n} \geq L - \frac{\sigma}{2^n}.$$

Если мы будемъ отъ интерваловъ R_{m_n} , которые меньше ε_{m_n} , восходить къ соответствующимъ интерваламъ G_{m_s} , при $m_s < m_n$ и — слѣдовательно — при $\varepsilon_{m_s} \geq \varepsilon_{m_n}$, то мы можемъ ихъ встрѣтить *только среди интерваловъ* R_{m_s} , такъ какъ остальные интервалы G_{m_s} , равные или большіе ε_{m_s} , неизмѣнно переходятъ въ составъ G .

Предположивъ эти замѣчанія, назовемъ интервалы R_{m_1} , къ которымъ восходятъ интервалы l_{2i} , черезъ \bar{l}_{2i} ; тогда — въ силу В и (22) —

$$\sum \bar{l}_{2i} \geq \sum l_{2i} \geq L - \frac{\sigma}{2^2} > \frac{\sigma}{2}.$$

Среди интерваловъ \bar{l}_{2i} , совпадающихъ съ различными интервалами R_{m_1} , нѣкоторые \bar{l}'_{2i} входятъ въ составъ l_{1i} , а другіе \bar{l}''_{2i} относятся къ числу интерваловъ λ_{1i} ; восходящіе къ нимъ интервалы R_{m_2} обозначимъ соответственно черезъ l'_{2i} и l''_{2i} . Такъ какъ вся сумма интерваловъ λ_{1i} — въ силу (21) — меньше $\frac{\sigma}{2}$, то тѣмъ болѣе должно быть

$$(23) \quad \sum l''_{2i} \leq \sum \bar{l}''_{2i} < \frac{\sigma}{2}.$$

Но — въ силу (22) —

$$\sum l'_{2i} + \sum l''_{2i} = \sum_1^{k_2} l_{2i} > L - \frac{\sigma}{2^2};$$

слѣдовательно — въ связи съ (23) —

$$(24) \quad \sum l'_{2i} > L - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)\sigma,$$

и тѣмъ болѣе

$$\sum \bar{l}'_{2i} > L - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \sigma, \quad (25)$$

т. е. сумма тѣхъ интерваловъ l_{2i} , которые восходятъ къ интерваламъ l_{1i} , и сумма этихъ послѣднихъ интерваловъ превышаетъ $L - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \sigma$.

Такъ какъ

$$R_{m_2}(\varepsilon_{m_2}) = \sum l'_{2i} + \sum l''_{2i} + \sum \lambda_{2i},$$

то—въ силу (24) и (20)—

$$\begin{aligned} \sum l''_{2i} + \sum \lambda_{2i} &= R_{m_2}(\varepsilon_{m_2}) - \sum l'_{2i} < R_{m_2}(\varepsilon_{m_2}) - L + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \sigma \\ &< \frac{\tau}{2^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \sigma. \end{aligned} \quad (26)$$

Далѣе: интервалы l_{3i} восходятъ къ интерваламъ G_{m_2} и G_{m_1} . Всѣ интервалы R_{m_3} распадаются на двѣ части l_{3i} и λ_{3i} , при чемъ первые снова на l'_{3i} и l''_{3i} ; l'_{3i} черезъ интервалы l'_{2i} восходятъ къ интерваламъ \bar{l}'_{2i} , входящимъ въ составъ $\sum_1^{k_1} l_{1i}$, тогда какъ l''_{3i} восходятъ къ интерваламъ R_{m_1} черезъ интервалы l''_{2i} и λ_{2i} .

Въ такомъ случаѣ—въ силу (26)—

$$\sum l''_{3i} \leq \sum l''_{2i} + \sum \lambda_{2i} < \frac{\tau}{2^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \sigma;$$

но—на основаніи (22)—

$$\sum l'_{3i} + \sum l''_{3i} = \sum_1^{k_3} l_{3i} > L - \frac{\sigma}{2^3},$$

слѣдовательно

$$\sum l'_{3i} > L - \frac{\sigma}{2^3} - \sum l''_{3i} > L - \frac{\tau}{2^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) \sigma, \quad (27)$$

и тѣмъ болѣе

$$\sum \bar{l}'_{3i} > L - \frac{\tau}{2^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) \sigma;$$

отсюда—въ силу (27) и (20)—

$$\begin{aligned} \sum l_{3i}'' + \sum l_{3i} &= R_{m_3} - \sum l_{3i}' < R_{m_3} - L + \frac{\tau}{2^3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) \sigma \\ (28) \quad &< \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) \sigma + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) \tau; \end{aligned}$$

и т. д.; вообще сумма тѣхъ интерваловъ l_{ni}' , которые черезъ всѣ промежуточные интервалы $l_{n-1,i}'$, $l_{n-2,i}'$, ..., l_{2i}' восходятъ къ l_{1i} , будетъ

$$\sum l_{ni}' > L - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \sigma - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \tau;$$

тѣмъ болѣе при всякомъ n

$$(29) \quad \sum l_{ni}' \geq \sum l_{ni}' > L - \sigma - \tau;$$

такому же неравенству—въ силу В—удовлетворяютъ и суммы промежуточныхъ интерваловъ, черезъ которые производится восхождение; а въ такомъ случаѣ—въ силу леммы А—существуютъ точки, которыя лежатъ *внутри* всѣхъ l_{ni}' и служатъ предѣлами ихъ границъ; эти точки не принадлежатъ области G , которая оказывается такимъ образомъ незамкнутой.

Изъ теоремы F слѣдуетъ, что

G . „Если область G замкнута, то

$$\lim R_n(\varepsilon_n) = 0^+;$$

отсюда—въ силу (18)—имѣемъ

Н. „Если G замкнута, то для малаго σ можетъ быть опредѣлено число m такъ, что

$$R_n(\varepsilon_n) < \sigma \quad \text{при} \quad n \geq m,$$

т. е. для G и G_n всѣ интервалы, равные или большіе ε_n , будутъ одни и тѣ-же, тогда какъ сумма интерваловъ меньшихъ ε_n , будетъ меньше σ “.

Young приводитъ еще два замѣчанія: если G не замкнута, и \bar{G} есть область, получающаяся отъ ея замыканія, то

$$\bar{G} \equiv M \{G, G'\}.$$

Въ томъ случаѣ, когда \bar{G} совершенна, G должна быть сгущенной, и $G' \equiv \bar{G}$; если же \bar{G} не совершенна, G' не можетъ быть тождественна съ \bar{G} ; дѣйствительно—изъ $G' \equiv \bar{G}$ слѣдовало бы, что G сгущена, и $G' \equiv \bar{G}$ совершенна, чего быть не можетъ.

Если \bar{G} совершенна, и—слѣдовательно G сгущена, но не замкнута, изъ опредѣленія $G \equiv \lim G_n$ еще нельзя выводить заключенія, что

$$\lim G'_n = G' \equiv \bar{G};$$

дѣйствительно: такъ какъ—по условію— G_n замкнута, $G'_n = D(G_n)$; слѣдовательно $\lim G'_n \equiv D(G)$, между тѣмъ какъ G' содержитъ точки, не входящія въ G .

Изъ теоремы Н непосредственно вытекаетъ теорема *Osgood'a* ¹⁾:

Ж. „Если G замкнута, то

$$J(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(G_n). \quad (30)$$

Дѣйствительно: опредѣляя мѣру G_n и G какъ

$$J(G_n) = l - \sum_1^{\infty} l_{ni}, \quad J(G) = l - \sum_1^{\infty} l_{oi},$$

гдѣ l_{ni} , l_{oi} —свободные интервалы этихъ областей, имѣемъ—согласно Н и (16)—

$$\left| J(G_n) - J(G) \right| = \left| \sum_1^{\infty} l_{oi} - \sum_1^{\infty} l_{ni} \right| = \left| R(\varepsilon_n) - R_n(\varepsilon_n) \right| < 2\sigma,$$

откуда слѣдуетъ (30).

Если G не замкнута, опредѣлимъ ²⁾ наиболѣе общія условія, при которыхъ

$$\lim J(G_n) = J(\bar{G}) \quad (31)$$

Въ такомъ случаѣ

М. „Для произвольно заданныхъ ε и σ можетъ быть опредѣлено такое число m , что для G_n и G при $n > m$ суммы свободныхъ интерваловъ, равныхъ или большихъ ε , различаются другъ отъ друга меньше чѣмъ на σ “.

Эта теорема есть обобщеніе теоремы Н, гдѣ было $\bar{G} \equiv G$, и гдѣ тѣ и другіе интервалы совпадали вполнѣ.

¹⁾ См. 34^c, стр. 52.

²⁾ Proceedings, 35, p 283.

Пусть (\bar{x}', \bar{x}'') —одинъ изъ интерваловъ \bar{G} , который $\bar{>} \varepsilon$, и пусть такихъ интерваловъ будетъ k ; удлинняя его на каждомъ концѣ на $\frac{\sigma}{2k}$, мы получимъ точки \bar{x}'_0, \bar{x}''_0 ; на этихъ малыхъ отрѣзкахъ лежитъ произвольно много точекъ G ; дѣйствительно: если точки \bar{x}', \bar{x}'' —уединенныя точки \bar{G} , то они должны принадлежать G , и тогда процессъ удлинненія дѣлается бесполезнымъ; если же одна или обѣ точки \bar{x}', \bar{x}'' —предѣльныя, то въ ихъ окрестностяхъ имѣется произвольно много точекъ G . Итакъ всегда возможно выбрать на (\bar{x}'_0, \bar{x}'_1) и на $(\bar{x}''_1, \bar{x}''_0)$ точки x', x'' , которыя будутъ точками G и—слѣдовательно—точками какой нибудь G_{m_1} . Тогда свободный интервалъ (x', x'') или его часть, на которой располагается (\bar{x}', \bar{x}'') , будутъ навѣрное принадлежать G_n при $n \bar{>} m_1$. Опредѣляя такія числа $m_1^{(i)}$ для каждого изъ k интерваловъ и взявъ m_2 —большее изъ нихъ, мы получимъ, что для $n \bar{>} m_2$ суммы свободныхъ интерваловъ G_n и \bar{G} различаются другъ отъ друга на величину меньшую σ .

Но въ G_n могутъ быть интервалы равные или большіе ε , которые не входятъ въ \bar{G} , и число которыхъ конечно; съ ними мы можемъ поступить также, какъ въ доказательствѣ теоремы С, и мы получимъ тогда число $m \bar{>} m_2$, удовлетворяющее условіямъ теоремы.

Мы имѣемъ такимъ образомъ, при $n \bar{>} m$,

$$\left| \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l_{ni} - R_n(\varepsilon) \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l_n - R(\varepsilon) \right\} \right| < \sigma$$

или

$$\left\{ [l - J(G_n)] - R_n(\varepsilon) \right\} - \left\{ [l - J(\bar{G})] - R(\varepsilon) \right\} = | J(\bar{G}) - J(G_n) - R_n(\varepsilon) + R(\varepsilon) | < \sigma;$$

такъ какъ—въ силу $D\text{-}\lim_{\varepsilon \dots 0} R(\varepsilon) = 0$, то для удовлетворенія (31) необходимо и достаточно, чтобы $R_n(\varepsilon)$ было произвольно мало при достаточно малыхъ ε и большихъ n .

Для поясненія всей предыдущей теоріи *Young* приводитъ слѣдующій примѣръ: на отрѣзкѣ $(0, 1)$ строимъ 1) въ тернарной системѣ замкнутый первый рядъ *Smith'a*, назвавъ его G_1 , и во 2) Γ —замкнутый второй рядъ *Smith'a*¹⁾; у нихъ будетъ общимъ свободный интервалъ $(0.2, 1)$. Такъ какъ ряды въ интервалахъ $(0, 0.1)$ и $(0.1, 0.2)$ тождественны, рассмотримъ только первый изъ нихъ. На трехъ наибольшихъ

¹⁾ См. В и С 5° и 46°.

свободныхъ интервалахъ ряда G_1 на $(0, 0.1)$ помѣщаемъ снова первые ряды *Smith'a*; тогда на $(0, 1)$ получится область G_2 , у которой будутъ общими съ Γ три интервала, равные или большіе $\frac{1}{3^{1+2}}$. Ряды на шестнадцати интервалахъ $(0, 0.1)$ и $(0.1, 0.2)$ тождественны, и мы рассмотримъ только $(0, 0.001)$; на трехъ наибольшихъ интервалахъ области G_2 на $(0, 0.001)$ помѣстимъ снова первые ряды *Smith'a*, получивъ при этомъ на $(0, 1)$ область G_3 , и затѣмъ съ 3^2 наибольшими интервалами G_3 на $(0, 0.001)$ сдѣлаемъ тоже самое, получая на $(0, 1)$ область G_4 ; эта область имѣетъ съ Γ общими интервалы, равные или большіе $\frac{1}{3^{1+2+3}}$; и т. д. Мы получимъ такимъ образомъ область G какъ предѣлъ для G_n , при чемъ для заданнаго ε можетъ быть выбрано n такъ, что свободные интервалы G_n и Γ , равные или большіе ε , будутъ одни и тѣ-же; замыкая G , мы получимъ рядъ \bar{G} , который будетъ совпадать съ Γ .

Сумма свободныхъ интерваловъ G_n равна 1, и $J(G_n) = 0$; слѣдовательно также и $\lim J(G_n) = 0$; тогда какъ $J(\Gamma) = J(\bar{G})$ заключается между $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$. Такимъ образомъ, не смотря на то, что всѣ интервалы, равные или большіе ε , общи у Γ и G_n , разность суммъ остальныхъ меньшихъ интерваловъ $R_n(\varepsilon_n) - R(\varepsilon_n)$ заключается между $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

Общимъ областямъ такого типа посвящается много мѣста во II главѣ настоящаго изслѣдованія.

48. *Young* отмѣчаетъ далѣе ¹⁾, что недостаточно установлено понятіе о разсѣянніи одной области по другой.

Если P есть часть замкнутой, рѣдко разсѣянной области Q , то *Schoentlies* ²⁾ называетъ P *часто разсѣянной по Q*, если

$$P' \equiv Q. \quad (32)$$

Young считаетъ такое опредѣленіе неудовлетворительнымъ, такъ какъ можетъ случиться, что ни одна часть области Q не имѣетъ Q своей производной; это будетъ всегда происходить для замкнутой, но не совершенной Q . Въ виду этого *Young* предлагаетъ опредѣленіемъ частаго разсѣянія принять условіе

$$Q \equiv M(P, P'). \quad (33)$$

¹⁾ Ib. p. 270.

²⁾ Bericht, p. 80.

Чтобы выяснитъ на примѣрѣ разницу между тѣмъ и другимъ опредѣленіемъ, возьмемъ рядъ

$$(34) \quad Q = \left\{ 0, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}, 1 \right\};$$

согласно опредѣленію *Schoenflies'a*—по такой области нѣтъ часто разсѣянного ряда; по *Young'y*—рядъ

$$P = \left\{ \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, 1 \right\},$$

закрывающій *все* уединенныя точки Q , будетъ единственнымъ часто разсѣяннымъ по Q рядомъ.

Очевидно, по *Young'y*—присутствіе въ P всѣхъ уединенныхъ точекъ Q является обязательнымъ; дѣйствительно: разъ Q —по условію—замкнута,

$$Q = Q_i + Q',$$

гдѣ Q_i — область уединенныхъ точекъ Q ; такъ P есть часть Q , то P' состоитъ изъ предѣльныхъ точекъ Q , т. е. $P' = D(Q')$; слѣдовательно $M(P, P')$ заключаетъ въ себѣ только тѣ уединенныя точки Q , которыя находятся въ P . Поэтому условіе (33) возможно выполнить только въ томъ случаѣ, если въ P включены всѣ точки Q_i .

Въ виду этого, можетъ быть, было бы желательно опредѣлить часто разсѣянную область такъ, чтобы это опредѣленіе, являясь развитіемъ соответствующаго опредѣленія для континуума, давало болѣе просторъ въ построеніи часто разсѣянныхъ областей.

Такимъ опредѣленіемъ могло бы быть слѣдующее: часть P замкнутой области Q называется часто разсѣянной по Q , если

$$(35) \quad P' = Q';$$

при этомъ нѣтъ обязанности включать въ составъ P *все* уединенныя точки Q .

Согласно этому опредѣленію, часто разсѣянными по Q для примѣра (34) будутъ, напримѣръ, области

$$\left\{ \dots, \frac{1}{2^{kn}}, \dots, \frac{1}{2^{3k}}, \frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^0} \right\},$$

и т. д. при всякомъ цѣломъ значеніи k .

Очевидно, при опредѣленіи (35) изъ числа уединенныхъ точекъ въ составъ P должны входить только такія ихъ области, чтобы не была потеряна ни одна предѣльная точка. Для совершенныхъ областей Q всѣ три опредѣленія совпадаютъ.

Третьимъ опредѣленіемъ часто разсѣянной области нахождение такихъ областей является частнымъ случаемъ болѣе общей задачи, именно — возсозданія по производной $P' = Q'$ первоначальной области P , задачи, впервые поставленной *Bendixson'омъ*¹⁾.

Задача эта, какъ и неопредѣленное интегрированіе, вообще говоря, имѣетъ бесконечно много рѣшеній; изъ такихъ рѣшеній отвѣчаютъ опредѣленію частаго разсѣянія тѣ области P , которыя являются составными частями Q ; этимъ налагается на выборъ P добавочное условіе.

49. Изслѣдуя далѣе²⁾ области захватывающихъ другъ друга интерваловъ, *Young* допускаетъ, въ противоположность условіямъ теоремы *Borel'я*, возможность существованія точекъ отрѣзка, невнутреннихъ для всѣхъ интерваловъ области. Эти невнутреннія точки могутъ принадлежать къ тремъ категоріямъ: 1) точки, служащія границами двухъ или нѣсколькихъ смежныхъ или налагающихся другъ на друга интерваловъ, 2) внѣшнія точки, служащія двусторонними предѣлами рядовъ границъ, и 3) одностороннія предѣльныя точки. Рядъ интерваловъ опредѣляемыхъ этими невнутренними точками, *Young* называетъ *эквивалентнымъ рядомъ захватывающихъ другъ друга интерваловъ*. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что

N. „Каждая внутренняя точка интерваловъ эквивалентнаго ряда будетъ непременно внутренней для по крайней мѣрѣ одного интервала даннаго ряда, и обратно“.

Пользуясь этимъ понятіемъ, *Young* устанавливаетъ теорему, представляющую обобщеніе теоремы *Borel'я*:

O. „Если каждая точка замкнутой области $P = \{x\}$ лежитъ внутри по крайней мѣрѣ одного изъ интерваловъ $\{I_i\}$, то возможно опредѣлить конечное число интерваловъ съ такимъ свойствомъ“.

Пусть $\{L_i\}$ — эквивалентный рядъ интерваловъ; такъ какъ каждая точка x лежитъ внутри $\{I_i\}$, то она — въ силу N — будетъ находиться и внутри по крайней мѣрѣ одного изъ L_i . Число интерваловъ L_i должно быть конечно, такъ какъ иначе существовала бы для границъ интерваловъ L_i , а — слѣдовательно — и для точекъ x , на нихъ лежащихъ, предѣльная точка, которая 1) не лежала бы внутри $\{L_i\}$ и 2) была бы точкой x , такъ какъ $\{x\}$ — замкнутая область; это противорѣчитъ опредѣленію $\{L_i\}$ и теоремѣ N. Пусть

$$L_1, L_2, \dots, L_k \quad (36)$$

интервалы эквивалентнаго ряда, *внутри которыхъ лежатъ точки $\{x\}$.*

¹⁾ См 14°.

²⁾ Proceedings, 35, p 384.

Въ такомъ случаѣ на каждомъ изъ интерваловъ (36) мы можемъ построить интервалъ $L_j' = \{\xi_j, \eta_j\}$ такъ, что $\{x\}$ будутъ лежать *внутри* L_j' ; такъ какъ по построению ξ_j, η_j не будутъ точками $\{x\}$, то часть P_j' области P , расположенная на L_j' , будетъ замкнута. Въ силу того, что каждая точка L_j' , въ томъ числѣ и всѣ точки P_j , будетъ внутренней точкой интервала L_j , она—въ силу N —будетъ внутренней и для $\{l_i\}$. Поэтому можно указать конечное число n_j интерваловъ $\{l_i\}$, обладающихъ тѣмъ-же свойствомъ. Взявъ такіе интервалы l_i для всѣхъ

L_j , мы получимъ конечное число $\sum_{j=1}^k n_j = n$ интерваловъ $\{l_i\}$, которые

будутъ обладать искомымъ свойствомъ по отношенію къ точкамъ данной области.

Вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно ¹⁾, что нельзя опредѣлить безконечнаго ряда не захватывающихъ другъ друга интерваловъ такъ, чтобы 1) каждая точка *замкнутой* области лежала внутри одного изъ нихъ, и 2) чтобы не было ни одного сплошного интервала, свободнаго отъ точекъ области.

50. Мѣру $J(P)$ *замкнутой точечной области* Young опредѣляетъ ²⁾ какъ $l - J_1$, гдѣ J_1 —сумма ея свободныхъ интерваловъ. Изъ этого опредѣленія непосредственно вытекаетъ старое опредѣленіе:

P . „Если включить точки замкнутой области *внутри* конечнаго числа не захватывающихъ другъ друга интерваловъ, то сумма этихъ интерваловъ больше $J(P)$, но можетъ быть сдѣлана произвольно близкой къ $J(P)$ “.

Дѣйствительно: возьмемъ неопредѣленное пока ε и опредѣлимъ конечное число *свободныхъ* интерваловъ l_i , которые больше ε ; тогда остается также конечное число k интерваловъ λ_j , на которыхъ, въ качествѣ границъ и внутреннихъ точекъ, лежатъ всѣ точки области P , и кромѣ того на λ_j лежатъ всѣ свободные интервалы $l_i < \varepsilon$, сумма которыхъ пусть будетъ $R(\varepsilon)$. Если удлинить каждый изъ λ_j на каждомъ его концѣ на величину меньшую $\frac{\varepsilon}{2k}$, то всѣ точки P будутъ лежать уже внутри полученныхъ при этомъ интерваловъ λ_j' , которые будутъ захватывать отчасти интервалы l_i ; общая ихъ часть будетъ меньше ε . Отсюда мѣра тѣхъ частей свободныхъ интерваловъ, кото-

¹⁾ ib. (2) 1. p. 233.

²⁾ ib. p. 232.

рые лежатъ внѣ λ_j' , будетъ заключаться между $J_l - R(\varepsilon) - \sigma$ и $J_l - R(\varepsilon)$, и слѣдовательно

$$J(P) + R(\varepsilon) = l - \{J_l - R(\varepsilon)\} < \sum_1^k \lambda_j' < l - \{J_l - R(\varepsilon) - \sigma\} = J(P) + R(\varepsilon) + \sigma,$$

т. е.

$$R(\varepsilon) < \sum \lambda_j' - J(P) < R(\varepsilon) + \sigma;$$

но сумма $R(\varepsilon)$, при достаточно маломъ ε , можетъ быть сдѣлана произвольно малой, откуда вытекаетъ утверждение теоремы.

Этой теоремой сводится на опредѣленіе *Young'a* одной категоріи опредѣленій мѣры; точно также для другой категоріи авторъ даетъ слѣдующую теорему:

Q. „Если каждую точку замкнутой области сдѣлать серединой малаго интервала, то сумма конечнаго числа не захватывающихъ другъ друга интерваловъ, которые заполнены предыдущими интервалами, при безконечномъ убываніи ихъ длины, имѣетъ предѣломъ $J(P)$ “.

Дѣйствительно: замѣтивъ, что—на основаніи теоремы O—рядъ малыхъ захватывающихъ другъ друга интерваловъ можетъ быть замѣщенъ конечнымъ числомъ ихъ, мы можемъ свести теорему Q на теорему P.

Опредѣленіе мѣры *Young'омъ* и эти двѣ теоремы водворяютъ наконецъ тотъ порядокъ, который былъ настоящимъ уже давно; теперь является только необходимымъ выяснитъ, въ какой мѣрѣ можно распространить опредѣленіе *Young'a* на незамкнутыя области.

Ясно, что замкнутый рядъ съ мѣрой l , равной длинѣ основного интервала, долженъ непременно совпадать съ континуумомъ, такъ какъ для него должно быть $J_l = 0$.

Исходя изъ тѣхъ интерваловъ, которыми опредѣляется точечная область P, *Young* уясняетъ геометрическое происхожденіе производной области P': переходя отъ свободныхъ интерваловъ P къ такимъ же интерваламъ P', мы соединяемъ вмѣстѣ всѣ смежные интервалы вплоть до ихъ предѣльныхъ точекъ на обѣихъ сторонахъ; если два счетныхъ ряда интерваловъ имѣютъ общую предѣльную точку, которая будетъ внѣшней по отношенію къ тѣмъ и другимъ интерваламъ, эта точка будетъ теперь границей свободныхъ смежныхъ интерваловъ области P'.

Нахожденіе дальнѣйшихъ производныхъ P'', P''', имѣетъ слѣдствіемъ новое соединеніе интерваловъ въ одинъ; при этомъ процессѣ

последовательно исчезают односторонние и двусторонние предельные точки; исчезнувших точек может быть только счетное число.

Если область P счетна, то после некоторого ряда операций свободные интервалы сольются в один сплошной основной интервал; если же она не счетна, то мы получим *последний ряд* (ultimate set) уединенных интервалов; совершенную область $P^{(2)}$ внутренних точек этих интервалов *Young* называет *остовом* или *ядром* (nucleus) области P .

В таком виде представляется у автора основная теорема *Cantor-Bendixson'a*; очевидно ¹⁾, что

Ядро $P^{(2)}$ имеет ту же меру, как и P , и те же внешние точки, кроме — может быть — счетного ряда.

Young замечает еще, что часто приходится, имея счетный ряд областей

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots, \quad \text{при} \quad P_{n+1} = D(P_n),$$

говорить о всех точках, общих всем областям P_i ; область этих точек P_ω он называет *изводной* (deduced) и самый процесс — *изведением* (deduction).

„Если дан конечный или счетный ряд операций нахождения производных и их изводных, можно построить счетную область точек, которая исчезнет, если над ней выполнить эти операции.“

Это утверждение имеет некоторую аналогию с теорией размещения, развитой нами во второй главѣ.

51. *Young* задается целью ²⁾ исследовать еще обобщенную область *Borel'a*³⁾: дѣлаем каждую из точек области P серединой некоторого интервала; заставляя все интервалы $I_i^{(n)}$ стремиться к нулю с возрастанием n , исследуем область внутренних точек этих интервалов. Относительно этой области, которую *Young* называет *внутренним предельным рядом*, он дает следующие теоремы:

R. „Всякая точка $x^{(0)}$ внутреннего предельного ряда $P^{(0)}$ будет точкой P' “.

Дѣйствительно: $x^{(0)}$ должна быть внутренней точкой для каждого ряда интервалов $\{I_i^{(n)}\}$ при всяком n ; интервалы, заключающие вну-

¹⁾ Ср 17°.

²⁾ Proceedings, (2) 1, p. 262.

³⁾ См. 30°.

три себя, кроме $x^{(0)}$, еще точки P , убывают бесконечно, следовательно— $x^{(0)}$ должна быть точкой P' .

Отсюда непосредственно вытекает, что

„Для замкнутой области P всегда $P \equiv P^{(0)}$ “

S. „ $P^{(0)}$ может заключать въ себя каждую точку P' “.

Возьмемъ все интервалы $l_i^{(n)}$, при данномъ n , равными; тогда каждая точка P' будетъ внутренней для $\sum_1^{\infty} l_i^{(n)}$ при всякомъ n , т. е. она

войдетъ въ $P^{(0)}$; но, вообще говоря, P' можетъ не быть $D\{P^{(0)}\}$.

T. „Если P —раздѣльная область, и P' счетна¹⁾, то возможно раздѣлить интервалы такъ, что будетъ $P^{(0)} \equiv P'$ “.

На основаніи R—изъ точекъ, не входящихъ въ P , могутъ заключаться въ $P^{(0)}$ только точки P' . Точки P' , которыя принадлежатъ P , здѣсь не возбуждаютъ сомнѣнія; остается только доказать, что можно расположить интервалы такъ, что останется внѣ ихъ каждая точка P' , не входящая въ составъ P .

Возьмемъ замкнутую область

$$\bar{P} \equiv M(P, P');$$

ея уединенныя точки $\{x_{0i}\} \equiv P_a$ будутъ тождественны съ уединенными точками P ; пусть d_{0i} —разстояніе точки x_{0i} до ближайшей къ ней точки P_a . Тогда все предѣльные точки P не будутъ лежать внутри интерваловъ $l_{0i}^{(n)} \equiv (x_{0i} - \frac{1}{2^n} d_{0i}, x_{0i} + \frac{1}{2^n} d_{0i})$.

По выдѣленіи изъ \bar{P} точекъ P_a , мы получимъ P_{ca} —область уединенныхъ точекъ области $\bar{P} - P_a$; нѣкоторыя изъ этихъ точекъ $\{x_{1i}\}$ войдутъ въ P , тогда какъ другія $\{\xi_{1j}\}$ туда не войдутъ. Область $\{x_{1i}, \xi_{1j}\}$ будетъ снова уединенна, и около ея точекъ можно построить интервалы

$$l_{1i}^{(n)} \equiv (x_{1i} - \frac{1}{2^n} d_{1i}, x_{1i} + \frac{1}{2^n} d_{1i}), \quad \lambda_{1j}^{(n)} \equiv (\xi_{1j} - \frac{1}{2^n} \delta_{1j}, \xi_{1j} + \frac{1}{2^n} \delta_{1j}),$$

внутри каждого изъ которыхъ 1) не будетъ другихъ точекъ P_{ca} , кроме x_{1i} или ξ_{1j} , а—следовательно—тѣмъ болѣе никакихъ другихъ точекъ P , которыя служатъ предѣльными для x_{1i}, ξ_{1j} , и 2) все предѣльные точки P_{ca} не лежатъ внутри $l_{1i}^{(n)}$ и $\lambda_{1j}^{(n)}$; d_{1i} и δ_{1j} здѣсь снова—разстоянія x_{1i} или ξ_{1j} до ближайшей точки P_{ca} .

¹⁾ т. е. P —приводима.

Уединенныя точки области $P - P_a - \overline{P_{ca}}$ даютъ область P_{ca} , причѣмъ одни входящія въ нее точки $\{x_{2i}\}$ могутъ принадлежать P , другія-же $\{\xi_{2j}\}$ — нѣтъ.

Строя около нихъ интервалы l_{2i} и λ_{2i} и продолжая этотъ процессъ далѣе, мы включимъ точки P въ захватывающіе, вообще говоря, другъ друга интервалы

$$\{l_{0i}^{(n)}\}, \quad \{l_{1i}^{(n)}\}, \quad \{l_{2i}^{(n)}\}, \dots, \{l_{\alpha i}^{(n)}\},$$

гдѣ α — число второго класса, съ которымъ предыдущій процессъ долженъ оборваться, такъ какъ область P — приводима; при достаточно большомъ значеніи n , ни одна точка $\{\xi_{kj}\}$ не лежитъ внутри нихъ; точка ξ_{kj} можетъ лежать внутри интерваловъ $l_{k+1,i}^{(n)}, l_{k+2,i}^{(n)}, \dots$, но при возрастающемъ n она должна оказаться внѣ этихъ интерваловъ, такъ какъ ξ_{kj} лежитъ на конечномъ разстояніи отъ каждой изъ точекъ $x_{k+1,j}, x_{k+2,j}, \dots$.

Придавая n всѣ значенія натурального ряда 1, 2, 3, \dots , мы получимъ область $P^{(0)}$, въ составъ которой не войдетъ ни одна точка P' , не принадлежащая P ; а въ такомъ случаѣ — согласно R — должно быть $P^{(0)} \equiv P^1$.

U. „Если P рѣдко разсѣяна и не раздѣльна, $P^{(0)}$ имѣетъ размѣръ непрерывности“.

Дѣйствительно: разъ P — не раздѣльна, не можетъ быть раздѣльной и $P^{(0)} \equiv M(P)$; а въ такомъ случаѣ $P^{(0)}$ не счетна²⁾.

V. „Если P — раздѣльная область, но P' не счетна, $P^{(0)}$ можетъ или быть счетна, или имѣть размѣръ непрерывности; при этомъ возможно размѣстить интервалы такъ, что будетъ $P^{(0)} \equiv P''$ “.

Если при несчетной P' область P раздѣльна, то точки P будутъ распредѣляться по свободнымъ интерваламъ нѣкоторой совершенной области Q , при чемъ въ каждомъ изъ интерваловъ помѣщается область перваго рода.

Отсюда является возможность построить на каждомъ свободномъ интервалѣ Q интервалы типа T такимъ образомъ, что окажется $P^{(0)} \equiv P$, т. е. $P^{(0)}$ будетъ счетна, какъ и P .

¹⁾ Эта теорема не приведена у *Young'a*; она неявно заключается въ теоремѣ *W.* Доказательства теоремъ *U* и *V* приведены авторомъ въ *Leipziger Berichte*, 1903.

²⁾ *ib.*

Если — напротив того — около точек P построим интервалы типа S , $P^{(0)}$ будет заключать въ своемъ составѣ совершенную область Q , и будетъ потому имѣть размѣръ непрерывности.

W. „Вообще возможно размѣстить интервалы такъ, что точки $P^{(0)}$, входящія въ составъ P , будутъ предѣльными точками сгущенной части P' “.

Дѣйствительно: строя для точекъ сгущенной части P , часто разсѣянной по нѣкоторой совершенной области Q , интервалы типа S , а для точекъ, лежащихъ внутри свободныхъ интерваловъ Q , интервалы типа T , мы получимъ

$$P^{(0)} = M \{ P, Q \}.$$

Кромѣ указанныхъ въ текстѣ, *Young* приводитъ еще одну теорему¹⁾:

X. „Если мѣра включающихъ $P^{(0)}$ интерваловъ $\lambda^{(n)}$ можетъ быть сдѣлана меньше мѣры P' , то несчетная часть $D(P')$ не входитъ въ $P^{(0)}$ “.

Пусть $D(P') \equiv \{ x_i \}$ счетна, и пусть $J(P') = \text{uGr. } \lambda^{(n)} = 2\varepsilon$; построимъ около каждой точки x_i интервалъ $(x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}})$; тогда мѣра области $\{P^{(0)}, D(P')\}$, включающей ось точки P' будетъ не больше $\text{uGr. } \lambda^{(n)} + \varepsilon$, т. е. меньше $J(P')$, чего быть не можетъ; слѣдовательно—нельзя предполагать область $D(P')$ счетной.

Аналогично можно доказать, что

Y. „Если область P_1 составляетъ часть P_2 , и мѣра P_1 меньше мѣры P_2 , то область $P_2 - P_1$ имѣетъ размѣръ непрерывности“.

52. Доказательство²⁾ теоремы *Cantor-Bendixson'a* опирается на понятіе объ Ω —первомъ числѣ третьяго класса, при чемъ это число, какъ замѣтилъ еще *Cantor*, не входитъ совершенно въ окончательный результатъ. Поэтому естественно было желаніе *Schoenflies'a* дать³⁾ такое доказательство этой теоремы, которое было бы совершенно независимо отъ Ω .

Доказательство *Schoenflies'a* проведено въ духѣ *Young'a*, который самъ сдѣлалъ⁴⁾ на это указаніе. Оно основывается на томъ, что

¹⁾ Proceedings. (2) 1, p. 262-263.

²⁾ См. 13^o-14^o.

³⁾ Göttinger Nachrichten, 1903; издано въ 1904 г.

⁴⁾ Proceedings. (2) 1, 1904, p. 246.

а) каждому числу 2-го класса отвѣчаетъ типъ размѣщенія определенной точно-размѣщенной¹⁾ счетной области, и обратно; и б) всякая точно размѣщенная область положительныхъ убывающихъ чиселъ счетна, и ея типъ размѣщенія есть определенное число 2-го класса.

Въ силу опредѣленія—числа области могутъ быть даны въ видѣ

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_\omega > a_{\omega+1} > \dots > a_\alpha > a_{\alpha+1} > \dots \quad (1)$$

если обозначить $a_\nu - a_{\nu+1} = b_\nu$, то

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_\omega, b_{\omega+1}, \dots, b_\alpha, b_{\alpha+1}, \dots \quad (2)$$

будетъ другой рядъ, въ которомъ всѣ числа b_ν конечны и положительны, и сумма произвольнаго числа чиселъ (2) не превышаетъ a_1 . Поэтому, если взять какой нибудь рядъ бесконечно убывающихъ чиселъ $\{\varepsilon_i\}$, то между каждыми двумя числами ε_i можетъ лежать по величинѣ только конечное число чиселъ b_ν ; отсюда слѣдуетъ счетность рядовъ (2) и (1).

Въ доказательствѣ теоремы *Cantor-Bendixson'a Schoenflies* исходить изъ ряда $\{l_i\}$ опредѣляющихъ замкнутую область интерваловъ, которые послѣ счетнаго числа операций должны дать или сплошной основной интервалъ, или рядъ уединенныхъ интерваловъ; доказательство сохраняетъ силу и въ томъ случаѣ, если данная область состоитъ изъ ряда рѣдко и часто разбѣянныхъ частей.

Затѣмъ авторъ такимъ же путемъ доказываетъ еще теорему *Baire'a*²⁾:

„Если Q —замкнутая область, и

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_\omega, Q_{\omega+1}, \dots, Q_\alpha, Q_{\alpha+1}, \dots$$

— рядъ областей, изъ которыхъ Q_1 —замкнутая часть Q , и вообще каждая $Q_{\beta+1}$ есть замкнутая часть Q_β , то существуетъ наименьшее число α перваго или втораго класса, для котораго Q_α ноль или совершенна“.

Оба доказательства отличаются крайней простотой и убѣдительностью.

¹⁾ Т. е. такой, которая сама и каждая ея часть имѣетъ низшій элементъ; см. Bericht. S. 36; *Jourdain*, Phil. Magaz. (6) 7, p. 65; изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что для каждой части точно размѣщенной области и поэтому для каждого ея элемента имѣется непосредственно за ней слѣдующій элементъ.

²⁾ См. 37^o; *Annali di Matematica*, (3) 3, p. 51.

Дальнѣйшія работы ¹⁾ автора по теоріи точечныхъ областей, какъ и статья *Zoretti* ²⁾, относятся къ двухмѣрнымъ областямъ и, опираясь на новые приемы и новыя понятія, лежатъ внѣ круга идей настоящаго изслѣдованія.

53. Прослѣдивъ шагъ за шагомъ, какъ развивалась новая отрасль чистой математики, какъ она вырабатывала свои методы и положенія, попробуемъ теперь представить общую картину этого развитія и указать тѣ направленія, въ которыхъ должна происходить ея дальнѣйшая разработка.

На теоріи областей, возникшей и развившейся почти на нашихъ глазахъ, интереснымъ является прослѣдить исторію новой дисциплины, исторію, которая въ миниатюрѣ повторяетъ исторію развитія науки вообще. Начала всякой науки теряются во мракѣ времени, и отдѣльные моменты ея развитія отмѣчаются столѣтіями, тогда какъ въ теоріи областей весь циклъ проходитъ въ чрезвычайно короткій періодъ времени.

Изъ отдѣльныхъ фактовъ у *Bolzano*, любопытныхъ въ качествѣ „парадоксовъ“, ученіе объ областяхъ получаетъ у *Cantor'a* уже форму теоріи; но до какой степени эта теорія была своеобразна, указываетъ уже то обстоятельство, что *Cantor* долго не рѣшался опубликовать свои изслѣдованія. Первое время послѣ ихъ опубликованія было очень немного лицъ, кто занимался этой новой вѣтвью математики, но чѣмъ дальше шло время, тѣмъ работниковъ въ области *Mengenlehre* дѣлается все больше и больше, ея вліяніе проникаетъ въ различные отдѣлы науки и начинаетъ уже входить въ элементарные курсы ³⁾.

Такимъ образомъ право на существованіе и роль ученія объ областяхъ въ общей системѣ науки является упроченнымъ: съ этимъ ученіемъ считаются, и въ настоящее время нельзя уже избѣжать его вліянія въ цѣломъ рядѣ отдѣловъ анализа. И вся эта эволюція произошла въ теченіе какихъ-нибудь 30 лѣтъ, не считая ея т. с. доисторическаго періода.

Затѣмъ интересно прослѣдить, какъ различныя идеи ученія объ областяхъ постоянно возникаютъ, независимо другъ отъ друга, у различныхъ изслѣдователей; это явленіе до такой степени частое, что сравнительно немногое ведетъ свое начало отъ кого-либо одного, большею же частью понятія приходится возводить къ двумъ, а то и больше, авторамъ.

¹⁾ М. А. 58, S. 195; 59, S. 129.

²⁾ С. R. 138, p. 674.

³⁾ См. нпр. de la Vallée-Poussin, Cours d'analyse.

Далѣе—участіе каждаго изъ отдѣльныхъ изслѣдователей въ развитіи теоріи оказывается обыкновенно очень небольшимъ: часто какой нибудь одинъ примѣръ, одна теорема или одно понятіе оказываетъ существенное вліяніе на весь дальнѣйшій ходъ развитія. Кромѣ самого *Cantor'a*, только *Borel'ю* и *Young'y* принадлежатъ болѣе обширныя изслѣдованія въ теоріи линейныхъ, *Jordan'y* и *Schoenflies'y*—въ теоріи плоскихъ областей.

54. Ученіе объ областяхъ (*Mengenlehre*) разбилося прежде всего на два теченія; одно занялось трансфинитной арифметикой и теоріей трансфинитныхъ чиселъ, тогда какъ другое обратило преимущественное вниманіе на точечныя области; это послѣднее относится до нѣкоторой степени недружелюбно къ трансфинитнымъ числамъ, и все болѣе и болѣе проявляется стремленіе обосновать теорію точечныхъ областей внѣ зависимости отъ нихъ; представителемъ этого теченія является *Borel*.

Ожидать полнаго успѣха въ этомъ направленіи едва ли возможно: если удастся обосновать теоремы, относящіяся къ точечнымъ областямъ, независимо отъ Ω — перваго числа 3-го класса, то—надо думать—числа 2 го класса всегда сохранять за собой подобающее значеніе.

Не смотря на свою тѣсную связь, теорія трансфинитныхъ чиселъ и теорія точечныхъ областей имѣютъ каждая особый кругъ работниковъ, которые только изрѣдка и не охотно выходятъ за предѣлы своей теоріи; и какъ разъ тѣ математики, какъ *Borel* и *Schoenflies*, которые удѣлили вниманіе и той, и другой вѣтви ученія объ областяхъ, направляютъ свои усилія на то, чтобы отдалить ихъ другъ отъ друга, и привѣтствуютъ успѣхи другихъ на этомъ поприщѣ.

Теорія точечныхъ областей, которымъ посвящено настоящее изслѣдованіе, имѣетъ задачей изучать *a)* размѣръ области, *b)* ея строеніе и *c)* ея мѣру.

Что касается размѣра, то еще *Cantor'омъ* было установлено, что точечныя области могутъ быть конечны, счетны или имѣть размѣръ непрерывности. Выясненіе-же того, въ какомъ отношеніи послѣдній размѣръ находится къ ряду *алефовъ*, входитъ въ задачи теоріи трансфинитныхъ чиселъ и насъ здѣсь не занимаетъ¹⁾.

Изученіе строенія и мѣры области по большей части шло также до нѣкоторой степени независимо одно отъ другого, и математики, занимавшіеся однимъ, мало удѣляли вниманія другому; въ этомъ отношеніи особенно характернымъ примѣромъ является *G. Cantor*—творецъ ученія объ областяхъ, сравнительно мало интересовавшійся вопросомъ о мѣрѣ.

¹⁾ Въ только что появившейся книжкѣ *Jahresber. d. Deut. Math.-Ver.* (В. XIV, S. 447) *Bernstein* сообщаетъ, что ему удалось установить что этотъ размѣръ есть алефъ-одинъ.

55. *Bolzano*, къ которому восходитъ все ученіе, коснулся всѣхъ трехъ вопросовъ, составившихъ содержаніе теоріи точечныхъ областей.

Затѣмъ до *Cantor'a* вниманіе аналитиковъ было привлечено на установленіе условія интегрируемости, и въ связи съ этимъ началъ развиваться вопросъ о мѣрѣ.

Раздѣляя основной интервалъ на части и суммируя тѣ изъ нихъ, на которыхъ расположены точки области, мы получимъ *мѣру* области, какъ предѣлъ такихъ суммъ при бесконечно возрастающемъ числѣ частей и—слѣдовательно—при бесконечномъ ихъ убываніи.

Это опредѣленіе, совершенно не считающееся съ природой области, появилось первымъ въ наукѣ; его принимали послѣдовательно, иногда съ маленькими варіаціями, *Riemann*, *Stolz*, *Harnack* (для двухмѣрныхъ областей), *Peano*, *Jordan* и *Lebesgue*; два предпоследнихъ автора, не ограничиваясь предыдущимъ опредѣленіемъ, вводятъ еще *внутреннюю мѣру* области, опредѣляя ее какъ предѣлъ суммъ тѣхъ интерваловъ, *всѣ* точки которыхъ принадлежатъ данной области.

Это первое опредѣленіе мѣры, которые мы будемъ называть *Riemann'овымъ*, принадлежитъ тѣмъ аналитикамъ, которыхъ теорія точечныхъ областей мало интересовала сама по себѣ; имѣя свои задачи внѣ этой теоріи они пользовались ея услугами мимоходомъ и не останавливались особенно долго, кромѣ *Harnack'a* и отчасти *Jordan'a*, на томъ, что могло бы дать болѣе естественное опредѣленіе мѣры.

Вторая группа изслѣдователей строить около каждой точки области обнимающіе ее интервалы и беретъ суммы ихъ не покрывающихъ другъ друга частей; мѣра области опредѣляется тогда какъ предѣлъ этой суммы, при бесконечномъ убываніи каждаго интервала; такого опредѣленія придерживаются *Hankel*, *Dini*, *Harnack* (ранняя работа), *Cantor* и *Lindelöf*, предложившій болѣе гибкій приѣмъ *Cantor'ова* опредѣленія мѣры.

Второе опредѣленіе мѣры, которое мы назовемъ *Hankel'евымъ*, болѣе считается съ природой области, чѣмъ первое, но заключаетъ въ себѣ также элементъ произвола: именно—величины интерваловъ, обнимающихъ различныя точки области, могутъ находиться другъ по отношенію къ другу въ разныхъ соотношеніяхъ. Что различный выборъ интерваловъ можетъ включать, вмѣстѣ съ точками данной области, крайне различающіяся другъ отъ друга добавочныя области, мы видимъ въ примѣрахъ *Borel'a* и *Young'a*.

Произволь въ выборѣ величины интерваловъ, какъ и произволь въ выборѣ системы дѣленій, отвѣчающихъ первому опредѣленію мѣры, далъ поводъ ¹⁾ *Schoenflies'y* высказать мнѣніе, что „опредѣленіе

¹⁾ Bericht, S. 87.

мѣры, какъ и каждое математическое опредѣленіе, имѣетъ извѣстный субъективный характеръ, и только вытекающія изъ него слѣдствія рѣшаются, выбрано ли оно цѣлесообразно.“ Съ этимъ едва ли въ настоящемъ случаѣ возможно согласиться, такъ какъ третье опредѣленіе мѣры, какъ увидимъ, логически является единственнымъ законнымъ.

Промежуточное положеніе между первымъ и вторымъ опредѣленіемъ занимаетъ *Lebesgue*; затѣмъ неустойчиво положеніе *du-Bois-Reymond*'а, который пользуется то первымъ, то третьимъ опредѣленіемъ ¹⁾.

Наконецъ третье опредѣленіе кладетъ въ основу свободные интервалы, предполагая—разумѣется,—что рѣчь идетъ о рѣдко разсѣянныхъ областяхъ.

При опредѣляющемъ мѣру области суммированіи *длинъ* свободныхъ интерваловъ не оказываютъ вліянія на отдѣльныя длины, а слѣдовательно—и на ихъ сумму, наличность или отсутствіе въ составѣ области границъ этихъ интерваловъ; поэтому при вычисленіи мѣры всѣ смежные интервалы сливаются въ одинъ, такъ что уединенныя точки не могутъ оказывать вліянія на мѣру; затѣмъ не вліяютъ на мѣру границы свободныхъ интерваловъ, которыя являются предѣльными точками области, также и общія предѣльныя точки для двухъ рядовъ интерваловъ; такое возможное устраненіе счетнаго ряда точекъ области, уединенныхъ и предѣльныхъ, устраненіе, не отражающееся на величинѣ мѣры, является одинаково неизбѣжнымъ для всѣхъ трехъ опредѣленій; въ этомъ отношеніи третье опредѣленіе не является исключеніемъ.

Такимъ образомъ вопросъ объ опредѣленіи мѣры произвольной области сразу сводится на вопросъ о мѣрѣ совершенной области или ея части; этого вопроса мы касаемся ниже въ III главѣ.

Первымъ, кому принадлежитъ такая идея опредѣленія мѣры области, является *Smith*, при чемъ его области ²⁾—второго рода, имѣющія своими производными совершенныя области.

Вслѣдъ за *Smith*'омъ то-же опредѣленіе было принято *Volterra* и *de-Stefano* для областей, построенныхъ по тому-же образцу, какъ и у *Smith*'а. Всѣ другіе изслѣдователи, примыкающіе къ *Smith*'у, кромѣ *Harnack*'а и отчасти *Osgood*'а, предполагаютъ свои области совершенными или замкнутыми; къ этимъ аналитамъ относятся *Veltmann*, *Borel*, *Schoenflies* и *Young*. *Harnack* вообще не дѣлаетъ никакихъ ограничительныхъ предположеній, что же касается *Osgood*'а, то онъ въ началѣ принимаетъ область замкнутой и затѣмъ распространяетъ свое опредѣленіе.

¹⁾ Functionentheorie, S. 189, 190

²⁾ См. В, С 5°.

Borel, какъ мы видѣли выше, не даетъ опредѣленіе мѣры для заданной области, а наоборотъ выдѣляетъ тѣ области, къ которымъ можетъ быть примѣнено его опредѣленіе, основывающееся на сплошныхъ интервалахъ; но въ конечномъ счетѣ его измѣримыя области—согласно теоремѣ *Schoenflies'a* ¹⁾—являются областями замкнутыми или дополнительными замкнутымъ.

Итакъ третье, *Smith'ovo*, опредѣленіе развѣтвляется на два теченія *Smith'ovo* и другое, которое можно назвать *Veltmann'овымъ*; является поэтому желательнымъ выяснить, въ какой мѣрѣ можно ихъ объединить.

Изъ общихъ теоремъ касающихся мѣры области, нужно отмѣтить теоремы *Cantor'a*, *Borel'я* и *Young'a*. Теоремы послѣдняго автора въ особенности представляютъ значительный интересъ, такъ какъ онѣ даютъ возможность разсматривать первое и второе опредѣленіе мѣры какъ слѣдствіе *Smith'ова* опредѣленія. Этими теоремами поконченъ разговоръ о субъективности опредѣленія и т. д., такъ какъ третье опредѣленіе выводится изъ самой природы области и не связано ни съ какими ограниченіями вопроса, которыхъ можно было бы избѣжать.

Взявъ исходнымъ третье опредѣленіе мѣры, мы избавляемся отъ необходимости для линейныхъ областей доказывать, что это опредѣленіе не зависитъ отъ послѣдовательности выбора интерваловъ.

Для часто разсѣянныхъ областей свободные интервалы отсутствуютъ; поэтому здѣсь нужно еще разобраться, какъ распространить на нихъ третье опредѣленіе мѣры.

Классификацію областей въ зависимости отъ того, будетъ ли мѣра области равна или больше нуля, предложилъ первый *Harnack*; мы будемъ называть первыя—*полыми* (*unausgedehnte*), а вторыя—*полными* (*ausgedehnte*).

56. Вопросъ о строеніи области привлекъ большее число работниковъ и въ большей мѣрѣ можетъ считаться законченнымъ.

Послѣ того какъ изъ понятій о взаимно однозначномъ отнесеніи областей, о предѣльной точкѣ (*Bolzano*) и о разсѣяніи областей по интервалу (*Hankel*), *Cantor*. установивъ понятіе о производной области, положилъ основаніе новой теоріи, развитіе ея шло довольно быстро.

Изъ двухъ вопросовъ, которые можно предложить въ этой теоріи. 1) изслѣдовать свойства данной области и 2) по заданнымъ условіямъ построить область, въ началѣ привлекла къ себѣ почти все вниманіе первая задача.

Изученіе данной области привело къ теоремѣ *Cantor-Bendixson'a*, касающейся замкнутыхъ областей, и къ понятіямъ о *ад-* и *кохэренціи*. Теорема *Cantor-Bendixson'a* по справедливости можетъ быть названа

¹⁾ См. 39°.

основной теоремой въ теоріи областей; геометрическому ея уясненію способствовали *Schoenflies* и *Young*. Тотъ фактъ, что эта теорема относится къ замкнутымъ областямъ, не умаляетъ ея общаго значенія, такъ какъ изученіе незамкнутыхъ областей такъ или иначе должно опираться на соотвѣтственныя замкнутыя области и — слѣдовательно — на основную теорему.

Обращеніе къ свободнымъ интерваламъ (*Dini*) имѣло слѣдствіемъ классификацію точекъ на границы, внутреннія и внѣшнія точки (*Pincherle* и *Veltmann*), играющую значительную роль въ выясненіи строенія области. *Cantor'ova* классификація областей по родамъ и порядкамъ влекла за собой классификацію предѣльныхъ точекъ (*du-Bois-Reymond* и *Cantor*), которая дѣйствовала въ томъ же направленіи. Благодаря всему этому строеніе всякой безконечной области является для насъ настолько же яснымъ, какъ простѣйшія теоремы элементарной геометріи.

Помимо областей общаго вида, особенно въ приложеніяхъ ученія объ областяхъ, часто приходится наталкиваться еще на области особаго строенія; это 1) области, состоящія изъ различныхъ точекъ, входящихъ въ составъ безконечнаго ряда областей, и 2) области точекъ, общихъ безконечному ряду областей.

Первыя области отъ *Ascoli* и *du-Bois-Reymond'a* привели къ классификаціи областей (*Baire*) на двѣ *категоріи*, открывающей новыя перспективы; тоже самое мы видимъ и относительно вторыхъ областей, изслѣдованія которыхъ въ работахъ *Borel'я* и *Young'a* привели къ весьма интереснымъ результатамъ.

Съ тѣми и другими областями мы переходимъ въ кругъ вѣдѣнія другой задачи: установленія областей, удовлетворяющихъ заданнымъ напередъ условіямъ.

Въ началѣ здѣсь все ограничивалось только построеніемъ отдѣльныхъ примѣровъ, которые должны были или доказать, или опровергнуть извѣстное утвержденіе или же пояснить вновь вводимое понятіе. Съ теченіемъ времени набралось этихъ примѣровъ достаточно, и являлось желательнымъ внести сюда нѣкоторый порядокъ; необходимо было установить общій пріемъ, при наличности котораго всѣ отдѣльныя построенныя раньше области оказались бы только частными случаями.

Установленію такого пріема посвящена вторая глава настоящаго изслѣдованія; взявъ тамъ три *основныхъ типа размѣщенія*, мы старались вывести изъ нихъ все разнообразіе мыслимыхъ областей. Кромѣ того, введя обозначеніе извѣстнаго типа, мы можемъ простымъ символомъ выразить строеніе данной области и, установивъ по даннымъ условіямъ соотвѣтственный *типъ размѣщенія*, строить области, отвѣчающія этому типу.