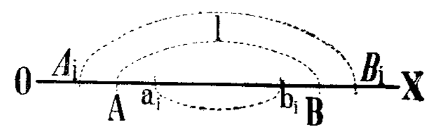
ГЛАВА II.

Строеніе линейныхъ областей.

1. Предварительныя понятія и опредѣленія.

57. Совокупность всѣхъ точекъ, принадлежащихъ прямолинейному отрѣзку, ограниченному точками A и B, мы будемъ называть *линейнымъ участкомъ* и обозначать L; длину этого участка назовемъ l; концы участка будутъ его *границами*, другія его точки называются *внутренними* точками участка; всѣ остальныя точки неограниченной прямой O X будутъ *внѣшними* точками L.

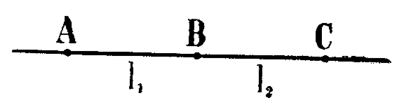


Этотъ участокъ называется *замкнутымъ*, если границы его входятъ въ составъ точекъ участка, и *открытымъ*—въ противномъ случаѣ.

Если A B—открытый участокъ, то мы можемъ разсматривать его какъ предѣлъ внутреннихъ закрытыхъ участковъ $a_i\, b_i$, границы которыхъ лежатъ внутри A B и по нѣкоторому закону безконечно приближаются a_i къ A и b_i къ B.

Точно также замкнутый участокъ можетъ быть представленъ какъ разность нѣкотораго отрѣзка O X и предѣла внѣшнихъ замкнутыхъ участковъ $A_i\, B_i$, границы которыхъ—внѣшнія точки A_i и B_i, приближающіяся безконечно—соотвѣтственно—къ A и B. Въ послѣднемъ случаѣ участокъ L можетъ быть произвольно малъ и можетъ состоять изъ единственной точки, такъ что тогда будетъ $l = 0$.

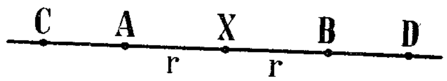
Пусть мы имѣемъ на прямой два участка L_1 и L_2, лежащіе внѣ одинъ другого. Они называются *смежными*, если имѣютъ общую границу B; эта граница можетъ входить въ составъ или обоихъ участковъ или только одного изъ нихъ, такъ что другой будетъ тогда открытымъ, или ни въ тотъ, ни въ другой, при чемъ оба участка окажутся открытыми въ этой точкѣ.



Если участки L_1 и L_2 не имѣютъ общей границы, такъ что между ними находятся точки, не принадлежащія ихъ составу, L_1 и L_2 будутъ *несмежны*.

58. *Линейной точечной областью* называется совокупность конечнаго или безконечно большого числа точно опредѣленныхъ значеній, выбранныхъ по какому нибудь строго опредѣленному закону изъ линейнаго континуума, при чемъ этотъ послѣдній мы будемъ представлять себѣ прямолинейнымъ; каждый элементъ области есть *точка.*

Если система точекъ x составляетъ область P, мы будемъ пользоваться обозначеніемъ $\{x\} = \mathrm{P}$.



Если отъ точки x въ обѣ стороны по прямой мы отложимъ отрѣзки, равные r, то область точекъ, входящихъ въ составъ всего отрѣзка AB, мы будемъ называть *окрестностью r точки x.*

Если двѣ области P_1 и P_2 *не имѣютъ общихъ точекъ*, то область P, составленная изъ всѣхъ точекъ, входящихъ въ P_1 и P_2, мы, придерживаясь перваго обозначенія [1]) *Cantor'a*, будемъ называть ихъ *суммой* и полагать

(1) $$\mathrm{P}_1 \dotplus \mathrm{P}_2 = \mathrm{P}.$$

Если въ составъ P_1 и P_2 будутъ входить также и общія точки, то совокупность P всевозможныхъ *различныхъ* точекъ, входящихъ въ P_1 и P_2, будемъ называть ихъ *наименьшимъ кратнымъ* и обозначать

(2) $$\mathfrak{M}\,(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2) = \mathrm{P}.$$

Если намъ придется опредѣлять всевозможныя различныя точки, входящія въ безконечный рядъ областей

(3) $$\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3, \ldots.\ \mathrm{P}_n, \ldots.,$$

мы будемъ употреблять обозначеніе

$$\mathop{\mathfrak{M}}_{1}^{\infty}\,(\mathrm{P}_i) = \mathrm{P}.$$

Если точки P входятъ цѣликомъ въ составъ Q, то P называется *дѣлителемъ* Q, и этотъ фактъ *Cantor* обозначаетъ

(4) $$\mathrm{P} = \mathfrak{D}\,(\mathrm{Q}).$$

Если мы желаемъ обозначить область общихъ точекъ, входящихъ во всѣ области ряда (3), мы пишемъ

$$\mathop{\mathfrak{D}}_{1}^{\infty}\,(\mathrm{P}_i) = \mathrm{P}.$$

Область точекъ, общихъ двумъ областямъ P и Q, обозначается $\mathfrak{D}\,(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$. Область R точекъ Q, не входящихъ въ составъ ея части P, называется *разностью* Q и P

$$\mathrm{R} = \mathrm{Q} - \mathrm{P}.$$

---

[1]) A. M. 2, p. 372.

Если случайно въ составѣ области P не окажется ни единой точки, мы будемъ писать $P = 0$.

Этими обозначеніями *Cantor'a* мы пользуемся постоянно; другія обозначенія были еще предложены *Dedekind'омъ* [1]), но они не укоренились въ наукѣ благодаря ихъ искусственности.

59. Если область P, расположенная на нѣкоторомъ участкѣ L, не обнимаетъ всѣхъ его точекъ, то совокупность тѣхъ точекъ L, которыя не входятъ въ составъ P, составляетъ область Π, *дополнительную* для P по отношенію къ L. Основную область и ея дополнительную мы всегда будемъ обозначать одинаковыми большими латинской и греческой буквами. Такъ какъ P и Π, не имѣя общихъ точекъ, дополняютъ другъ друга до L, то, согласно (1),

$$P + \Pi = L. \tag{5}$$

60. Если P включаетъ въ себѣ не всѣ точки L, и x_0—одна изъ точекъ L, то для нея имѣетъ мѣсто одно изъ трехъ исключающихъ другъ друга предположеній:

a. Возможно найти для x_0 такую достаточно малую окрестность r, что *всѣ* ея точки будутъ входить въ составъ P; точка x_0, удовлетворяющая этому условію, называется *внутренней* точкой P.

b. Возможно опредѣлить окрестность r такъ, что *всѣ* ея точки, слѣдовательно—въ томъ числѣ и x_0, будутъ точками Π; тогда x_0 будетъ *внѣшней* точкей P.

c. Возможно наконецъ, что, какъ бы мало ни было r, всякая окрестность r точки x_0 заключаетъ въ себѣ какъ точки P, такъ и точки Π; тогда точка x_0, обладающая этимъ свойствомъ, называется *пограничной* точкой области P.

Пограничной точкой x_0 будетъ и въ томъ случаѣ, когда всѣ точки окрестности, кромѣ x_0, принадлежитъ P, тогда какъ сама x_0 входитъ въ составъ Π, или наоборотъ.

Совокупность C всѣхъ пограничныхъ точекъ области P мы будемъ называть *контуромъ* области, заимствуя это понятіе изъ плоской геометріи. Точки контура C могутъ входить какъ въ составъ P, такъ и въ составъ Π, могутъ также принадлежать частью P, частью Π; въ первомъ случаѣ или во второмъ, т. е. когда

$$C = D(P), \quad \text{или} \quad C = D(\Pi),$$

область Π, или P, называется *открытой*, а другая—*замкнутой*.

Итакъ *замкнутая область заключаетъ* въ себѣ *всѣ пограничныя точки* [2]).

---

[1]) Was sind und was sollen die Zahlen, § 1, 1887.

[2]) Peano, Applicazioni geometriche, p. 164.

61. Для опредѣленія положенія точки x на прямой, мы можемъ выбрать на ней произвольно начало координатъ, отъ котораго и будемъ мѣрить разстоянія точекъ; начало будемъ предпологать выбраннымъ такъ, что разстоянія изслѣдуемыхъ точекъ отъ начала счета всегда положительны или, въ крайнемъ случаѣ, они равны нолю.

Подъ x мы будемъ понимать впередъ или опредѣленную точку прямой, или разстояніе этой точки отъ начала счета; иными словами— будемъ считать x заданнымъ геометрически или аналитически; очевидно, такая двоякая точка зрѣнія не можетъ дать повода ни къ какому недоразумѣнію.

Если координаты x точекъ области P удовлетворяютъ условію

$$a < x < A,$$

гдѣ a и A—конечныя положительныя числа, область называется *ограниченной* (borné). Для такой области мы можемъ опредѣлить [1]) *нижнюю и верхнюю границу* значеній x

$$\mathrm{uGr}\, x = a_0, \qquad \mathrm{oGr}\, x = A_0.$$

Введеніе такого обозначенія для верхней и нижней границы является весьма желательнымъ, и оно предложено было нами [2]) еще въ 1898 г. Согласно принятому условію, a_0 можетъ быть положительно или равно 0.

Если мы возьмемъ участокъ (a_0, A_0). то внутри его находятся точки P, онѣ могутъ также совпадать съ его границами, но внѣ (a_0, A_0) точекъ P навѣрное нѣтъ. Такой участокъ мы будемъ называть *основнымъ интерваломъ*, и его-то именно будемъ впередъ обозначать черезъ L.

Очевидно, что a_0 и A_0, согласно ихъ опредѣленію, принадлежатъ къ числу точекъ контура.

62. До сихъ поръ мы разсматривали точки x области P по отношенію къ точкамъ занимаемаго ими участка или, въ болѣе тѣсномъ смыслѣ, основного интервала. Теперь мы перейдемъ къ *взаимному расположенію* точекъ P, не принимая въ разсчетъ ихъ соотношеніе съ точками П.

Пусть x_0—одна изъ точекъ области P. Если мы возьмемъ для нея нѣкоторую окрестность, то въ этой окрестности

a) можетъ не быть ни одной точки P;

b) можетъ быть ихъ конечное число;

c) можетъ быть безконечно много точекъ P;

d) всѣ точки окажутся точками P.

---

[1]) Bolzano, Rein analytischer Beweis, § 12.

[2]) Дневникъ X съѣзда естествоиспытателей и врачей, стр. 427.

Очевидно, что второй случай сводится на первый, такъ какъ, взявъ r_0 меньшимъ наименьшаго изъ разстояній отъ x_0 до всѣхъ точекъ внутри окрестности r, мы получимъ окрестность r_0, удовлетворяющую условію а); такимъ образомъ мы можемъ имѣть здѣсь дѣло только съ тремя возможностями.

Въ первомъ случаѣ точка x_0 носитъ названіе *уединенной* точки области Р; слѣдовательно—для такой точки всегда возможно построить окрестность съ конечнымъ r, *свободную* отъ другихъ точекъ Р, кромѣ x_0.

Очевидно. что каждая уединенная точка есть точка контура, такъ какъ въ произвольной ея окрестности находятся всегда точки Р и П, именно x_0—точка Р и всѣ остальныя кромѣ нея—точки П.

Въ третьемъ случаѣ с), если, какъ бы мало ни было r, въ окрестности x_0 всегда найдутся другія точки Р, x_0 называется *предѣльной точкой* области Р. Такъ какъ въ произвольной такой окрестности могутъ быть вмѣстѣ съ тѣмъ и точки П, то въ этомъ послѣднемъ случаѣ x_0 будетъ также предѣльной точкой и для области П. Общая предѣльная точка Р и П должна принадлежать контуру Р.

Въ послѣднемъ случаѣ d) точка x_0 будетъ также *предѣльной*, но при этомъ она будетъ внутренней точкой Р.

Такимъ образомъ всѣ точки области, что касается ихъ взаимнаго расположенія, будутъ или предѣльными, или уединенными точками.

Всѣ внутреннія точки области Р будутъ eo ipso ея предѣльными точками; точки же контура могутъ входить или въ ту, или въ другую категорію, т. е. быть или предѣльными, или уединенными точками Р.

Если въ произвольной окрестности точки x_0 точки Р располагаются всегда только по одну сторону x_0, точка x_0 будетъ называться *односторонней* предѣльной точкой; въ противномъ случаѣ она будетъ *двусторонней*.

63. Если всѣ точки области Р будутъ ея предѣльными точками, Р называется *сгущенной* областью (in sich dicht).

Если напротивъ того въ ея составъ входятъ только уединенныя точки, область называется *уединенной*. Но отсюда не слѣдуетъ, что, если область—уединенная, то для нея нѣтъ предѣльныхъ точекъ; эти точки, вообще говоря, существуютъ, но онѣ только не входятъ въ составъ области.

Если въ составъ области входятъ какъ уединенныя, такъ и предѣльныя точки, но при этомъ такъ, что нельзя выдѣлить изъ Р ни одной части, которая состояла бы исключительно изъ предѣльныхъ точекъ, такая область носитъ названіе *раздѣльной* (separirt); въ этой области предѣльныя и уединенныя точки находятся такъ сказать въ органической связи другъ съ другомъ.

Называя P_i совокупность уединенныхъ точекъ въ составѣ P и P_g — совокупность предѣльныхъ точекъ, мы будемъ имѣть

$$P = P_i + P_g\,.$$

Замѣтимъ при этомъ, что разсматривая P_g какъ самостоятельную область, мы ни коимъ образомъ не можемъ утверждать, что она будетъ сгущенной; дѣйствительно: x_0, входящая въ P_g, можетъ служить предѣльной точкой для точекъ x, вошедшихъ въ P_i.

Для уединенной области

$$P_g = 0, \text{ и слѣдовательно } P = P_i\,,$$

и для сгущенной

$$P_i = 0, \text{ и слѣдовательно } P = P_g\,.$$

64. На основаніи извѣстной теоремы *Weierstrass'a*—для каждой области, состоящей изъ безконечнаго числа точекъ, имѣется по крайней мѣрѣ одна предѣльная точка.

Совокупность всѣхъ предѣльныхъ точекъ для области P составляетъ новую область P', которая—по *Cantor'y*—называется *первой производной*.

Область предѣльныхъ точекъ для точекъ P' будетъ второй производной отъ P; она обозначается P''; и т. д.; вообще мы будемъ имѣть $P^{(n)}$. Нахожденіе послѣдовательныхъ производныхъ $P^{(n)}$ возможно до тѣхъ поръ, пока въ составѣ каждой изъ областей $P^{(n-1)}$ находится безконечно много точекъ.

Въ зависимости отъ того, будетъ ли каждая изъ $P^{(n)}$ состоять изъ безконечнаго числа точекъ или—напротивъ того—окажется одна изъ $P^{(n)}$, которая заключаетъ ихъ только конечное число, области распредѣляются на два рода: послѣднія называются *областями перваго рода* и первыя—*областями второго рода.*

Если для области перваго рода $P^{(n+1)} = 0$, то область причисляется къ *n'ому виду.*

Если каждая $P^{(n)}$ состоитъ изъ безконечно большого числа точекъ, то существуютъ точки, *входящія во всѣ* $P^{(n)}$; область такихъ точекъ будетъ

$$P^{(\omega)} = \mathop{D}_{1}^{\omega} \{P^{(i)}\}\,.$$

Если $P^{(\omega)}$ не состоитъ изъ конечнаго числа точекъ, возможны области

$$P^{(\omega+1)}, P^{(\omega+2)}, \ldots, P^{(\alpha)}, \ldots;$$

если, какъ бы далеко не продолжался процессъ, всегда возможно найти область

$$P^{(\Omega)} = \overset{\Omega}{\underset{1}{D}} \{P^{(i)}\}$$

точекъ, входящихъ во всѣ $P^{(\alpha)}$. гдѣ α любое изъ чиселъ 1-го или 2-го класса, то эта область $P^{(\Omega)}$ будетъ *сгущенной и замкнутой.*

65. Пользуясь понятіемъ о первой производной области P', мы можемъ измѣнить опредѣленія 60^c, введенныя *Peano*, взявъ ихъ въ формѣ *Jordan'a* [1]), формѣ немного болѣе сложной по внѣшности, но иногда болѣе удобной.

Пусть ξ—точка контура C. Если она уединенная точка P, то она входитъ въ P и въ Π'; если она предѣльная и принадлежитъ составу P, то она будетъ входить въ P и въ Π'; если она предѣльная, но въ P не входитъ, то она должна принадлежать Π и P'. Такимъ образомъ ξ должна принадлежать всегда одной изъ областей P или Π и производной другой области.

Съ другой стороны внутреннія точки P входятъ только въ P', и внѣшнія—только въ Π'.

Такимъ образомъ различіе между точками трехъ категорій можетъ быть выражено такъ:

a) *внутренними* точками области P называются тѣ точки, которыя входятъ въ P и не входятъ въ Π'.

b) *внѣшними*—тѣ, которыя принадлежатъ Π и не принадлежатъ P'.

c) *пограничными*, которыя принадлежатъ одновременно P и Π' или Π и P'.

Очевидно, что оба опредѣленія *Peano* и *Jordan'a* совершенно совпадаютъ по сущности, и мы будемъ пользоваться тѣмъ изъ нихъ, какимъ въ данномъ случаѣ будетъ выгоднѣе.

Пользуясь опредѣленіемъ *Jordan'a*, легко доказать, что для всякой области, если она не обнимаетъ всего континуума, существуютъ пограничныя точки; иными словами—*всякая область имѣетъ контуръ.*

66. Переходимъ далѣе къ классификаціи областей по ихъ составу.

A. Простѣйшія области будутъ тѣ, у которыхъ всѣ точки уединены. Для такой области P всѣ предѣльныя точки не входятъ въ составъ P, такъ что P и P' не имѣютъ общихъ элементовъ, т. е.

$$D(P, P') \equiv 0, \tag{6}$$

хотя при этомъ, вообще говоря, $P' \not\equiv 0$.

---

[1]) Cours d' Analyse, deux. éd., t. I, p. 20.

Равенство (6) служитъ опредѣленіемъ *уединенной* области.

B. Если всѣ точки P — предѣльныя, но вмѣстѣ съ тѣмъ существуютъ еще предѣльныя точки, не вошедшія въ составъ P, область называется *сгущенной*. Для нея P входитъ какъ составная часть въ P′, но не совпадаетъ съ P′, такъ что

$$P = D(P'),$$

или

$$D(P, P') = P.$$

C. Если всѣ точки P — предѣльныя и кромѣ нихъ для P нѣтъ другихъ предѣльныхъ точекъ, такъ что всякая предѣльная точка входитъ въ P, то область P называется *совершенной*; для нея P′ вполнѣ совпадаетъ съ P

$$P = P'.$$

D. Пусть далѣе въ составъ P входятъ уединенныя точки и вмѣстѣ съ тѣмъ *всѣ* предѣльныя точки P; тогда весь контуръ P принадлежитъ P, и — слѣдовательно — эта область будетъ *замкнутой*. Для нея P′ цѣликомъ входитъ въ составъ P, такъ что

$$P = P_i + P', \quad P' = D(P)$$

или

$$D(P, P') = P'.$$

Мы видимъ, что опредѣленіе замкнутой области 60° оказывается тожественнымъ съ обычнымъ опредѣленіемъ *Cantor'a*.

E. Мы получимъ наконецъ *область* P *общаго вида*, если въ составъ ея входятъ и уединенныя точки, и предѣльныя, но не въ полномъ своемъ составѣ

Согласно съ 63° для нея мы имѣемъ

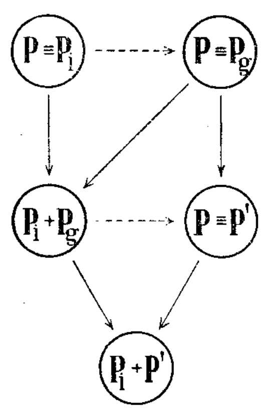
$$P = P_i + P_g$$

или

$$P = P_i + D(P'),$$

гдѣ D (P′) обозначаетъ нѣкоторую составную часть P′.

Взаимоотношеніе всѣхъ приведенныхъ выше категорій областей мы можемъ представить слѣдующей схемой:



Здѣсь направленія стрѣлокъ показываютъ добавленіе точекъ, переводящее области изъ одной категоріи въ другую: добавленіе къ P_i нѣкоторыхъ, но не всѣхъ предѣльныхъ точекъ даетъ область общаго вида $P_i + P_g$; дальнѣйшее добавленіе всѣхъ остальныхъ предѣльныхъ точекъ переведетъ $P_i + P_g$ въ категорію замкнутыхъ областей $P_i + P'$. Добавленіе къ P_g остальныхъ предѣльныхъ точекъ, при отсутствіи уединенчыхъ точекъ, превращаетъ P_g въ совершенную область P'; добавленіе къ P' уединенныхъ точекъ, не допускающихъ иныхъ предѣловъ, кромѣ точекъ P', даетъ $P_i + P'$. Точно также добавленіе къ P_g сначала уединенныхъ, а затѣмъ остальныхъ предѣльныхъ точекъ переведетъ P_g въ $P_i + P_g$ и затѣмъ въ $P_i + P'$. Таковы будутъ чаще всего встрѣчающіяся преобразованія областей; онѣ обозначены на чертежѣ сплошными стрѣлками. Кромѣ нихъ изъ P_i иногда возможно получить P_g и изъ $P_i + P_g$ P'; эти случайныя превращенія указаны пунктирными стрѣлками.

67. Приведемъ далѣе рядъ слѣдствій изъ опредѣленій 66°.

A. Изъ всякой области P получается замкнутая область, если взять $\mathfrak{M}(P, P')$.

B. Производная область P' всегда замкнута

$$P'' = D(P').$$

Отсюда далѣе слѣдуетъ, что

C. Всякая производная $P^{(n)}$ состоитъ изъ точеекъ P'

$$P^{(n)} = D(P').$$

D. Производная суммы двухъ областей P_1 и P_2 есть наименьшее кратное ихъ производныхъ.

Пусть

$$P = P_1 + P_2.$$

Предѣльныя точки области P могутъ быть разбиты на 3 категоріи

$$P' = Q_1 + Q_2 + Q_{12},$$

при чемъ Q_1 и Q_2—тѣ предѣльныя точки P, въ произвольныхъ окрестностяхъ которыхъ лежатъ только точки P_1, или только точки P_2; тѣ же точки, въ произвольныхъ окрестностяхъ которыхъ лежатъ какъ точки P_1, такъ и точки P_2, отнесены въ составъ Q_{12}.

Тогда

$$P_1' = Q_1 + Q_{12}, \quad P_2' = Q_2 + Q_{12};$$

отсюда [1])

$$M(P_1', P_2') = Q_1 + Q_2 + Q_{12} = P'.$$

---

[1]) Ср *Schoenflies*, Bericht, S. 61-62.

Аналогично можно доказать, что

E. Производная суммы конечнаго числа областей безъ общихъ точекъ есть наименьшее кратное ихъ производныхъ

$$\left\{ \sum_{1}^{n} \mathrm{P}_{\nu} \right\}' = \mathop{\mathrm{M}}_{1}^{n} \left\{ \mathrm{P}'_{\nu} \right\}.$$

Очевидно, что, если число областей P_{ν} будетъ безконечно велико, теорема потеряетъ свою силу; тогда можно будетъ только утверждать, что

F. Для безконечнаго ряда областей

$$\mathop{\mathrm{M}}_{1}^{\infty} \left\{ \mathrm{P}'_{\nu} \right\} = \mathrm{D} \left\{ \sum_{1}^{\infty} \mathrm{P}_{\nu} \right\}'.$$

Дѣйствительно: кромѣ предѣльныхъ точекъ, входящихъ въ составъ P'_{ν}, могутъ еще появиться такія точки, въ каждой окрестности которыхъ лежитъ только конечное число точекъ каждой изъ областей P_{ν}.

G. Для сгущенной области P ея производная P′ совершенна.

H. Сгущенная и замкнутая область будетъ совершенной.

Теоремы A, B, C принадлежатъ *Cantor'y*, G—*Cantor'y* и *Bendixson'y* одновременно; теоремы D, E, F неявно заключаются у *Cantor'a* и приведены впервые у *Schoenflies'a*.

68. Имѣя конечную или безконечную группу точно различаемыхъ предметовъ и отвлекаясь отъ ихъ индивидуальныхъ свойствъ и порядка, мы получимъ нѣкоторое понятіе, которое *Cantor* называетъ *размѣромъ* (Mächtigkeit) группы; для конечной группы это будетъ—*число* предметовъ.

Если между двумя группами возможно установить взаимно-однозначное соотвѣтствіе предметовъ, группы *имѣютъ одинъ размѣръ*; такія группы называются *равномѣрными*.

Простѣйшіе размѣры, съ которыми приходится имѣть дѣло, это *размѣръ ряда натуральныхъ чиселъ и размѣръ непрерывности*.

Если возможно установить взаимно-однозначное соотвѣтствіе съ рядомъ натуральныхъ чиселъ, иными словами—*перенумеровать* точки области, т. е. приписать каждой опредѣленное число изъ ряда цѣлыхъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots,$$

то область называется *счетной* (abzählbar); если такое перечисленіе не возможно, она будетъ *несчетной*; такъ какъ въ дальнѣйшемъ мы будемъ имѣть дѣло только съ размѣромъ непрерывности, то несчетность всегда надо понимать именно въ этомъ смыслѣ.

Извѣстно далѣе, что счетный рядъ счетныхъ рядовъ тоже будетъ счетнымъ рядомъ.

Примѣняя эти понятія къ областямъ, мы имѣемъ рядъ теоремъ:

A. Уединенная область всегда счетна.

B. Совершенная область всегда имѣетъ размѣръ непрерывности.

C. Области общаго вида, замкнутыя и сгущенныя могутъ быть какъ счетны, такъ и не счетны.

D. Если P' счетна, то и P счетна.

E. Если P' несчетна, то P можетъ быть счетна или несчетна.

F. Если P' несчетна, то

$$P' = R + S,$$

гдѣ R счетна, а S совершенна.

69. Пусть интервалъ l раздѣленъ на частные интервалы, и число точекъ дѣленія возрастаетъ безконечно.

Возникаетъ вопросъ, будетъ ли число этихъ интерваловъ, не захватывающихъ другъ друга и заполняющихъ весь интервалъ, счетно, т. е. можно-ли приписать каждому нѣкоторый опредѣленный номеръ?

Чтобы выяснить этотъ вопросъ, возьмемъ нѣкоторое достаточно малое число ε и образуемъ рядъ

$$\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \ldots\ldots, \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}, \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots\ldots; \tag{7}$$

выберемъ изъ области интерваловъ тѣ интервалы, длина которыхъ превышаетъ ε; такъ какъ ε—конечное число, и длина всего интервала l также конечна, интерваловъ, превышающихъ по длинѣ ε, можетъ быть только ограниченное число m. Назовемъ ихъ, по порядку ихъ величинъ,

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots, \lambda_m \quad \text{при} \quad \lambda_i > \varepsilon. \tag{8}$$

Выберемъ далѣе тѣ интервалы, длина которыхъ $\overline{\overline{<}}\,\varepsilon$, но $> \frac{\varepsilon}{2}$; число ихъ также должно быть ограниченно

$$\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \ldots\ldots, \lambda_{m_1}' \quad \text{при} \quad \varepsilon \overline{\overline{>}} \lambda_i' > \frac{\varepsilon}{2}; \tag{9}$$

и т. д., возьмемъ тѣ интервалы, длина которыхъ $\overline{\overline{<}}\,\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$, но $> \frac{\varepsilon}{2^n}$, назвавъ ихъ

$$(10) \qquad \lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}, \ldots\ldots, \lambda_{m_n}^{(n)} \quad \text{при} \quad \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \overline{>} \lambda_i^{(n)} > \frac{\varepsilon}{2^n};$$

число ихъ опять таки должно быть конечно, такъ какъ $\frac{\varepsilon}{2^n}$ при всякомъ конечномъ n есть величина конечная. Мы распредѣлимъ такимъ образомъ всѣ интервалы данной области интерваловъ въ счетный рядъ рядовъ (8), (9), ... ,(10), ... , въ каждомъ изъ которыхъ будетъ ограниченное число интерваловъ. Очевидно—для каждаго интервала области, какъ бы онъ малъ ни былъ, лишь бы онъ только не былъ равенъ 0, можно найти два значенія ν, т. е. два значенія $\frac{\varepsilon}{2^{\nu-1}}$ и $\frac{\varepsilon}{2^\nu}$ въ ряду (7), между которыми онъ по величинѣ находится; слѣдовательно—*каждый* интервалъ войдетъ въ одну изъ группъ (10). Такимъ образомъ всѣ интервалы области размѣстятся въ счетный рядъ группъ изъ конечнаго числа членовъ каждая; а въ такомъ случаѣ данная область интерваловъ будетъ счетна; поэтому впередъ вмѣсто „области интерваловъ“ будемъ впередъ употреблять терминъ *рядъ интерваловъ*.

Это теорема капитальной важности; наши дальнѣйшія разсужденія на каждомъ шагу будутъ на нее опираться. Изъ этой теоремы непосредственно слѣдуетъ, что

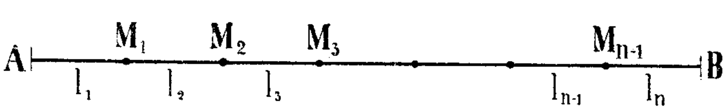
A. „Область одностороннихъ предѣльныхъ точекъ всегда счетна или конечна“, такъ какъ она равномѣрна съ рядомъ интерваловъ; а отсюда вытекаетъ, что

B. „Всякая несчетная область заключаетъ въ своемъ составѣ двухстороннія предѣльныя точки“.

70. Предпославъ всѣ эти предварительныя свѣдѣнія, мы, прежде чѣмъ перейти къ изученію *строенія* различныхъ видовъ областей, должны установить еще нѣкоторые факты.

Для этой цѣли мы займемся прежде всего выясненіемъ размѣщенія интерваловъ на нѣкоторомъ линейномъ участкѣ.

Пусть конечный отрѣзокъ A B дѣлится $n-1$ точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на конечное число отрѣзковъ $l_1, l_2, \ldots, l_n$. При этомъ вся совокупность точекъ линейнаго участка L, опредѣляемаго отрѣзкомъ A B, распадается на двѣ области: G—область *внутреннихъ* точекъ участковъ l_i и Q—область *границъ* этихъ участковъ.



Основнымъ интерваломъ для области G будетъ участокъ A B, причемъ точки A и B могутъ быть или включены въ составъ области G или могутъ къ ней не относиться; основнымъ интерваломъ области Q будетъ или L, если A и B входятъ въ эту область, или $M_1\,M_{n-1}$—въ противномъ случаѣ.

Каждая изъ составныхъ частей области G является открытымъ участкомъ; если бы мы пожелали одни этихъ участковъ сдѣлать закрытыми, т. е. включить одну изъ точекъ M_i въ составъ нпр. l_i, то два интервала l_i и l_{i+1} совпали бы въ одинъ и—слѣдовательно—число интерваловъ сократилось бы на единицу.

Очевидно—область Q будетъ уединенная; предѣльныхъ точекъ для нея не существуетъ, такъ какъ число ея точекъ конечно; область же G будетъ часто разсѣянная и сгущенная, но не замкнутая.

71. Если число отрѣзковъ, на которые распадается интервалъ AB, безконечно велико, то оно—на основаніи 69°—должно быть счетно; такимъ образомъ мы всегда будемъ имѣть *или конечное, или счетное число точекъ дѣленія.*

Здѣсь участокъ L, опредѣляемый отрѣзкомъ AB, снова распадается на области: G—внутреннихъ точекъ счетнаго ряда участковъ $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ и Q—область границъ этихъ участковъ; спрашивается теперь, не будетъ ли еще какой либо новой категоріи точекъ?

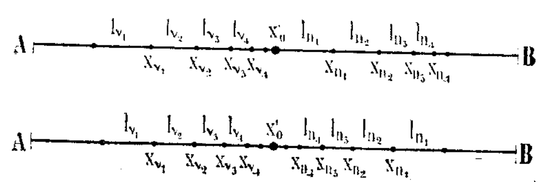
Такъ какъ область $Q = \{x\}$ состоитъ изъ безконечнаго числа точекъ, для нея должны существовать—на основаніи 64°—предѣльныя точки, которыя мы назовемъ $\{x'\}$; въ зависимости отъ избраннаго закона дѣленія, число этихъ точекъ x' можетъ мѣняться отъ одной до безконечнаго множества.

Пусть x'_0—одна изъ предѣльныхъ точекъ, и пусть

$$x_{\nu_1},\ x_{\nu_2},\ x_{\nu_3}, \ldots, x_{\nu_n}, \ldots \qquad (11)$$

—опредѣляющій ее рядъ границъ.

Такъ какъ въ произвольно малой окрестности x'_0 находится безконечно много точекъ (11), то въ этой окрестности должно находиться и безконечно много соотвѣтствующихъ интерваловъ l_{ν_i}; а разъ это такъ, интервалы l_{ν_i} должны убывать безконечно въ окрестности точки x'_0, и мы не будемъ имѣть возможности указать, въ



направленіи этихъ убывающихъ интерваловъ, участка, для котораго x'_0 служила бы границей, въ данномъ случаѣ—правой, и внутри котораго не было бы больше точекъ Q; самое большее—если такой участокъ окажется по другую сторону x'_0, т. е. она будетъ лѣвой границей нѣкотораго интервала, не входящаго въ составъ интерваловъ $\{l_{\nu_i}\}$.

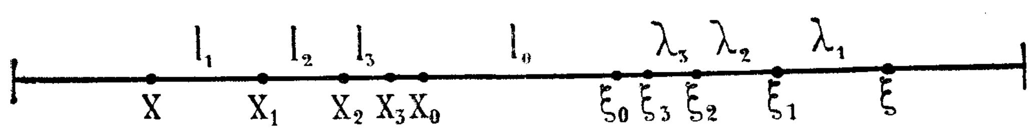
Такимъ образомъ, если точка x'_0 и является границей нѣкотораго интервала l_{n_1}, то для l_{n_1} *не существуетъ смежнаго интервала* въ направленіи интерваловъ $\{l_{\nu_i}\}$. Если же точка x'_0 оказывается двухстороннимъ предѣломъ, то мы будемъ имѣть два ряда смежныхъ интерваловъ $\{l_{\nu_i}\}$ и $\{l_{n_i}\}$, которые будутъ несмежны одинъ по отношеніи къ другому; иными словами—нѣтъ *послѣдняго* интервала перваго ряда непосредственно примыкающаго къ *первому* интервалу второго. Общая предѣльная точка двухъ рядовъ интерваловъ не будетъ такимъ образомъ границей ни одного интервала, и она не лежитъ внутри ни одного изъ нихъ; слѣдовательно—двѣ предыдущія категоріи точекъ, въ случаѣ существованія двухстороннихъ предѣловъ, не обнимаютъ собой всевозможныхъ точекъ участка L. Эти новыя точки будутъ *внѣшними* точками указанныхъ интерваловъ.

Мы привели выше одинъ случай, когда появляются *внѣшнія* точки; но это случай, какъ увидимъ ниже, не единственный; для насъ важно теперь только установить возможность появленія внѣшнихъ точекъ.

Затѣмъ для насъ важнымъ является тотъ фактъ, что существованіе каждой предѣльной точки, односторонней или двухсторонней, вызываетъ eo ipso появленіе *несмежныхъ* интерваловъ.

Поэтому рядъ *всѣхъ* смежныхъ интерваловъ возможенъ только при дѣленіи l на конечное число частей [1]).

Замѣтимъ еще, что, если для интервала l_0 нѣтъ смежнаго интервала *по обѣ стороны*, такъ что обѣ границы его x_0 и ξ_0 служатъ пре-



дѣлами для двухъ рядовъ точекъ $\{x_i\}$ и $\{\xi_i\}$

$$lim\, x_i = x_0, \qquad lim\, \xi_i = \xi_0,$$

то такой интервалъ мы будемъ называть *уединеннымъ*.

---

[1]) Такимъ образомъ утвержденіе Schoenflies'а въ теоремѣ VI S. 78 является несправедливымъ, и формулировка относящихся сюда теоремъ неточной.

2. Рѣдко разсѣянныя области.

72. Будемъ по какому нибудь закону дѣлить основной интервалъ послѣдовательно на все меньшія и меньшія части. Если при произвольномъ законѣ и при произвольно продолжающемся процессѣ дѣленія въ каждомъ частномъ интервалѣ имѣются точки данной области P, эта область называется *часто разсѣянной по интервалу* (überall dicht); для такой области, какая бы малая часть ни была взята на основномъ интервалѣ, на ней всегда находятся точки P.

Если напротивъ того во всякой произвольной части основного интервала можетъ быть найденъ частный интервалъ конечнаго протяженія, свободный отъ точекъ области, она носитъ названіе области *рѣдко разсѣянной* (niergends dicht).

Согласно опредѣленію принятому выше—„производная часто разсѣянной области совпадаетъ съ основнымъ интерваломъ“.

Это послѣднее свойство можетъ быть принято, какъ указалъ еще *Cantor*, за опредѣленіе часто разсѣянной области, и тогда первое ея опредѣленіе сдѣлается слѣдствіемъ. Такимъ образомъ оба опредѣленія оказывается равносильными, и мы будемъ пользоваться тѣмъ или другимъ опредѣленіемъ въ зависимости отъ удобства.

73. Пусть P—рѣдко разсѣянная область, относительно которой нѣтъ больше никакихъ дальнѣйшихъ свѣдѣній. Спрашивается, что про нее тогда можно сказать? иными словами—какими свойствами обладаютъ *всѣ* рѣдко разсѣянныя области?

Разъ область P рѣдко разсѣяна, въ произвольной части участка $(x_{\overline{0}}, x_0)$ можетъ быть указанъ интервалъ, свободный отъ точекъ P; будемъ увеличивать этотъ интервалъ вправо до тѣхъ поръ, пока границей интервала не сдѣлается или точка P, или точка P′; назовемъ такую точку x_1; влѣво также увеличиваемъ интервалъ до точки $x_{\overline{1}}$, которая будетъ опять входить или въ P, или въ P′; полученный свободный интервалъ назовемъ l_1.

Возьмемъ далѣе части участка $(x_{\overline{0}}, x_{\overline{1}})$ и (x_1, x_0); на каждой изъ нихъ могутъ быть найдены указаннымъ выше путемъ интервалы l_2 и l_3, свободные отъ точекъ P, при чемъ границы ихъ $x_{\overline{2}}$, x_2, $x_{\overline{3}}$, x_3 будутъ точками P или P′; и т. д., будемъ строить такіе интервалы безконечно; число ихъ должно быть непремѣнно счетно, и число интерваловъ, превышающихъ по длинѣ данную малую конечную величину, будетъ конечно, потому что сумма всѣхъ интерваловъ не можетъ превышать l.

Каждая точка, не входящая въ составъ P, будетъ или внутренней точкой одного изъ интерваловъ l_i или одной изъ границъ такого интервала, или—можетъ быть—двухсторонней предѣльной точкой этихъ границъ, т. е. внѣшней точкой всѣхъ интерваловъ.

Поэтому рядъ интерваловъ $\{l_i\}$, распредѣлитъ точки L на три области G, Q и E, изъ которыхъ G—область внутреннихъ точекъ интерваловъ—всегда входитъ цѣликомъ въ составъ П: ни одна ея точка не будетъ точкой P

$$G \equiv D\,(\Pi).$$

Область E—область внѣшнихъ точекъ—цѣликомъ входитъ въ P'; дѣйствительно: точки E служатъ двухсторонними предѣлами границъ свободныхъ интерваловъ, а эти границы будутъ или точками P' или P; слѣдовательно—во всякомъ случаѣ точки E входятъ въ составъ P'

$$E \equiv D\,(P'),$$

но онѣ могутъ быть какъ точками P, такъ и точками П; положимъ, что, въ общемъ случаѣ, E составляется изъ двухъ частей

$$E \equiv E_1 + E_2,$$

изъ которыхъ

$$E_1 \equiv D\,(\Pi), \quad E_2 \equiv D\,(P).$$

Наконецъ область границъ интерваловъ $Q \equiv \{x\}$ можетъ состоять какъ изъ точекъ P, такъ изъ точекъ П; назовемъ также

$$Q_1 \equiv D\,(\Pi), \;\; Q_2 \equiv D\,(P).$$

Въ такомъ самомъ общемъ случаѣ область P составляется изъ части границъ интерваловъ и части внѣшнихъ точекъ

$$P \equiv E_2 + Q_2$$

или, если назвать

$$E + Q \equiv T,$$

то

$$P \equiv D\,(T).$$

Итакъ, если мы не налагаемъ на рѣдко разсѣянную область никакихъ ограниченій, то относительно нея мы можемъ высказать только такую теорему:

Для всякой рѣдко разсѣянной области P *можетъ быть построенъ рядъ интерваловъ, въ составъ границъ и внѣшнихъ точекъ которыхъ входятъ всѣ точки* P.

Такой рядъ интерваловъ опредѣляетъ собой *замкнутую* область $E+Q$; поэтому мы можемъ сказать, что „для всякой данной рѣдко разсѣянной области P можетъ быть построена замкнутая область T, заключающая въ себѣ данную область P какъ часть“.

Очевидно, что въ двухъ такихъ областяхъ всѣ уединенныя точки будутъ однѣ и тѣ-же, такъ что область $T-P$ состоитъ только изъ одно- или двухстороннихъ предѣльныхъ точекъ области P.

74. Мы видѣли выше въ 71°, что, разъ рядъ $\{l_i\}$ не состоитъ изъ конечнаго числа интерваловъ, а это мы—разумѣется—въ дальнѣйшемъ и предполагаемъ, въ его составѣ непремѣнно должны быть несмежные интервалы. Слѣдовательно—относительно ряда $\{l_i\}$ возможно сдѣлать только два предположенія: или въ составѣ $\{l_i\}$ совершенно нѣтъ смежныхъ интерваловъ, или же въ рядѣ $\{l_i\}$ встрѣчаются интервалы обоего рода.

Эти два исключающія другъ друга предположенія даютъ возможность распредѣлить всѣ рѣдко разсѣянныя точечныя области на двѣ категоріи: области, опредѣляемыя рядами $\{l_i\}$ безъ смежныхъ интерваловъ, и областями со смежными интервалами. Съ послѣдними областями мы будемъ еще имѣть дѣло впереди; въ виду ихъ разнообразія, въ настоящую минуту мы не можемъ заняться дальнѣйшимъ ихъ изслѣдованіемъ. Что же касается областей безъ смежныхъ интерваловъ, т. е.—иными словами—областей, опредѣляемыхъ рядомъ уединенныхъ интерваловъ, то онѣ представляются довольно простыми, и объ нихъ-то мы скажемъ два слова теперь.

Такъ какъ рядъ интерваловъ $\{l_i\}$—на основаніи 69°—всегда счетенъ, а области $\{x_{\bar{i}}\}$ и $\{x_i\}$ лѣвыхъ и правыхъ концовъ интерваловъ равномѣрны съ рядомъ интерваловъ, то $\{x_{\bar{i}}\}$ и $\{x_i\}$ будутъ обѣ счетны; а въ такомъ случаѣ *счетна* и область $\{x_{\bar{i}}, x_i\}$.

Такъ какъ въ составѣ $\{l_i\}$ совершенно отсутствуютъ смежные интервалы, и—слѣдовательно—всѣ интервалы l_i будутъ уединенными, то въ произвольной окрестности каждаго ихъ конца имѣется безконечно много границъ другихъ интерваловъ; поэтому каждая изъ этихъ границъ будетъ предѣльной точкой области границъ Q, такъ что эта *область будетъ сгущенной*

$$Q = D(Q'). \tag{12}$$

Каждая изъ внѣшнихъ точекъ E области интерваловъ $\{l_i\}$ будетъ предѣломъ нѣкотораго ряда границъ или предѣломъ ихъ предѣловъ; поэтому каждая изъ точекъ E войдетъ въ составъ Q'

$$E \equiv D\,(Q').$$

Затѣмъ ни одна изъ внутреннихъ точекъ $\{l_i\}$ не можетъ быть предѣльной точкой Q; слѣдовательно Q' можетъ состоять только изъ точекъ Q и E

$$Q' \equiv Q + E;$$

а мы знаемъ, на основаніи G 67°, что—въ силу (12)—область Q, будетъ *совершенной*. Итакъ

„Если для рѣдко разсѣянной области всѣ свободные интервалы несмежны, точки P принадлежатъ составу нѣкоторой совершенной области".

75. Кромѣ того попутно изъ разсужденій предыдущаго параграфа вытекаетъ весьма важная теорема *Cantor'a*:

„Область несмежныхъ интерваловъ опредѣляетъ своими границами и внѣшними точками совершенную область".

Обратно: „для всякой совершенной области можетъ быть построена область несмежныхъ интерваловъ, свободныхъ отъ точекъ области" [1]).

Между рѣдко разсѣянными областями, которыя опредѣляются несмежными интервалами, отмѣтимъ три области, получаемыя въ трехъ частныхъ случаяхъ:

A. Положимъ, что $P \equiv Q + E$, т. е. въ составъ P входятъ всѣ *невнутреннія* точки области интерваловъ; тогда P будетъ совершенной областью, и—слѣдовательно—будетъ *несчетной*.

B. Если $P \equiv Q$, т. е. рѣдко разсѣянная область состоитъ только изъ границъ несмежныхъ интерваловъ, она будетъ счетна и сгущенна.

C. Наконецъ если $P \equiv E$, т. е. P состоитъ только изъ внѣшнихъ точекъ области интерваловъ $\{l_i\}$, P будетъ сгущенной и несчетной; дѣйствительно: если бы $P \equiv E$ была счетна, то, въ силу счетности E, счетной была бы и $Q + E$, что не вѣрно, такъ какъ $Q + E$ совершенна.

3. Основные и производные типы размѣщенія.

76. Мы имѣли уже выше дѣленіе участка L на конечное число частей; теперь придется перейти къ дальнѣйшимъ изслѣдованіямъ, предполагая, что число точекъ дѣленія можетъ быть безконечно.

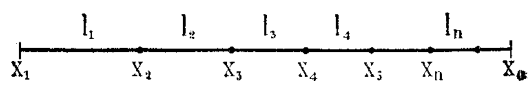
---

[1]) Лучшее доказательство у *Borel'я*, Leçons, p. 49.

Въ виду безконечнаго разнообразія тѣхъ законовъ, по которымъ участокъ L можетъ быть раздѣленъ на конечное или счетное число частей l_i, является интереснымъ выяснить, какіе основные типы дѣленій при этомъ возможны.

Въ ряду этихъ типовъ простѣйшимъ будетъ дѣленіе участка L на конечное число n частей: мы будемъ называть его *размѣщеніемъ интерваловъ типа n.* При такомъ обозначеніи *типъ* 1 обозначаетъ, что участокъ не подвергается никакому дѣленію.

Возьмемъ далѣе участокъ L и отъ одного конца, именно—слѣва, откладываемъ отрѣзокъ l_1; отъ конца x_2 этого отрѣзка отложимъ отрѣзокъ l_2 и т. д., строимъ по какому нибудь опредѣленному закону счетный рядъ отрѣзковъ l_i такимъ образомъ, чтобы они заполняли весь участокъ L



$$l = \sum_{1}^{\infty} l_i,$$

и чтобы—слѣдовательно—граница x_0 участка L была предѣльной точкой ряда $\{x_i\}$

$$x_0 = lim\, x_i\ ;$$

тогда на L мы получаемъ счетную область точекъ $\{x_i\}$—границъ интерваловъ $\{l_i\}$, основнымъ интерваломъ для которой будетъ служить L.

Всѣ точки участка L разобьются на три области: G—область внутреннихъ точекъ интерваловъ $\{l_i\}$, Q—область границъ интерваловъ и E—область, состоящая изъ единственной точки x_0, служащей предѣломъ $\{x_i\}$; это будетъ *внѣшняя* точка области интерваловъ $\{l_i\}$.

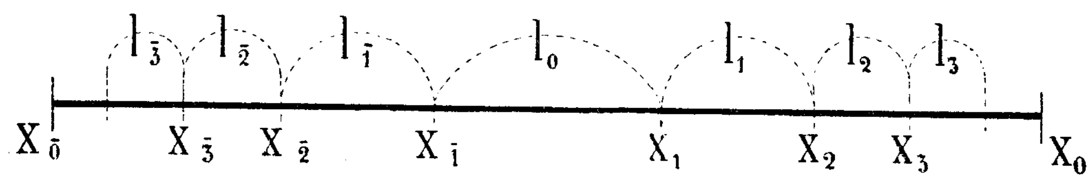
Очевидно, что

$$Q' \equiv \{x_0\} \equiv E\,, \qquad Q'' \equiv 0;$$

$$P' \equiv \{Q + E\}' \equiv E\,,\ P'' \equiv 0.$$

Такое элементарное распредѣленіе частныхъ интерваловъ по данному участку является типичнымъ при построеніи областей, и этотъ простѣйшій *типъ размѣщенія* мы, по аналогіи съ обозначеніемъ *Cantor'a*, будемъ обозначать буквой ω—при томъ расположеніи предѣльной точки, какъ на чертежѣ, *ω—при обратномъ расположеніи, т. е.—когда предѣльной точкой служитъ начало участка.

77. Пусть далѣе на участкѣ L взятъ интервалъ l_0, ни одинъ изъ концовъ котораго $x_{\bar 0}$ и x_0 не совпадаетъ съ концами L; вправо и влѣво отъ l_0 строимъ интервалы $\{l_{\bar i}\}$ и $\{l_i\}$ такимъ образомъ, чтобы



они были смежны и заполняли весь участокъ L, такъ что

$$l = \sum_{1}^{\infty} l_{\bar i} + l_0 + \sum_{1}^{\infty} l_i ,$$

$$\lim x_{\bar i} = x_{\bar 0}, \quad \lim x_i = x_0.$$

При такомъ построеніи интерваловъ $l_{\bar i}$ и l_i мы разбиваемъ точки участка L на три области: G—область внутреннихъ точекъ интерваловъ $l_{\bar i}$ и l_i, Q—область границъ $\{x_{\bar i}, x_i\}$ и E—область, состоящая изъ двухъ точекъ $\{x_{\bar 0}, x_0\}$, служащихъ предѣлами $x_{\bar i}$ и x_i; это будетъ область точекъ *внѣшнихъ* по отношенію къ интерваламъ $l_{\bar i}$ и l_i; области G, Q и E обладаютъ тѣми-же свойствами, какъ и выше.

Очевидно, что

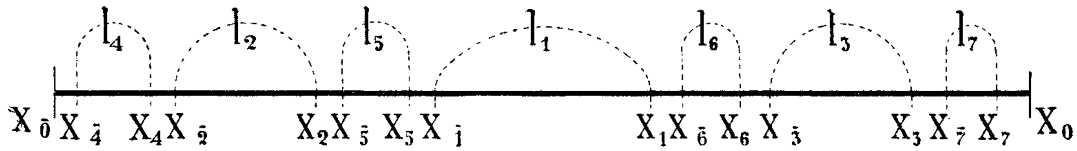
$$Q' \equiv \{x_{\bar 0}, x_0\} \equiv \mathbf{E}, \quad Q'' \equiv 0;$$

$$P' \equiv (Q + E)' \equiv Q', \quad P'' \equiv 0.$$

Такой *типъ размѣщенія* интерваловъ по участку L мы будемъ обозначать $^*\omega + \omega$, такъ какъ онъ представляетъ собой комбинацію двухъ видовъ $^*\omega$ и ω предыдущаго типа.

Ясное дѣло, что, если бы за исходный интервалъ мы взяли не l_0, а какой нибудь другой, то суть дѣла отъ этого не измѣнилась бы: вправо и влѣво отъ него по прежнему находилось бы по счетному ряду интерваловъ, и—слѣдовательно—всѣ разсужденія сохранили бы свою силу.

78. Возьмемъ далѣе на участкѣ L интервалъ l_1 съ границами $x_{\bar 1}$ и x_1, изъ которыхъ ни одна не совпадаетъ съ границами L; на участкахъ $(x_{\bar 0}, x_{\bar 1})$, (x_1, x_0) располагаемъ интервалы l_2 и l_3 опять таки такъ, чтобы ни одна изъ границъ $x_{\bar{2}}$ и x_2 участка l_2 и $x_{\bar{3}}$ и x_3 участка l_3 не совпадала соотвѣтственно съ $x_{\bar{0}}$, $x_{\bar{1}}$, x_1, x_0.



Тотъ же процессъ мы будемъ продолжать и далѣе: на каждой *свободной* части основного интервала мы будемъ помѣщать новые интервалы, только не дѣлая ихъ смежными съ построенными раньше; продолжая такой процессъ безконечно, мы построимъ *область уединенныхъ интерваловъ* и снова разобьемъ точки L на три области: G—область внутреннихъ точекъ интерваловъ l_i, Q—область границъ этихъ интерваловъ и E—область точекъ внѣшнихъ по отношенiи къ нимъ.

Въ двухъ предыдущихъ параграфахъ интервалы l_i выбирались такъ, что они *заполняли* собой участокъ L, т. е ихъ сумма была равна всегда l; что касается настоящаго случая, то здѣсь нельзя установить подобнаго условiя, и мы увидимъ ниже, что, въ зависимости отъ выбора длины интерваловъ l_i, $\sum l_i$ можетъ быть или равна, или меньше длины l основного интервала L.

Какъ мы видѣли въ 74°, области Q и E будутъ сгущенны; изъ нихъ Q—счетна, а E не счетна, и $P = Q + E$ совершенна.

Очевидно, что

$$Q' = Q + E = P, \quad Q'' = P' = P.$$

Понятно, если за исходный интервалъ будетъ взятъ не l_1, а какой бы то ни было другой, все останется по прежнему: вправо и влѣво отъ него по прежнему помѣстилось бы по счетному ряду несмежныхъ интерваловъ; измѣнилась бы только нумерацiя интерваловъ, а эта нумерацiя не существенна для строенiя ряда интерваловъ.

Этотъ типъ расположенiя частныхъ интерваловъ на участкѣ L мы будемъ называть *совершеннымъ типомъ размѣщенiя* или *типомъ* $\tilde{\omega}$.

79. Четыре разобранныхъ нами типа:

a) типъ n—при конечномъ числѣ точекъ,

b) типъ ω или $^*\omega$,

c) типъ $^*\omega + \omega$

d) совершенный типъ $\tilde{\omega}$

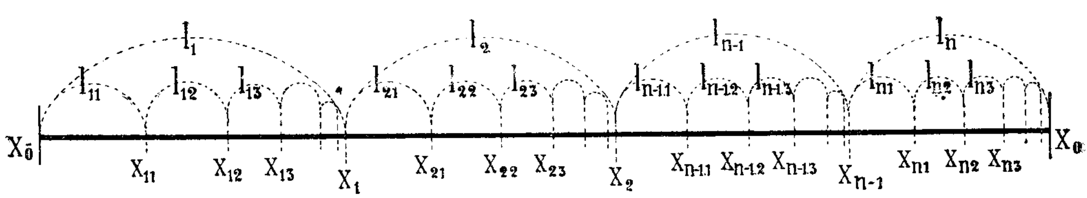
обнимаютъ собой всѣ элементы, на основанiи которыхъ можетъ быть построена любая область, какъ бы она ни была сложна по своему составу; поэтому ихъ мы назовемъ *основными типами размѣщенія* интерваловъ.

Мы разберемъ далѣе другіе важнѣйшіе типы, которые получатся, если мы будемъ примѣнять конечное или безконечное число разъ основные типы размѣщенія и всевозможнымъ образомъ комбинировать ихъ другъ съ другомъ. Замѣтимъ при этомъ, что фактическое размѣщеніе интерваловъ внутри каждаго изъ типовъ можетъ быть безконечно разнообразно, въ зависимости отъ выбраннаго закона ихъ послѣдовательности.

80. Пусть имѣется участокъ L; раздѣлимъ его на конечное число n частей и на каждой изъ нихъ помѣстимъ область типа ω. Обозначимъ $\{x_i\} \equiv Q^{(1)}$—область границъ перваго дѣленія и для второго дѣленія области точекъ, *внутреннихъ* для l_i, назовемъ

$$\{x_{ij}\} \equiv Q_i^{(2)}; \sum_{i=1}^{n} Q_i^{(2)} = Q^{(2)}; Q \equiv Q^{(1)} + Q^{(2)} + \{x_0\};$$

область Q есть область *границъ окончательнаго размѣщенія.*



На каждомъ изъ n участковъ l_i у насъ расположится по счетному ряду интерваловъ l_{ij}, которые въ общей сложности—на основаніи 69°—дадутъ снова счетный рядъ. Каждая предѣльная точка является здѣсь односторонней предѣльной точкой; число такихъ точекъ будетъ конечно и равно n. Каждая предѣльная точка произвольнаго ряда границъ на одномъ изъ интерваловъ l_i, будучи, кромѣ x_0, въ свою очередь границей интервала на l_{i+1}, войдетъ въ область границъ Q, и —слѣдовательно—всѣ точки L раздѣлятся на три области: область границъ Q окончательнаго размѣщенія, область G—внутреннихъ точекъ и наконецъ E—область внѣшнихъ точекъ, которая будетъ состоять изъ одной единственной точки x_0—границы всего участка.

Область Q, всегда счетная, будетъ непремѣнно заключать въ своемъ составѣ всѣ свои предѣльныя точки, кромѣ послѣдней; границы смежныхъ интерваловъ будутъ для нея уединенными точками, и присутствіе уединенныхъ точекъ для Q обязательно. Область

$$Q + E = Q + \{x_0\} = P$$

будетъ счетна и замкнута, и очевидно, что

$$P' = Q^{(1)} + \{x_0\},\ P'' = 0.$$

Взявъ размѣщеніе $^*\omega$, мы получили бы аналогичные результаты.

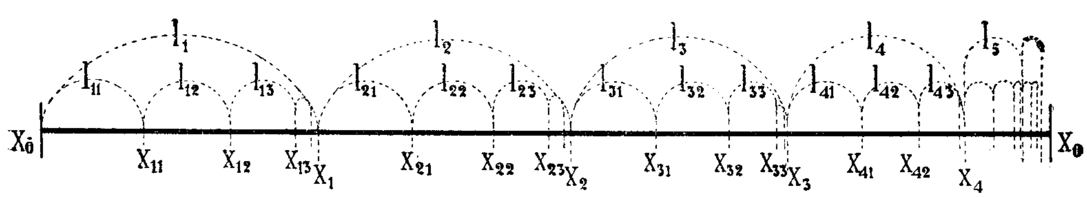
Типъ размѣщенія, полученный отъ комбинированія дѣленія L на n частей съ типомъ ω или $^*\omega$, мы обозначимъ $n\,\omega$ или $n\,^*\omega$, изображая *производный типъ* какъ *произведеніе составляющихъ типовъ.*

Если въ интервалы размѣщенія ω или $^*\omega$ мы помѣстимъ интервалы типа n, т. е.—иными словами—раздѣлимъ каждый интервалъ на n частей по какому нибудь закону, то—очевидно—типъ $\omega\,n$ или $^*\omega\,n$ не будетъ отличаться отъ ω или $^*\omega$; мы должны такимъ образомъ положить

$$\omega\,n = \omega,\ ^*\omega\,n = {}^*\omega.$$

81. Раздѣлимъ теперь участокъ L на интервалы типа ω, и въ каждомъ изъ нихъ помѣстимъ рядъ интерваловъ того же типа; тогда участокъ L разобьется на счетный рядъ счетныхъ рядовъ интерваловъ $\{l_{ij}\}$, которые, вмѣстѣ взятые, составятъ—въ силу 69°—снова счетный рядъ. Обозначимъ точки дѣленія

$$\{x_{\overline{0}}, x_0\} = Q^{(0)},\ \{x_i\} = Q^{(1)},\ \{x_{ij}\} = Q_i^{(2)},\ \sum Q_i^{(2)} = Q^{(2)}.$$



Всѣ точки L разобьются на G—область внутреннихъ точекъ интерваловъ $\{l_{ij}\}$, Q—область ихъ границъ и E—область внѣшнихъ точекъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія.

Область G не представляетъ особаго интереса; область

$$Q = \{x_{\overline{0}}\} + Q^{(1)} + Q^{(2)}$$

состоитъ изъ счетнаго ряда счетныхъ рядовъ точекъ $\{x_{ij}\}$, счетнаго ряда $Q^{(1)}$ и точки x_0. Въ составъ Q входятъ всѣ ея предѣльныя точки, кромѣ одной x_0, такъ какъ всѣ онѣ, кромѣ x_0, являются границами интерваловъ l_{i1}; область E состоитъ такимъ образомъ изъ единственной точки x_0

$$E \equiv \{x_0\}.$$

Если назвать

$$P \equiv Q + E \equiv \{x_0\} + Q^{(1)} + Q^{(2)} + \{x_0\} \equiv \sum_0^2 Q^{(i)},$$

то очевидно, что

$$P' \equiv Q^{(1)} + \{x_0\} \equiv Q', \quad P'' \equiv \{x_0\}, \quad P''' \equiv 0,$$

т. е. P будетъ областью второго вида; она счетна и замкнута. Область Q, которая состоитъ изъ границъ всѣхъ интерваловъ l_{ij}, лежащихъ *внутри* l_i, будетъ *уединенной*.

Такъ какъ при построенiи настоящей области мы примѣнили последовательно два раза размѣщенiе ω, мы можемъ обозначить настоящiй типъ размѣщенiя черезъ ω^2.

82. Точно также мы могли бы получить типы $^*\omega^2$, который не представляетъ никакой особенности въ сравненiи съ ω^2, и типы $\omega\,^*\omega$ и $^*\omega\,\omega$.

Въ размѣщенiи интерваловъ типа $\omega\,^*\omega$ мы возьмемъ область интерваловъ типа ω и въ каждомъ изъ нихъ помѣстимъ область типа $^*\omega$; тогда будетъ

$$Q^{(0)} \equiv \{x_{\bar 0}, x_0\}, \quad Q^{(1)} \equiv \{x_i\}, \quad Q^{(2)} \equiv \{x_{ij}\},$$

$$Q \equiv \{x_i\} + \{x_{ij}\} \equiv Q^{(1)} + Q^{(2)}, \quad E \equiv \{x_{\bar 0}, x_0\} \equiv Q^{(0)},$$

такъ какъ ни $x_{\bar 0}$, ни x_0 не будутъ уже здѣсь границами интерваловъ окончательнаго размѣщенiя: затѣмъ

$$P \equiv Q + E \equiv \sum_0^2 Q^{(i)}, \quad P' \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)} \equiv Q', \quad P'' \equiv \{x_0\}, \quad P''' \equiv 0.$$

Въ типѣ $^*\omega\,\omega$ мы беремъ сначала размѣщенiе $^*\omega$ и въ каждомъ его интервалѣ помѣщаемъ область ω; для этого случая области Q, E и P имѣютъ тотъ-же составъ, какъ и предыдущiя.

Помѣщая далѣе въ интервалахъ типа ω^2 интервалы типа ω, мы получимъ новый типъ ω^3, для котораго будетъ

$$P''' \equiv \{x_0\}, \quad P^{(IV)} \equiv 0;$$

и т. д. Очевидно, что взявъ сначала размѣщенiе ω, а затѣмъ ω^2, мы получимъ то-же размѣщенiе ω^3; такимъ образомъ

$$\omega . \omega^2 \equiv \omega^3 \equiv \omega^2 . \omega.$$

Комбинируя послѣдовательно ω и $^*\omega$, мы можемъ получать области Q всегда счетныя, перваго рода и n'аго вида, если число операцій ω и $^*\omega$ будетъ n; въ томъ числѣ для области типа ω^n или $^*\omega^n$ область $P^{(n)}$ состоитъ изъ единственной точки x_0 или $x_{\bar{0}}$.

Такимъ образомъ по заданному типу

$$\omega^\alpha \, {}^*\omega^\beta \, \omega^\gamma \ldots {}^*\omega^\nu \tag{1}$$

мы всегда можемъ возсоздать строеніе области и непосредственно указать ея видъ $n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \nu$.

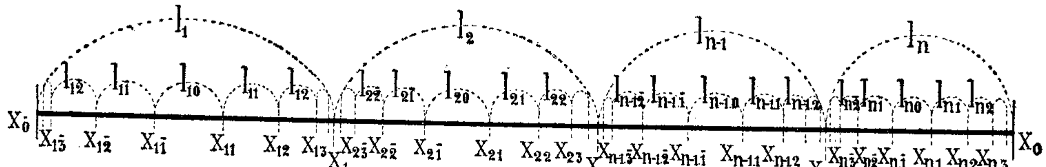
Само собой разумѣется, обозначеніе (1) даетъ только *типъ* области; чтобы получить какую нибудь область этого типа, надо опредѣленно задать каждое изъ составляющихъ основныхъ размѣщеній.

Согласно съ принятыми нами обозначеніями, области *Smith'a*[1]) будутъ P_1 типа $^*\omega$, P_2 типа $^*\omega^2$, P_m типа $^*\omega^m$; къ этимъ же типамъ относятся области *Mittag-Leffler'a*[2]), для которыхъ $P^{n+1} \equiv 0$.

Замѣтимъ еще, что во всѣхъ областяхъ типа ω^n и $^*\omega^n$ предѣльныя точки будутъ всегда односторонними, въ первомъ случаѣ—правыми и во второмъ—лѣвыми; что же касается типа (1), то тамъ будутъ находиться какъ тѣ, такъ и другія; кромѣ того при $n > 2$ должны войти еще и двустороннія предѣльныя точки.

83. Обратимся теперь къ областямъ, происходящимъ отъ основного типа $^*\omega + \omega$, и возьмемъ сначала дѣленіе интервала L на конечное число n частей; области точекъ разныхъ системъ дѣленія назовемъ

$$Q^{(0)} \equiv \{x_{\bar{0}}, x_0\}, \; Q^{(1)} \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}, \; Q^{(2)} \equiv \{x_{ij}\}.$$



Область интерваловъ окончательнаго размѣщенія будетъ имѣть границами область $Q \equiv Q^{(2)}$, тогда какъ ни одна изъ точекъ $Q^{(0)}$ и $Q^{(1)}$ не войдетъ въ составъ Q. Полученный при этомъ типъ размѣщенія будетъ обозначенъ, въ согласіи съ предыдущимъ, черезъ $n\,(^*\omega + \omega)$

При такомъ распредѣленіи участковъ $\{l_{ij}\}$ на L мы будемъ имѣть конечное число счетныхъ рядовъ интерваловъ; каждая изъ точекъ

---

[1]) См. А° 5.

[2]) См. 18°.

перваго дѣленія $Q^{(1)}$, а также и границы интервала L будутъ предѣльными точками.

Точки участка L будутъ здѣсь распредѣляться на три области: G—область *внутреннихъ* точекъ участковъ $\{l_{ij}\}$, Q—область ихъ границъ и наконецъ E—область предѣльныхъ точекъ границъ участковъ, являющихся *внѣшними* точками интерваловъ окончательнаго размѣщенія.

Область G—область внутреннихъ точекъ участковъ не представляетъ ничего новаго въ сравненіи съ изложеннымъ выше; Q—область границъ будетъ счетна и уединенна, такъ какъ ни одна изъ предѣльныхъ точекъ $\{x_{ij}\}$ не входитъ въ составъ границъ интерваловъ $\{l_{ij}\}$; область E будетъ состоять изъ точекъ дѣленія $Q^{(1)}$ и границъ основного интервала $x_{\bar{0}}$ и x_0

$$E = Q^{(0)} + Q^{(1)}.$$

Очевидно, что здѣсь

$$Q' = E, \quad Q''' = 0, \tag{2}$$

при чемъ всѣ предѣльныя точки области Q, кромѣ точекъ $Q^{(0)}$, будутъ двухсторонними. Область

$$P = Q + E = \sum_{0}^{2} Q^{(i)}$$

дастъ, въ силу (2),

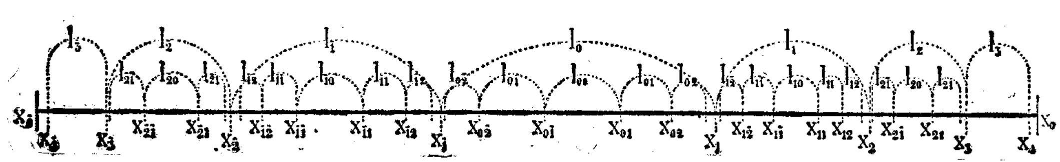
$$P' = Q' = E, \; P''' = 0.$$

Очевидно, что

$$({}^*\omega + \omega)\,n = {}^*\omega + \omega \neq n\,({}^*\omega + \omega).$$

83. Положимъ далѣе, что мы взяли сначала типъ $^*\omega + \omega$ и въ каждомъ его интервалѣ помѣстили снова область типа $^*\omega + \omega$; границы участка и области точекъ перваго и второго дѣленія будутъ тогда

$$Q^{(0)} = \{x_{\bar{0}}, x_0\}, \; Q^{(1)} = \{x_j\}, \; Q_i^{(2)} = \{x_{ij}\}, \; \sum Q_i^{(2)} = Q^{(2)},$$



при чемъ i и j принимаютъ всѣ цѣлыя положительныя и отрицательныя значенія; кромѣ того i можетъ равняться 0. Полученный при этомъ типъ размѣщенія интерваловъ долженъ быть обозначенъ $({}^*\omega + \omega)^2$.

При такомъ законѣ распредѣленія интерваловъ на участкѣ L мы разбиваемъ всѣ его точки на три области: G—область внутреннихъ точекъ интерваловъ $\{l_{ij}\}$ окончательнаго размѣщенія, Q—область ихъ границъ и E—область точекъ внѣшнихъ для $\{l_{ij}\}$. Ясно, что E составится изъ всѣхъ точекъ $Q^{(1)}$ вмѣстѣ съ границами основного интервала L, а Q совпадетъ съ $Q^{(2)}$

$$E \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)}, \quad Q \equiv Q^{(2)};$$

область Q будетъ счетна и уединенна, такъ какъ всѣ ея предѣльныя точки входятъ въ составъ E; поэтому

$$Q' \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)}, \; Q'' \equiv Q^{(0)}, \; Q''' \equiv 0.$$

Комбинація областей Q и E дастъ счетную замкнутую область $P \equiv Q + E$, для которой

$$P' \equiv Q', \; P''' \equiv 0.$$

Замѣтимъ, что всѣ имѣющіяся здѣсь предѣльныя точки, кромѣ—разумѣется—границъ основного интервала, будутъ двухсторонними.

84. Помѣщая въ интервалахъ размѣщенія типа $({}^*\omega + \omega)^2$, интервалы типа ${}^*\omega + \omega$, или наоборотъ, мы получимъ новый типъ размѣщенія $({}^*\omega + \omega)^3$, для котораго будетъ,

$$Q''' \equiv (x_{\bar{0}}, x_0), \quad Q^{(\text{IV})} \equiv 0.$$

Повторяя конечное число n разъ операцію ${}^*\omega + \omega$, мы будемъ имѣть типъ $({}^*\omega + \omega)^n$, опредѣляющій уединенную область Q и замкнутую P перваго рода и n'аго вида, для которой границы основного интервала будутъ служить n'ой производной и для которой, кромѣ этихъ границъ, всѣ остальныя предѣльныя точки будутъ двухсторонними.

85. Переходимъ далѣе къ комбинаціи двухъ типовъ размѣщенія ω или ${}^*\omega$ и ${}^*\omega + \omega$.

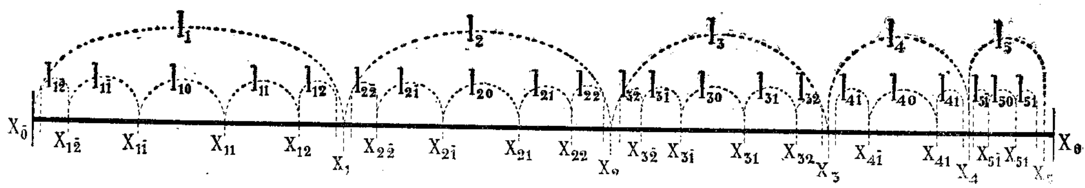
A. Возьмемъ сначала размѣщеніе ω, для котораго

$$Q^{(0)} \equiv \{x_{\bar{0}}, x_0\}, \quad Q^{(1)} \equiv \{x_i\},$$

и въ каждомъ интервалѣ помѣстимъ область типа ${}^*\omega + \omega$; полученный при этомъ типъ размѣщенія обозначится какъ $\omega\,({}^*\omega + \omega)$; назовемъ

$$Q_i^{(2)} \equiv \{x_{ij}\}_{j=\pm 1}^{\pm\infty}, \; \sum_1^{\infty} Q_i^{(2)} \equiv Q^{(2)}.$$

Интервалы этого типа распредѣлятъ точки L на три области: G—область внутреннихъ точекъ интерваловъ $\{l_{ij}\}$ окончательнаго размѣщенія, Q—область границъ этихъ интерваловъ и E—область внѣшнихъ ихъ точекъ.



Къ послѣдней категоріи отойдутъ здѣсь всѣ точки $\{x_i\}$ перваго дѣленія $Q^{(1)}$ и кромѣ того точки $x_{\bar{0}}$ и x_0; такимъ образомъ

$$E \equiv Q^{(1)} + \{x_{\bar{0}}, x_0\} \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)};$$

это будетъ счетная замкнутая область, для которой $E' \equiv \{x_0\}$. Область границъ $Q \equiv Q^{(2)}$ будетъ уединенна, такъ какъ ея предѣльныя точки всѣ входятъ въ E, такъ что

$$Q' \equiv E, \quad Q'' \equiv \{x_0\}, \quad Q''' \equiv 0.$$

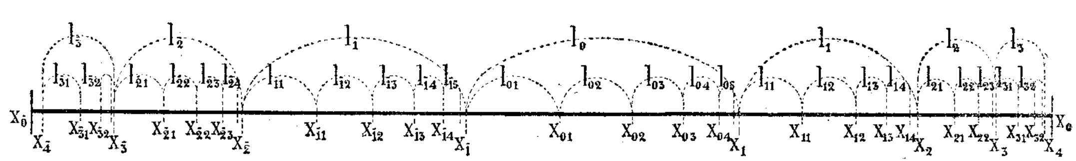
Очевидно далѣе, что $P \equiv Q + E$ будетъ счетна и замкнута, и что всѣ ея предѣльныя точки, кромѣ $x_{\bar{0}}$ и x_0, будутъ двухсторонними; для нея

$$P' \equiv Q^{(1)} + Q^{(0)} \equiv E, \quad P''' \equiv 0.$$

B. Если за первое размѣщеніе взято $^*\omega + \omega$, а въ его интервалахъ помѣщенъ типъ ω, то получится новый типъ $(^*\omega + \omega)\,\omega$.

Назовемъ, какъ и выше, границы участка и область точекъ перваго и второго дѣленія соотвѣтственно

$$Q^{(0)} \equiv \{x_{\bar{0}}, x_0\}, \quad Q^{(1)} \equiv \{x_i\}_{i=\pm 1}^{\pm\infty}, \; Q_i^{(2)} \equiv \{x_{ij}\}_{j=1}^{\infty}, \quad Q^{(2)} \equiv \sum_{0}^{\pm\infty} Q_i^{(2)}.$$



Область G здѣсь такова-же, что и выше; область Q состоитъ во-первыхъ—изъ точекъ $Q^{(2)}$, что ясно само собой, а во вторыхъ—изъ точекъ перваго дѣленія; дѣйствительно—каждая изъ точекъ $Q^{(1)}$ будетъ лѣвой границей одного изъ интерваловъ l_{ij}, такъ что она войдетъ въ область границъ окончательнаго размѣщенія; итакъ область $Q = Q^{(1)} + Q^{(2)}$ будетъ счетна и общаго вида, такъ какъ въ ея составъ войдутъ не всѣ ея предѣльныя точки; область E состоитъ только изъ границъ основного интервала $E = \{x_{\bar{0}}, x_0\}$; для области Q мы имѣемъ

$$Q' = Q^{(1)} + Q^{(0)},\ Q'' = Q^{(0)},\ Q''' = 0.$$

Область $P = Q + E$ будетъ здѣсь опять счетна и замкнута; всѣ ея предѣльныя точки односторонни.

Сопоставляя типы $\omega\,({}^*\omega + \omega)$ и $({}^*\omega + \omega)\,\omega$, мы видимъ, что они являются въ значительной степени различными, такъ что выходитъ здѣсь

$$\omega\,({}^*\omega + \omega) \neq ({}^*\omega + \omega)\,\omega.$$

Очевидно, что типы ${}^*\omega\,(\omega + \omega)$ и $({}^*\omega + \omega)\,{}^*\omega$ не дадутъ намъ ничего особеннаго въ сравненіи съ изслѣдованными нами типами; точно также будетъ

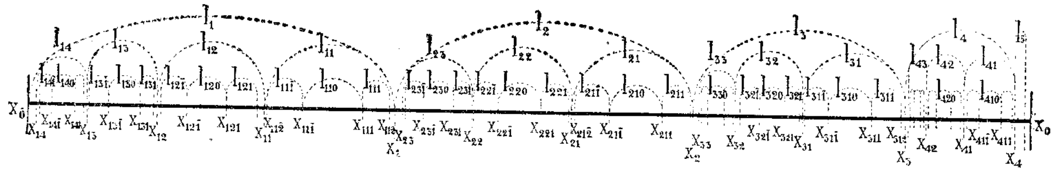
$${}^*\omega\,({}^*\omega + \omega) \neq ({}^*\omega + \omega)\,{}^*\omega.$$

86. Разсмотримъ еще комбинацію типовъ ω, ${}^*\omega$ и ${}^*\omega + \omega$: размѣстимъ сначала на L интервалы типа $\omega\,{}^*\omega$ и затѣмъ въ каждомъ изъ интерваловъ расположимъ области типа $\omega + \omega$; полученный при этомъ типъ размѣщенія будетъ $\omega\,{}^*\omega\,({}^*\omega + \omega)$.

Назовемъ границы интервала и области перваго, второго и третьяго дѣленія соотвѣтственно черезъ

$$Q^{(0)} = \{x_{\bar{0}}, x_0\},\ Q^{(1)} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty},\ Q_i^{(2)} = \{x_{ij}\}_{j=1}^{\infty},\ Q_{ij}^{(3)} = \{x_{ijk}\}_{k=\pm 1}^{\pm\infty},$$

$$\sum Q_i^{(2)} = Q^{(2)},\ \sum\sum Q_{ij}^{(3)} = Q^{(3)}.$$



Область границъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія Q состоитъ здѣсь только изъ точекъ третьяго дѣленія $Q = Q^{(3)}$; внѣшнія точки образуютъ область E, которая составляется изъ всѣхъ точекъ второго и перваго дѣленій и изъ границъ основного интервала

$$E = Q^{(0)} + Q^{(1)} + Q\ \ ;$$

область Q будетъ уединенна и счетна; для нея

$$Q' = Q^{(2)} + Q^{(1)} + Q^{(0)} = E,\ Q'' = Q^{(1)} + Q^{(0)},\ Q''' = Q^{(0)},\ Q^{(IV)} = 0.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что область Q есть область 1 рода и 3-го вида; область E будетъ замкнутой и также счетной областью 2-го вида; область $P = Q + E$ дастъ счетную замкнутую область, для которой $P' = E$.

Очевидно—комбинируя типы ω, $^*\omega$ и $^*\omega + \omega$ различнымъ образомъ, мы будемъ получать все болѣе и болѣе сложныя области; порядокъ послѣдней не обращающейся въ 0 производной будетъ всегда равенъ числу операцій, которыя указываются числомъ множителей типа размѣщенія. Всѣ области, получаемыя конечнымъ числомъ комбинацій этихъ основныхъ типовъ размѣщенія, имѣютъ типъ, состоящій изъ произведенія типовъ

$$\omega^{\alpha},\ {}^*\omega^{\beta},\ ({}^*\omega+\omega)^{\gamma};$$

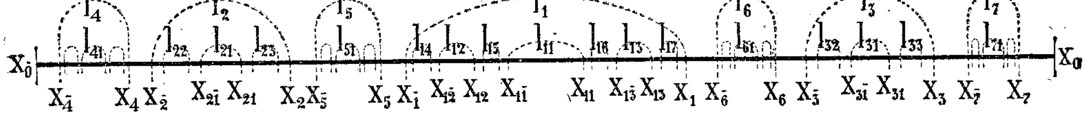
для нихъ P всегда будетъ счетна.

Замѣтимъ между прочимъ, что, если послѣдній множитель типа есть $^*\omega+\omega$, область внѣшнихъ точекъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія всегда будетъ замкнута и состоитъ изъ точекъ всѣхъ, кромѣ послѣдняго, дѣленій.

87. Переходимъ далѣе къ третьему основному типу $\tilde{\omega}$. Взявъ размѣщеніе интерваловъ этого типа, расположимъ въ каждомъ изъ нихъ новую область интерваловъ того же типа; полученный при этомъ типъ долженъ быть обозначенъ какъ $\tilde{\omega}^2$.

Назовемъ границы участка, точки перваго и второго дѣленія соотвѣтственно

$$Q^{(0)} = \{x_{\bar 0}, x_0\},\ \ Q^{(1)} = \{x_i\}_{\pm 1}^{\pm\infty},\ \ Q_i^{(2)} = \{x_{ij}\}_{j=\pm 1}^{\pm\infty},\ \ \sum Q_i^{(2)} = Q^{(2)};$$



назовемъ еще $E^{(1)}$ область внѣшнихъ точекъ перваго дѣленія, въ составъ которой входитъ $Q^{(0)}$; аналогично $E_i^{(2)}$ назовемъ область внѣшнихъ точекъ совершенной области, расположенной на l_i, при чемъ опять таки $\{x_{\bar{i}}, x_i\} = D(E_i^{(2)})$. Область Q границъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія будетъ состоять исключительно изъ точекъ второго дѣленія $Q = Q^{(2)}$, тогда какъ границы интерваловъ перваго дѣленія перейдутъ теперь всѣ въ категорію внѣшнихъ точекъ. Область Q счетна, такъ какъ она равномѣрна съ областью интерваловъ, и *сгущенна*, такъ какъ каждая ея точка x_{ij}, будучи границей интервала совершенной области на l_i, является предѣльной точкой. Въ составъ области E внѣшнихъ точекъ окончательнаго размѣщенія войдутъ всѣ внѣшнія точки $E^{(1)}$ перваго дѣленія, въ числѣ которыхъ заключаются также $x_{\bar{0}}$ и x_0, всѣ границы этого дѣленія $\{x_i\}$, т. е. вся область $Q^{(1)}$, и наконецъ всѣ внѣшнія точки $E_i^{(2)}$ каждой изъ совершенныхъ областей, расположенныхъ на интервалахъ l_i, кромѣ присчитанныхъ уже границъ $x_{\bar{i}}$ и x_i; итакъ

$$E = E^{(1)} + Q^{(1)} + \sum \left[E_i^{(2)} - (x_{\bar{i}}, x_i)\right] = E^{(1)} + \sum E_i^{(2)}.$$

Такъ какъ — согласно B 68° — области $E^{(1)}$ и $E_i^{(2)}$ будутъ несчетны, то несчетной окажется и область E.

Интервалы $\{l_{ij}\}$, расположенные на l_i, всѣ уединенны; двойной рядъ такихъ несмежныхъ интерваловъ на всѣхъ $\{l_i\}$ можетъ быть превращенъ въ простой рядъ несмежныхъ интерваловъ, а послѣдніе, какъ мы знаемъ, опредѣляютъ на L совершенную область невнутреннихъ точекъ $Q + E = P$.

Итакъ оказывается, что типъ $\tilde{\omega}^2$ опредѣляетъ такую-же совершенную область P, какъ и типъ $\tilde{\omega}$; а въ такомъ случаѣ послѣ двукратнаго примѣненія операціи $\tilde{\omega}$, типъ размѣщенія не мѣняется: для совершенной области $\tilde{\omega}^2$ мы — на основаніи обратной теоремы 75° — можемъ построить свободные интервалы, которые должны совпасть съ $\{l_{ij}\}$, и мы получимъ поэтому область типа $\tilde{\omega}$.

Мы приходимъ послѣ всего предыдущаго къ такому важному результату: примѣняя послѣдовательно два раза размѣщеніе интерваловъ типа $\tilde{\omega}$, мы получимъ снова то-же размѣщеніе $\tilde{\omega}$; мы должны такимъ образомъ положить

$$\tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}.$$

Очевидно также, что повторное, но конечное примѣненіе такого размѣщенія даетъ намъ тотъ-же результатъ, такъ что при всякомъ конечномъ n

$$\tilde{\omega}^n = \tilde{\omega},$$

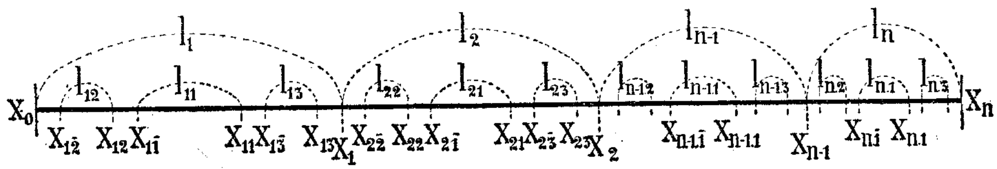
и никакихъ новыхъ типовъ отсюда получить мы не можемъ.

Считаемъ не лишнимъ замѣтить, что размѣщенiе типа $\tilde{\omega}$ распредѣляетъ точки участка на счетную область Q и двѣ несчетныя области G и E.

88. Комбинируя типъ $\tilde{\omega}$ съ предыдущими типами, мы получимъ рядъ интересныхъ областей, изъ которыхъ нѣкоторыя уже фигурировали въ литературѣ. Возьмемъ сначала типъ n и въ его интервалахъ помѣстимъ интервалы типа $\tilde{\omega}$; назовемъ

$$Q^{(0)} = \{x_0, x_n\},\quad Q^{(1)} = \{x_i\}_1^{n-1},\quad Q_i^{(2)} = \{x_{ij}\}_{\pm 1}^{\pm\infty},\quad \sum_1^n Q_i^{(2)} = Q^{(2)},\quad \mathop{\mathrm{M}}\limits_1^n E_i^{(2)} = E,$$

гдѣ въ $E_i^{(2)}$ входятъ точки $x_{\bar{i}}$ и x_i.



Очевидно, что $Q = Q^{(2)}$ будетъ сгущенной; слѣдовательно Q'—совершенна, при чемъ

$$Q' = Q^{(2)} + E = Q + E;$$

итакъ окончательное распредѣленiе интерваловъ оказывается таково, что область $P = Q + E$ будетъ совершенной. Отсюда слѣдуетъ, что

$$n\,\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$$

при всякомъ конечномъ n.

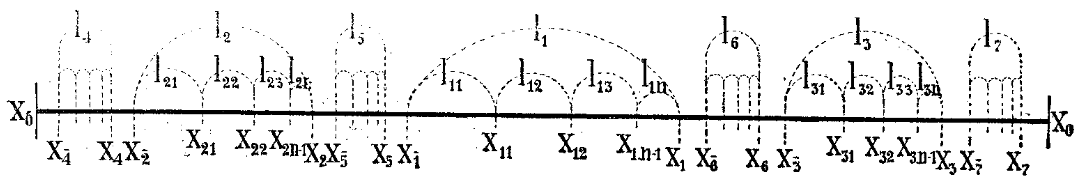
89. Напротивъ того легко показать, что

$$\tilde{\omega}\, n \neq \tilde{\omega}.$$

Размѣстимъ въ интервалахъ совершенной области конечное число n новыхъ интерваловъ; назовемъ, какъ обыкновенно,

$$Q^{(0)} = \{x_{\bar{0}}, x_0\},\quad Q^{(1)} = \{x_i\}_{\pm 1}^{\pm\infty},\quad Q_i^{(2)} = \{x_{ij}\}_{j=1}^{n-1},\quad \sum_1^\infty Q_i^{(2)} = Q^{(2)},\quad Q^{(1)} + E^{(1)} = P^{(1)},$$

гдѣ $P^{(1)}$—совершенна а каждая изъ $Q^{(2)}_i$ и слѣдовательно $Q^{(2)}$ уединенна.



Область границъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія Q будетъ состоять изъ новыхъ точекъ дѣленія $Q^{(2)}$ и изъ $Q^{(1)}$, тогда какъ область внѣшнихъ точекъ E совпадетъ съ $E^{(1)}$

$$Q = Q^{(2)} + Q^{(1)}, \ E = E^{(1)}.$$

Въ силу того, что точки x_{ij}, расположенныя *внутри* интерваловъ l_i, будутъ уединенны, при чемъ даже границы интервала $x_{\bar{i}}$ и x_i не могутъ быть ихъ предѣлами, такъ какъ число точекъ дѣленія x_{ij} на l_i конечно, Q' вполнѣ совпадаетъ съ $Q^{(1)'}$, т. е. будетъ

$$Q' = Q^{(1)'} = Q^{(1)} + E^{(1)} = P^{(1)};$$

затѣмъ, если назвать

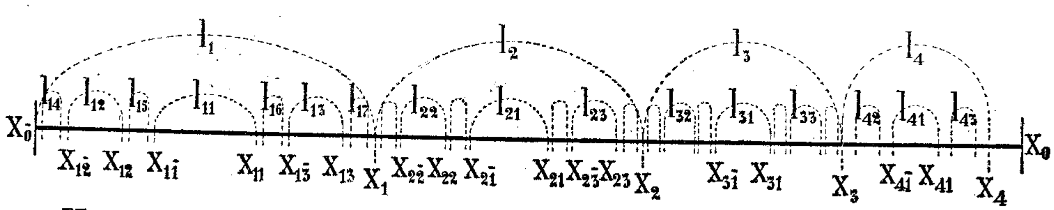
$$P = Q + E = Q^{(2)} + Q^{(1)} + E^{(1)} = P^{(1} + Q^{(2)}, \tag{3}$$

то $P' = P^{(1)}$; отсюда слѣдуетъ, что P — замкнута; она кромѣ того несчетна, такъ какъ заключаетъ въ своемъ составѣ несчетную часть $P^{(1)}$.

Выраженіе (3), въ согласіи съ теоремой *Cantor-Bendixson'a*, даетъ разложеніе несчетной замкнутой области P на совершенную часть $P^{(1)}$ и счетную $Q^{(2)}$, для которой $Q^{(2)'} = 0$.

Мы видимъ такимъ образомъ, что типъ $\tilde{\omega}n$ отличается отъ $\tilde{\omega} = n\tilde{\omega}$.

90. Возьмемъ затѣмъ типъ ω и въ каждомъ изъ его интерваловъ размѣстимъ области типа $\tilde{\omega}$; окончательное размѣщеніе должно быть обозначено символомъ $\omega\tilde{\omega}$.



Назовемъ по прежнему

$$Q^{(0)} = \{x_{\bar{0}}, x_0\}, \ Q^{(1)}_{\omega} = \{x_i\}, \ E^{(1)} = \{x_0\}, \ Q^{(2)}_i = \{x_{ij}\}_{j=\pm 1}^{\pm\infty}, \ \sum_1^{\infty} Q^{(2)}_i = Q^{(2)};$$

пусть еще $E_i^{(2)}$—область внѣшнихъ точекъ на каждомъ изъ интервалѣ l_i, при чемъ въ $E_i^{(2)}$ входятъ точки x_{i-1} и x_i; поэтому сумма

$$\sum \left[E_i^{(2)} - \{x_{i-1},\ x_i\}\right]$$

дастъ всѣ такія внѣшнія точки совершенныхъ областей на l_i, которыя лежатъ внутри l_i. Если мы возьмемъ сумму $\sum E_i^{(2)}$, то въ ней каждая изъ точекъ x_i области $Q^{(1)}$ будетъ фигурировать дважды, а точка x_0 — одинъ разъ; поэтому, чтобы получить всѣ внѣшнія точки всѣхъ областей, мы должны исключить излишне во второй разъ включенныя въ $\sum E_i^{(2)}$ точки $Q^{(1)}$; полученная при этомъ область будетъ

$$\sum_1^{\infty} E_i^{(2)} - Q^{(1)}. \tag{4}$$

Область Q границъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія состоитъ только изъ точекъ $Q^{(2)}$; точки x_i перестанутъ быть границами интерваловъ и перейдутъ въ категорію внѣшнихъ точекъ; итакъ $Q = Q^{(2)}$; область E составится прежде всего изъ всѣхъ внѣшнихъ точекъ интерваловъ l_{ij}, т. е. изъ точекъ области (4), въ составѣ которыхъ находятся и точки $Q^{(1)}$; сверхъ того внѣшней точкой будетъ x_0, не входящая ни въ одну изъ $E_i^{(2)}$; такимъ образомъ

$$E = \{x_0\} + \sum E_i^{(2)} - Q^{(1)};$$

область Q счетна и сгущенна, такъ что Q' будетъ совершенной; E—сгущенна и несчетна, такъ какъ несчетна каждая изъ ея составныхъ частей $E_i^{(2)}$. Такъ какъ область

$$Q' = Q^{(2)} + E = Q + E = P$$

совершенна, и она опредѣляется интервалами l_{ij}, то типъ размѣщенія этихъ интерваловъ будетъ $\tilde{\omega}$, такъ что снова

$$\omega\, \tilde{\omega} = \tilde{\omega}.$$

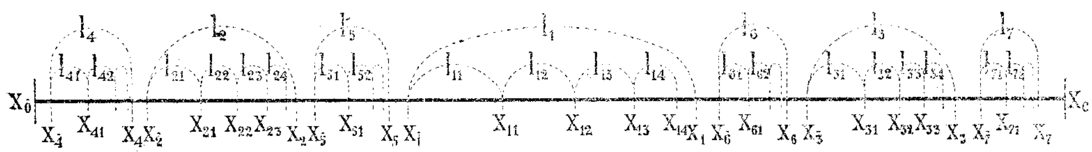
Область $*\omega\, \tilde{\omega}$ даетъ такой же результатъ и потому не представляется интереснымъ ее разбирать подробно; для нея также

$$*\omega\, \tilde{\omega} = \tilde{\omega}.$$

91. Совсѣмъ иной результатъ мы получимъ, разсматривая область типа $\tilde{\omega}\omega$, т. е. взявъ сначала совершенную область $\tilde{\omega}$ и помѣщая въ ея интервалахъ области типа ω.

Назовемъ по прежнему

$$Q^{(0)} \equiv \{x_{\bar{0}}, x_0\}, \quad Q^{(1)} \equiv \{x_i\}_{\pm 1}^{\pm\infty}, \quad Q_i^{(2)} \equiv \{x_{ij}\}_{j=1}^{\infty}, \quad \sum_1^{\infty} Q_i^{(2)} = Q^{(2)};$$



$E^{(1)}$ — область внѣшнихъ точекъ перваго дѣленія, въ составъ которыхъ входятъ также $x_{\bar{0}}$ и x_0; область $P^{(1)} \equiv Q^{(1)} + E^{(1)}$ по условію совершенна; назовемъ, какъ всегда, Q—область границъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія $\tilde{\omega}\omega$ и E—ихъ внѣшнія точки.

Очевидно—въ составъ Q войдутъ всѣ точки второго дѣленія $\{x_{ij}\}$, т. е. вся область $Q^{(2)}$, и кромѣ того лѣвые концы $\{x_i\}$ интерваловъ l_i

$$Q \equiv Q^{(2)} + \{x_i\}; \tag{5}$$

внѣшними точками окончательнаго размѣщенія будутъ прежде всего внѣшнія точки области $\tilde{\omega}$, т. е. $E^{(1)}$, и кромѣ того всѣ правыя границы интерваловъ перваго дѣленія, такъ что

$$E \equiv E^{(1)} + \{x_{\bar{i}}\}; \tag{6}$$

область Q будетъ счетна и общаго вида, при чемъ точки $x_{\bar{i}}$ являются ея предѣльными точками, область E—несчетна, такъ какъ входящая въ нее $E^{(1)}$ несчетна, и не замкнута, такъ какъ въ нее не входятъ $\{x_{\bar{i}}\}$; для E и Q имѣемъ

$$E' \equiv P^{(1)}, \; Q' \equiv Q^{(1)} + E^{(1)} \equiv P^{(1)};$$

наконецъ для области

$$P \equiv Q + E \tag{7}$$

мы будемъ имѣть

$$P' \equiv M\,(Q', \; E') \equiv P^{(1)};$$

а такъ какъ изъ (7)—въ силу (5) и (6)—слѣдуетъ, что

$$P \equiv Q^{(2)} + E^{(1)} + \{x_i\}_{\pm 1}^{\pm\infty} \equiv Q^{(2)} + P^{(1)},$$

то P оказывается замкнутой областью. Мы видимъ здѣсь, что замкнутая несчетная область P состоитъ изъ двухъ частей: совершенной области $P^{(1)}$ и счетной области $Q^{(2)}$, для которой $Q^{(2)\prime} \equiv P^{(1)}$; это—тотъ результатъ, который предвидитъ теорема *Cantor-Bendixson'a*.

Здѣсь мы имѣемъ

$$\tilde{\omega}\omega \neq \tilde{\omega};$$

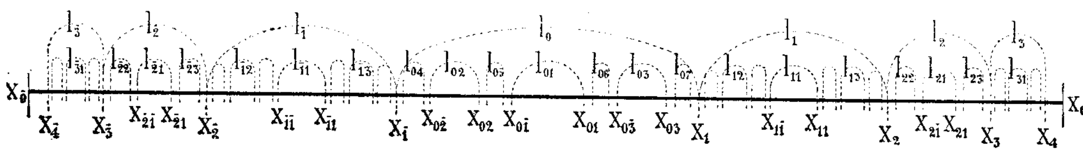
такого же вида будетъ область $\tilde{\omega}{}^*\omega$; для нея также

$$\tilde{\omega}{}^*\omega \neq \tilde{\omega}.$$

92. Разберемъ далѣе область типа $({}^*\omega+\omega)\,\tilde{\omega}$, т. е. въ каждомъ изъ интерваловъ типа ${}^*\omega+\omega$ помѣстимъ область $\tilde{\omega}$.

Назовемъ по прежнему для точекъ перваго дѣленія

$$Q^{(1)} \equiv \{x_i\}_{\pm 1}^{\pm\infty}, \quad E^{(1)} \equiv \{x_{\bar 0}, x_0\} \equiv Q^{(0)};$$



границы интерваловъ совершенной области на l_i обозначимъ

$$Q_i^{(2)} \equiv \{x_{ij}\}_{i=\pm 1}^{\pm\infty}, \quad \sum Q_i^{(2)} \equiv Q^{(2)};$$

область соотвѣтственныхъ внѣшнихъ точекъ назовемъ $E_i^{(2)}$, при чемъ въ эту область входятъ точки $(x_{\overline{i+1}}, x_{\bar i})$, $(x_{\bar 1}, x_1)$, (x_i, x_{i+1}), смотря по тому, будетъ ли $i < 0, = 0, > 0$; пусть наконецъ Q и E будутъ области границъ и внѣшнихъ точекъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія. Обращаясь къ изслѣдованію области Q, мы видимъ, что она будетъ состоять исключительно изъ точекъ $Q^{(2)}$: ни одна точка перваго дѣленія не останется границей интервала, такъ что $Q \equiv Q^{(2)}$; такъ какъ каждая изъ ея точекъ есть точка одной изъ совершенныхъ областей

$$Q_i^{(2)} + E_i^{(2)} \equiv P_i^{(2)},$$

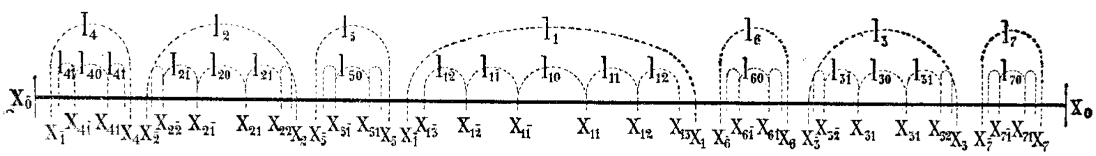
расположенной на интервалѣ l_i, то Q будетъ сгущенной областью, а слѣдовательно Q' совершенна.

Въ составъ Q', кромѣ точекъ Q, войдутъ еще всѣ внѣшнія точки E и не можетъ войти ни одна внутренняя точка интерваловъ окончательнаго размѣщенія, такъ что $Q' = Q + E = P$, и эта область совершенна; оказывается такимъ образомъ, что интервалы размѣщенія $({}^*\omega + \omega)\,\tilde{\omega}$ даютъ то-же распредѣленіе интерваловъ, какъ и $\tilde{\omega}$; слѣдовательно мы должны положить

$$({}^*\omega + \omega)\,\tilde{\omega} = \tilde{\omega}.$$

93. Возьмемъ наконецъ область типа $\tilde{\omega}\,({}^*\omega + \omega)$, т. е. въ интервалы совершенной области помѣстимъ область интерваловъ типа ${}^*\omega + \omega$; назовемъ точки перваго дѣленія и внѣшнія точки интерваловъ этого дѣленія соотвѣтственно черезъ $Q^{(1)} = \{x_i\}_{\pm 1}^{\pm\infty}$, $E^{(1)}$, при чемъ въ число точекъ $E^{(1)}$ входятъ и $\{x_{\bar{0}}, x_0\} = Q^{(0)}$; назовемъ еще

$$Q_i^{(2)} = \{x_{ij}\}_{j=\pm 1}^{\pm\infty},\quad \sum Q_i^{(2)} = Q^{(2)};$$



тогда для интерваловъ окончательнаго размѣщенія получится

$$Q = Q^{(2)},\ E = E^{(1)} + Q^{(1)} = P^{(1)}.$$

Такъ какъ интервалы перваго дѣленія даютъ совершенную область $P^{(1)}$, то—оказывается—*область внѣшнихъ точекъ* E *будетъ совершенна* что же касается Q, то она будетъ счетна и уединенна. Область $P = Q + E = Q^{(2)} + P^{(1)}$ —замкнутая и несчетная область, которая—въ согласіи съ теоремой *Cantor-Bendixson'a*—состоитъ изъ совершенной части $P^{(1)}$ и счетной $Q^{(2)}$, и для которой кромѣ того $Q^{(2)\prime} = P^{(1)}$.

Здѣсь снова

$$\tilde{\omega}\,({}^*\omega + \omega) \neq \tilde{\omega}.$$

94. Мы видимъ изъ предыдущаго, что примѣненіе операціи $\tilde{\omega}$ послѣ операціи $\tilde{\omega}$, ${}^*\omega$ и ${}^*\omega + \omega$ равносильно только одной операціи $\tilde{\omega}$.

Пусть различные $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n$, будутъ принадлежать къ числу типовъ

$$\omega,\ {}^*\omega,\ {}^*\omega + \omega, \tag{8}$$

при чемъ число n мы предполагаемъ пока конечнымъ. Выполненіе надъ какой нибудь областью, являющейся комбинаціей типовъ (8),

$\prod\limits_1^n \omega_i$ операціи $\tilde{\omega}$ превращаетъ область въ область типа $\tilde{\omega}$; дѣйствительно

$$\prod_1^n \omega_i \,.\, \tilde{\omega} = \prod_1^{n-1} \omega_i \,.\, \omega_n \tilde{\omega} = \prod_1^{n-1} \omega_i \,.\, \tilde{\omega} = \prod_1^{n-2} \omega_i \,.\, \tilde{\omega} = \ldots = \tilde{\omega}\,;$$

такимъ образомъ операція $\tilde{\omega}$ преобладаетъ надъ всѣми предыдущими, которыя, такъ сказать, тонутъ въ ней окончательно.

Наоборотъ: если надъ областью такого типа $\tilde{\omega}$ будетъ произведена какая нибудь комбинація операцій (8), то результатомъ окажется замкнутая несчетная область, и типъ

$$\tilde{\omega} \,.\, \prod_1^n \omega_i \neq \tilde{\omega}\,.$$

Очевидно также, что снова

$$\tilde{\omega} \,.\, \prod_1^n \omega_i \,.\, \tilde{\omega} = \tilde{\omega}\,,$$

такъ какъ типъ $\tilde{\omega}\,\Pi\,\tilde{\omega}$ можетъ быть полученъ помѣщеніемъ въ интервалы $\tilde{\omega}$ области $\Pi\tilde{\omega}$, которая имѣетъ типъ $\tilde{\omega}$.

Такъ какъ примѣненіе операціи $\tilde{\omega}$ уничтожаетъ всѣ предыдущія операціи, превращая ихъ въ операцію $\tilde{\omega}$, то мы можемъ *всевозможные производные типы свести на такія комбинаціи*

$$\tilde{\omega}\,,\ \tilde{\omega} \,.\, \prod_1^n \omega_i\,,\ \prod_1^n \omega_i\,; \tag{9}$$

составъ областей, имъ отвѣчающихъ, совершенно ясенъ въ силу символовъ (9).

Возможно было-бы, при дальнѣйшемъ изслѣдованіи, установить и еще нѣкоторые результаты повторныхъ операцій различныхъ типовъ, но на нихъ мы не будемъ останавливаться.

Замѣтимъ еще, что область *Bendixson'a*, указанная въ 14°, принадлежитъ къ типу $\tilde{\omega}\,({}^*\omega + \omega)^2$.

4. Сложные типы размѣщенія.

95. Разсмотрѣвъ области интерваловъ, получающіяся послѣ конечнаго числа комбинацій изученныхъ основныхъ типовъ, мы переходимъ теперь къ такимъ типамъ, когда число основныхъ операцій будетъ безконечно велико. Разсмотримъ сначала операцію *п*.

Возьмемъ на участкѣ L размѣщеніе n; въ каждомъ изъ его интерваловъ помѣстимъ размѣщеніе того же типа; и т. д. будемъ продолжать этотъ процессъ безконечно; получающееся при этомъ размѣщеніе мы обозначимъ символомъ n^{ω}.

Чтобы выяснить характеръ областей такого рода, разберемъ нѣсколько примѣровъ.

A. Раздѣлимъ l на четыре *равныя* части $\{l_i\}$, затѣмъ каждую изъ l_i снова на четыре, l_i'' опять на четыре и т. д; длины этихъ интерваловъ будутъ въ такомъ случаѣ

$$l_i' = \frac{1}{4}\, l,\ l_i'' = \frac{1}{4^2}\, l, \ldots\ldots,\ l_i^{(n)} = \frac{1}{4^n}\, l, \ldots.$$

Въ виду того обстоятельства, что точки каждой новой системы дѣленій располагаются равномѣрно на интервалахъ предыдущей системы, и такъ какъ при безконечно продолженномъ процессѣ дѣленія, интервалы $l_i^{(n)}$ дѣлаются произвольно малыми, область всѣхъ точекъ дѣленія Q будетъ часто разсѣяна по интервалу L; разъ она часто разсѣяна, свободныхъ интерваловъ въ окончательномъ размѣщеніи не окажется совершенно.

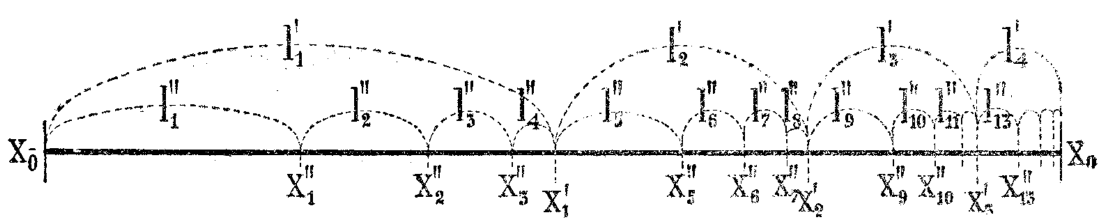
B. Возьмемъ другой примѣръ: возьмемъ на L три точки x_i' такимъ образомъ, чтобы было

$$l_1' = \frac{1}{2}\, l, \qquad l_2' = \frac{1}{2^2}\, l, \qquad l_3' = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^2}\, l,\ l_4' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}\, l;$$

$$l_1'' = \frac{1}{2}\, l_1' = \frac{1}{2^2}\, l, \qquad l_2'' = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}\, l = \frac{1}{2^3}\, l,\ l_3'' = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3}\, l,\ l_4'' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}\, l,$$

$$l_5'' = \frac{1}{2}\, l_2' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\, l = \frac{1}{2^3}\, l,\ l_6'' = \frac{1}{2^4}\, l, \qquad l_7'' = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^4}\, l,\ l_8'' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}\, l,$$

и т. д.; и въ этомъ случаѣ, несмотря на то, что точки сгущаются къ правымъ концамъ интерваловъ, область Q будетъ часто разсѣяна;

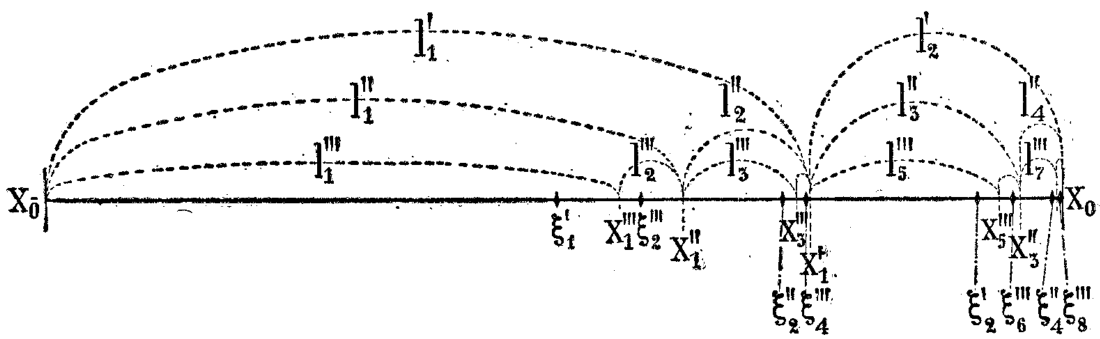


чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно показать, что лѣвая граница произвольнаго интервала будетъ предѣльной точкой области Q границъ окончательнаго размѣщенія; въ частности — если это выяснится относительно $x_{\bar 0}$, то тоже будетъ справедливо и относительно другихъ аналогичныхъ точекъ. Что же касается $x_{\bar 0}$, то въ виду того, что всякая $x_1^{(i)}$ дѣлитъ пополамъ отрѣзокъ $l_1^{(i-1)}$, ясно, что $x_{\bar 0} = lim\ x_1^{(i)}$.

C. Возьмемъ наконецъ такой законъ дѣленія: раздѣлимъ интервалъ L на двѣ части l_1' и l_2' такимъ образомъ, чтобы отношеніе l_1' къ l_2' было равно отношенію $2^1 + 1$ къ 1; тогда

$$l_1' = \frac{3}{4}\,l,\ l_2' = \frac{1}{4}\,l;$$

каждый изъ l_i' раздѣлимъ на двѣ части въ отношеніи $2^2 + 1$ къ 1;



въ такомъ случаѣ

$$l_1'' = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\,l = \frac{5}{8}\,l,\ l_2'' = \frac{1}{8}\,l,\ l_3'' = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}\,l = \frac{5}{24}\,l,\ l_4'' = \frac{1}{24}\,l;$$

каждый изъ l_i'' дѣлимъ въ отношеніи $2^3 + 1$ къ 1, и т. д., каждый изъ $l_i^{(n-1)}$ — въ отношеніи $2^n + 1$ къ 1. Тогда на каждомъ изъ интерваловъ первый интервалъ слѣдующаго дѣленія составитъ соотвѣтственно $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{9}{10}, \ldots, \frac{2^n+1}{2^n+2}, \ldots$ часть всего предыдущаго интервала; здѣсь точки первыхъ трехъ системъ дѣленія отвѣчаютъ такимъ долямъ длины участка l

$$\begin{array}{ccccccccc}
0, & & & & \frac{3}{4}, & & & & 1, \\
0, & & \frac{5}{8}, & & \frac{3}{4}, & & \frac{23}{24}, & & 1, \\
0, & \frac{9}{16}, & \frac{5}{8}, & \frac{59}{80}, & \frac{3}{4}, & \frac{15}{16}, & \frac{23}{24}, & \frac{239}{240}, & 1.
\end{array}$$

Ясно, что, при такомъ законѣ построенія области R точекъ дѣленія, вправо отъ всѣхъ лѣвыхъ границъ каждаго изъ интерваловъ окажутся свободные интервалы окончательнаго размѣщенія; напримѣръ — правые концы первыхъ интерваловъ $l_1^{(i)}$ каждой системы, выраженные въ доляхъ l, будутъ

$$x_1' = \frac{3}{4}\, l = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) l,$$

$$x_1'' = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}\, l = \frac{2^2+1}{2^2+2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) l = \frac{2^2+1}{2 \cdot 2^2}\, l = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}\right) l,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_1^{(n)} = \frac{2^n+1}{2^n+2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right) l = \frac{2^n+1}{2 \cdot 2^n}\, l = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) l,$$

такъ что

$$\xi_1' = lim\; x_1^{(n)} = \frac{1}{2}\,;$$

слѣдовательно — интервалъ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ будетъ свободенъ отъ точекъ Q; этотъ свободный интервалъ составляетъ $\frac{2}{3}$ отъ интервала l_1'.

На интервалѣ l_2' точки дѣленія располагаются въ тѣхъ-же отношеніяхъ ко всему интервалу, какъ и точки на l_1'; поэтому и на l_2' окажется вправо отъ точки x_1' свободный интервалъ, равный $\frac{2}{3}$ интервала l_2', т. е. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\, l = \frac{1}{6}\, l$, при чемъ $\xi_2' = \frac{3}{4}\, l + \frac{1}{6}\, l = \frac{11}{12}\, l$.

Нечетные интервалы второго дѣленія составляютъ $\frac{5}{6}$ по отношенію къ предыдущимъ интерваламъ; первый интервалъ второго дѣленія l_1'', равный $\frac{5}{6}$ отъ $\frac{3}{4}\, l$, будетъ равенъ $\frac{5}{8}\, l$. Для него свободный интервалъ, простирающійся отъ x_0 до ξ_1' составляетъ $\frac{1}{2} : \frac{5}{8} = \frac{4}{5}$ отъ l_1''; вслѣдствіе подобнаго расположенія точекъ на всѣхъ интервалахъ второго дѣленія, на каждомъ изъ l_2'', l_3'', l_4'' свободная часть составитъ $\frac{4}{5}$ отъ соотвѣтственныхъ интерваловъ; а въ такомъ случаѣ послѣ второго дѣленія мы получимъ два новыхъ свободныхъ интервала (x_1'', ξ_2''), (x_3'', ξ_4''), при чемъ всѣ свободные интервалы вмѣстѣ взятые дадутъ

$$\frac{4}{5}\,(l_1'' + l_2'' + l_3'' + l_4'') = \frac{4}{5}\, l,$$

т. е. $\frac{4}{5}$ длины всего участка L.

Нечетные интервалы третьяго дѣленія составляютъ $\frac{9}{10}$ отъ соотвѣтственныхъ предыдущихъ интерваловъ; первый интервалъ этого дѣленія будетъ $\frac{9}{10} \cdot \frac{5}{8}\, l = \frac{9}{16}\, l$, и свободная его часть, равная $\frac{1}{2}\, l$, составитъ $\frac{1}{2} : \frac{9}{16} = \frac{8}{9}$ всего интервала; на каждомъ изъ интерваловъ l_i''' третьяго дѣленія свободныя части составятъ также $\frac{8}{9}\, l_i'''$, новыхъ свободныхъ интерваловъ будетъ четыре и всѣ вмѣстѣ взятые они дадутъ $\frac{8}{9}\, l$.

Продолжая такой процессъ дѣленія, мы послѣ n дѣленій всегда будемъ имѣть 2^n свободныхъ интервала, сумма которыхъ равна $\frac{2^n}{2^n+1}l$; при безконечно продолжающемся процессѣ сумма свободныхъ интерваловъ очевидно будетъ стремиться къ l.

Мы видимъ отсюда, что въ настоящемъ примѣрѣ не можетъ уже быть рѣчи о частой разсѣянности области точекъ дѣленій R; она не только рѣдко разсѣяна, но даже сумма свободныхъ интерваловъ произвольно близка къ l.

Очевидно далѣе, что каждая изъ лѣвыхъ границъ интерваловъ произвольнаго дѣленія, кромѣ точки $x_{\bar{0}}$, будетъ здѣсь правымъ одностороннимъ предѣломъ правыхъ границъ послѣдовательныхъ интерваловъ; предѣлами же лѣвыхъ границъ будутъ точки $\xi_j^{(i)}$, не входящія въ область границъ R; эти предѣлы будутъ лѣвосторонними.

Такъ какъ всѣ границы, кромѣ $x_{\bar{0}}$, служатъ предѣльными точками R, то $R-\{x_{\bar{0}}\}=D\{R'\}$, такъ что $R-\{x_0\}$ будетъ сгущенной областью, а въ такомъ случаѣ R′ совершенна; посмотримъ, изъ какихъ еще точекъ составляется R′? въ нее войдутъ во первыхъ всѣ границы $\{x_j^{(i)}\}$, кромѣ $x_{\bar{0}}$, во вторыхъ—всѣ точки $\{\xi_j^{(i)}\}$, наконецъ — предѣлы тѣхъ и другихъ точекъ, отличные отъ $\{\xi_j^{(i)}\}$.

Обозначимъ совершенную область R′, черезъ P и черезъ G, Q, E—соотвѣтственныя части L. Прежде всего ясно, что основнымъ интерваломъ для области P будетъ интервалъ $\{\xi_1', x_0\}$. Очевидно далѣе, что свободными интервалами области P окажутся свободные интервалы области R, находящіеся вправо отъ всѣхъ точекъ R до соотвѣтственныхъ точекъ $\{\xi_j^{(i)}\}$; слѣдовательно $Q=\{x_j^{(i)}, \xi_j^{(i)}\}$.

Мы приходимъ теперь къ такому заключенію: при указанномъ строеніи области R всѣ ея точки, кромѣ $x_{\bar{0}}$, оказываются лѣвыми границами свободныхъ интерваловъ типа $\bar{\omega}$; эта область R будетъ счетной, незамкнутой, такъ какъ въ ней отсутствуютъ $\{\xi_j^{(i)}\}$ и ихъ предѣлы, несгущенной, такъ какъ въ ея составѣ имѣется точка $x_{\bar{0}}$, и наконецъ рѣдко разсѣянной, при чемъ даже такъ, что сумма свободныхъ интерваловъ произвольно близка къ l. Мы видимъ наконецъ, что область R приняла совершенно своеобразный характеръ, очень далекій отъ типа размѣщенія n или n^{γ}.

96. Возвращаясь теперь къ началу 44°, обозначимъ

$$Q^{(1)},\ Q^{(2)},\ \ldots.,\ Q^{(n)},\ \ldots.$$

границы перваго, второго и т. д. дѣленія, $Q^{(0)}$—границы участка; назовемъ еще

$$Q^{(0)}+Q^{(1)}\equiv Q_1,\ Q^{(0)}+Q^{(1)}+Q^{(2)}\equiv Q_2, \ldots, \sum_0^m Q_i\equiv Q_m;$$

при безконечно продолжающемся процессѣ нанесенія интерваловъ типа n на предыдущіе интервалы, т. е. иными словами—дѣленіи этихъ интерваловъ по нѣкоторому закону на n частей, мы получимъ область точекъ

$$Q_\omega=\sum_0^\omega Q_i.$$

Очевидно прежде всего, что область Q_ω будетъ счетна; дѣйствительно—каждая изъ Q_m состоитъ изъ конечнаго числа точекъ; счетный рядъ такихъ конечныхъ Q_m даетъ снова счетный рядъ точекъ дѣленія. Такъ каждая изъ $Q^{(m)}$ состоитъ изъ конечнаго числа точекъ, то Q_m будетъ всегда конечна. Поэтому ни для одного конечнаго значенія m предѣльныхъ точекъ не существуетъ; слѣдовательно всѣ точки L будутъ или внутренними, или границами интерваловъ Q_m, и внѣшнихъ точекъ для Q_m не сушествуетъ совершенно.

Изъ предыдущихъ примѣровъ мы видѣли, что область Q_ω можетъ быть часто или рѣдко разсѣяна по участку L; въ послѣднемъ случаѣ, какъ это слѣдуетъ изъ 95° и общей теоремы 73°, для рѣдко разсѣянной области Q_ω можетъ быть построена область интерваловъ, въ составъ границъ и внѣшнихъ точекъ которыхъ входятъ всѣ точки Q_ω.

Точки Q_m будутъ границами интерваловъ дѣленій n^m; для области же Q_ω нѣкоторыя изъ этихъ границъ могутъ остаться границами интерваловъ окончательнаго размѣщенія, но кромѣ того явятся еще и новыя границы, тогда какъ прежнія при этомъ сдѣлаются внѣшними точками свободныхъ интерваловъ. Такимъ образомъ характеръ точекъ Q_m можетъ совершенно измѣниться въ Q_ω, и размѣщеніе n^ω представляетъ собой совершенно своеобразный типъ, далекій отъ изслѣдованныхъ нами раньше.

При этомъ размѣщеніи мы наталкиваемся впервые на часто разсѣянныя области, являющіяся слѣдствіемъ одного изъ основныхъ размѣщеній—размѣщенія n.

Сравнивая сложный типъ n^ω, когда P рѣдко разсѣяна, со всѣми предыдущими, мы находимъ такую характерную его особенность: *свободными интервалами этого типа не служатъ*, какъ это было раньше, *интервалы прежнихъ дѣленій*. Такимъ образомъ интервалы $\{l_i\}$ окончательнаго размѣщенія не принадлежатъ къ числу интерваловъ $\{l_i^{(n)}\}$

различныхъ системъ дѣленій; эту особенность мы найдемъ и у всѣхъ другихъ сложныхъ типовъ.

97. Если мы, вмѣсто послѣдовательнаго дѣленія интерваловъ на n частей, будемъ дѣлить l сначала на n_1 частей, затѣмъ полученные интервалы на n_2, на n_3 и т. д., мы получимъ типъ $\prod_1^\omega n_i$. Границы P интерваловъ различныхъ системъ дѣленія этого типа будутъ также счетны, также часто или рѣдко разсѣяны, въ зависимости отъ закона дѣленія.

При изслѣдованіи свойствъ области P въ предыдущемъ *число* дѣленій n не играло никакой роли, на немъ не основывалось никакихъ предположеній; поэтому съ точки зрѣнія размѣщенія интерваловъ $\left\{l_i^{(n)}\right\}$ по l и связанному съ нимъ разсѣянію точекъ P, оба типа n^ω и $\prod_1^\omega n_i$ представляются одинаковыми; это не значитъ, что области получаются однѣ и тѣ-же; при разныхъ числахъ n, при разныхъ n_i и — слѣдовательно — при разныхъ законахъ распредѣленія интерваловъ каждой системы, области P — разумѣется — будутъ различны, но общій ихъ *характеръ*, ихъ типъ будетъ тотъ, который изслѣдованъ въ 95°-96°. Очевидно, если мы будемъ размѣщать точки дѣленія равномѣрно по интерваламъ $l_i^{(n)}$ и возьмемъ

$$n = 10,\ x_0 = 0,\ x_0 = 1,$$

мы получимъ, какъ область P, всѣ правильныя раціональныя десятичныя дроби.

Точки $\left\{x_i^{(n)}\right\}$ при типѣ $\prod_1^\omega n_i$ представятъ собой обобщенное выраженіе дробей, находящееся у *Brodén'a.*

98. Переходимъ далѣе къ типу ω^ω. Мы получимъ такое размѣщеніе, помѣщая на l интервалы $\{l_i\}$ типа ω; въ каждомъ изъ этихъ интерваловъ помѣщаемъ по счетному ряду интерваловъ $\{l_{ij}\}$ типа ω; они дадутъ снова счетный рядъ интерваловъ $\left\{l_i''\right\}$ типа ω^2; въ каждомъ изъ нихъ строимъ интервалы ω, получивъ при этомъ типъ ω^3; и т. д.

Спрашивается, какую особенность будетъ имѣть такое размѣщеніе интерваловъ на l, какова будетъ область границъ интерваловъ послѣдовательныхъ дѣленій, и въ какомъ отношеніи она будетъ стоять къ области свободныхъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія?

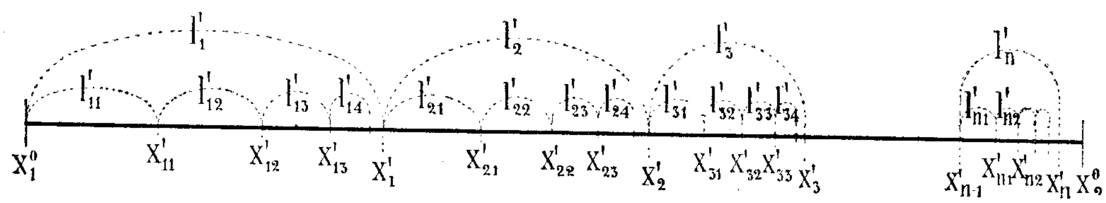
Назовемъ (x_1^0, x_2^0)—границы основного участка L и

$$Q^{(0)} \equiv \{x_1^0, x_2^0\}.$$

Возьмемъ на l счетный рядъ интерваловъ $\{l_i'\}$ и область опредѣляющихъ ихъ точекъ $\{x_i'\}$, внутреннихъ по отношенію къ l, назовемъ

$$Q^{(1)} \equiv \{x_i'\}_1^{\omega},\ Q_1 \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)} - \{x_2^0\},$$

гдѣ Q_1—область границъ послѣ перваго размѣщенія. Точка x_2^0 будетъ единственной внѣшней точкой этого размѣщенія $E^{(1)} \equiv \{x_2^0\}$.



Расположимъ теперь на интервалахъ l_i' перваго дѣленія интервалы второго дѣленія l_{ij}'; нанесенныя при этомъ на l_i', *внутреннія для* l_i' точки дѣленія будутъ $\{x_{ij}'\}$. Назовемъ области этихъ точекъ

$$Q_i^{(2)} \equiv \{x_{ij}'\}_{j=1}^{\omega},\ \sum_1^{\omega} Q_i^{(2)} \equiv Q^{(2)},\quad Q_2 = \sum_0^2 Q^{(i)} - \{x_2^0\}.$$

Интервалы $\{l_{ij}'\}$ представляютъ собой двойной рядъ, т. е. счетный рядъ счетныхъ рядовъ интерваловъ; какъ извѣстно, мы можемъ, установивъ извѣстный законъ послѣдовательности, преобразовать его въ простой рядъ l_i'', такъ что будетъ при этомъ

$$\{l_{ij}'\}_{i=1,\,j=1}^{\omega} \equiv \{l_i''\}_{i=1}^{\omega};$$

это тожество надо понимать такъ, что всѣ интервалы первой области входятъ во вторую, и обратно.

Назовемъ границы интерваловъ $\{l_i''\}$ черезъ $\{x_k''\}$; очевидно, что

$$\{x_k''\} \equiv \{x_{ij}'\} + \{x_i'\} + \{x_1^0\} \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)} + Q^{(2)} - \{x_2^0\},$$

такъ какъ точки x'_{ij} вмѣстѣ съ x'_1 и x^0_1 тѣ-же, какъ и x''_k, но только иначе перенумерованы; такимъ образомъ $\{x''_k\} \equiv Q_2$ есть область границъ послѣ вторoго размѣщенія.

Далѣе на каждомъ изъ интерваловъ l''_i строимъ интервалы l''_{ij}, опредѣляя ихъ точками $\{x''_{ij}\}$, при чемъ

$$Q^{(3)}_i = \{x''_{ij}\}_{j=1}^{\omega}, \quad \sum_1^{\omega} Q^{(3)}_i \equiv Q^{(3)};$$

затѣмъ снова превращаемъ двойной рядъ $\{l''_{ij}\}$ въ простой $\{l'''_i\}$, называя при этомъ $\{x'''_k\}$ — границы интерваловъ этого ряда. Тогда очевидно опять

$$\{x'''_k\} \equiv \sum_0^3 Q^{(i)} - \{x^0_2\} \equiv Q_3,$$

и т. д.; послѣ n'аго дѣленія мы получимъ интервалы и опредѣляющія ихъ внутреннія точки дѣленія

$$\{l^{(n-i)}_{ij}\} \equiv \{l^{(n)}_i\}, \ \{x^{(n-1)}_{ij}\} \equiv Q^{(n)}, \ \{x^{(n)}_k\} \equiv \sum_0^n Q^{(i)} - \{x^0_2\} \equiv Q_n.$$

99. Возьмемъ послѣдовательныя области

$$Q_1 \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)} - \{x^0_2\},\ Q_2 \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)} + Q^{(2)} - \{x^0_2\}, \ldots, Q_n \equiv \sum_0^n Q^{(i)} - \{x^0_2\}.$$

Если взять область невнутреннихъ точекъ всѣхъ интерваловъ, то придется добавить только единственную точку x^0_2, находящуюся внѣ этихъ интерваловъ; полученныя при этомъ области обозначимъ

$$P_n \equiv Q_n + \{x^0_2\} \equiv \sum_0^n Q^{(i)};$$

обозначимъ еще

$$P_0 \equiv Q^{(0)} \equiv \{x^0_1,\ x^0_2\};$$

въ область P_n входятъ такимъ образомъ *всѣ* точки дѣленія, начиная съ границъ участка l и кончая точками, опредѣляющими интервалы n'аго дѣленія.

Не трудно видѣть, что, опредѣляя для Q_i производныя различныхъ порядковъ, мы получимъ такую таблицу:

$Q_0' \equiv 0,$

$Q_1' \equiv P_0 - x_1^0, \quad Q_1'' \equiv 0,$

$Q_2' \equiv P_1 - x_1^0, \quad Q_2'' \equiv P_0 - x_1^0, \quad Q_2''' \equiv 0,$

. . . . ,

$Q_n' \equiv P_{n\text{-}1} - x_1^0, \quad Q_n'' \equiv P_{n\text{-}2} - x_1^0, \quad Q_n''' \equiv P_{n\text{-}3} - x_1^0, \ldots\ldots, \quad Q_n^{(n)} \equiv P_0 - x_1^0, \quad Q_n^{(n+1)} \equiv 0.$

Взглядываясь въ таблицу, мы видимъ, что въ составъ производной любой изъ областей Q_n входятъ всѣ точки предыдущей области P_{n-1} и слѣдовательно—всѣ точки Q_{n-1}, кромѣ начальной точки x_1^0. Каждая изъ Q_n оказывается областью перваго ряда и n'аго вида, и ея n'ая производная состоитъ всегда изъ единственной точки x_2^0; всѣ области $P_n - x_1^0$ будутъ замкнутыми областями.

Спрашивается теперь, что произойдетъ съ областью Q_n, если мы будемъ увеличивать n безконечно? Назовемъ получающуюся такимъ образомъ область черезъ Q_ω

$$Q_\omega = \lim_{n \ldots \infty} Q_n \quad \text{или} \quad Q_\omega \equiv \sum_0^\omega Q^{(i)} - \{x_2^0\};$$

это и будетъ область типа ω^ω.

Область Q_ω составляется изъ точекъ, входящихъ въ счетный рядъ областей

$$Q^{(0)} - \{x_2^0\}, \quad Q^{(1)}, \quad Q^{(2)}, \ldots\ldots, \quad Q^{(n)}, \ldots\ldots,$$

каждая изъ которыхъ счетна, и которыя не имѣютъ общихъ точекъ другъ съ другомъ; каждая точка Q_ω, если это не x_1^0, непремѣнно находится въ составѣ одной $Q^{(i)}$; x_1^0 же входитъ въ $Q^{(0)} - \{x_2^0\}$.

Всѣ эти области $Q^{(n)}$ — рѣдко разсѣяны; въ такомъ случаѣ мы можемъ въ произвольной части (α_0, β_0) основного интервала l найти интервалъ (α_1, β_1), внутри котораго нѣтъ точекъ $Q^{(1)}$; границы α_1 и β_1 этого интервала мы можемъ при этомъ выбрать такъ, чтобы онѣ были *внутренними* точками нѣкотораго интервала l_i'. Внутри (α_1, β_1) мы можемъ выбрать интервалъ (α_2, β_2), внутри котораго не будетъ точекъ x_i'', и границы котораго будутъ внутренними точками одного изъ интерваловъ l''_i; и т. д.; мы получимъ такимъ образомъ два ряда чиселъ

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots,\alpha_n,\ldots;\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ldots,\beta_n,\ldots,$$

для которыхъ

$$lim\ \alpha_n = \alpha \leqq \beta = lim\ \beta_n.$$

Точки α и β не будутъ точками Q_ω, такъ какъ онѣ не входятъ ни въ одну изъ $Q^{(i)}$, при какомъ бы то ни было значенiи i.

Такимъ образомъ на l навѣрное существуютъ точки, не принадлежащiя Q_ω.

100. Пусть ξ—одна изъ точекъ Q_ω, отличная отъ x_1^0; если ξ—точка Q_ω, она должна входить въ одну изъ $Q^{(i)}$—напр. въ $Q^{(n)}$; она входитъ поэтому въ Q_n и въ P_n; если она входитъ въ P_n и отлична отъ x_1^0, то она служитъ предѣльной точкой для области Q_{n+1} и, слѣдовательно, для Q_ω, такъ какъ всѣ точки Q_{n+1} входятъ въ Q_ω; итакъ каждая точка Q_ω, кромѣ x_1^0, будетъ ея предѣльной точкой.

Обратно: пусть ξ—предѣльная точка Q_ω. Относительно ея можно сдѣлать два предположенiя: или въ произвольной ея окрестности имѣется безконечно много точекъ по крайней мѣрѣ одной изъ $Q^{(i)}$, напр. $Q^{(n)}$; или этого нѣтъ. Въ первомъ предположенiи ξ будетъ предѣльной точкой для $Q^{(n)}$ и слѣдовательно для Q_n, куда $Q^{(n)}$ входитъ цѣликомъ; а если ξ предѣльная точка Q_n, то она должна входить въ составъ $P_{n-1} - x_1^0$; а въ такомъ случаѣ она будетъ или точкой Q_{n-1} или точкой $\{x_2^0\}$. Въ первомъ случаѣ ξ войдетъ въ составъ Q_ω, во второмъ она находится внѣ Q_ω.

Изслѣдуемъ теперь второе предположенiе: пусть ξ—предѣльная точка, и въ ея окрестности нѣтъ безконечно многихъ точекъ ни одной изъ $Q^{(i)}$; тогда необходимо, чтобы въ произвольной ея окрестности лежало безконечно много точекъ различныхъ $Q^{(i)}$, только отъ каждой по конечному числу.

Въ такомъ случаѣ около ξ *для всякой заданной* $Q^{(n)}$ можетъ быть опредѣлена такая окрестность r, что внутри ея не будетъ точекъ $Q^{(n)}$; слѣдовательно ξ не будетъ предѣльной точкой ни для одной Q_n.

Разъ это такъ, разъ точка ξ не будетъ предѣльной точкой ни для одной Q_n, при какомъ бы то ни было конечномъ n, она не должна входить въ область $P_{n-1} - x_1^0$ и слѣдовательно она не войдетъ и въ Q_{n-1}, отличающуюся отъ P_{n-1} только на точку x_2^0; а если она не войдетъ ни въ одну Q_{n-1} ни при какомъ значенiи n, она не можетъ войти и въ Q_ω. Итакъ во второмъ предположенiи предѣльная точка ξ не будетъ точкой Q_ω. Что такiя точки существуютъ, мы увидимъ сейчасъ изъ приведеннаго ниже примѣра.

Такимъ образомъ оказывается, что всякая точка Q_ω, кромѣ x_1^0, будетъ ея предѣльной точкой, но не наоборотъ; поэтому $Q_\omega - x_1^0$ будетъ *сгущенной* областью, а слѣдовательно Q_ω' будетъ *совершенна*.

101. Точка x_1^0 можетъ быть предѣльной точкой Q_ω, но это не необходимо.

A. Можно легко убѣдиться, что, при извѣстномъ подборѣ размѣщенiй, она будетъ уединенной точкой Q_ω.

Дѣйствительно: возьмемъ $l = 1$, первый интервалъ перваго дѣленiя сдѣлаемъ равнымъ $\frac{1}{2}$, первый интервалъ второго дѣленiя—равнымъ $\frac{3}{8}$, третьяго дѣленiя — $\frac{5}{16}$, четвертаго дѣленiя — $\frac{9}{32}$ и т. д.; тогда первыя точки послѣдовательныхъ системъ дѣленiя будутъ соотвѣтственно

$$\frac{1}{2} = \frac{2^0+1}{2^2}, \quad \frac{3}{8} = \frac{2+1}{2^3}, \quad \frac{5}{16} = \frac{2^2+1}{2^4}, \ldots\ldots, \quad \frac{2^{n-2}+1}{2^n}, \ldots\ldots,$$

такъ что, при n возрастающемъ безконечно,

$$\lim_{i \ldots \infty} x_{\mu_i}^{(i)} = \frac{1}{4}, \text{ но } \neq 0,$$

гдѣ $x_{\mu_i}^{(i)}$ — границы указанныхъ выше интерваловъ; такимъ образомъ около точки x_1^0 непремѣнно долженъ быть въ данномъ случаѣ свободный отъ точекъ Q_ω интервалъ протяженiемъ въ $\frac{1}{4}$. Ясно, что такiе свободные интервалы возможны вправо отъ каждой изъ точекъ дѣленiя.

Точки, подобныя $\frac{1}{4}$, будутъ именно тѣ, которыя не входятъ въ Q_ω, но служатъ предѣльными точками Q_ω, и о которыхъ мы вели рѣчь въ предыдущемъ параграфѣ.

B. Возьмемъ другой примѣръ: пусть для того же участка (0, 1) первая точка перваго дѣленiя будетъ $\frac{1}{2}$, первая точка второго дѣленiя $\frac{1}{2^2}$, первая точка третьяго дѣленiя $\frac{1}{2^3}$; и т. д.; тогда

$$\lim_{i \ldots \infty} x_{\mu_i}^{(i)} = 0,$$

такъ что 0 будетъ также предѣльной точкой Q_ω.

102. Мы приходимъ такимъ образомъ къ тому заключенію, что во первыхъ — область $Q_\omega - x_1^0$ будетъ сгущенной, а иногда сгущенной будетъ и Q_ω, а во вторыхъ—въ произвольной части (α_0, β_0) участка l могутъ быть найдены точки $\alpha \overline{\gtrless} \beta$, не входящія въ составъ Q_ω.

Въ зависимости отъ того, возможно ли въ каждой части (α_0, β_0) участка l найти точки $\alpha = \beta$ или $\alpha < \beta$, не входящія въ составъ Q_ω, или въ отдѣльныхъ частяхъ l имѣетъ мѣсто то та, то другая случайность, мы будемъ имѣть въ первомъ случаѣ часто разсѣянную, во второмъ—рѣдко разсѣянную по участку l область Q_ω, и въ третьемъ Q_ω окажется областью смѣшанной; что второй случай возможенъ, мы видѣли это изъ примѣра А 101°.

103. Покажемъ теперь, что, при извѣстномъ подборѣ закона размѣщенія интерваловъ, область Q_ω можетъ быть часто разсѣяна.

Чтобы обнаружить это, возьмемъ такой примѣръ: участокъ l раздѣлимъ на четыре равныя части и первыя три возьмемъ за интервалы l_1', l_2', l_3', каждый изъ которыхъ будетъ такимъ образомъ равенъ $\frac{1}{4} l$; четвертую же часть раздѣлимъ снова на четыре, и назовемъ первыя три l_4', l_5', l_6', такъ что

$$l_4' = l_5' = l_6' = \frac{1}{4^2}\, l;$$

послѣднюю $\frac{1}{16}\, l$ раздѣлимъ опять на четыре части и первыя три будутъ l_7', l_8', l_9', при чемъ

$$l_7' = l_8' = l_9' = \frac{1}{4^3}\, l;$$

и т. д. Такимъ образомъ интервалы l_{3n+1}', l_{3n+2}', l_{3n+3}' будутъ между собою равны и составлять $\frac{1}{4^{n+1}}$ часть участка l. Затѣмъ на каждомъ изъ интерваловъ l_i' мы возьмемъ такое же распредѣленіе интерваловъ; и т. д.

Очевидно, что точки $x_i^{(n)}$ будутъ размѣщаться по l все чаще и чаще и при безконечно возрастающемъ n область $\{x\}$ сдѣлается *часто разсѣянной,* такъ какъ она будетъ областью конечныхъ четверичныхъ дробей, если l взять за единицу.

104. Въ томъ случаѣ, когда Q_ω *рѣдко разсѣянна,* ея производная, совпадающая съ производной сгущенной областью $Q_\omega - x_0$, будетъ *совершенна;* если область Q_ω часто разсѣянна, ея производная будетъ тожественна съ континуумомъ L.

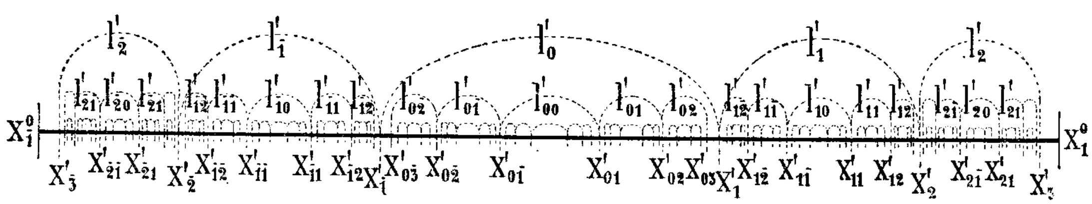
Такимъ образомъ мы получаемъ здѣсь область Q_ω, которая счетна и можетъ быть или рѣдко, или часто разсѣяна по L, т. е. мы приходимъ къ тому же типу, какой мы имѣли въ 95°-96°.

Пусть Q_ω рѣдко разсѣяна; назовемъ P совершенную область Q'_ω; ея свободные интервалы будутъ $\{\lambda_i\}$, область ихъ границъ и внѣшнихъ точекъ — соотвѣтственно Q и E; тогда $P \equiv Q + E$. Такъ какъ точки $Q_\omega - x_1^0$ могутъ здѣсь служить только лѣвыми границами свободныхъ интерваловъ, правыми же границами и внѣшними точками онѣ быть не могутъ, то $Q_\omega - x_1^0 \equiv D(Q)$, т. е. область границъ интерваловъ всѣхъ системъ размѣщенія типа ω^ω, кромѣ x_1^0, входитъ въ составъ границъ нѣкоторой совершенной области интерваловъ.

Такимъ образомъ области интерваловъ типа n^ω и ω^ω даютъ намъ аналогичныя области. Разница между ними та, что для ω^ω всѣ точки Q_ω будутъ навѣрное правыми предѣльными точками границъ свободныхъ интерваловъ совершенной области. Ясное дѣло, что подобнаго же ω^ω типа будетъ и область $^*\omega^\omega$, съ тою только разницей, что въ $^*\omega^\omega$ роль точки x_1^0 будетъ играть точка x_2^0.

105. Изслѣдуемъ далѣе область типа $(^*\omega + \omega)^\omega$, которую мы получимъ, если въ каждый изъ интерваловъ типа $^*\omega + \omega$ мы будемъ помѣщать новые интервалы $^*\omega + \omega$, въ нихъ снова интервалы того же типа, и т. д.

Аналогично предыдущему, мы обозначимъ $x_{\bar{1}}^0$ и x_1^0 границы участка L и назовемъ область, состоящую изъ этихъ двухъ точекъ $Q^{(0)} \equiv \{x_{\bar{1}}^0, x_1^0\}$; это будетъ область нолевого дѣленія.



Назовемъ далѣе $Q^{(1)}$ область точекъ перваго дѣленія, *внутреннихъ* по отношенію къ L,

$$Q^{(1)} \equiv \left\{x'_i\right\}_{\pm 1}^{\pm\omega};$$

что касается внѣшнихъ точекъ, то $E^{(1)} \equiv \{x_i^0\} \equiv Q^{(0)}$. Точки второго дѣленія, внутреннія по отношенію къ l'_i, назовемъ $\{x'_{ij}\}$; онѣ составятъ области

$$Q_i^{(2)} = \left\{ x'_{ij} \right\}_{j=\pm 1}^{\pm\omega}, \quad \sum_0^{\pm\omega} Q_i^{(2)} = Q^{(2)};$$

для внѣшнихъ точекъ интерваловъ второго дѣленія

$$E^{(2)} \equiv \left\{ x_i^0 \right\}_1^2 + \left\{ x'_i \right\}_{\pm 1}^{\pm\omega} \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)}.$$

Интервалы второго дѣленія $\left\{ l'_{ij} \right\}$ составляютъ двойной и даже, если угодно, четверной рядъ; ихъ можно привести къ виду простого ряда $\left\{ l''_i \right\}$; очевидно, что тогда будетъ $\left\{ l'_{ij} \right\} \equiv \left\{ l''_i \right\}$, такъ какъ для каждаго l'_{ij} найдется мѣсто въ ряду l''_i, и обратно. Границы интерваловъ $\left\{ l''_i \right\}$, которыя будутъ также счетны, перенумеруемъ въ нѣкоторомъ порядкѣ; пусть онѣ будутъ $\left\{ x''_k \right\}$. Ясно, что тогда $\left\{ x'_{ij} \right\} \equiv \left\{ x''_k \right\}$, такъ какъ никакія другія точки, кромѣ точекъ второго дѣленія, не являются границами интерваловъ l''_i; итакъ $\left\{ x''_k \right\} \equiv Q^{(2)}$.

Въ интервалахъ l''_i помѣщаемъ снова интервалы $\left\{ l''_{ij} \right\}$, ограниченные точками x''_{ij}, для которыхъ

$$Q_i^{(3)} \equiv \left\{ x''_{ij} \right\}_{j=\pm 1}^{\pm\omega}, \quad \sum_0^{\pm\omega} Q_i^{(3)} \equiv Q^{(3)},$$

при чемъ для внѣшнихъ точекъ l''_{ij} будемъ имѣть

$$E^{(3)} = \left\{ x_i^0 \right\} + \left\{ x'_i \right\}_{\pm 1}^{\pm\omega} + \left\{ x''_k \right\}_1^{\omega} \equiv \sum_0^2 Q^{(i)}.$$

Приведя интервалы $\left\{ l''_{ij} \right\}$ къ ряду $\left\{ l'''_i \right\}$ и ихъ границы обозначивъ въ нѣкоторомъ порядкѣ $\left\{ x'''_k \right\}$, будемъ имѣть $\left\{ x'''_k \right\} \equiv Q^{(3)}$, и т. д.; мы будемъ послѣдовательно получать

$$Q_i^{(n)} \equiv \left\{ x_{ij}^{(n-1)} \right\}_{j=\pm 1}^{\pm\omega}, \quad \sum_0^{\pm\omega} Q_i^{(n)} = Q^{(n)} \equiv \left\{ x_k^{(n)} \right\}, \quad E^{(n)} \equiv \sum_0^{n-1} Q^{(i)}.$$

Посмотримъ теперь, что будетъ представлять изъ себя области $Q^{(n)}$, $E^{(n)}$ и

$$P_n \equiv Q^{(n)} + E^{(n)} \equiv \sum_0^n Q^{(i)}.$$

Областью границъ интерваловъ n'аго размѣщенія оказываются исключительно точки n'аго дѣленія; всѣ же предыдущія точки дѣленія являются внѣшними точками интерваловъ $({}^*\omega + \omega)^n$; область P_n обнимаетъ собой границы всѣхъ дѣленій съ нолевого до n'аго включительно.

Выяснимъ далѣе, что выйдетъ въ томъ случаѣ, если мы будемъ увеличивать n безконечно; назовемъ

$$P_\omega \equiv lim\ P_n \equiv \sum_0^\omega Q^{(i)}.$$

Очевидно, что также

$$\lim_{n\ldots\infty} E^{(n)} \equiv lim \sum_0^{n-1} Q^{(i)} \equiv lim \sum_0^n Q^{(i)} = P_\omega.$$

Въ область P_ω будутъ входить всѣ точки, принадлежащія всѣмъ областямъ счетнаго ряда

$$Q^{(0)},\ Q^{(1)},\ Q^{(2)}, \ldots, Q^{(n)}, \ldots;$$

это будетъ область *границъ интерваловъ всѣхъ дѣленій*.

Если мы теперь, аналогично 99°, найдемъ производныя областей P_n, то у насъ получится такая таблица:

$P_0' \equiv 0,$

$P_1' \equiv P_0,\quad P_1'' \equiv 0,$

$P_2' \equiv P_1,\quad P_2'' \equiv P_0,\quad P_2''' \equiv 0,$

. . . . ,

$P_n' \equiv P_{n-1},\ P_n'' \equiv P_{n-2},\ P_n''' \equiv P_{n-3},\ P_n^{\mathrm{IV}} \equiv P_{n-4}, \ldots, P_n^{(n)} \equiv P_0,\ P_n^{(n+1)} \equiv 0.$

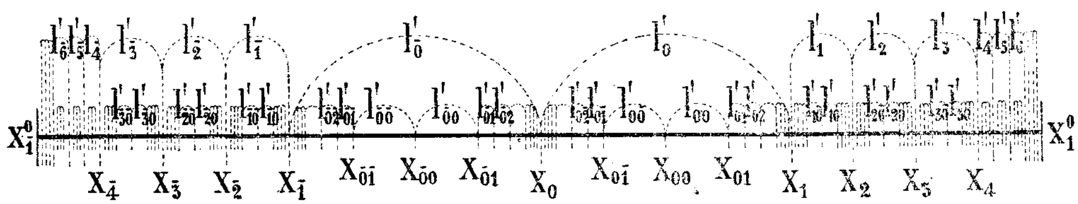
Мы видимъ отсюда, что каждая область P_n будетъ замкнутой, такъ какъ всѣ ея предѣльныя точки входятъ въ составъ области

P_{n-1}, заключающейся въ P_n; каждая изъ P_n будетъ областью перваго ряда и n'-аго вида, какъ и въ 99°.

Каждая изъ областей $Q^{(i)}$ — рѣдко разсѣяна; поэтому — согласно 99°—въ любой части (α_0, β_0) участка L могутъ быть найдены точки $\alpha < \beta$, не входящія въ составъ P, такъ какъ онѣ не будутъ принадлежать ни одной изъ $Q^{(i)}$.

106. Прежде чѣмъ излагать дальнѣйшее изученіе свойствъ области P_n, мы разберемъ нѣсколько примѣровъ, которые уяснятъ намъ, чего мы можемъ ждать отъ этого изученія.

А. Раздѣлимъ участокъ l на четыре равныя части, и среднія двѣ возьмемъ за интервалы $l'_{\bar{0}}$ и l'_0; затѣмъ двѣ крайнія части раздѣлимъ



снова на 4 равныя доли и обозначимъ черезъ $l'_{\bar{3}}$, $l'_{\bar{2}}$, $l'_{\bar{1}}$ и l'_1, l'_2, l'_3 части, прилегающія по три къ $l'_{\bar{0}}$ и l'_0 съ двухъ сторонъ; двѣ крайнихъ доли дѣлимъ опять на 4 и т. д. Тогда счетный рядъ интерваловъ $\{l'_i\}$ составится изъ двухъ интерваловъ длиной $\frac{1}{4}\,l$, шести интерваловъ длиной $\frac{1}{4^2}\,l$, шести интерваловъ длиной $\frac{1}{4^3}\,l$, и т. д., причемъ интервалы $l'_{\overline{3n+3}}$, $l'_{\overline{3n+2}}$, $l'_{\overline{3n+1}}$, l'_{3n+1}, l'_{3n+2}, l'_{3n+3} имѣютъ длину, равную $\frac{1}{4^{n+2}}\,l$. На каждомъ изъ интерваловъ $\{l'_i\}$ мы совершенно также расположимъ интервалы $\{l'_{ij}\}$; и т. д.

Очевидно—въ область P_ω границъ интерваловъ всѣхъ дѣленій войдутъ всѣ точки безконечно повторяющагося дѣленія участка l на 4; эти точки будутъ *часто разсѣяны* по интервалу.

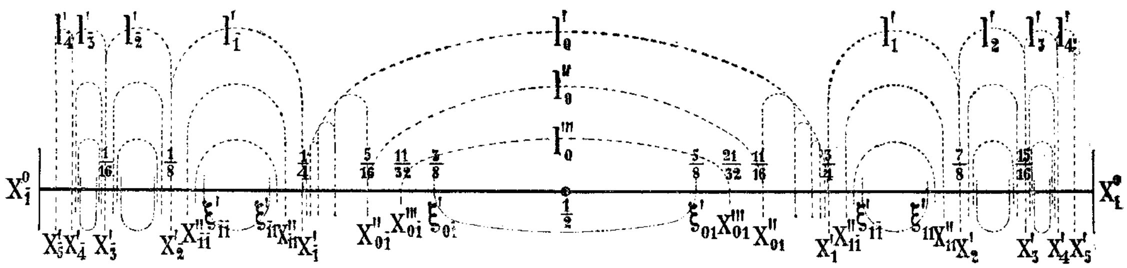
Если взять l за единицу, точки $\{x_i^{(n)}\}$ могутъ быть выражены правильными конечными четверичными дробями $0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$, гдѣ числа a_i принимаютъ только значенія 0, 1, 2, 3.

Каждая изъ точекъ P_ω будетъ предѣльной, но всѣ безконечныя дроби въ четверичной системѣ не войдутъ въ число точекъ P_ω.

Такимъ образомъ область P_ω будетъ часто разсѣяной, счетной, сгущенной, но незамкнутой; для нея $P'_\omega \equiv L$.

B. Возьмемъ теперь другой законъ дѣленія участка l.

Пусть первый интервалъ l'_0 расположенъ симметрично на l и составляетъ его половину; вправо и влѣво отъ него взяты интервалы $l'_{\bar{1}}$ и l'_1, равные половинамъ участковъ $(x^0_{\bar{1}}, x'_{\bar{1}})$ и (x'_1, x^0_1); далѣе — интервалы $l'_{\bar{2}}$ и l'_2, равные опять половинамъ $(x^0_{\bar{1}}, x'_{\bar{2}})$ и (x'_2, x^0_1), и т. д.; таковы будутъ интервалы перваго дѣленія.



Для интерваловъ второго дѣленія возьмемъ иное отношеніе средняго интервала къ соотвѣтствующему интервалу перваго дѣленія; для интерваловъ третьяго дѣленія опять измѣнимъ это отношеніе и т. д., тогда какъ для слѣдующихъ интерваловъ оставимъ тотъ же законъ, какъ и выше, т. е. каждый слѣдующій интервалъ беремъ равнымъ половинѣ отрѣзка отъ конца предыдущаго интервала до конца всего интервала предыдущаго дѣленія. Эти отношенія мы возьмемъ слѣдующимъ образомъ.

Границами для интервала l'_0 служатъ точки

$$\frac{1}{4}\,l = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2^3}\right) l,\ \ \frac{3}{4}\,l = \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2^3}\right) l;$$

на этомъ l'_0 для границъ средняго интервала второго дѣленія возьмемъ точки

$$\frac{5}{16}\,l = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2^4}\right) l,\ \ \frac{11}{16}\,l = \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2^4}\right) l;$$

для границъ того средняго интервала третьяго дѣленія, который расположенъ на интервалѣ $\left(\frac{5}{16}\,l,\ \frac{11}{16}\,l\right)$, возьмемъ

$$\frac{11}{32}\,l = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2^5}\right) l,\ \ \frac{21}{32}\,l = \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2^5}\right) l;$$

и т. д.; для n'аго дѣленія **границами** будутъ

$$\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2^{n+2}}\right) l,\ \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2^{n+2}}\right) l. \tag{1}$$

Въ такомъ же отношенiи должны быть взяты для полученiя интерваловъ n'аго дѣленiя среднiе интервалы на *каждомъ* интервалѣ $n-1$'аго дѣленiя.

Тогда расположенiе границъ интерваловъ на всѣхъ интервалахъ одной системы будутъ подобны, т. е. нанесены только разныхъ масштабахъ. Поэтому то, что происходитъ на одномъ интервалѣ извѣстнаго дѣленiя, будетъ происходить и на каждомъ другомъ интервалѣ той же системы.

Изслѣдуемъ же теперь среднiй интервалъ всего участка l. Такъ какъ предѣлами концовъ средняго интервала $l_0^{(n)}$ — на основанiи (1)— являются точки $\frac{3}{8}l$ и $\frac{5}{8}l$, то—во-первыхъ—эти точки не входятъ въ составъ области P_ω границъ интерваловъ всѣхъ дѣленiй $\left\{l_i^{(n)}\right\}$; во вторыхъ—интервалъ отъ $\frac{3}{8}l$ до $\frac{5}{8}l$ протяженiемъ въ $\frac{1}{4}l$ будетъ свободенъ отъ точекъ P_ω.

Этотъ свободный интервалъ относится къ первоначальному какъ $\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$, т. е. составляетъ его половину; слѣдовательно на каждомъ интервалѣ перваго дѣленiя мы будемъ имѣть свободный интервалъ, равный $\frac{1}{2}$ соотвѣтствующаго интервала.

Такимъ образомъ послѣ перваго дѣленiя уже выясняется счетный рядъ интерваловъ, свободныхъ отъ точекъ P_ω; общее протяженiе такихъ интерваловъ будетъ $\frac{1}{2}l$.

Совершенно также мы можемъ разсчитать тѣ новые свободные интервалы, которые явятся послѣ второго дѣленiя, и указать предѣльныя точки $\left\{\xi_{ij}''\right\}$, которыя при этомъ должны опредѣлиться; и т. д.

Мы видимъ, что въ настоящемъ примѣрѣ каждая изъ точекъ P_ω будетъ предѣльной точкой; но ими еще не исчерпывается все изобилiе предѣльныхъ точекъ, такъ какъ существуютъ такiя точки, не входящiя въ составъ P_ω.

Отсюда слѣдуетъ, что здѣсь область P_ω будетъ счетна, сгущенна, но *незамкнута*, и *рѣдко разсѣянна*; производная P_ω' этой области будетъ совершенна. Если мы построимъ для P_ω' область свободныхъ интерваловъ $\{\lambda_i\}$, то *ни одна изъ точекъ* P не будетъ служить границей этихъ интерваловъ; дѣйствительно—каждая x будетъ непремѣнно двухсторонней предѣльной точкой, тогда какъ границы интерваловъ типа

$\tilde{\omega}$ непремѣнно должны быть односторонними предѣлами. Слѣдовательно область P_ω войдетъ цѣликомъ въ составъ *внѣшнихъ* точекъ области интерваловъ $\{\lambda_i\}$. Точки ξ — очевидно — будутъ напротивъ того служить границами интерваловъ $\{\lambda_i\}$.

107. Предпославъ эти примѣры, мы возвращаемся теперь къ изслѣдованію области типа $({}^*\omega + \omega)^\omega$ въ общемъ ея видѣ. Какъ мы видѣли въ 105°, каждая изъ P_n замкнута; всѣ тѣ предѣльныя точки, въ окрестностяхъ которыхъ лежитъ безконечно много точекъ *одной изъ областей* P_n, входятъ въ составъ P_{n-1}; но, если мы переходимъ отъ P_n къ P_ω, возможно появленіе и другихъ предѣльныхъ точекъ, именно тѣхъ, которыя являются предѣлами счетныхъ рядовъ точекъ, взятыхъ изъ различныхъ $Q^{(i)}$; въ примѣрахъ 106° такія точки мы уже видѣли; эти точки, будучи предѣлами рядовъ точекъ $Q^{(i)}$ при различныхъ i, сами не входятъ ни въ одну изъ $Q^{(i)}$ и слѣдовательно не войдутъ и въ P_ω. Такимъ образомъ всѣ точки области P_ω являются предѣльными, но существуютъ для нея еще предѣльныя точки, не входящія въ ея составъ Слѣдовательно P_ω будетъ *сгущенной* областью, но не совершенной, такъ какъ она *незамкнута.*

Разъ P_ω сгущенна, то ея производная P_ω', которую мы назовемъ P, будетъ совершенна; въ ней появятся и недостававшія прежде предѣльныя точки.

Область P_ω, представляющая счетный рядъ счетныхъ рядовъ $Q^{(i)}$, будетъ сама счетна; P—же будетъ несчетна; слѣдовательно—область не входящихъ въ P_ω предѣльныхъ точекъ должна быть несчетной.

Всѣ области P_n перваго рода, область же P_ω, такъ какъ P' совершенна, является областью второго рода.

Далѣе—каждая изъ областей P_n рѣдко разсѣяна; что же касается до P_ω, то, оказывается, она можетъ быть и рѣдко разсѣяна, и часто разсѣяна; примѣры того и другого мы видѣли выше. Поэтому въ произвольной части участка l имѣются для первыхъ—свободные интервалы, и для вторыхъ—точки, принадлежащія Π_ω. Каждая изъ точекъ P_ω — двусторонняя предѣльная точка; поэтому, если для рѣдко разсѣянной области P_ω мы построимъ свободные интервалы $\{\lambda_i\}$ совершенной области $P \equiv P_\omega'$, то *ни одна изъ точекъ* P_ω не будетъ границей такихъ интерваловъ: всѣ онѣ окажутся ихъ внѣшними точками. Если P_ω часто разсѣяна, то—очевидно—P тожественна съ L.

Итакъ мы можемъ высказать для рѣдко разсѣянной области такое утвержденіе:

Область P_ω *границъ интерваловъ всѣхъ дѣленій типа* $({}^*\omega+\omega)^\omega$ *входитъ въ составъ внѣшнихъ точекъ интерваловъ* $\{\lambda_i\}$ *совершенной области* P'_ω. Отсюда вытекаетъ, что размѣщеніе интерваловъ типа $({}^*\omega+\omega)^\omega$ даетъ результаты, близкіе результатамъ размѣщенія ω^ω, но не совпадающіе съ ними. Что касается размѣщенія собственно *свободныхъ* интерваловъ $\{\lambda_i\}$, то $({}^*\omega+\omega)^\omega$ не отличается отъ размѣщенія $\tilde{\omega}$.

108. Возьмемъ размѣщеніе типа $\tilde{\omega}$, въ его интервалахъ помѣстимъ снова интервалы того же типа и будемъ продолжать такую операцію безконечно; получающійся типъ обозначимъ $\tilde{\omega}^\omega$. Назовемъ $Q^{(0)}\equiv\{x^0_{\bar 1}, x^0_1\}$, $Q^{(1)}$ — границы интерваловъ перваго размѣщенія

$$Q^{(1)}\equiv\{x'_i\}_{i=\pm1}^{\pm\omega}$$

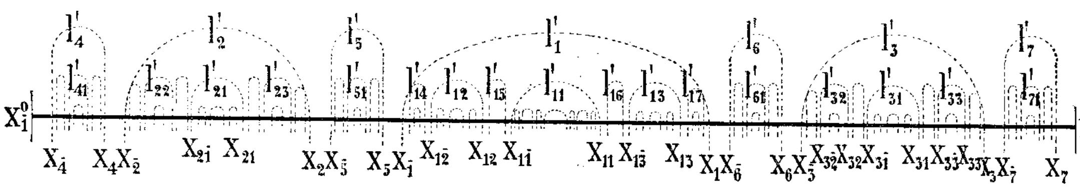
и $\bar{E}^{(1)}$ — область ихъ внѣшнихъ точекъ, *не включая* въ нее внѣшнихъ точекъ $x^0_{\bar 1}$ и x^0_1, и

$$E^{(1)}\equiv Q^{(0)}+\bar{E}^{(1)};$$

тогда

$$P^{(1)}\equiv Q^{(1)}+E^{(1)} \tag{2}$$

есть, по условію, совершенная область.



На каждомъ изъ ея свободныхъ интерваловъ l'_i должна быть помѣщена совершенная область интерваловъ $\{l'_{ij}\}$; назовемъ

$$Q_i^{(2)}\equiv\{x'_{ij}\}_{j=\pm1}^{\pm\omega},\quad \sum_1^\omega Q_i^{(2)}\equiv Q^{(2)},\quad \sum_1^\omega \bar{E}_i^{(2)}\equiv\bar{E}^{(2)},$$

гдѣ $E_i^{(2)}$ — область внѣшнихъ точекъ интервала l_i, не включая $x_{\bar i}$ и x_i, и $E^{(2)}$ — область внѣшнихъ точекъ интерваловъ $\{l'_{ij}\}$, только опять таки безъ точекъ $\{x'_i\}\equiv Q^{(1)}$. Область всѣхъ внѣшнихъ точекъ послѣ второго дѣленія будетъ.

$$E^{(2)}\equiv Q^{(0)}+\bar{E}^{(1)}+Q^{(1)}+\bar{E}^{(2)}\equiv P^{(1)}+\bar{E}^{(2)}, \tag{3}$$

при чемъ—на основанiи 87°—область

$$P^{(2)} \equiv Q^{(2)} + E^{(2)} \tag{4}$$

будетъ снова совершенной. На основанiи (3) и (4)—$P^{(1)}$ входитъ въ составъ $P^{(2)}$

$$P^{(1)} = D\,(P^{(2)}).$$

Замѣтимъ при этомъ, и это очень важно, что *всѣ точки* $P^{(2)}$, *кромѣ точекъ* $P^{(1)}$, *принадлежатъ составу* $G^{(1)}$—области внутреннихъ точекъ интерваловъ $\tilde{\omega}$ перваго дѣленiя.

Прежде чѣмъ приступать къ третьему дѣленiю, мы должны двойной рядъ интерваловъ $\{l'_{ij}\}$ превратить въ простой рядъ $\{l''_i\}$ и дѣлать такое преобразованiе послѣ каждой операцiи; при этомъ нумерацiя точекъ $\{x'_{ij}\}$ сама собой перейдетъ въ нумерацiю $\{x''_i\}$, такъ какъ каждому интервалу l''_i отвѣчаетъ пара точекъ, не служащихъ границами другихъ интерваловъ; такимъ образомъ

$$\{x''_i\}_{\pm 1}^{\pm\omega} \equiv \sum_{i=1}^{\omega} \{x'_{ij}\}_{j=\pm 1}^{\pm\omega} = Q^{(2)}.$$

Послѣ третьяго дѣленiя, при новой нумерацiи интерваловъ, мы получимъ

$$Q_i^{(3)} = \{x''_{ij}\},\ \ Q^{(3)} \equiv \sum_1^{\omega} Q_i^{(3)},\ \ \bar{E}^{(3)} \equiv \sum_1^{\omega} \bar{E}_i^{(3)},\ \ E^{(3)} \equiv P^{(2)} + \bar{E}^{(3)},$$

гдѣ опять $\bar{E}_i^{(3)}$ составляютъ внѣшнiя точки интерваловъ l''_{ij}, лежащихъ на интервалѣ l''_i, не включая его границъ, и $\bar{E}^{(3)}$— область всѣхъ такихъ внѣшнихъ точекъ, кромѣ точекъ $\{x''_i\} \equiv Q^{(2)}$. Опять таки область

$$P^{(3)} \equiv Q^{(3)} + E^{(3)}$$

будетъ совершенной, и $P^{(2)} \equiv D\,(P^{(3)})$; какъ и по поводу $P^{(2)}$, надо будетъ замѣтить здѣсь, что точки $P^{(3)}$, кромѣ точекъ области $P^{(2)}$, всѣ берутся изъ состава $G^{(2)}$—области внутреннихъ точекъ второго дѣленiя.

Мы видимъ такимъ образомъ, что послѣ двухъ, трехъ и т. д. конечнаго числа операцiй $\tilde{\omega}$ мы получимъ всегда совершенную область

$$P^{(n)} \equiv Q^{(n)} + E^{(n)},$$

которая обнимаетъ предыдущую область $P^{(n-1)}$

$$P^{(n-1)} \equiv D\,(P^{(n)}),$$

при чемъ точки P_n, кромѣ точекъ этой послѣдней области, всѣ взяты изъ состава внутреннихъ точекъ $G^{(n-1)}$ интерваловъ $n-1$'аго дѣленія.

Спрашивается теперь, какую форму приметъ область

$$P_\omega = \lim_{n \ldots \infty} P^{(n)}$$

при безконечномъ продолженіи процесса $\tilde{\omega}$?

Какъ бы велико ни было n, всякое новое насажденіе области $\tilde{\omega}$ въ интервалы предыдущей совершенной области, связываетъ счетный рядъ совершенныхъ областей на этихъ интервалахъ въ одну единую совершенную область. Посмотримъ, будетъ ли область P_ω совершенной и при безконечномъ возрастаніи n, или же—напротивъ того—она потеряетъ это свойство.

Для того чтобы это выяснить, надо убѣдиться, будетъ ли каждая точка области P_ω предѣльной точкой, и всѣ ли предѣльныя точки входятъ въ составъ P_ω? на первый вопросъ мы получимъ, какъ это будетъ видно ниже, положительный, а на второй — отрицательный отвѣтъ.

109. Область $\mathrm{\dot{P}}$ составляется послѣдовательно изъ всевозможныхъ различныхъ точекъ совершенныхъ областей

$$P^{(1)},\ P^{(2)},\ P^{(3)}, \ldots, P^{(n)}, \ldots,$$

относительно которыхъ мы видѣли, что каждая область $P^{(n)}$ входитъ цѣликомъ въ слѣдующую за ней $P^{(n+1)}$.

Обозначимъ

$$\begin{aligned}
&P^{(1)} \equiv Q^{(1)} + E^{(1)} \equiv P_1,\\
&P^{(2)} \equiv Q^{(2)} + E^{(2)} \equiv Q^{(2)} + P^{(1)} + \bar{E}^{(2)} \equiv P_1 + P_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&P^{(n)} \equiv Q^{(n)} + E^{(n)} \equiv Q^{(n)} + P^{(n-1)} + \bar{E}^{(n)} \equiv \sum_1^n P_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

гдѣ $P_n \equiv Q^{(n)} + \bar{E}^{(n)}$; тогда область $P_\omega = \lim P^{(n)}$ будетъ состоять изъ всѣхъ точекъ областей

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots,$$

которыя другъ съ другомъ *общихъ точекъ уже не имѣютъ,*

$$P_\omega = \sum_1^\omega P_i;$$

если мы внесемъ сюда значеніе P_i, то получимъ

$$P_\omega = \sum_1^\omega Q^{(i)} + \sum_1^\omega E^{(i)},$$

откуда слѣдуетъ, что P составляется изъ *границъ и внѣшнихъ точекъ всѣхъ дѣленій.*

Посмотримъ, что представляютъ изъ себя области P_i? Область P_1 совершенна; P_2 отличается отъ совершенной области второго дѣленія $P^{(2)}$ только отсутствіемъ точекъ $P^{(1)}$, т. е. она будетъ состоять изъ счетнаго ряда совершенныхъ областей, но на открытыхъ интервалахъ l_i; такимъ образомъ въ нее не войдутъ границы этихъ интерваловъ и ихъ предѣльныя точки. Каждая изъ областей P_n находится въ такомъ же отношеніи къ совершенной области $P^{(n)}$ и—слѣдовательно--она будетъ подобна области P_2. Всѣ эти области будутъ сгущены, несчетны и рѣдко разсѣяны, при чемъ недостающія предѣльныя точки каждой изъ нихъ P_n входятъ въ составъ предыдущихъ областей P_i, такъ какъ $\sum\limits_1^n P_i = P^{(n)}$ совершенна.

Изслѣдуемъ же теперь область P_ω; пусть x одна изъ ея точекъ; если это такъ, то точка x должна входить въ составъ одной изъ областей P_i, напримѣръ — въ P_n; такъ какъ P_n сгущена, то x будетъ предѣльной точкой P_n; поэтому въ произвольной ея окрестности лежатъ точки P_n, а слѣдовательно и точки P_ω, такъ какъ P_n входитъ въ составъ P_ω цѣликомъ, и x будетъ такимъ образомъ предѣльной точкой P_ω; итакъ всякая точка области P_ω будетъ ея предѣльной точкой. Пусть теперь наоборотъ x — одна изъ предѣльныхъ точекъ P_ω; тогда въ ея произвольной окрестности лежатъ точки P_ω. Относительно этихъ точекъ можно сдѣлать, какъ и выше, только два исключающихъ другъ друга предположенія: или въ произвольной окрестности x лежитъ безконечно много точекъ по крайней мѣрѣ одной изъ областей P_i, или этого нѣтъ.

Въ первомъ случаѣ x будетъ предѣльной точкой по крайней мѣрѣ одной области—P_n и слѣдовательно она войдетъ въ предыдущія области P_i; тогда она появится и въ составѣ P_ω.

Во второмъ предположеніи, если x предѣльная точка P_ω, но въ ея окрестности нѣтъ безконечно многихъ точекъ ни одной изъ P_n, необходимо—x будетъ предѣломъ для нѣкотораго ряда точекъ

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots, \tag{6}$$

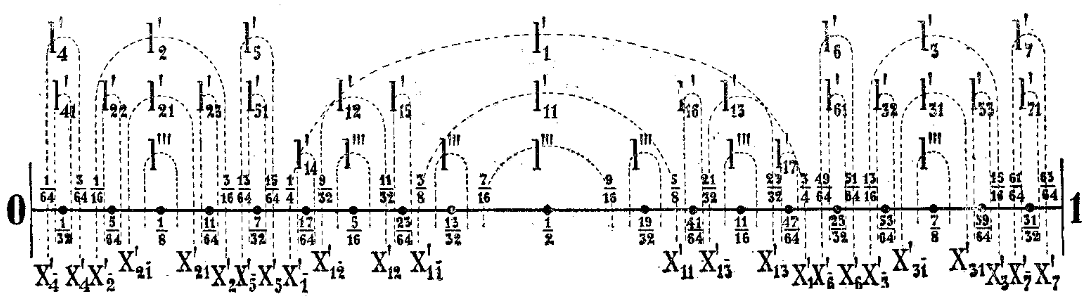
изъ которыхъ къ каждой изъ P_n принадлежитъ только *конечное* число. Въ этомъ случаѣ мы можемъ легко доказать, подобно тому, какъ это мы дѣлали выше, что точка x *не войдетъ* въ P_ω.

Итакъ P_ω будетъ сгущенной, но незамкнутой областью, т. е. операція $\tilde{\omega}^\omega$ не даетъ уже такого результата, какъ $\tilde{\omega}^n$, сводившаяся къ $\tilde{\omega}$; здѣсь дѣло выходитъ иное.

110. Посмотримъ теперь, что можно сказать относительно разсѣянія области P_ω по участку L?

Для этой цѣли разберемъ предварительно два примѣра.

A. Пусть на участкѣ $L \equiv (0, 1)$ симметрично помѣщенъ первый интервалъ l_1', равный $\frac{1}{2}$; границами его будутъ точки $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$; на интервалѣ $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ симметрично помѣщенъ второй интервалъ l_2', рав-



ный половинѣ этого интервала, т. е. $\frac{1}{8}$; его границы будутъ $\frac{1}{16}$ и $\frac{3}{16}$; на интервалѣ $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ помѣщаемъ такимъ же образомъ интервалъ l_3' длиной $\frac{1}{8}$ съ границами $\frac{13}{16}$ и $\frac{15}{16}$; на интервалахъ

$$\left(0, \frac{1}{16}\right), \left(\frac{3}{16}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{13}{16}\right), \left(\frac{15}{16}, 1\right)$$

симметрично помѣщаемъ интервалы l_4', l_5', l_6', l_7', равные по длинѣ половинѣ предыдущаго интервала, т. е. равные $\frac{1}{32}$; и т. д. Такова будеть область перваго дѣленія; на каждомъ изъ интерваловъ l_i' этого дѣленія помѣстимъ область интерваловъ такого же строенія; въ ея свободныхъ интервалахъ опять такую же область и т. д.

Такъ какъ границы наибольшаго интервала каждаго дѣленія всегда дѣлятъ пополамъ разстояніе между срединой предыдущаго интервала и его концами, то предѣлъ этого наибольшаго интервала равенъ 0, и слѣдовательно его границы имѣютъ предѣломъ общую точку ξ—средину первоначальнаго интервала. Отсюда слѣдуетъ, что область границъ интерваловъ будетъ *часто разсѣяна*; кромѣ того она *счетна*; область же P_ω будетъ несчетна, такъ какъ несчетна каждая P_n, входящая въ P_ω.

Очевидно, что въ произвольной части участка L здѣсь *могутъ быть найдены точки и именно — предѣльныя точки, не входящія въ составъ* P_ω: это будутъ точки ξ—средины каждаго интервала, впервые появляющагося въ процессѣ дѣленія.

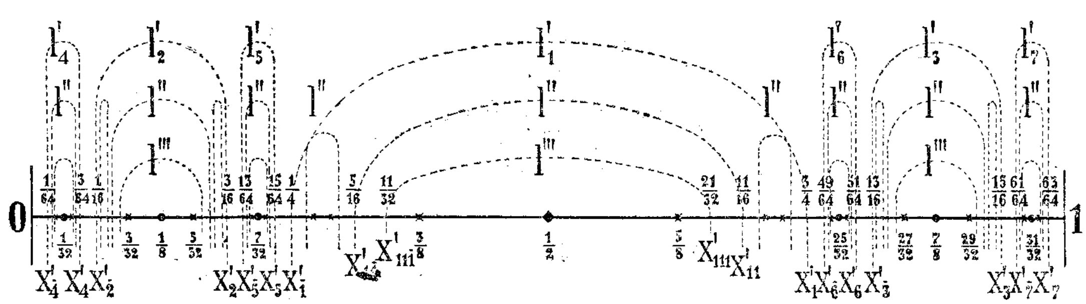
Такимъ образомъ P_ω будетъ незамкнутой, хотя и сгущенной; P_ω' совпадетъ здѣсь съ самимъ участкомъ L.

B. Возьмемъ другой законъ распредѣленія, немного отличающійся отъ перваго.

На участкѣ L, для котораго $l = 1$, по прежнему помѣстимъ симметрично интервалъ, равный по длинѣ $\frac{1}{2}$; его границами будутъ

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{2^3} - \frac{1}{2^3}, \quad \frac{3}{4} = \frac{5}{2^3} + \frac{1}{2^3};$$

остальные интервалы перваго дѣленія оставимъ такими же, какими они были взяты въ первомъ примѣрѣ. На интервалѣ l_1' возьмемъ



опять таки симметрично интервалъ l'', опредѣляя его точками

$$\frac{5}{16} = \frac{3}{2^3} - \frac{1}{2^4}, \quad \frac{11}{16} = \frac{5}{2^3} + \frac{1}{2^4};$$

этотъ интервалъ, равный $\frac{3}{8}$, составитъ $\frac{3}{8} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ интервала l_1'.

На интервалахъ $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right)$ и $\left(\frac{11}{16}, \frac{3}{4}\right)$ будемъ размѣщать остальные интервалы второго дѣленія по тому же закону, какъ и выше, т. е. брать интервалы по величинѣ равные половинамъ указанныхъ выше частей. Такой же законъ дѣленія возьмемъ на всѣхъ интервалахъ l_i' перваго дѣленія, т. е. вездѣ среднiй симметрично расположенный интервалъ будетъ равенъ $\frac{3}{4} l_i'$.

Для средняго интервала третьяго дѣленія беремъ интервалъ

$$\left(\frac{11}{32} = \frac{3}{2^3} - \frac{1}{2^5}, \frac{21}{32} = \frac{5}{2^3} + \frac{1}{2^5}\right),$$

который составляетъ $\frac{5}{16} : \frac{3}{8} = \frac{5}{6}$ интервала l''; и т. д.; вообще среднимъ интерваломъ n'аго дѣленія будетъ

$$\left(\frac{3}{2^3} - \frac{1}{2^{n+2}}, \frac{5}{2^3} + \frac{1}{2^{n+2}}\right).$$

Этими средними интервалами опредѣляется каждая изъ системъ дѣленій, такъ какъ остальные интервалы въ каждой системѣ берутся по одному и тому же закону.

При безконечномъ возрастаніи n точки

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{2^3}, \frac{3}{8} - \frac{1}{2^4}, \frac{3}{8} - \frac{1}{2^5}, \ldots, \frac{3}{8} - \frac{1}{2^{n+2}}, \ldots,$$

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{2^3}, \frac{5}{8} + \frac{1}{2^4}, \frac{5}{8} + \frac{1}{2^5}, \ldots, \frac{5}{8} + \frac{1}{2^{n+2}}, \ldots$$

имѣютъ соотвѣтственно предѣлами точки $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$, которыя не будутъ границами интерваловъ и которыя сами опредѣлятъ новый интервалъ $\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$, *свободный отъ точекъ* P_ω. Этотъ интервалъ составляетъ $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ интервала l_1'. Такъ какъ на всѣхъ интервалахъ перваго дѣленія расположеніе интерваловъ дальнѣйшихъ системъ дѣленія будетъ подобно расположенію на l_1', т. е. будетъ такимъ же, но въ другомъ масштабѣ, то на каждомъ изъ интерваловъ l_i' окажется свободный отъ точекъ P_ω интервалъ, равный по длинѣ $\frac{1}{2} l_i'$. Аналогичное будетъ имѣть мѣсто на интервалахъ второго дѣленія.

Такимъ образомъ указанный выше законъ дѣленія дастъ на L незамкнутую, рѣдко разсѣянную область.

Очевидно, что здѣсь будетъ P_ω сгущена и слѣдовательно P_ω' совершенна.

111. Итакъ, разсматривая область интерваловъ типа $\tilde{\omega}^{\omega}$, мы приходимъ къ такимъ заключеніямъ:

Область границъ интерваловъ, всегда счетная, можетъ быть рѣдко и часто разсѣяна по участку L, въ зависимости отъ закона расположенія интерваловъ каждаго изъ составляющихъ типовъ $\tilde{\omega}$.

Область P_ω всегда несчетна и сгущена, но не замкнута; поэтому $P_\omega' \equiv P$ для часто разсѣянной области совпадаетъ съ участкомъ L, а для рѣдко разсѣянной будетъ совершенна.

Для рѣдко разсѣянной области P_ω каждая изъ точекъ дѣленія $\{x_i^n\}$, при произвольномъ n, будучи *внѣшней* точкой совершенной области $P^{(n+1)}$, окажется двусторонней предѣльной точкой; слѣдовательно—ни одна изъ точекъ P_ω не можетъ быть границей свободнаго интервала λ_i совершенной области $P \equiv P_\omega'$; всѣ эти точки входятъ такимъ образомъ въ составъ внѣшнихъ точекъ E области уединенныхъ интерваловъ $\{\lambda_i\}$; въ этомъ отношеніи $\tilde{\omega}^{\omega}$ напоминаетъ намъ $({}^*\omega + \omega)^{\omega}$.

Границы $\{\lambda_i\}$ опредѣлятся предѣльными точками области P_ω, не входящими въ составъ P_ω.

Не трудно видѣть, что для области интерваловъ типа $\tilde{\omega}^{\omega}$ область $P_\omega = lim\ P^{(n)}$ *совпадаетъ съ областью внѣшнихъ точекъ интерваловъ совершенной области* P_ω'. Для того чтобы въ этомъ убѣдиться, будемъ разсуждать такъ: каждая точка P_ω входитъ въ составъ внѣшнихъ точекъ интерваловъ $\{\lambda_i\}$; возможна ли теперь какая либо внѣшняя точка $\{\lambda_i\}$, которая не была бы точкой P_ω? Пусть это такъ, пусть ξ эта точка; она, какъ точка $P_\omega' \equiv P$, будетъ предѣльной и вдобавокъ двусторонней предѣльной точкой P_ω. На основаніи 109°—эта точка *не* будетъ точкой P_ω, если она служитъ предѣломъ для ряда (6) точекъ *различныхъ* дѣленій. А въ такомъ случаѣ эти точки будутъ границами ряда интерваловъ

$$l'_{\mu_1},\ l''_{\mu_2},\ l'''_{\mu_3},\ \ldots,\ l^{(n)}_{\mu_n},\ \ldots, \tag{7}$$

которые располагаются одинъ на другомъ; границы интерваловъ (7) опредѣлятъ или точку ξ—границу свободнаго интервала $P \equiv P_\omega'$, если P_ω рѣдко разсѣяна; въ этомъ случаѣ ξ будетъ односторонней предѣльной точкой, что противно положенію; или же ξ окажется предѣльной точкой для двухъ рядовъ границъ интерваловъ (7); тогда P_ω не будетъ рѣдко разсѣяна, что опять идетъ противъ нашего условія. Итакъ ξ не можетъ не быть точкой P_ω.

Выходитъ отсюда, что область интерваловъ $\{\lambda_i\}$, свободныхъ отъ точекъ P_ω совпадаетъ съ свободными интервалами совершенной области $P'_\omega \equiv P$, при чемъ только границы интерваловъ $\{\lambda_i\}$ не принадлежатъ P_ω.

112. Сопоставимъ теперь *всѣ разобранные типы размѣщенія интерваловъ*

$$n^\omega,\ \omega^\omega,\ {}^*\omega^\omega,\ ({}^*\omega + \omega)^\omega,\ \tilde{\omega}^\omega$$

и постараемся выяснить нѣкоторые общіе выводы. Назовемъ на минуту въ видахъ удобства

$$\omega^\omega = \Omega_1,\ {}^*\omega^\omega = \Omega_2,\ ({}^*\omega + \omega)^\omega = \Omega_3,\ \tilde{\omega}^\omega = \Omega_4$$

и сопоставимъ сначала первые три типа, назвавъ P_ω область границъ и внѣшнихъ точекъ интерваловъ всѣхъ системъ дѣленія.

Мы видѣли выше, что область P_ω можетъ быть рѣдко разсѣяна по участку L и можетъ быть часто разсѣяна; въ послѣднемъ случаѣ она особеннаго интереса не представляетъ, а потому мы перейдемъ къ первому случаю.

Для перваго изъ типовъ Ω_1 всѣ точки P_ω, кромѣ лѣвой границы всего участка, будутъ правосторонними предѣльными точками, для Ω_2 тоже будетъ со всѣми точками, кромѣ правой границы основного интервала, но точки P_ω будутъ лѣвыми предѣлами, и наконецъ для Ω_3 всѣ точки безъ исключенія оказываются предѣльными и вдобавокъ — двусторонними, кромѣ — разумѣется — границъ участка L. Мы можемъ сказать, что во всѣхъ трехъ случаяхъ область P_ω будетъ сгущенной, кромѣ — можетъ быть — единственной уединенной точки.

Если область P_ω сгущена, до точки $x_{\bar{0}}$ или x_0, и рѣдко разсѣяна, то производная ея P'_ω будетъ рѣдко разсѣянной совершенной областью, при чемъ уединенная точка $x_{\bar{0}}$ или x_0 въ P'_ω уже не появится; съ этимъ изчезновеніемъ $x_{\bar{0}}$ или x_0 связано уменьшеніе участка L, такъ что для P'_ω основной интервалъ можетъ быть уже иной.

Если мы построимъ для $P'_\omega \equiv S$ свободные интервалы, то увидимъ, что въ число ихъ границъ Q могутъ входить нѣкоторыя изъ точекъ P_ω, но кромѣ нихъ навѣрное войдутъ точки, не принадлежащія составу P_ω. Тѣ точки P_ω, которыя не войдутъ въ Q, будутъ внѣшними точками области интерваловъ P'_ω, т. е. будутъ входить въ E. Для областей Ω_1 и Ω_2 одна изъ границъ свободныхъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія принадлежитъ непремѣнно P_ω; это будетъ лѣвая граница для Ω_1 и правая для Ω_2. Для области Ω_3 ни одна изъ точекъ P_ω не будетъ границей свободнаго интервала области Q.

Такимъ образомъ строеніе области P_ω мы можемъ себѣ представить слѣдующимъ образомъ: построивъ область интерваловъ P_ω', мы получимъ точки P_ω въ качествѣ лѣвыхъ для Ω_1 или правыхъ для Ω_2 границъ свободныхъ интерваловъ и для Ω_3 въ качествѣ счетнаго ряда внѣшнихъ точекъ этихъ интерваловъ; для Ω_1 и Ω_2 мы должны будемъ еще къ основному интервалу области S слѣва или справа пристроить свободный интервалъ съ уединенной точкой на его концѣ.

Въ Ω_1 и Ω_2 всѣ точки, кромѣ $x_{\bar{0}}$ или x_0, будутъ односторонними предѣлами и въ Ω_3 напротивъ того двусторонними, кромѣ границъ участка. Предѣльныя точки области P_ω, не входящія въ составъ P_ω, распредѣляются на двѣ категоріи: во первыхъ счетный рядъ границъ свободныхъ интерваловъ P_ω' и во вторыхъ несчетная область предѣльныхъ точекъ для этихъ границъ; что эта послѣдняя область несчетна, слѣдуетъ изъ того, что P_ω' совершенна. Такимъ образомъ свободные интервалы области P_ω' оказываются для P_ω открытыми интервалами, такъ какъ по крайней мѣрѣ одна изъ границъ каждаго интервала не принадлежитъ составу P_ω.

Область типа Ω_4 представляетъ нѣкоторыя аналогіи съ Ω_3: обѣ онѣ сгущены, въ обѣихъ всѣ точки, кромѣ границъ основного интервала, двустороннія предѣльныя точки; въ обѣихъ ни одна изъ точекъ дѣленія не будетъ границей свободнаго интервала окончательнаго размѣщенія. Но между ними есть и глубокая разница: внѣшнія точки каждой системы дѣленія $({}^*\omega + \omega)^n$ всегда счетны, тогда какъ для $\tilde{\omega}^n = \tilde{\omega}$ онѣ несчетны; затѣмъ для Ω_3 область P_ω обнимаетъ всѣ границы всѣхъ дѣленій, въ числѣ которыхъ находятся и внѣшнія точки этихъ дѣленій; тогда какъ для Ω_4 въ составѣ P_ω можно различать во первыхъ—точки всѣхъ дѣленій и во вторыхъ внѣшнія точки этихъ дѣленій; область P_ω для Ω_3 будетъ счетна, тогда какъ для Ω_4 она несчетна. Наконецъ—особенность области P_ω для Ω_4 та, что она совпадаетъ съ областью всѣхъ внѣшнихъ точекъ интерваловъ P_ω' типа $\tilde{\omega}$.

Наконецъ относительно типа n^ω, если онъ даетъ рѣдко разсѣянную область, мы ничего не можемъ сказать выходящаго за предѣлы общей теоремы 73°, пока намъ не данъ вполнѣ опредѣленно законъ размѣщенія точекъ послѣдовательныхъ дѣленій.

Всѣ эти соображенія оказываются очень существенными для построенія дальнѣйшихъ областей все болѣе и болѣе сложнаго типа.

113. Пусть теперь ω_i обозначаетъ одинъ изъ типовъ

$$(8) \qquad \omega,\ {}^*\omega,\ {}^*\omega + \omega.$$

Разсмотримъ сложный типъ размѣщенія вида

$$\Omega = \prod_1^{\omega} \omega_i,$$

который представляетъ собой обобщеніе предыдущихъ типовъ Ω_1, Ω_2 и Ω_3.

Простѣйшими изъ типовъ Ω будутъ такіе, въ которыхъ встрѣчается безконечное число множителей только одного изъ типовъ (8), тогда какъ другіе входятъ только конечное число разъ.

Пусть въ первыхъ m множителяхъ встрѣчаются всѣ три или по крайней мѣрѣ—два типа, тогда какъ каждый $m+i$'ый множитель принадлежитъ къ одному изъ видовъ (8); тогда

$$\Omega = \prod_1^{m} \omega_j . \prod_{m+1}^{\omega} \omega_i = \prod_1^{m} \omega_j .\ \omega_i^{\omega};$$

если назвать $\prod\limits_1^{m} \omega_i = \omega_0$, то

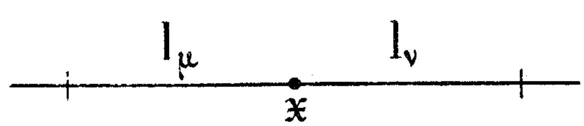
$$\Omega = \omega_0 .\ \omega_i^{\omega}$$

представляетъ собой размѣщеніе одного изъ типовъ Ω_1, Ω_2, Ω_3 въ свободныхъ интервалахъ типа ω_0

$$\Omega = \omega_0 .\ \Omega_i .$$

Покажемъ прежде всего, что въ Ω не можетъ быть уединенныхъ точекъ.

Въ размѣщеніи ω_0 однѣ точки могутъ быть предѣльными и другія—уединенными; тѣ точки, которыя были предѣльными въ ω_0, останутся предѣльными и для Ω. Пусть теперь x—одна изъ уединенныхъ точекъ; прежде всего—она не можетъ быть границей всего участка L. Дѣйствительно: если бы это было такъ, ω_0 должна была бы быть типа ω^n или ${}^*\omega^n$, что исключено предположеніемъ; итакъ x—одна изъ внутреннихъ точекъ L; слѣдовательно—она будетъ общей границей двухъ смежныхъ интерваловъ l_μ и l_ν.



Разъ въ интервалахъ ω_0 помѣщаются интервалы типа ω_i^ω, то x окажется предѣльной точкой области ω_i^ω на l_μ, если $\omega_i = \omega$, или на l_ν, если $\omega_i = {}^*\omega$, или наконецъ и на l_μ, и на l_ν въ случаѣ, если $\omega_i = {}^*\omega + \omega$. Итакъ — во всякомъ случаѣ она окажется предѣльной точкой окончательнаго размѣщенія.

Наконецъ въ типѣ ω_i^ω уединенной точкой можетъ быть одна изъ границъ основного интервала; здѣсь же этими границами являются границы интерваловъ ω_0, которыя, какъ мы только что видѣли, уединенными быть не могутъ.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ тому выводу, что въ указанномъ предположеніи типъ Ω даетъ *сгущенную область* P границъ интерваловъ всѣхъ системъ дѣленія; слѣдовательно P' будетъ совершенна.

Такъ какъ свободные интервалы P' будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ свободными интервалами Ω, а всѣ границы и внѣшнія точки ω_0 перейдутъ въ составъ границъ и внѣшнихъ точекъ совершенной области P', то всѣ выводы 112° продолжаютъ здѣсь сохранять свою силу.

Если мы возьмемъ теперь другое предположеніе, т. е. допустимъ, что по крайней мѣрѣ два типа (8) встрѣчаются въ Ω безконечное число разъ, то убѣдимся непосредственно, что тѣмъ болѣе въ получающейся при этомъ области P не можетъ быть уединенныхъ точекъ, такъ что P будетъ сгущенна и P' совершенна.

Къ этимъ областямъ опять имѣетъ примѣненіе все то, что относится къ предыдущему.

Итакъ каждая сложная область будетъ сгущенной, кромѣ, можетъ быть, одной точки для ω^ω и ${}^*\omega^\omega$; границы P всѣхъ системъ ея дѣленій входятъ въ составъ границъ и внѣшнихъ точекъ совершенной области P', если P рѣдко разсѣяна, что мы и будемъ впредь предполагать, такъ какъ иное предположеніе мало интересно.

114. Если бы въ составѣ типа

$$\Omega = \prod_1^\omega \omega_i$$

подъ видомъ одного изъ ω_i могло скрываться размѣщеніе $\tilde{\omega}$, то — согласно 94° — всѣ предыдущіе типы, стоящіе передъ $\omega_n = \tilde{\omega}$, растворялись бы въ $\tilde{\omega}$, т. е. мы имѣли бы

$$\Omega = \prod_1^n \omega_i \prod_{n+1}^\omega \omega_i = \tilde{\omega} . \prod_{n+1}^\omega \omega_i = \tilde{\omega}\, \Omega_0;$$

иными словами — все дѣло свелось бы къ размѣщенію нѣкоторой сложной области Ω_0 въ интервалахъ $\tilde{\omega}$; къ такой задачѣ мы вернемся еще ниже.

То-же самое мы получимъ, если въ составѣ Ω имѣется нѣсколько множителей, равныхъ $\tilde{\omega}$. Если этихъ множителей будетъ безконечно много, то не трудно видѣть, что должно быть

$$\Omega = \tilde{\omega}^{\omega}.$$

115. Въ предыдущихъ разсужденіяхъ 113° мы совершенно не принимали въ разсчетъ типа n; дѣйствительно, если бы онъ встрѣтился въ какой нибудь комбинаціи $\omega_{i-1}\, n\, \omega_i$,—то въ силу 80° и 83°—эта комбинація дала бы

$$\omega_{i-1}\, n\, \omega_i = \omega_{i-1}\, \omega_i,$$

такъ что n въ окончательномъ результатѣ долженъ былъ бы исчезнуть; наконецъ комбинація $n\,\omega_1$ не могла бы быть сведена ни на одинъ изъ типовъ ω_i, но за то мы могли бы раздѣлить участокъ на n частей и въ каждой изъ нихъ получился бы одинъ изъ типовъ Ω.

Такимъ образомъ въ дальнѣйшемъ мы можемъ совершенно не касаться типа n; ниже мы еще вернемся къ этому размѣщенію, исходя изъ нѣкоторой болѣе общей точки зрѣнія.

116. Выяснивъ расположеніе счетной области P типа Ω_1, Ω_2 и Ω_3 по отношенію къ совершенной области P', мы наталкиваемся на очень важное обстоятельство и приходимъ, совершенно инымъ путемъ сравнительно съ *Baire*'омъ, къ распространенію понятія о точечныхъ областяхъ.

Когда мы строимъ свободные интервалы совершенной области P', то точки P набираются—во первыхъ—изъ нѣкоторыхъ границъ интерваловъ и—во вторыхъ—изъ внѣшнихъ точекъ области P'.

Область P' совершенна и, слѣдовательно, несчетна, область P—счетна; слѣдовательно—точки счетной области должны быть выбраны, кромѣ—можетъ быть—одной точки, изъ числа точекъ области несчетной P'; иными словами—область P по отношенію къ совершенной области P' играетъ совершенно такую же роль, какъ всякая точечная область по отношенію къ континууму.

Итакъ—на ряду съ областями по отношенію къ континууму, мы должны еще разсматривать области по отношенію къ даннымъ совершеннымъ областямъ. Не вдаваясь здѣсь въ полную теорію такихъ областей, мы можемъ сказать только, что, какъ указалъ еще *Baire* [1]),

[1]) Annali di Matematica, (3) 7.

къ такимъ областямъ можно примѣнить всѣ понятія, установленныя *Cantor*'омъ для областей по отношенію къ континууму; въ частности область P, отнесенная къ совершенной области P′, будетъ[1]) *часто разсѣянная* по P′.

Отсюда слѣдуетъ, что для области P свободными интервалами будутъ только интервалы P′, такъ что внѣ ихъ точки P расположены по отношенію къ P′ подобно расположенію раціональныхъ точекъ по отношенію къ континууму.

117. Если мы въ интервалы какой нибудь области

$$\omega_0 = \omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,.\,.\,.\,.\,.\,\omega_n\,,$$

при обозначеніи (8), помѣстимъ одну изъ областей интерваловъ Ω, мы не получимъ ничего новаго, такъ какъ прибавленіе конечнаго числа множителей въ началѣ счетнаго ряда Ω дастъ снова счетный рядъ.

Иное дѣло будетъ, если Ω мы помѣстимъ въ интервалы $\tilde{\omega}$, получивъ при этомъ типъ размѣщенія $\tilde{\omega}\,\Omega$.

Расположенная въ каждомъ изъ свободныхъ интерваловъ l_i типа $\tilde{\omega}$ область P_i будетъ обладать указаннымъ выше въ 112°-113° характеромъ; она будетъ сгущенной, кромѣ — можетъ быть — одной точки, которая, какъ граница интервала l_i, будетъ уже предѣльной точкой $\tilde{\omega}$; поэтому вся область P границъ интерваловъ всѣхъ дѣленій будетъ сгущенной.

Каждая изъ P_i часто разсѣяна по совершенной области P_i', расположенной на L_i. Эти послѣднія дадутъ, вмѣстѣ взятыя, совершенную область на L, при чемъ область P будетъ стоять по отношенію къ этой послѣдней совершенной области совершенно въ томъ же отношеніи, какъ и области P_i по отношенію къ P_i'.

Такимъ образомъ характеръ области типа $\tilde{\omega}\,\Omega$ оказывается подобнымъ общему характеру сложныхъ типовъ.

118. Перейдемъ теперь къ расположенію какой нибудь области ω_0 въ свободныхъ интервалахъ Ω; получающійся при этомъ типъ размѣщенія будетъ обозначаться $\Omega\,\omega_0$. Такъ какъ — на основаніи 116° — свободными интервалами области P типа Ω будутъ только интервалы совершенной области P′, тогда какъ въ остальной части участка L точки P будутъ часто разсѣяны по области внѣшнихъ точекъ P′, то область ω_0 должна располагаться исключительно въ интервалахъ совершенной области P′.

---

[1]) См. 48°.

Такимъ образомъ относительно *расположенія интерваловъ* типъ $\Omega\omega_0$ ничѣмъ не отличается отъ типа $\tilde{\omega}\omega_0$, но отличіе будетъ существенно, если мы возьмемъ область границъ и внѣшнихъ точекъ интерваловъ всѣхъ дѣленій: въ эту область для $\tilde{\omega}\omega_0$ входятъ 1) границы и внѣшнія точки ω_0, 2) границы свободныхъ интерваловъ $\tilde{\omega}$ и 3) всѣ внѣшнія точки $\tilde{\omega}$: тогда какъ $\Omega\omega_0$ составляется 1) изъ тѣхъ же границъ и внѣшнихъ точекъ ω_0, 2) можетъ быть изъ нѣкоторыхъ границъ $\tilde{\omega}$, 3) изъ счетнаго ряда внѣшнихъ точекъ интерваловъ $\tilde{\omega}$. Такимъ образомъ для $\tilde{\omega}\omega_0$ область P будетъ несчетна, тогда какъ для $\Omega\omega_0$ она — счетна.

Очевидно — размѣщеніе $\Omega\omega_0$ опредѣлитъ, вообще говоря, область общаго вида; при этомъ ея уединенными точками будутъ, кромѣ единственно возможной точки Ω, уединенныя точки области ω_0.

Расположеніе типа

$$\Omega\,\omega_0 = \prod_1^{\omega} \omega_i \,.\, \prod_1^{n} \omega_i = \prod_1^{\omega+n} \omega_i$$

даетъ поводъ говорить о трансфинитныхъ типахъ размѣщенія.

119. Размѣстимъ далѣе въ интервалахъ Ω совершенныя области $\tilde{\omega}$ и посмотримъ, какими особенностями отличается такое размѣщеніе $\Omega\tilde{\omega}$.

Такъ какъ свободными интервалами Ω служатъ свободные интервалы совершенной области P', и такъ какъ въ каждой изъ нихъ помѣщается совершенная область $\tilde{\omega}$, то окончательное размѣщеніе интерваловъ будетъ то же, что у типа $\tilde{\omega}\,.\,\tilde{\omega}$, который совпадаетъ съ $\tilde{\omega}$. Но если мы обратимся къ границамъ и внѣшнимъ точкамъ интерваловъ $\tilde{\omega}$ и сопоставимъ ихъ со всею областью границъ и внѣшнихъ точекъ всѣхъ системъ дѣленій $\Omega\tilde{\omega}$, то мы придемъ къ другимъ заключеніямъ.

Границами интерваловъ окончательнаго размѣщенія $\Omega\tilde{\omega}$ служатъ исключительно границы интерваловъ $\tilde{\omega}$, такъ какъ тѣ изъ точекъ Ω, которыя служили границами интерваловъ въ Ω, превратятся теперь въ внѣшнія точки области типа $\tilde{\omega}$; внѣшними точками интерваловъ $\Omega\tilde{\omega}$ останутся, помимо внѣшнихъ точекъ счетнаго ряда областей $\tilde{\omega}$, въ составъ которыхъ войдутъ границы Ω, еще и всѣ внѣшнія точки Ω.

120. Возможенъ далѣе новый трансфинитный типъ размѣщенія

$$\Omega^{(1)}\,.\,\Omega^{(2)} = \prod_1^{\omega} \omega_i \,.\, \prod_1^{\omega} \omega_j = \prod_1^{2\omega} \omega_i,$$

который въ частности, если всѣ ω_i тожественны другъ съ другомъ, будетъ однимъ изъ размѣщеній

$$\omega^{2\omega},\ {}^*\omega^{2\omega},\ ({}^*\omega+\omega)^{2\omega},\ \tilde{\omega}^{2\omega}.$$

Этотъ типъ получится, если мы будемъ располагать въ свободныхъ интервалахъ $\Omega^{(1)}$ области сложнаго типа $\Omega^{(2)}$.

Опять—если результатъ такого размѣщенія даетъ часто разсѣянную область, никакого интереса эта область вызывать не можетъ; этотъ интересъ сохранится въ томъ случаѣ, когда область $\prod\limits_1^{2\omega}\omega_i$ окажется рѣдко разсѣянной.

Такъ какъ свободные интервалы $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ будутъ свободными интервалами нѣкоторой совершенной области, то, поскольку мы имѣемъ дѣло исключительно со свободными интервалами, размѣщеніе $\Omega^{(1)}\,\Omega^{(2)}$ не отличается отъ размѣщенія $\tilde{\omega}\,.\,\tilde{\omega}$, т. е. отъ $\tilde{\omega}$; иными словами — свободные интервалы типа $\Omega^{(1)}\,\Omega^{(2)}$ будутъ свободными интервалами нѣкоторой новой совершенной области; границами окончательнаго размѣщенія будутъ исключительно границы интерваловъ $\Omega^{(2)}$. Если же мы перейдемъ къ границамъ и внѣшнимъ точкамъ всѣхъ системъ дѣленія, дѣло приметъ совсѣмъ другой оборотъ.

Къ границамъ всѣхъ дѣленій $P^{(1)}$, опредѣляемымъ размѣщеніемъ $\Omega^{(1)}$, относятся 1) нѣкоторыя изъ границъ уединенныхъ интерваловъ l_i области $P^{(1)\prime}$ и 2) счетный рядъ внѣшнихъ точекъ, часто разсѣянныхъ по той-же совершенной области; располагаемая внутри каждаго свободнаго интервала l_i область $P^{(2)}_i$ состоитъ также изъ 1) нѣкоторыхъ границъ и 2) счетнаго ряда внѣшнихъ точекъ; границы l_i отойдутъ въ число внѣшнихъ точекъ интерваловъ $P^{(2)}_i$.

Такимъ образомъ точки окончательной области P, заключающей всѣ точки всѣхъ дѣленій будутъ выбираться 1) изъ нѣкоторыхъ границъ интерваловъ $\{\lambda_i\}$ окончательнаго размѣщенія $\Omega^{(1)}\,\Omega^{(2)}$ и 2) изъ счетнаго ряда внѣшнихъ точекъ этихъ интерваловъ, часто разсѣянныхъ по P'. Составъ области точекъ, опредѣляемыхъ типомъ $\Omega^{(1)}\,\Omega^{(2)}$, оказывается подобнымъ тѣмъ, какіе мы видѣли у другихъ трансфинитныхъ областей.

121. Очевидно, что мы можемъ по отношенію къ $\prod\limits_1^{2\omega}\omega_i$ продолжать процессъ размѣщенія новыхъ областей и получить области

$$\prod_1^{2\omega+1}\omega_i,\ \ \prod_1^{2\omega+n}\omega_i,\ \ \prod_1^{3\omega}\omega_i,\ldots\ldots,\ \prod_1^{\alpha}\omega_i,$$

гдѣ α любое изъ чиселъ *Cantor*'а; въ частномъ случаѣ мы имѣли бы типы

$$\omega^{\alpha},\ {}^*\omega^{\alpha},\ ({}^*\omega+\omega)^{\alpha},\ \tilde{\omega}^{\alpha}.$$

Сопоставляя все предыдущее, мы видимъ, что общій характеръ всѣхъ трансфинитныхъ типовъ размѣщеній остается одинъ и тотъ же: рядъ свободныхъ интерваловъ всегда оказывается рядомъ типа $\tilde{\omega}$; область точекъ P часто разсѣяна по совершенной области границъ и внѣшнихъ точекъ интерваловъ $\tilde{\omega}$, но выборъ счетнаго ряда точекъ P изъ несчетнаго ряда P′ даетъ возникновеніе безконечному разнообразію областей P.

122. Кромѣ изслѣдованныхъ выше сложныхъ типовъ, получаемыхъ при безконечномъ повтореніи одного опредѣленнаго изъ основныхъ типовъ, мы могли бы получить безконечное множество сложныхъ типовъ, взявъ a) за исходный любой изъ производныхъ типовъ $\omega_0=\prod\limits_1^n\omega_i$ и разсматривая его за основной, построить типы

$$\omega_0^n,\ \omega_0^{\omega},\ \omega_0^{\alpha}; \tag{9}$$

затѣмъ b) мы могли бы получить сложный типъ

$$\Omega^{(n)},\ \Omega^{(\omega)},\ \Omega^{\alpha}, \tag{10}$$

повторяя конечное или безконечное число разъ одинъ изъ сложныхъ типовъ; или еще c) взявъ безконечную комбинацію сложныхъ типовъ въ опредѣленной послѣдовательности

$$\prod_1^{\omega}\Omega_i, \tag{11}$$

или d) взявъ конечную или безконечную комбинацію сложныхъ типовъ (9), (10) и (11) въ соотвѣтствующей послѣдовательности; и т. д.

Такимъ образомъ передъ нами открывается безконечное разнообразіе сложныхъ типовъ, простѣйшіе примѣры которыхъ мы разсмотрѣли выше. Но этимъ еще не исчерпывается все богатство точечныхъ областей.

5. Смѣшанные типы размѣщенія.

123. Всѣ изслѣдованные нами выше основные типы размѣщенія и ихъ комбинаціи мы будемъ называть въ дальнѣйшемъ *чистыми типами*, при чемъ придадимъ этому термину слѣдующій смыслъ:

Взявъ для построенія рядовъ интерваловъ и связанныхъ съ ними точечныхъ областей нѣкоторый участокъ L, мы располагаемъ на немъ новые интервалы того или иного основного типа.

Такимъ образомъ весь участокъ цѣликомъ подвергался *одной и той же операціи.* Далѣе, при повторныхъ операціяхъ, во всѣхъ интервалахъ даннаго дѣленія мы размѣщали области одного и того же типа; напримѣръ—въ области типа $\tilde{\omega}$ ($^*\omega + \omega$) *во всѣхъ интервалахъ* начальной совершенной области $\tilde{\omega}$ мы располагаемъ область типа $^*\omega + \omega$.

Ясное дѣло, что должна быть допустима возможность и другихъ процессовъ; мы имѣемъ право разные интервалы $l_i^{(n)}$ при каждомъ данномъ n'омъ дѣленіи подвергать въ $n+1$'смъ дѣленіи *различнымъ процессамъ*, устанавливая для *каждаго* интервала l_i свой особый законъ послѣдовательности размѣщенія интерваловъ. Такимъ образомъ передъ нами открываются еще широкія перспективы относительно дальнѣйшаго построенія областей.

Всѣ типы такого размѣщенія, въ отличіе отъ чистыхъ типовъ, мы будемъ называть *смѣшанными типами* размѣщенія; къ изслѣдованію такихъ типовъ мы и переходимъ теперь.

124. Если на двухъ смежныхъ участкахъ L_1 и L_2 размѣщены соотвѣтственные интервалы типовъ ω_1 и ω_2, то размѣщеніе ω_0 на полномъ участкѣ $L_1 + L_2$ мы будемъ называть *суммой типовъ* ω_1 и ω_2

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2. \tag{1}$$

A. Пусть мы имѣемъ два смежныхъ участка L' и L'', на которыхъ расположены соотвѣтственно области интерваловъ типовъ m и n.

Очевидно тогда, что мы, разсматривая $L' + L''$ какъ цѣлый участокъ L, достигли бы того же результата, взявъ размѣщеніе $m + n$. Характеръ размѣщенія здѣсь не мѣняется.

Типъ такого размѣщенія интерваловъ, по принятому опредѣленію, есть *сумма* типовъ размѣщенія на каждомъ участкѣ.

B. Пусть далѣе на каждомъ изъ смежныхъ участковъ лежатъ интервалы типа ω или $^*\omega$; такое размѣщеніе мы можемъ обозначить

$$\omega + \omega,\ ^*\omega + {}^*\omega.$$

Если мы, имѣя въ виду 28°, построимъ размѣщеніе типа 2ω и $2^*\omega$, то мы убѣдимся, что

$$\omega + \omega = 2\omega,\ ^*\omega + {}^*\omega = 2^*\omega.$$

C. Точно также очевидно, что размѣщеніе

$$\tilde{\omega} + \tilde{\omega} = 2\tilde{\omega}$$

и—на основаніи 88°—

$$\tilde{\omega} + \tilde{\omega} = \tilde{\omega}.$$

D. Наконецъ—на основаніи 83°—

$$({}^*\omega + \omega) + ({}^*\omega + \omega) = 2\,({}^*\omega + \omega).$$

Этимъ исчерпываются суммы изъ двухъ тожественныхъ основныхъ типовъ.

125. Переходимъ теперь къ комбинаціямъ изъ различныхъ основныхъ типовъ; также какъ и въ 124°, не трудно видѣть, что

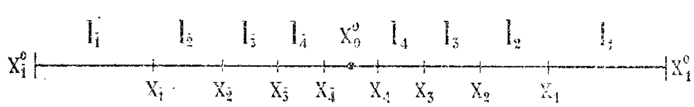
A. Во первыхъ

$$n + \omega = \omega,\ \ \omega + n \neq \omega,\ \ n + {}^*\omega \neq {}^*\omega,\ \ {}^*\omega + n = {}^*\omega.$$

B. Если мы возьмемъ сумму размѣщеній $^*\omega$ и ω, мы получимъ типъ $^*\omega + \omega$, на который мы смотрѣли до сихъ поръ какъ на нѣчто единое и взяли его за основной; оказывается теперь, что онъ есть ничто иное какъ сумма типовъ $^*\omega$ и ω, расположенныхъ на смежныхъ участкахъ; такимъ образомъ *мы можемъ считать за основные типы только* ω, $^*\omega$ и $\tilde{\omega}$.

C. Дальше мы получаемъ типъ $\omega + {}^*\omega$. Для него

$$Q^{(0)} \equiv \{x^0_{\bar 1}, x^0_1\},\ Q^{(1)} \equiv \{x_i\}_{\pm 1}^{\pm\omega},\ Q \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)},\ E \equiv \{x^0_0\},\ Q' \equiv E,\ Q'' \equiv 0.$$



Очевидно, что

$$\omega + {}^*\omega \neq {}^*\omega + \omega.$$

D. Наконецъ не трудно убѣдиться, что

$$n + \tilde{\omega} \neq \tilde{\omega},\ \ \tilde{\omega} + n \neq \tilde{\omega},\ \ \tilde{\omega} + n \neq n + \tilde{\omega},$$
$$\omega + \tilde{\omega} \neq \tilde{\omega},\ \ \tilde{\omega} + \omega \neq \tilde{\omega},\ \ \omega + \tilde{\omega} \neq \tilde{\omega} + \omega,$$
$${}^*\omega + \tilde{\omega} \neq \tilde{\omega},\ \ \tilde{\omega} + {}^*\omega \neq \tilde{\omega},\ {}^*\omega + \tilde{\omega} \neq \tilde{\omega} + {}^*\omega;$$

строеніе рядовъ интерваловъ и точечныхъ областей, отвѣчающихъ этимъ типамъ, достаточно ясно изъ ихъ обозначенія.

126. Положимъ теперь, что мы имѣемъ *конечный рядъ* n смежныхъ участковъ, при чемъ на нихъ помѣщены ряды интерваловъ одинаковыхъ основныхъ типовъ

$$n,\ \omega,\ {}^*\omega,\ {}^*\omega + \omega,\ \tilde{\omega}. \tag{2}$$

Размѣщеніе интерваловъ на участкѣ $L = \sum\limits_1^n L_i$ мы можемъ, въ согласіи съ 124°, обозначить такъ

$$\sum_1^m \omega_0, \tag{3}$$

гдѣ ω_0 будетъ одинъ изъ основныхъ типовъ (2).

Разбирая простѣйшіе изъ типовъ (3) мы легко можемъ убѣдиться, что

$$\sum_1^m n = mn,\ \sum_1^m \omega = m\omega \mathrel{=\!\!\!|\!\!\!=} \omega,\ \sum_1^m {}^*\omega = m{}^*\omega \mathrel{=\!\!\!|\!\!\!=} {}^*\omega,$$

$$\sum_1^m \tilde{\omega} = m\tilde{\omega} = \tilde{\omega},\ \sum_1^m ({}^*\omega + \omega) = m\,({}^*\omega + \omega) \mathrel{=\!\!\!|\!\!\!=} {}^*\omega + \omega.$$

Отсюда мы видимъ, что всякій разъ, когда мы имѣемъ конечную сумму одинаковыхъ типовъ, мы приходимъ или къ основному типу—для n и $\tilde{\omega}$, или къ производному типу $m\omega$, $m{}^*\omega$, $m\,({}^*\omega + \omega)$.

Такимъ образомъ всѣ смѣшанные типы (3) не даютъ ничего новаго и могутъ слѣдовательно быть устранены изъ разсмотрѣнія.

127. Перейдемъ далѣе къ изслѣдованію размѣщенія $\sum\limits_1^\omega \omega_0$, гдѣ ω_0 одинъ опредѣленный изъ основныхъ типовъ.

Прежде всего нужно обратить вниманіе на то обстоятельство, что разъ число участковъ L_i дѣлается безконечнымъ, среди нихъ—на основаніи 71°—непремѣнно должны появиться несмежные участки; безконечное множество *смежныхъ* участковъ возможно было бы только въ томъ случаѣ, когда весь участокъ L при $\sum\limits_1^\omega L_i = L$ простирался бы на безконечность, чего мы не допускаемъ.

126. Положимъ теперь, что мы имѣемъ *конечный рядъ n* смежныхъ участковъ, при чемъ на нихъ помѣщены ряды интерваловъ одинаковыхъ основныхъ типовъ

$$n,\ \omega,\ {}^*\omega,\ {}^*\omega + \omega,\ \tilde{\tilde{\omega}}. \tag{2}$$

Размѣщеніе интерваловъ на участкѣ $L = \sum_1^n L_i$ мы можемъ, въ согласіи съ 124°, обозначить такъ

$$\sum_1^m \omega_0, \tag{3}$$

гдѣ ω_0 будетъ одинъ изъ основныхъ типовъ (2).

Разбирая простѣйшіе изъ типовъ (3) мы легко можемъ убѣдиться, что

$$\sum_1^m n = mn,\ \sum_1^m \omega = m\omega \mathrel{=}\!\!\!\!|\, \omega,\ \sum_1^m {}^*\omega = m^*\omega \mathrel{=}\!\!\!\!|\, {}^*\omega,$$

$$\sum_1^m \tilde{\tilde{\omega}} = m\tilde{\tilde{\omega}} = \tilde{\tilde{\omega}},\ \sum_1^m ({}^*\omega + \omega) = m\,({}^*\omega + \omega) \mathrel{=}\!\!\!\!|\, {}^*\omega + \omega.$$

Отсюда мы видимъ, что всякій разъ, когда мы имѣемъ конечную сумму одинаковыхъ типовъ, мы приходимъ или къ основному типу—для n и $\tilde{\tilde{\omega}}$, или къ производному типу $m\omega$, $m^*\omega$, $m\,({}^*\omega + \omega)$.

Такимъ образомъ всѣ смѣшанные типы (3) не даютъ ничего новаго и могутъ слѣдовательно быть устранены изъ разсмотрѣнія.

127. Перейдемъ далѣе къ изслѣдованію размѣщенія $\sum_1^\omega \omega_0$, гдѣ ω_0 одинъ опредѣленный изъ основныхъ типовъ.

Прежде всего нужно обратить вниманіе на то обстоятельство, что разъ число участковъ L_i дѣлается безконечнымъ, среди нихъ—на основаніи 71°—непремѣнно должны появиться несмежные участки; безконечное множество *смежныхъ* участковъ возможно было бы только въ томъ случаѣ, когда весь участокъ L при $\sum_1^\omega L_i = L$ простирался бы на безконечность, чего мы не допускаемъ.

Разъ число участковъ безконечно, и среди нихъ появляются участки несмежные, размѣщеніе $\sum\limits_{1}^{\omega} \omega_0$, если не дать никакихъ дальнѣйшихъ указаній, дѣлается неяснымъ. Поэтому мы должны, если хотимъ имѣть дѣло съ размѣщеніемъ $\sum\limits_{1}^{\omega} \omega_0$, раньше сказать, какъ размѣщены участки L_i.

Къ числу простѣйшихъ размѣщеній относятся

$$\omega, \; {}^*\omega, \; {}^*\omega + \omega, \; \tilde{\omega}. \tag{4}$$

Если участки размѣщены такъ, то $\sum\limits_{1}^{\omega} \omega_0$ для соотвѣтственныхъ размѣщеній (4) будетъ ничто иное, какъ

$$\omega\,\omega_0, \; {}^*\omega\,\omega_0, \; ({}^*\omega + \omega)\,\omega, \; \tilde{\omega}\,\omega,$$

т. е. типы, которые намъ уже знакомы.

Точно также извѣстные типы размѣщеній мы получимъ и въ томъ случаѣ, когда размѣщеніе интерваловъ l_i будетъ принадлежать не къ основнымъ типамъ, а къ производнымъ или даже сложнымъ.

Итакъ типы

$$\sum_{1}^{n} \omega_0, \; \sum_{1}^{\omega} \omega_0$$

не даютъ рѣшительно ничего новаго; изъ новыхъ типовъ, принадлежащихъ къ категоріи смѣшанныхъ, мы получили до сихъ поръ только

$$\omega + n, \; n + {}^*\omega, \; \omega + {}^*\omega, \; \omega_0 + \tilde{\omega}, \; \tilde{\omega} + \omega_0,$$

гдѣ ω_0—любой изъ (4), кромѣ $\tilde{\omega}$; строеніе соотвѣтственныхъ рядовъ интерваловъ и точечныхъ областей крайне просто и наглядно; а потому не стоитъ на нихъ дальше останавливаться.

128. Переходимъ затѣмъ къ тому случаю, когда на *конечномъ* рядѣ m смежныхъ участковъ расположены *различные* типы

$$\omega_1, \; \omega_2, \; \omega_3, \; \ldots, \; \omega_m,$$

являющіеся опредѣленными основными, производными или сложными типами размѣщенія; получающійся при этомъ типъ размѣщенія мы обозначимъ

$$\omega_0 = \sum_1^m \omega_i .$$

Въ виду безконечнаго разнообразія типовъ ω_i не представляется возможнымъ подвергнуть ихъ исчерпывающему изслѣдованію; кромѣ того изслѣдованіе областей такихъ типовъ не представляетъ особеннаго труда и не вызываетъ особеннаго интереса, такъ какъ въ каждомъ случаѣ все дѣло сводится на комбинацію типовъ, которые уже изучены достаточно въ предыдущемъ; мы можемъ привести здѣсь только нѣсколько примѣровъ.

A. Если бы напр. намъ было дано

$$\omega_1 = \omega,\ \omega_2 = \omega^2,\ \omega_3 = \omega^3,\ \ldots,\ \omega_m = \omega^m,$$

мы получили бы [1]) на участкѣ L съ границами $\{x_0^o,\ x_m^o\}$ область P типа

$$\omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^m,$$

для которой $P^{(m)} = \{x_m^o\}$.

B. Если бы было

$$\omega_1 = 1,\ \omega_2 = n,\ \omega_3 = \omega,\ \ldots,\ \omega_m = \omega^{m-2},$$

то типъ размѣщенія на L былъ бы

$$1 + n + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{m-2} = \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{m-2},$$

и область P была бы m—2'ого вида.

129. Переходимъ наконецъ къ наиболѣе сложному типу: положимъ, что въ каждомъ изъ интерваловъ произвольнаго размѣщенія ω_0 расположена область интерваловъ особаго вида.

Область интерваловъ ω_0 всегда счетна; слѣдовательно эти интервалы могутъ быть приведены къ виду $\sum\limits_1^\omega l_i$, гдѣ порядокъ членовъ ряда обыкновенно можетъ быть устанавливаемъ весьма разнообразно; есть, правда, такіе типы, именно — ω и $^*\omega$, гдѣ этотъ порядокъ под-

[1]) См. A. M. 2, p. 344.

сказывается самимъ размѣщеніемъ; но кромѣ нихъ во всѣхъ остальныхъ типахъ мы должны будемъ установить порядокъ слѣдованія интерваловъ сами.

Итакъ пусть этотъ порядокъ такъ или иначе установленъ; тогда каждый интервалъ L_i опредѣленъ вполнѣ его номеромъ; въ этомъ интервалѣ помѣщаемъ опять таки вполнѣ опредѣленное размѣщеніе ω_i, которое можетъ быть основнымъ, производнымъ или сложнымъ.

Послѣ того какъ каждому интервалу L_i приписанъ извѣстный типъ размѣщенія ω_i, общее размѣщеніе интерваловъ на всѣхъ L_i дѣлается точно опредѣленнымъ; типъ размѣщенія, который при этомъ получается, мы будемъ обозначать

$$\omega_0 \overset{\omega}{\underset{1}{\mathbf{Z}}} \omega_i = \Omega .$$

Такъ какъ число интерваловъ ω_0 счетно, и въ каждомъ изъ нихъ помѣщается счетный же рядъ интерваловъ ω_i, счетнымъ будетъ и рядъ интерваловъ Ω, какъ это согласуется съ теоремой 69°.

По поводу обозначенія $\overset{\omega}{\underset{1}{\mathbf{Z}}}$ нужно замѣтить слѣдующее: оно введено въ замѣну $\sum\limits_1^\omega$ при указанномъ здѣсь законѣ размѣщенія въ виду того соображенія, что $\omega_0 \sum\limits_1^\omega \omega_i$ значило бы, что въ каждомъ изъ интерваловъ ω_0 помѣщена область $\sum\limits_1^\omega \omega_i$; намъ нужно было обозначить какъ нибудь такое соотношеніе между ω_0 и рядомъ типовъ $\{\omega_i\}$, что каждому свободному интервалу l_i типа ω_0 отвѣчаетъ нѣкоторый типъ ω_i. Такимъ образомъ знакъ умноженія въ связи со знакомъ $\overset{\omega}{\underset{1}{\mathbf{Z}}}$ имѣетъ уже совершенно иной смыслъ, чѣмъ знакъ умноженія, за которымъ слѣдуетъ знакъ суммы.

Богатство типовъ Ω неисчерпаемо; при всякомъ заданномъ ω_0 и при рядѣ $\overset{\omega}{\underset{1}{\mathbf{Z}}} \omega_i$ заданныхъ типовъ ω_i, мы можемъ одной только перемѣной порядка нумераціи интерваловъ получить несчетное множество областей Изъ этого разнообразія областей представляется интереснымъ разсмотрѣть хотя простѣйшія.

130. Пусть на интервалахъ типа ω размѣщенъ рядъ областей

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \ldots,\ \omega^n,\ \ldots,$$

при чемъ нумерація интерваловъ въ ω оставлена естественной; получающійся при этомъ типъ размѣщенія будетъ $\omega \sum_{1}^{\omega} \omega^{i}$. Пусть

$$Q_{\overline{1}} \equiv \{x_{\overline{1}}^{0},\ x_{1}^{0}\},\ Q_{0} \equiv \{\overset{\omega}{\underset{1}{x_{i}}}\}.$$

На каждомъ изъ интерваловъ l_i области границъ интерваловъ типа ω^i будутъ счетны, и мы можемъ перенумеровать ихъ въ извѣстномъ порядкѣ Пусть эта нумерація выполнена; назовемъ точки n'аго дѣленія на интервалѣ l_i черезъ $x_{ij}^{(n)}$ и обозначимъ

$$\begin{array}{rrrrr}
\{x_{1j}'\} \equiv Q_1^{(1)}, & \{x_{2j}'\} \equiv Q_2^{(1)}, & \{x_{3j}'\} \equiv Q_3^{(1)}, & \ldots, & \{x_{nj}'\} \equiv Q_n^{(1)},\ \ldots, \\
 & \{x_{2j}''\} \equiv Q_2^{(2)}, & \{x_{3j}''\} \equiv Q_3^{(2)}, & \ldots, & \{x_{nj}''\} \equiv Q_n^{(2)},\ \ldots, \\
 & & \{x_{3j}'''\} \equiv Q_3^{(3)}, & \ldots, & \{x_{nj}'''\} \equiv Q_n^{(3)},\ \ldots, \\
 & & & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
 & & & & \{x_{nj}^{(n)}\} \equiv Q_n^{(n)},\ \ldots,
\end{array}$$

при чемъ здѣсь j принимаетъ всѣ цѣлыя положительныя значенія, и точки каждой изъ системъ дѣленія на l_i предполагаются перенумерованными по нѣкоторому закону. Назовемъ еще

$$Q_1 \equiv Q_1^{(1)},\ Q_2 \equiv \sum_{1}^{2} Q_2^{(i)},\ \ldots,\ Q_n \equiv \sum_{1}^{n} Q_n^{(i)},\ \ldots;$$

тогда область всѣхъ границъ и внѣшнихъ точекъ будетъ соотвѣтственно

$$Q \equiv \{x_{\overline{1}}^{0}\} + \sum_{0}^{\omega} Q_i,\ E \equiv \{x_1^0\},\ P \equiv Q + E \equiv \sum_{\overline{1}}^{\omega} Q_i.$$

Очевидно, что

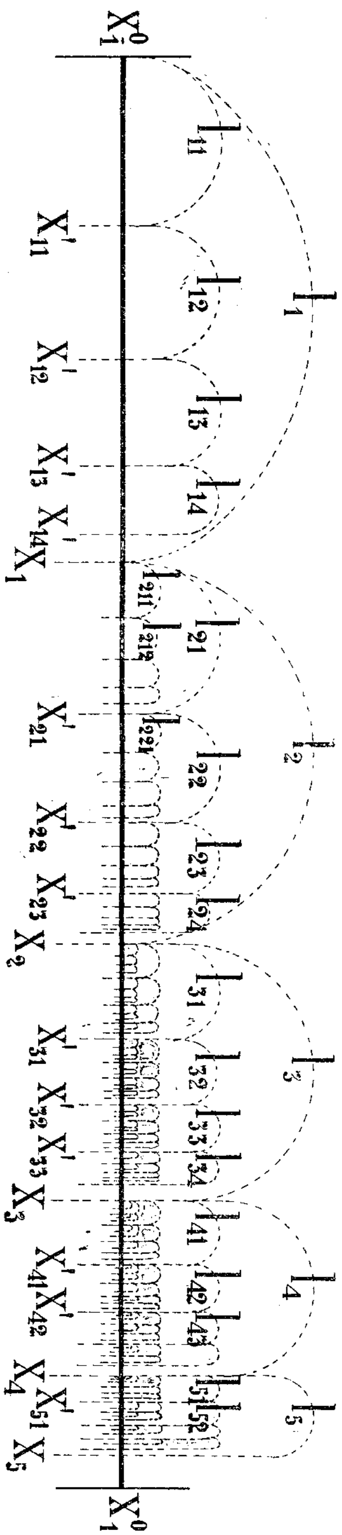
$$P' \equiv \{\overset{\omega}{\underset{1}{x_i}}\} + Q_2^{(1)} + \sum_{1}^{2} Q_3^{(i)} + \ldots + \sum_{1}^{n-1} Q_n^{(i)} + \ldots + \{x_1^0\},$$

$$P'' \equiv \{\overset{\omega}{\underset{2}{x_i}}\} + Q_3^{(1)} + \sum_{1}^{2} Q_4^{(i)} + \ldots + \sum_{1}^{n-1} Q_{n+1}^{(i)} + \ldots + \{x_1^0\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P^{(m)} \equiv \{\overset{\omega}{\underset{m}{x_i}}\} + Q_{m+1}^{(1)} + \sum_{1}^{2} Q_{m+2}^{(i)} + \ldots + \sum_{1}^{n-1} Q_{n+m-1}^{(i)} + \ldots + \{x_1^0\}.$$

Мы видимъ здѣсь, что въ P' совершенно отпалъ первый интервалъ l_1, кромѣ его границы x_1; въ P'' отпалъ еще и l_2, и т. д., въ $P^{(m)}$ отпадаетъ l_m.



Очевидно, что для всякаго конечнаго m точка x_1^0 входитъ въ составъ области $P^{(m)}$; слѣдовательно эта точка войдетъ и въ составъ $P^{(\omega)}$; ясно далѣе, что кромѣ нея въ $P^{(\omega)}$ не будетъ никакой другой точки. Дѣйствительно: какая бы точка ξ, отличная отъ x_1^0, не принадлежала основному интервалу L, она будетъ его лѣвой границей или внутренней точкой; слѣдовательно можетъ быть указано нѣкоторое *конечное* разстояніе ея отъ x_1^0; она войдетъ тогда въ одинъ изъ интерваловъ l_i, напр.— въ l_σ, или будетъ его границей, а въ такомъ случаѣ точка ξ, вмѣстѣ со всѣми другими *внутренними* точками интервала l_σ, не будетъ встрѣчаться уже въ $P^{(\sigma)}$ или въ $P^{(\sigma+1)}$ и — слѣдовательно — не можетъ быть точкой, *общей* всѣмъ $P^{(i)}$.

Итакъ въ настоящемъ случаѣ

$$P^{(\omega)} \equiv \{x_1^0\},\ P^{(\omega+1)} \equiv 0;$$

мы получаемъ такимъ образомъ область второго рода. Такъ какъ каждая изъ Q_i счетна, то будетъ счетна и P; кромѣ того P замкнута и, вообще говоря, рѣдко разсѣяна. Эта единственная рѣдко разсѣянная область была приведена[1]) *Cantor*'омъ, какъ примѣрная область второго рода.

131. Переходимъ далѣе къ изслѣдованію типа

$$(5) \qquad \omega^2 . \sum_1^{\omega} \omega_i ,$$

т. е. въ интервалахъ типа ω^2 размѣстимъ соотвѣтствующіе интервалы ω_i, гдѣ ω_i — различныя степени ω^λ.

[1]) A. M. 2, p. 360.

Для того чтобы выполнить такое размѣщеніе, мы должны установить соотвѣтствіе между интервалами l_i типа ω^2 и степенями ω^λ; здѣсь естественнаго размѣщенія, какъ въ ω, уже не имѣется; поэтому требуется заранѣе указать тотъ порядокъ, въ который мы желаемъ привести интервалы типа ω^2; иначе же типъ размѣщенія (5) не будетъ вполнѣ опредѣленнымъ.

Здѣсь на каждомъ интервалѣ l_i помѣщается счетный рядъ интерваловъ $\{l_{ij}\}$, такъ что общее число интерваловъ можетъ быть дано двойнымъ рядомъ $\{l_{ij}\}$, гдѣ i и j могутъ принимать независимо другъ отъ друга всѣ цѣлыя положительныя значенія, начиная съ единицы. Такъ какъ всякій двойной рядъ заключаетъ въ себѣ счетный рядъ элементовъ, то мы можемъ напр. установить вотъ какое соотвѣтствіе между l_{ij} и ω^λ: преобразуемъ $\mathbf{Z}_1^\omega \omega_i$ въ двойной рядъ степеней ω

$$\mathbf{Z}_{i=1}^{\omega} \mathbf{Z}_{j=1}^{\omega} \omega^{i+j},$$

установивъ соотвѣтствіе интервалу l_{ij} типа размѣщенія ω^{i+j}. Тогда типъ размѣщенія

$$\omega^2 . \mathbf{Z}_{i=1}^{\omega} \mathbf{Z}_{j=1}^{\omega} \omega^{i+j}$$

дѣлается вполнѣ опредѣленнымъ.

При такомъ условіи на каждомъ изъ интерваловъ l_i мы имѣемъ размѣщеніе

$$\omega . \mathbf{Z}_{j=1}^{\omega} \omega^{i+j}, \tag{6}$$

такъ какъ интервалы l_{ij} даютъ на l_i размѣщеніе ω.

Называя область границъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія черезъ Q и область этихъ границъ, лежащихъ *внутри* интервала l_i, черезъ Q_i, мы получимъ область P невнутреннихъ точекъ всѣхъ интерваловъ въ видѣ

$$P \equiv \{x_{\bar{1}}^0,\ x_1^0\} + \{\overset{\omega}{\underset{1}{x}}{}_i\} + \sum_1^\omega Q_i.$$

На каждомъ изъ интерваловъ l_i, согласно съ (6), мы имѣемъ размѣщеніе, похожее на размѣщеніе 130°, съ тою только разницей, что уже на первомъ интервалѣ l_{i1} помѣщается область ω^{i+1} вмѣсто

ω въ 130°, на второмъ ω^{i+2} вмѣсто ω^2, и т. д.; въ такомъ случаѣ, какъ не трудно видѣть, на интервалѣ l_i отпаденіе перваго интервала l_{i1} послѣдуетъ не въ первой производной области, а только въ $Q^{(i+1)}$; въ дальнѣйшемъ же ходъ образованія пр изводныхъ остается тотъ же, такъ что мы получимъ $Q_i^{(\omega)} = \{x_i\}$; вслѣдствіе этого

$$P^{(\omega)} = \{\overset{\omega}{\underset{1}{x_i}}\} + \{x_1^0\},$$

и — слѣдовательно —

$$P^{(\omega+1)} = \{x_1^0\},\ P^{(\omega+2)} = 0;$$

область *второго* рода P будетъ счетной, замкнутой и, вообще говоря, рѣдко разсѣянной.

132. Совершенно также мы можемъ изслѣдовать область невнутреннихъ точекъ P интерваловъ типа

$$\omega^n . \sum_1^{\omega} \omega_i ,$$

при ω_i равныхъ степенямъ ω, если мы установимъ соотвѣтствіе, аналогичное 131°, т. е. превратимъ простой рядъ $\sum_1^{\omega} \omega_i$ въ n'кратный; тогда окажется, что

$$P^{(\omega+n-1)} = \{x_1^0\},\ P^{(\omega+n)} = 0.$$

Наконецъ по поводу области типа $\omega^{\omega} . \sum_1^{\omega} \omega_i$ мы будемъ вести рѣчь ниже.

133. Аналогичные результаты мы получили бы для размѣщеній $^*\omega$; между прочимъ къ типу

$$^*\omega . \sum_1^{\omega} \omega_i . \sum_1^{\omega} \omega_{ij} . \sum_1^{\omega} \omega_{ijk} \ldots$$

при условіи, что $\omega_1 = \omega_{i1} = \omega_{ij1} = \ldots = 1$, а всѣ остальные типы равны $^*\omega$, принадлежитъ область *Volterr'a* [1]).

Къ типамъ

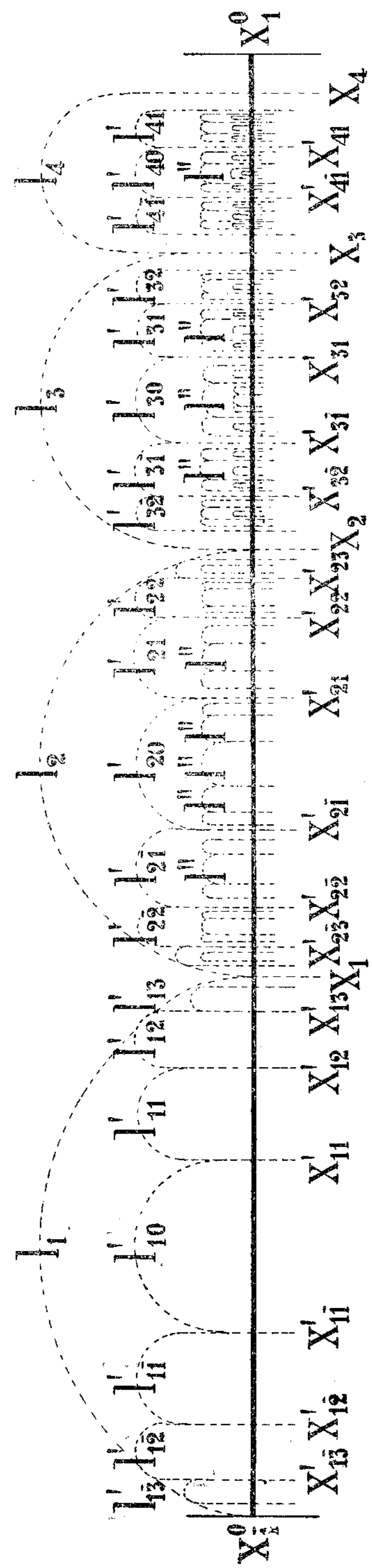
$$^*\omega . \sum_1^{\omega} {^*\omega^i},\quad {^*\omega^{n+1}} . \sum {^*\omega^i},\quad \{^*\omega . \sum_1^{\omega} {^*\omega^i}\}^2$$

---

[1]) См. 8°.

принадлежатъ области *Mittag-Leffler'a*[1]), для которыхъ соотвѣтственно

$$P^{(\omega+1)} = 0, \; P^{(\omega+n+1)} = 0, \; P^{(2\omega+1)} = 0.$$



при чемъ во второмъ типѣ соотвѣтствіе интерваловъ $\mathbf{Z}\, {}^*\omega^i$ установлено такъ, что i отвѣчаетъ естественному порядку нумераціи интерваловъ $n+1$'го дѣленія, располагаемыхъ на интервалахъ n'аго дѣленія.

134. Изслѣдуемъ далѣе размѣщеніе типа

$$\omega . \sum_{1}^{\omega} ({}^*\omega + \omega)^i,$$

т. е. въ интервалахъ типа ω расположимъ рядъ областей

$${}^*\omega + \omega, \; ({}^*\omega + \omega)^2, \; \ldots, \; ({}^*\omega + \omega)^n, \; \ldots,$$

считая нумерацію интерваловъ ω естественной.

Назвавъ сначала

$$\{x_{\bar 1}^0, \; x_1^0\} = Q_{\bar 1}, \; \{x_i^0\} = Q_0,$$

обозначимъ затѣмъ точки n'аго дѣленія на интервалѣ l_i черезъ $x_{ij}^{(n)}$, приведя ихъ къ двойному счетному ряду $\left\{x_{ij}^{(n)}\right\}_{j=\pm 1}^{\pm\omega}$; тогда

$$\begin{aligned}\left\{x'_{1j}\right\} = Q_1^{(1)}, \; \left\{x'_{2j}\right\} = Q_2^{(1)}, \; \ldots, \; \left\{x'_{nj}\right\} = Q'_n, \; \ldots,\\ \left\{x''_{2j}\right\} = Q_2^{(2)}, \; \ldots, \; \left\{x''_{nj}\right\} = Q_n^{(2)}, \; \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \left\{x_{nj}^{(n)}\right\} = Q_n^{(n)}, \; \ldots\\ \ldots;\end{aligned}$$

въ число границъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія войдутъ точки

$$Q_1^{(1)}, \; Q_2^{(2)}, \; Q_3^{(3)}, \; \ldots, \; Q_n^{(n)}, \; \ldots;$$

---

[1]) См. 18°.

Превративъ опять, какъ въ 131°, простой рядъ степеней $^*\omega + \omega$ въ двойной $\{(^*\omega + \omega)^{i+j}\}$, отнесемъ $(^*\omega + \omega)^{i+j}$ къ интервалу l_{ij}; тогда типъ

$$\omega^2 . \mathop{\mathbf{Z}}_{i=1}^{\omega} \mathop{\mathbf{Z}}_{j=1}^{\omega} (^*\omega + \omega)^{i+j}$$

дѣлается вполнѣ опредѣленнымъ и даетъ на каждомъ изъ интерваловъ l_i размѣщеніе

$$\omega . \mathop{\mathbf{Z}}_{j=1}^{\infty} (^*\omega + \omega)^{i+j};$$

это размѣщеніе на l_i будетъ аналогично размѣщенію 134° съ тою только разницею, что на l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, ... будутъ помѣщаться интервалы типовъ

$$(^*\omega + \omega)^{i+1},\ (^*\omega + \omega)^{i+2},\ (^*\omega + \omega)^{i+3},\ \ldots .$$

Назовемъ опять P — область невнутреннихъ точекъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія, P_i — область такихъ же точекъ, лежащихъ *внутри* интервала l_i; тогда

$$\mathrm{P} = \{x_1^0,\ x_1^0\} + \{\overset{\omega}{\underset{1}{x_i}}\} + \sum_1^{\omega} \mathrm{P}_i;$$

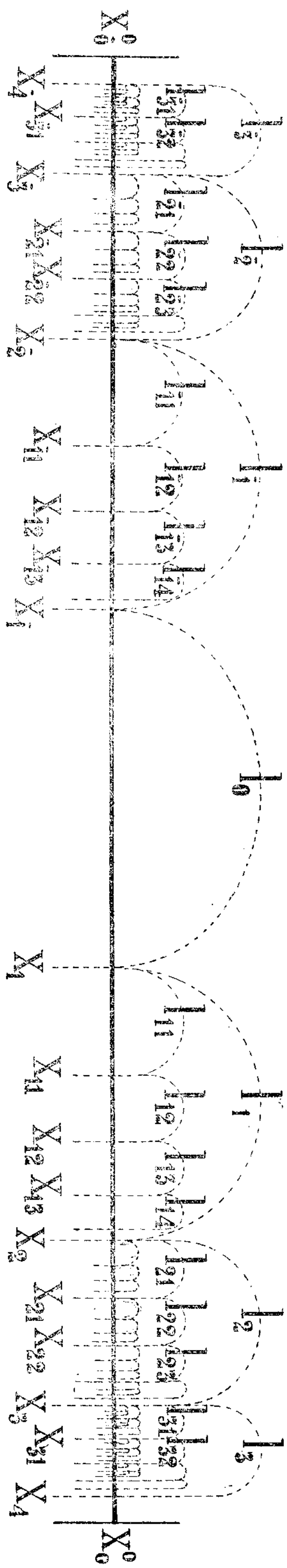
очевидно, что для точекъ на интервалѣ l_i, мы, подобно 134°, будемъ имѣть $\mathrm{P}_i^{(\omega)} = \{x_i\}$, а потому

$$\mathrm{P}^{(\omega)} = \{\overset{\omega}{\underset{1}{x_i}}\} + \{x_1^0\},\ \mathrm{P}^{(\omega+1)} = \{x_1^0\},\ \mathrm{P}^{(\omega+2)} = 0.$$

Аналогично при всякомъ конечномъ n для невнутреннихъ точекъ интерваловъ типа $\omega^n . \mathop{\mathbf{Z}}\limits_1^{\omega} \omega_i$ мы будемъ имѣть

$$\mathrm{P}^{(\omega+n-1)} = \{x_1^0\},\ \mathrm{P}^{(\omega+n)} = 0,$$

если только установимъ соотвѣтствіе между интервалами ω^n и степенями $(^*\omega + \omega)^i$, превративъ предварительно простой рядъ $\mathop{\mathbf{Z}}\limits_1^{\omega} \omega_i$ въ n'кратный.



136. Изъ типовъ размѣщенія

$$\omega\,.\,\mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} {}^{*}\omega^{i}\,,\quad \omega^{n}\,.\,\mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} {}^{*}\omega^{i}\,,\quad \omega\,.\,\mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} \tilde{\omega}^{i}\,,\quad \omega^{n}\,.\,\mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} \tilde{\omega}^{i}\,,$$

первые не представляютъ ничего особеннаго въ сравненіи съ 130°—132°, второй же — на основаніи 87° — есть ничто иное, какъ $\omega\,.\,\tilde{\omega}$ или $\omega^{n}\,.\,\tilde{\omega}$.

Точно также ничего новаго мы найдемъ въ типахъ

$${}^{*}\omega\,.\,\mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} \omega^{i}\,,\quad {}^{*}\omega^{2} \mathop{\mathbf{Z}}_{i=1}^{\omega} \mathop{\mathbf{Z}}_{j=1}^{\omega} \omega^{i+j}$$

и аналогичныхъ комбинаціяхъ $^{*}\omega$ съ $^{*}\omega + \omega$ и $\tilde{\omega}$.

137. Возьмемъ еще типъ размѣщенія

$$(7) \qquad ({}^{*}\omega + \omega)\,.\,\mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} \omega_{i}\,,$$

гдѣ ω_i — различныя степени ω; въ виду того обстоятельства, что для интерваловъ типа $^{*}\omega + \omega$ нѣтъ опредѣленнаго естественнаго порядка нумераціи, мы должны, чтобы вполнѣ опредѣлить (7), установить — во первыхъ — этотъ порядокъ и — во вторыхъ — соотвѣтствіе интерваловъ и размѣщеній ω_i.

Возьмемъ наибольшій по длинѣ интервалъ области $^{*}\omega + \omega$ за средній интервалъ l_0, слѣдующимъ же отъ него влѣво по порядку припишемъ значки $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots$ и вправо 1, 2, 3, ...; этимъ порядокъ слѣдованія интерваловъ будетъ установленъ.

Припишемъ интервалу l_0 типъ $\omega^0 = 1$, и интерваламъ $l_{\pm i}$ типъ ω^i; тогда $\mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} \omega_i$ превратится въ двойной рядъ $\mathop{\mathbf{Z}}_{0}^{\pm\omega} \omega^{|i|}$, такъ что (7) приметъ видъ

$$({}^{*}\omega + \omega)\,.\,\mathop{\mathbf{Z}}_{0}^{\pm\omega} \omega^{|i|}.$$

Назовемъ

$$Q^{(0)} = \{x^0_{\bar 0},\ x^0_0\},\quad Q^{(1)} = \{x_i\}_{\pm 1}^{\pm\omega};$$

затѣмъ

$$\begin{array}{llllll}
\{x'_{1j}\} = Q^{(1)}_1, & \{x'_{2j}\} = Q^{(1)}_2, & \{x'_{3j}\} = Q^{(1)}_3, & \ldots, & \{x'_{nj}\} = Q^{(1)}_n, & \ldots, \\
 & \{x''_{2j}\} = Q^{(2)}_2, & \{x''_{3j}\} = Q^{(2)}_3, & \ldots, & \{x''_{nj}\} = Q^{(2)}_n, & \ldots, \\
\{x'_{\bar 1 j}\} = Q^{(1)}_{\bar 1}, & & \{x'''_{3j}\} = Q^{(3)}_3, & \ldots, & \{x'''_{nj}\} = Q^{(3)}_n, & \ldots, \\
 & & & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots, \\
\{x'_{\bar 2 j}\} = Q^{(1)}_{\bar 2}, & \{x''_{\bar 2 j}\} = Q^{(2)}_{\bar 2}, & & & \{x^{(n)}_{nj}\} = Q^{(n)}_n, & \ldots, \\
\{x'_{\bar 3 j}\} = Q^{(1)}_{\bar 3}, & \{x''_{\bar 3 j}\} = Q^{(2)}_{\bar 3}, & \{x'''_{\bar 3 j}\} = Q^{(3)}_{\bar 3}, & & & \ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, & & \\
\{x'_{\bar n j}\} = Q^{(1)}_{\bar n}, & \{x''_{\bar n j}\} = Q^{(2)}_{\bar n}, & \{x'''_{\bar n j}\} = Q^{(3)}_{\bar n}, & \ldots, & \{x^{(n)}_{\bar n j}\} = Q^{(n)}_{\bar n}, & \ldots, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots;
\end{array}$$

наконецъ

$$Q^{(1)}_{\pm 1} = Q_{\pm 1},\ \sum_1^2 Q^{(i)}_{\pm 2} = Q_{\pm 2},\ \sum_1^3 Q^{(i)}_{\pm 3} = Q_{\pm 3},\ \ldots,\ \sum_1^n Q^{(i)}_{\pm n} = Q_{\pm n},\ \ldots.$$

Здѣсь для интерваловъ окончательнаго размѣщенія единственными внѣшними точками будутъ $\{x^0_{\bar 0},\ x^0_0\}$, остальныя же всѣ будутъ границами интерваловъ; поэтому

$$Q = \{x_i\}_{\pm 1}^{\pm\omega} + \sum_{\pm 1}^{\pm\omega} Q_i,\quad \mathbf{E} = \{x^0_{\bar 0},\ x^0_0\},$$

и слѣдовательно область невнутреннихъ точекъ всѣхъ интерваловъ составится такимъ образомъ

$$P = Q + E = \{x^0_{\bar 0},\ x^0_0\} + \{x_i\}_{\pm 1}^{\pm\omega} + \sum_{\pm 1}^{\pm\omega} Q_i.$$

Очевидно, что при $n > m$ производная $Q^{m}_{\pm n}$ области $Q_{\pm n}$ будетъ такова

$$Q^{m}_{\pm n} = \sum_{i=1}^{n-m} Q^{(i)}_{\pm n} + \{x_\lambda\},\ \lambda = n+1 \text{ для } n > 0,\ \lambda = n \text{ для } n < 0;$$

$$Q^{n}_{n} = x_{n+1},\quad Q^{n}_{n} = x_{n},\quad Q^{n+1}_{\pm n} = 0;$$

при этомъ знаки m у производныхъ $Q_{\pm n}$ мы пишемъ безъ скобокъ, чтобы отличить ихъ отъ областей $Q^{(m)}_{\pm n}$; отсюда

$$P^{(m)} = \{x^{0}_{0},\ x^{0}_{0}\} + \{x_i\}_{m}^{\omega} + \{x_i\}_{m+1}^{\omega} + \sum_{n=m+1}^{\omega} \sum_{i=1}^{n-m} Q^{(i)}_{\pm n},$$

$$P^{(\omega)} = \{x^{0}_{0},\ x^{0}_{0}\},\ P^{(\omega+1)} = 0;$$

область P будетъ второго рода, счетной, замкнутой и, вообще говоря, рѣдко разсѣянной.

138. Нѣкоторыя особенности представляетъ далѣе размѣщеніе типа

$$({}^{*}\omega + \omega)^2 \mathbf{Z}_{1}^{\omega}\, \omega_i$$

опять въ виду того обстоятельства, что здѣсь нужно установить соотвѣтствіе интерваловъ $({}^{*}\omega + \omega)^2$ и отвѣчающихъ имъ типовъ ω_i.

Выберемъ на ${}^{*}\omega + \omega$, какъ и въ 137°, среднимъ — наибольшій интервалъ l_0; тоже самое будемъ дѣлать и для интерваловъ, расположенныхъ на каждомъ изъ l_i, такъ что l_{i0} будетъ—наибольшій изъ всѣхъ интерваловъ на l_i. Тогда вся совокупность интерваловъ можетъ быть представлена въ видѣ $\{l_{ij}\}_{i=0,j=0}^{\pm\omega}$.

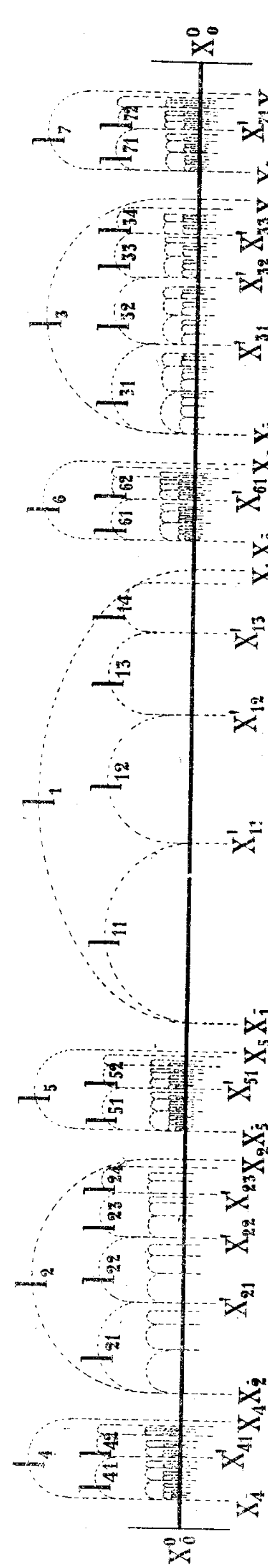
Представивъ интервалы $({}^{*}\omega + \omega)^2$ въ видѣ такого двойного ряда, мы припишемъ каждому l_{ij} степень $\omega^{|i|+|j|}$. Мы получимъ тогда вполнѣ опредѣленный типъ

$$({}^{*}\omega + \omega)^2 . \mathbf{Z}_{i=0}^{\pm\omega} \mathbf{Z}_{j=0}^{\pm\omega} \omega^{|i|+|j|}$$

и, разсуждая аналогично предыдущему, придемъ къ заключенію, что для него будетъ

$$P^{(\omega+1)} = \{x^{0}_{0},\ x^{0}_{0}\},\ P^{(\omega+2)} = 0.$$

Точно также можно было бы получить подобные же результаты, подвергнувъ изслѣдованію $({}^{*}\omega + \omega)^n \cdot \mathop{\mathbf{Z}}\limits_{1}^{\omega} \omega_i$ при прежнемъ значеніи ω_i, а затѣмъ $({}^{*}\omega + \omega) \cdot \mathop{\mathbf{Z}}\limits_{1}^{\omega} \omega_i$ и $({}^{*}\omega + \omega)^n \mathop{\mathbf{Z}}\limits_{1}^{\omega} \omega_i$, гдѣ ω_i представляютъ собой уже степени ${}^{*}\omega$ или ${}^{*}\omega + \omega$.



139. Переходя далѣе къ типу

$$\tilde{\tilde{\omega}} \cdot \mathop{\mathbf{Z}}\limits_{1}^{\omega} \omega^i, \tag{8}$$

мы опять должны установить прежде всего законъ соотвѣтствія между интервалами $\tilde{\tilde{\omega}}$ и типами ω^i.

Это соотвѣтствіе мы установимъ такъ: пусть l_1 — наибольшій изъ всѣхъ свободныхъ интерваловъ $\tilde{\tilde{\omega}}$; l_2 и l_3 — наибольшіе изъ интерваловъ соотвѣтственно на участкахъ $(x_{\bar{0}}^0, x_{\bar{1}})$ и (x_1, x_0^0); l_4, l_5, l_6, l_7 — наибольшіе изъ интерваловъ на участкахъ $(x_{\bar{0}}^0, x_{\bar{2}})$, $(x_2, x_{\bar{1}})$, $(x_1, x_{\bar{3}})$, (x_3, x_0^0); и т. д.; тогда интервалы будутъ размѣщены въ группы, состоящія послѣдовательно изъ $2^0, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$ интерваловъ, такъ что номера интерваловъ въ $n+1$'ой группѣ будутъ

$$\sum_{0}^{n-1} 2^i + 1,\ \sum_{0}^{n-1} 2^i + 2,\ \ldots,\ \sum_{0}^{n-1} 2^i + 2^n = \sum_{0}^{n} 2^i,$$

при чемъ эти номера приписываются интерваламъ по порядку, начиная слѣва. Выбравъ такимъ образомъ нумерацію интерваловъ, мы припишемъ каждому l_i типъ размѣщенія ω^i; тогда (8) дѣлается вполнѣ опредѣленнымъ.

Назовемъ $\{x_{\bar{0}}^0, x_0^0\} \equiv Q^{(0)}$, $\{\mathop{x_i}\limits_{\pm 1}^{\pm\omega}\} = Q^{(1)}$; назовемъ далѣе область внѣшнихъ точекъ $\tilde{\tilde{\omega}}$, которыя лежатъ *внутри* L, черезъ $\bar{E}^{(1)}$, и черезъ $E^{(1)}$ область всѣхъ внѣшнихъ точекъ; тогда

$$E^{(1)} = \bar{E}^{(1)} + Q^{(0)}, \ P^{(1)} = Q^{(1)} + E^{(1)},$$

гдѣ $P^{(1)}$ — совершенная область $\mathfrak{Z}$. Обозначимъ по прежнему

$$
(9) \qquad \begin{array}{l}
\{x'_{1j}\} = Q^{(1)}_1, \ \{x'_{2j}\} = Q^{(1)}_2, \ \{x'_{3j}\} = Q^{(1)}_3, \ \ldots, \ \{x'_{nj}\} = Q^{(1)}_n, \ \ldots, \\
\qquad\qquad \{x''_{2j}\} = Q^{(2)}_2, \ \{x''_{3j}\} = Q^{(2)}_3, \ \ldots, \ \{x''_{nj}\} = Q^{(2)}_n, \ \ldots, \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \{x^{(n)}_{nj}\} = Q^{(n)}_n, \ \ldots;
\end{array}
$$

обозначимъ далѣе

$$Q^{(1)}_1 = Q_1, \ \sum_1^2 Q^{(i)}_2 = Q_2, \ \ldots, \ \sum_1^n Q^{(i)}_n = Q_n, \ \ldots;$$

въ такомъ случаѣ Q — область границъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія составляется такъ

$$Q = \{\overset{\omega}{\underset{1}{x_i}}\} + \sum_1^\omega Q_n,$$

и область внѣшнихъ точекъ будетъ $E = E^{(1)} + \{\overset{\omega}{\underset{1}{x_i}}\}$. Такимъ образомъ область P невнутреннихъ точекъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія окажется

$$P = Q + E = \{\overset{\pm\omega}{\underset{\pm 1}{x_i}}\} + E^{(1)} + \sum_1^\omega Q_n = P^{(1)} + \sum_1^\omega Q_n,$$

гдѣ $P^{(1)}$ — совершенная, а $\sum\limits_{n=1}^{\omega} Q_n$ — счетная приводимая область теоремы *Cantor-Bendixson*'а.

На каждомъ изъ интерваловъ l_i, мы имѣемъ размѣщеніе ω^i, свойства которыхъ изслѣдованы нами выше; для нихъ

$$Q^m_m = \{x_m\}, \ Q^{m+1}_m = 0,$$

гдѣ снова обозначены производныя отъ Q_m черезъ m безъ скобокъ. Отсюда

$$P^m = P^{(1)} + \sum_{n=m+1}^{\omega} \left[Q_n^m - \{x_n\} \right], \ P^\omega = P^{(1)};$$

такъ какъ при этомъ

$$Q_n^m = \{x_n\} + \sum_{1}^{n-m} Q_n^{(i)},$$

то

$$P^m = P^{(1)} + \sum_{n=m+1}^{\omega} \sum_{i=1}^{n-m} Q_n^{(i)},$$

при чемъ послѣ каждаго перехода отъ P^m къ P^{m+1} отпадаютъ точки областей, расположенныхъ по діагоналямъ въ таблицѣ (9): въ P' не попадутъ точки области $Q_1^{(1)}$, $Q_2^{(2)}$, $Q_3^{(3)}$, $\ldots$, $Q_n^{(n)}$, $\ldots$; въ P'' слѣдующій діагональный рядъ, и т. д.

Область P, полученная указаннымъ выше способомъ, будетъ несчетна, такъ какъ въ ея составъ входитъ $P^{(1)}$, замкнута и рѣдко разсѣяна.

140. Области типа

$$\tilde{\omega}^n . \mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} \omega_i \tag{10}$$

не подлежатъ изслѣдованію, такъ какъ, въ силу 87°, $\tilde{\omega}^n = \tilde{\omega}$, и — слѣдовательно — типъ (10) сводится на разобранный выше.

Изъ областей типа

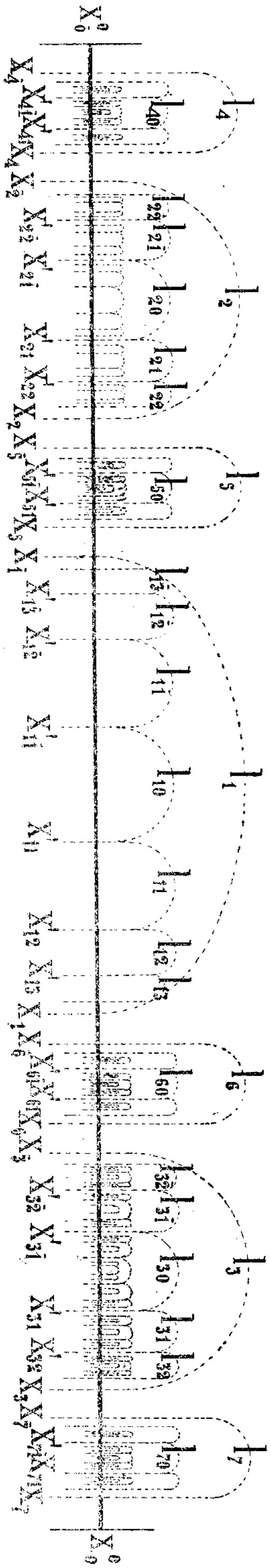
$$\tilde{\omega} . \mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} {}^*\omega^i, \ \ \tilde{\omega}^n . \mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} {}^*\omega_i$$

первая не представляетъ особенностей въ сравненіи съ областью 139°, а вторая сводится на первую.

141. Переходимъ далѣе къ областямъ, опредѣляемымъ типомъ

$$\tilde{\omega} . \mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} ({}^*\omega + \omega)^i,$$

гдѣ законъ соотвѣтствія между интервалами $\tilde{\omega}$ и степенями ${}^*\omega + \omega$ мы оставимъ тотъ же, какъ и въ 139°.



Оставивъ прежнія обозначенія

$$\{x_1^0,\ x_0^0\} = Q^{(0)},\ \{\overset{\pm\omega}{\underset{\pm 1}{x_i}}\} = Q^{(1)},\ E^{(1)},\ P^{(1)} = Q^{(1)} + E^{(1)},$$

назовемъ при j мѣняющемся отъ ± 1 до $\pm\omega$

$$\{x'_{ij}\} = Q_1^{(1)},\ \{x'_{2j}\} = Q_2^{(1)},\ \ldots,\ \{x'_{nj}\} = Q_n^{(1)},\ \ldots,$$

$$\{x''_{2j}\} = Q_2^{(2)},\ \ldots,\ \{x''_{nj}\} = Q_n^{(2)},\ \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\{x_{nj}^{(n)}\} = Q_n^{(n)},\ \ldots,$$

$$\ldots,$$

и кромѣ того

$$Q_1^{(1)} = Q_1,\ \sum_1^2 Q_2^{(i)} = Q_2,\ \ldots,\ \sum_1^n Q_n^{(i)} = Q_n,\ \ldots.$$

Въ настоящемъ случаѣ Q область границъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія будетъ $Q = \sum_1^\omega Q_i^{(i)}$, тогда какъ область внѣшнихъ точекъ имѣетъ такой составъ

$$E = E^{(1)} + Q^{(1)} + \sum_{n=1}^{\omega}\left[Q_n - Q_n^{(n)}\right] = P^{(1)} + \sum_{n=1}^{\omega}\sum_1^{n-1} Q_n^{(i)}.$$

Область P невнутреннихъ точекъ интерваловъ окончательнаго размѣщенія получится при этомъ въ составѣ

$$(11)\quad P = P^{(1)} + \sum_{n=1}^{\omega}\sum_{i=1}^{n} Q_n^{(i)} = P^{(1)} + \sum_1^{\omega} Q_n.$$

Расположенное на каждомъ изъ интерваловъ l_i размѣщеніе $({}^*\omega + \omega)^i$ даетъ

$$Q_n^m = \sum_1^{n-m} Q_n^{(i)} + \{x_{\bar n},\ x_n\},\ Q_n^n = \{x_{\bar n},\ x_n\},\ Q_n^{n+1} = 0;$$

вслѣдствіе этого

$$P^{m} = P^{(1)} + \sum_{m+1}^{\omega} \{ Q_n^m - Q_n^n \}$$

или

$$P^{m} = P^{(1)} + \sum_{n=m+1}^{\omega} \sum_{i=1}^{n-m} Q_n^{(i)}, \ P^{(\omega)} = P^{(1)}.$$

Область P будетъ здѣсь несчетной, замкнутой и рѣдко разсѣянной; въ выраженіи (11) $\sum_{1}^{\omega} Q_n = R$ есть приводимая область *Cantor-Bendixson'a*, для которой $D(R, R^{(\omega)}) = 0$.

142. Приступая далѣе къ изслѣдованію типовъ

$$\omega^{\omega} . \mathbf{Z}_{1}^{\omega} \omega_i, \ (^*\omega + \omega)^{\omega} \mathbf{Z}_{1}^{\omega} \omega_i, \ \tilde{\omega}^{\omega} . \mathbf{Z}_{1}^{\omega} \omega_i,$$

гдѣ ω_i — различныя степени ω, $^*\omega$ или $^*\omega + \omega$, мы прежде всего должны предположить, что область интерваловъ

$$\omega^{\omega}, \ (^*\omega + \omega)^{\omega}, \ \tilde{\omega}^{\omega} \tag{12}$$

будетъ рѣдко разсѣяна; въ противномъ случаѣ, когда свободные отъ точекъ области интервалы отсутствуютъ, не можетъ быть рѣчи о помѣщеніи въ нихъ различныхъ областей суммы $\mathbf{Z}_{1}^{\omega} \omega_i$.

Затѣмъ размѣщенія (12) имѣютъ между собой много общаго и различаются другъ отъ друга только второстепенными особенностями; поэтому возможно изслѣдовать прямо типъ

$$\Omega . \mathbf{Z}_{1}^{\omega} \omega_i . \tag{13}$$

гдѣ Ω—любой изъ сложныхъ типовъ (12).

Свободными интервалами типа Ω являются, въ силу 112°, свободные интервалы нѣкоторой совершенной области, тогда какъ въ остальной части участка невнутренніе точки свободныхъ интерваловъ часто разсѣяны по этой совершенной области; поэтому помѣщеніе интерваловъ ω_i въ свободные интервалы Ω сведется въ сущности къ размѣщенію типа $\tilde{\omega}. \overset{\omega}{\underset{1}{\mathbf{Z}}}\omega_i$, если только мы имѣемъ въ виду исключительно одни интервалы; при этомъ установленіе соотвѣтствія интерваловъ l_i области $\tilde{\omega}$ и типовъ ω_i происходитъ также, какъ и въ 139°. Если же мы примемъ въ разсчетъ Q—область границъ всѣхъ системъ дѣленія, то между $\tilde{\omega}\,\mathbf{Z}\,\omega_i$ и $\Omega\,\mathbf{Z}\,\omega_i$ проявится существенная разница.

Область Q для (13) составится во 1) изъ границъ Q_i различныхъ дѣленій ω_i, лежащихъ внутри l_i; 2) изъ нѣкоторыхъ границъ свободныхъ интерваловъ размѣщенія Ω, и наконецъ 3) изъ ряда внѣшнихъ точекъ, часто разсѣянныхъ по совершенной области, отвѣчающей размѣщенію Ω; точки двухъ послѣднихъ категорій образуютъ область Q_ω; для области

$$Q = \sum_1^{\omega} Q_i + Q_\omega = Q_0 + Q_\omega$$

мы имѣемъ

$$Q' = M\,(Q_0',\ Q_\omega') = S + R$$

гдѣ $S = Q_\omega'$ — совершенная и R — приводимая область, состоящая изъ предѣльныхъ точекъ Q_0, лежащихъ внутри интерваловъ совершенной области.

143. Мы могли бы далѣе продолжать приведенное выше комбинированіе областей, взявъ при этомъ за элементы области трансфинитнаго и смѣшаннаго типа, при чемъ получились бы все болѣе и болѣе усложняющіеся типы размѣщенія.

Но мы не думаемъ, чтобы стоило дѣлать такое изслѣдованіе; предыдущаго вполнѣ достаточно, чтобы видѣть, какъ *комбинація только трехъ основныхъ типовъ* ω, $^*\omega$ и $\tilde{\omega}$ *можетъ дать размѣщеніе произвольной сложности.*

144. Мы скажемъ здѣсь еще два слова по поводу классификаціи точекъ области, чего мы уже касались въ 22°. Строя при помощи различныхъ комбинацій основныхъ типовъ точечныя области, весьма различающіяся другъ отъ друга по характеру, мы имѣемъ дѣло съ большимъ разнообразіемъ видовъ предѣльныхъ точекъ, появляющихся въ зависимости отъ частоты процесса основныхъ размѣщеній; поэтому является желательнымъ классифицировать точки области въ связи съ ея типомъ.

Классификація *Cantor'a* въ 22° не вызываетъ никакихъ возраженій, пока дѣло идетъ о замкнутыхъ областяхъ, но какъ только мы переходимъ къ областямъ незамкнутымъ, какъ сейчасъ увидимъ, дѣло мѣняется, и выясняется необходимость внести въ классификацію *Cantor'a* маленькое измѣненіе.

Для замкнутой области P выраженіе (1) 22° принимаетъ видъ

$$P \equiv \sum [P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1})] + P^{(\Omega)},$$

и въ немъ уже заключается распредѣленіе точекъ на различные классы. Простѣйшія изъ нихъ—уединенныя точки, образующія область $P - P'$; это—*точки* или *предѣльныя точки нолевого порядка*. Далѣе—уединенныя точки первой производной, $P' - P''$, будутъ точками перваго порядка: точки n'ой, ω'ной, α'ной производной—*точками n'аго, ω'аго, α'аго.* Затѣмъ точки области $P^{(\Omega)}$ мы назовемъ *точками сгущенія*; въ произвольной окрестности такихъ точекъ точки области будутъ несчетны.

По мѣрѣ нахожденія различныхъ производныхъ, послѣдовательно отпадаютъ точки 0'го, 1-го, ... n'аго и т. д. порядка до тѣхъ поръ, пока мы не дойдемъ до уединенныхъ точекъ послѣдней производной $P^{(\alpha)}$, вслѣдъ за которой идетъ уже замкнутая и сгущенная, т. е. совершенная производная $P^{(\alpha+1)} \equiv P^{(\Omega)}$.

Въ зависимости отъ состава области P, въ ней появляются тѣ или другія точки. Пусть P будетъ счетна, тогда для нея $P^{(\Omega)}$ должна обращаться въ 0, и точками наивысшаго порядка будутъ точки $P^{(\alpha)}$; въ частномъ случаѣ, когда $\alpha = \omega$ или $\alpha = n$, мы имѣемъ, какъ послѣднія по сложности предѣльныя точки, точки ω'го или n'го порядка. Если P не счетна, такими точками будутъ точки сгущенія. Очевидно, что чѣмъ выше порядокъ предѣльной точки, тѣмъ болѣе учащаются точки P въ ея окрестности, хотя число точекъ P въ этой окрестности всегда счетно.

Ясно, что отсутствіе точекъ какого нибудь порядка влечетъ за собой отсутствіе точекъ *всѣхъ высшихъ порядковъ*, точки же сгущенія могутъ при этомъ быть на лицо. Но съ другой стороны—возможно отсутствіе точекъ всѣхъ порядковъ; это будетъ имѣть мѣсто у совершенной области, гдѣ всѣ точки области—точки сгущенія.

Предыдущая классификація точекъ не носитъ въ себѣ ничего произвольнаго и ничего случайнаго; она обусловливается самой природой вещей, самимъ строеніемъ области.

Если вмѣсто замкнутой области, мы имѣемъ дѣло съ областью незамкнутой P, мы дополняемъ ее до M (P, P′) и *приписываемъ точкамъ P тотъ порядокъ, который онъ имѣютъ въ* M (P, P′): въ этомъ только и заключается то измѣненіе, которое мы вносимъ въ классификацію *Cantor'a*.

145. Чтобы видѣть на примѣрѣ, какую разницу вноситъ это измѣненіе, разсмотримъ область интерваловъ $(^*\omega + \omega)^3$, обозначивъ $Q^{(0)}$, $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$—границы соотвѣтственныхъ дѣленій и взявъ область $R \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)} + Q^{(3)}$; для нея соотвѣтственная замкнутая область будетъ $P \equiv \sum\limits_0^3 Q^{(i)}$ и—согласно опредѣленію—

$$P - P' \equiv Q^{(3)},\ P' - P'' \equiv Q^{(2)},\ P'' - P''' \equiv Q^{(1)},\ P''' \equiv Q^{(0)},\ P'''' \equiv 0,$$

при чемъ точки третьяго дѣленія будутъ точками 0'аго порядка, второго дѣленія—1-го порядка, перваго дѣленія—2-ого порядка, и границы участка—3-го порядка.

Для области R, у которой выброшены точки $Q^{(2)}$, все внутреннее строеніе остается такимъ же, какъ и у P; для нея — согласно *Cantor'y* — точки $R_a \equiv Q^{(3)}$ составятъ тоже точки 0-го рода, что же касается до P_{ca}, то это будутъ уединенныя точки области $R - R_a \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)}$, т. е. точки $Q^{(1)}$; такимъ образомъ

$$P_{ca} \equiv Q^{(1)},\ P_{ca}^2 \equiv Q^{(0)},$$

при чемъ точки перваго дѣленія сдѣлаются здѣсь точками перваго рода, а границы интервала—точками второго рода.

Если мы сдѣлаемъ очень незначительное измѣненіе состава области, именно—возьмемъ, вмѣсто R, область

$$E = Q^{(0)} + Q^{(1)} + \{x''\} + Q^{(3)},$$

гдѣ x''—одна изъ точекъ второго дѣленія, то этого уже будетъ достаточно, чтобы измѣнить родъ предѣльныхъ точекъ.

Дѣйствительно: въ настоящемъ случаѣ

$$P_a \equiv Q^{(3)},\ P_{ca} \equiv \{x''\},\ P_{ca}^2 \equiv Q^{(1)},\ P_{ca}^3 \equiv Q^{(3)},$$

т. е. точки перваго дѣленія будутъ здѣсь уже точками второго рода и границы интервала—третьяго рода.

Такимъ образомъ, при сохраненіи извѣстнаго строенія области, достаточно отсутствія одной только точки въ ея составѣ, чтобы нарушить установленную *Cantor'омъ* классификацію точекъ; поэтому эта классификація не можетъ быть признана естественною и должна быть соотвѣтствующимъ образомъ измѣнена; указанное выше видоизмѣненіе не страдаетъ этимъ недостаткомъ и можетъ быть признано поэтому естественной классификаціей, вытекающей изъ сути дѣла.

6. Строеніе произвольной замкнутой области.

146. Перейдемъ теперь къ обратной задачѣ, выяснимъ, въ какой мѣрѣ для произвольной замкнутой области можетъ быть указанъ опредѣленный типъ размѣщенія?

Чтобы дать отвѣтъ на этотъ вопросъ, намъ придется разсмотрѣть отдѣльно области счетныя и несчетныя; что же касается совершенныхъ областей, то говорить о нихъ нечего, такъ какъ ихъ типъ опредѣленъ; мы начнемъ изслѣдованіе съ рѣдко разсѣянной замкнутой счетной области, для которой, согласно D 66°, $P = P_i + P'$.

Пусть L—основной интервалъ области P; такъ какъ P замкнута, то ея границы должны быть точками P. Такъ какъ P' счетна, то—согласно 13°—существуетъ такое число λ перваго или второго класса и перваго вида, для котораго соотвѣтственная производная $P^{(\lambda)}$ равна нолю; такъ какъ λ—число перваго вида, то для него существуетъ непосредственно ему предшествующее число $\lambda - 1$, которое мы назовемъ α; тогда $\lambda = \alpha + 1$, и $P^{(\alpha+1)} \equiv 0$, между тѣмъ какъ $P^{(\alpha)}$ состоитъ изъ конечнаго числа точекъ.

Дальнѣйшее изслѣдованіе мы будемъ вести, предполагая послѣдовательно $\alpha = n$, ω, $\omega + n$, $\omega . 2$, . . . , и кромѣ того будемъ брать сначала тотъ случай, когда наивысшая отличная отъ ноля производная заключаетъ въ себѣ только одну или двѣ точки, и именно—или обѣ границы L, или только одну изъ нихъ.

147. Итакъ разсмотримъ простѣйшій случай, когда $\alpha = n$ конечно; такъ какъ—по условію—въ составъ $P^{(n)}$ входятъ или обѣ точки $Q^{(0)}$ или только одна изъ нихъ, то $P^{(n)} \equiv Q^{(0)}$ или $P^{(n)} \equiv D(Q^{(0)})$; во второмъ случаѣ, если ξ — одна изъ точекъ $Q^{(0)}$ не есть точка $P^{(n)}$, она должна быть уединенной точкой или P, или одной изъ производныхъ

$P^{(n-\nu)}$; это обстоятельство должно имѣть мѣсто необходимо, такъ какъ область P замкнута, и—слѣдовательно—ей принадлежатъ границы основного интервала, иначе интервалъ могъ бы быть уменьшенъ; пусть въ общемъ случаѣ ξ—уединенная точка $P^{(n-\nu)}$, гдѣ ν можетъ быть равнымъ 1, 2, 3, . . . , n, если $P^{(0)}$ понимать какъ P.

Точки $P^{(n)}$ служатъ предѣльными точками для *уединенныхъ* точекъ предыдущей производной $P^{(n-1)}$; назовемъ область такихъ точекъ $Q^{(1)}$; эти точки служатъ границами интерваловъ $\{l_i'\}$, размѣщенныхъ на L; типомъ этого размѣщенія будетъ одинъ изъ типовъ $^*\omega+\omega$, ω, $^*\omega$ въ зависимости отъ того, будутъ ли обѣ границы L точками $P^{(n)}$, или только одна правая, или одна лѣвая; назовемъ ω_1 этотъ типъ размѣщенія.

Въ составъ производной $P^{(n-1)}$, кромѣ ея уединенныхъ точекъ $Q^{(1)}$, войдутъ еще точки $P^{(n)}$, такъ что

$$P^{(n-1)} \equiv Q^{(1)} + P^{(n)}.$$

Каждая изъ границъ $Q_1 \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)}$, кромѣ единственной точки ξ, будетъ, какъ точка $P^{(n-1)}$, предѣльной точкой для уединенныхъ точекъ $P^{(n-2)}$; назовемъ область этихъ послѣднихъ точекъ $Q^{(2)}$; точки $Q^{(2)}$ будутъ располагаться на каждомъ изъ интерваловъ l_i' перваго дѣленія и служатъ границами интерваловъ $\{l_{ij}'\} \equiv \{l_k''\}$. Размѣщеніе l_{ij}' на l_i' можетъ быть однимъ изъ ω, $^*\omega$, $^*\omega+\omega$ или конечнымъ типомъ m, но на разныхъ l_i' размѣщенія могутъ быть различны; поэтому типъ размѣщенія всѣхъ интерваловъ $\{l_{ij}'\}$ долженъ быть обозначенъ какъ $\omega_1 . \sum\limits_1^{\omega} \omega_2^{(i)} = \omega_2$, гдѣ каждый $\omega_2^{(i)}$ есть одинъ изъ типовъ ω, $^*\omega$, $^*\omega+\omega$, m. Составъ производной $P^{(n-2)}$ опредѣлится теперь какъ

$$P^{(n-2)} \equiv Q^{(2)} + P^{(n-1)} \equiv \sum_1^2 Q^{(i)} + P^{(n)}.$$

Границами интерваловъ послѣ второго размѣщенія могутъ быть, кромѣ ξ и точекъ $Q^{(2)}$, еще нѣкоторыя точки Q_1, именно тѣ, которыя будутъ при этомъ размѣщеніи односторонними предѣлами; назовемъ Q_2 область такихъ границъ. Аналогично предыдущему мы можемъ разсуждать и далѣе: точки Q_2, кромѣ одной ξ, будучи точками $P^{(n-2)}$, оказываются предѣльными для уединенныхъ точекъ $P^{(n-3)}$, составляющихъ область $Q^{(3)}$; такъ какъ въ каждомъ изъ интерваловъ $l_k^{''}$ размѣщеніе интерваловъ $l_{kl}^{''}$ можетъ быть не одно и то-же, то типъ размѣщенія интерваловъ $l_{kl}^{''} = \{l_m^{'''}\}$ мы должны обозначить какъ $\omega_2 . \overset{\omega}{\underset{1}{Z}}\, \omega_3^{(k)} = \omega_3$; при этомъ

$$P^{(n-3)} = P^{(n-2)} + Q^{(3)} = \sum_1^3 Q^{(i)} + P^{(n)}.$$

Точки $Q^{(3)}$, вмѣстѣ съ нѣкоторыми точками Q_2, будутъ границами интерваловъ третьяго дѣленія $\{l_m^{'''}\}$, въ каждомъ изъ которыхъ можетъ быть помѣщенъ особый рядъ интерваловъ, такъ что для $P^{(n-4)}$ мы получимъ типъ $\omega_3 . \overset{\omega}{\underset{1}{Z}}\, \omega_4^{(m)} = \omega_4$; и т. д.

Такъ какъ, по условію, ξ есть уединенная точка производной $P^{(n-\nu)}$, то всѣ уединенныя точки послѣдней выразятся черезъ $Q^{(\nu)} + \{\xi\}$, и $P^{(n-\nu)}$ приметъ тогда видъ

$$P^{(n-\nu)} = P^{(n-\nu+1)} + Q^{(\nu)} + \{\xi\} = \sum_1^{\nu} Q^{(i)} + P^{(n)} + \{\xi\} = \sum_0^{\nu} Q^{(i)},$$

и типъ области $P^{(n-\nu)}$ будетъ теперь $\omega_{\nu-1} . \overset{\omega}{\underset{1}{Z}}\, \omega_\nu^{(i)} = \omega_\nu$.

Послѣ $P^{(n-\nu)}$ всѣ предшествующія $P^{(n-\nu)}$ производныя будутъ совпадать съ $\sum_0^{\nu} Q^i$, такъ что окажется

$$P' = Q^{(n-1)} + P'' = \sum_0^{n-1} Q^i, \quad P = P' + Q^{(n)} = \sum_0^{n} Q^{(i)},$$

при чемъ окончательный типъ размѣщенія интерваловъ области P будетъ $\omega_{n-1} . \overset{\omega}{\underset{1}{Z}}\, \omega_n^{(i)} = \omega_n$; такимъ образомъ для заданной области P типъ размѣщенія ω_n можетъ быть указанъ вполнѣ опредѣленно.

148. Мы доказали предыдущую теорему въ томъ предположеніи, что $P^{(n)}$ состоитъ только изъ одной или двухъ границъ основного интервала L; пусть въ общемъ случаѣ $P^{(n)} = \{x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots x_m^0\}$, при чемъ m должно быть конечно, такъ какъ иначе существовала бы слѣдующая производная $P^{(n+1)}$, отличная отъ ноля.

Дѣля точками $P^{(n)}$ интервалъ L на конечное число частей L_i, не превышающее $m+1$, мы приведемъ задачу къ предыдущей: на каждомъ изъ интерваловъ L_i, находящихся въ условіяхъ 147°, мы построимъ область интерваловъ типа $\omega_{n_i}^{(i)}$, и типъ размѣщенія для всего L будетъ данъ выраженіемъ $\sum \omega_{n_i}^{i}$: такимъ образомъ задача будетъ рѣшена и въ общемъ случаѣ; итакъ

„Для каждой счетной замкнутой области P перваго рода можетъ быть указанъ опредѣленный типъ размѣщенія“.

149. Пусть теперь будетъ $\alpha = \omega$, т. е. для области P ея производная $P^{(\omega)}$ состоитъ *изъ конечнаго числа точекъ.*

A. Положимъ сначала, что этихъ точекъ одна или двѣ, и именно границы L; такъ какъ P замкнута, обѣ границы основного интервала L входятъ въ составъ P.

Выберемъ изъ состава P рядъ точекъ $\{x_i\}$, для которыхъ точки $P^{(n)}$ будутъ предѣльными; эти точки опредѣлятъ на L интервалы $\{l_i'\}$ типа ω_0, принадлежащаго одному изъ размѣщеній ω, $^*\omega$, $^*\omega + \omega$. Помѣщающіяся внутри каждаго изъ интерваловъ l_i' точки P образуютъ область P_i перваго рода, такъ какъ единственныя точки $P^{(\omega)}$— границы основного интервала; поэтому для каждаго изъ интерваловъ l_i' можетъ быть — согласно 147° и 148° — указанъ опредѣленный типъ размѣщенія $\omega_{n_i}^{(i)}$, такъ что общее размѣщеніе будетъ имѣть типъ $\omega_0 . \mathbf{Z}\, \omega_{n_i}^{(i)} = \omega'$, который есть ничто иное, какъ одинъ изъ типовъ

$$(^*\omega + \omega) \mathop{\mathbf{Z}}_{0}^{\pm\omega} \omega_{n_i}^{(i)},\quad \omega \mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} \omega_{n_i}^{(i)},\quad {}^*\omega \mathop{\mathbf{Z}}_{1}^{\omega} \omega_{n_i}^{(i)}.$$

Очевидно, что съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія n, нпр. — съ n_ν, указатель n_i, т. е. видъ области P_{n_i}, долженъ возрастать безконечно; если бы этого не было, область P была бы перваго рода, и $P^{(\omega)}$ должна была бы отсутствовать.

B. Если бы $P^{(\omega)}$ состояла не изъ одной или двухъ, а изъ m точекъ, тогда эти точки раздѣляли бы участокъ L на самое большое $m+1$ частей L_i, границами которыхъ были бы точки $P^{(\omega)}$. Часть P_i области P, расположенная внутри L, находилась бы въ условiяхъ A 149°, и ей отвѣтилъ бы типъ размѣщенiя ω_i'; въ такомъ случаѣ все размѣщенiе на L имѣло бы типъ $\sum \omega_i' = \omega''$.

Такимъ образомъ, при $\alpha = \omega$, для данной области P можетъ быть также указанъ опредѣленный типъ размѣщенiя.

150. Пусть далѣе $\alpha = \omega + n$, и пусть область $P^{(\omega+n)}$ безразлично состоитъ изъ одной или нѣсколькихъ точекъ. Такъ какъ

$$P^{(\omega+n)} = \{P^{(\omega)}\}^{(n)} = R^{(n)},$$

гдѣ черезъ R обозначена замкнутая область $P^{(\omega)}$, то — согласно 147°-148° — мы можемъ построить область интерваловъ $\{l_i\}$ типа ω_n, которые дадутъ, какъ невнутреннiя точки, точки области R.

Каждая изъ этихъ точекъ есть точка $P^{(\omega)}$; слѣдовательно, на каждомъ свободномъ интервалѣ l_i области R помѣщается область $P_i^{(\omega)}$ типа A 149°; при этомъ на интервалѣ l_i могутъ быть обѣ границы или только одна изъ нихъ предѣльными точками $P^{(\omega)}$; въ послѣднемъ случаѣ соотвѣтственная точка будетъ предѣльной точкой области $P^{(\omega)}$ на смежномъ интервалѣ.

Такъ какъ на различныхъ интервалахъ l_i области $P_i^{(\omega)}$ могутъ быть одинаковы или различны, то окончательный типъ размѣщенiя въ настоящемъ случаѣ будетъ $\omega_n . \omega'$ или $\omega_n \sum_1^{\omega} \omega_i'$.

151. Совершенно также мы можемъ опредѣлить типъ размѣщенiя и построить область интерваловъ въ томъ случаѣ, когда $\alpha = \omega . 2$. Разсматривая снова

$$P^{(2n)} = \{P^{(\omega)}\}^{(\omega)} = R^{(\omega)},$$

мы можемъ — имѣя въ виду B 149° — построить область интерваловъ $\{l_i\}$ типа ω'', невнутренними точками которыхъ будутъ точки R.

Каждая изъ точекъ R есть точка области $P^{(\omega)}$; слѣдовательно въ каждомъ изъ свободныхъ интерваловъ $\{l_i\}$ помѣщается снова область типа ω', разобраннаго въ 149°; поэтому окончательное размѣщеніе будетъ имѣть типомъ

$$\omega'' \mathop{Z}_{1}^{\omega} \omega'_i = \omega'''.$$

Ясное дѣло, что этимъ путемъ мы можемъ идти и дальше, строить и опредѣлять типъ областей, если $\alpha = \omega . 2 + n$, $\omega . 3$, ..., каково бы число α ни было. Мы приходимъ теперь къ такому выводу:

„Всякая замкнутая счетная облать можетъ быть построена какъ область невнутреннихъ точекъ интерваловъ, вообще говоря, смѣшаннаго типа“.

152. Переходя къ несчетнымъ областямъ P, мы должны будемъ опереться на теорему *Cantor-Bendixson'a*, выражающую P въ видѣ $P = R + S$, гдѣ R счетная область, а S—совершенна, и $D(R^{(\alpha)}, R) = 0$.

На основаніи этой теоремы мы строимъ прежде всего совершенную область S, свободные интервалы которой $\{l_i\}$ будутъ имѣть типъ размѣщенія $\tilde{\omega}$; точки R могутъ размѣщаться только на этихъ интервалахъ, при чемъ R распадается на счетный рядъ частей R_i; каждая изъ нихъ будетъ областью перваго рода, и—слѣдовательно—типъ ея размѣщенія опредѣляется на основаніи 147°-151°; если мы назовемъ этотъ типъ Ω_i, то типъ размѣщенія свободныхъ интерваловъ области P долженъ быть обозначенъ какъ $\tilde{\omega} \mathop{Z}_{1}^{\omega} \Omega_i$.

Сопоставляя этотъ результатъ съ 152°, мы приходимъ теперь къ заключенію, что

„Всякая замкнутая область можетъ быть построена какъ область невнутреннихъ точекъ ряда интерваловъ нѣкотораго опредѣленнаго типа“.

153. Такимъ образомъ, поскольку идетъ дѣло о замкнутыхъ областяхъ, теорія типовъ размѣщенія даетъ возможность съ одной стороны—по заданному типу строить область интерваловъ, обладающую извѣстными свойствами, и обратно—для данной области опредѣлять типы размѣщенія, т. е. характеризовать извѣстнымъ символомъ всякую данную замкнутую область. Такая характеристика возможна кромѣ того для многихъ незамкнутыхъ областей и именно—для тѣхъ, которыя являются результатомъ сложныхъ типовъ размѣщенія.

Основные типы ω, $^*\omega$, $\tilde{\omega}$ служатъ здѣсь тѣмъ орудіемъ, съ помощью котораго мы можемъ достигнуть всего указаннаго выше результата.

Что касается примѣненія предыдущей теоріи къ незамкнутымъ областямъ, мы заранѣе не должны разсчитывать достигнуть такихъ же простыхъ результатовъ, какіе выражаются въ теоремѣ 152°; намъ не удается указать для незамкнутой области подобной общей теоремы, хотя въ частныхъ случаяхъ эту задачу удастся, можетъ быть, разрѣшить. „Теоретически самыя важныя точечныя области это—замкнутыя и совершенныя; онѣ къ тому же чаще всего встрѣчаются въ анализѣ и геометріи [1])", и поэтому пріобрѣтаетъ особенное значеніе тотъ опредѣленный отвѣтъ, какой мы выше могли дать относительно ихъ строенія.

---

[1]) См. *Schoenflies*, Bericht, S. 74.

ГЛАВА III.

Новѣйшія работы.

154. [1]) Для *произвольнаго*, можетъ быть, несчетнаго ряда интерваловъ $\{l\}$ *Young* опредѣляетъ [2]) область внутреннихъ точекъ G; такъ какъ дополнительная ей область замкнута, то G можетъ быть задана какъ область внутреннихъ точекъ ряда незахватывающихъ другъ друга интерваловъ.

Если мы имѣемъ безконечную систему такихъ рядовъ интерваловъ $\{l^{(n)}\}$, то точки, лежащія внутри по крайней мѣрѣ одного интервала каждаго ряда, образуютъ *внутреннюю предѣльную область* [3]); эта область можетъ быть дана такъ, что интервалы $\{l^{(n+1)}\}$ будутъ располагаться на интервалахъ $\{l^n\}$; тогда получатся *нормальные ряды интерваловъ*.

Условіе А. „Пусть существуетъ рядъ возрастающихъ чиселъ

$$\nu_1, \ \nu_2, \ \nu_3, \ \ldots \ \nu_n, \ \ldots$$

такой, что можно указать интервалъ ν_1'ой нормальнаго ряда, которому отвѣчаютъ два интервала ν_2'го ряда, на каждомъ изъ нихъ имѣется два интервала ν_3'го ряда, и т. д.“.

Если это такъ, между предѣльными точками границъ интерваловъ и точками интервала (0,1), выраженными въ двоичной системѣ, можно установить взаимно-однозначное, кромѣ счетнаго ряда точекъ, соотвѣтствіе; если мы исключимъ тѣ предѣльныя точки, которыя служатъ границами налагающихся другъ на друга интерваловъ $l^{(n)}$, и число которыхъ счетно (имъ отвѣчаютъ конечныя двоичныя дроби), то остальныя точки будутъ внутренними предѣльными, и область ихъ несчетна.

---

[1]) Съ тѣхъ поръ какъ началось печатанье предыдущихъ главъ, съ осени 1904 г., прошло много времени, пока оно стало приближаться къ концу; за это время я могъ ознакомиться съ тѣми статьями, которыя не были въ моихъ рукахъ ко времени окончанія I главы; сверхъ того за это время появилось и нѣсколько новыхъ и крайне важныхъ работъ, которыхъ нельзя было не отмѣтить, не нарушая плана настоящаго сочиненія, и которыя оказали значительное вліяніе на изложеніе IV главы.

[2]) Leipz. Berichte, 1903, S. 287.

[3]) Нужно помнить, что все, заключающееся здѣсь и въ слѣдующихъ $nn°$, относится къ *обыкновенной* внутренней предѣльной области, разграниченіе которой отъ *обобщенной* явилось у *Young'a* позже.

Такимъ образомъ, если условія А выполнено, внутренняя предѣльная область P несчетна, и—слѣдовательно [1])—она *заключаетъ въ своемъ составѣ сгущенную часть.*

Далѣе—если внутренняя предѣльная область P заключаетъ часто разсѣянную часть, то должны быть часто разсѣяны и соствѣтственные нормальные интервалы; а въ такомъ случаѣ условіе А выполнено, и область P несчетна. Отсюда мы выводимъ заключеніе, что

B. „Если внутренняя предѣльная область P заключаетъ часто разсѣянныя части, то она несчетна"; и далѣе

C. „Счетная внутренняя предѣльная область должна быть рѣдко разсѣяна".

Пусть затѣмъ $P = R + E$, гдѣ R раздѣльная, а E сгущенная часть; отнесемъ совершенную область E' къ интервалу (0,1), при чемъ каждому свободному интервалу E' будетъ отвѣчать одна точка интервала (0,1); области E, часто разсѣянной по E', отвѣчаетъ T, часто разсѣянная по (0,1); точкѣ x изъ состава E, лежащей внутри нормальнаго интервала $l_x^{(n)}$, отвѣчаетъ точка ξ, которая будетъ также лежать внутри соотвѣтственнаго интервала $\lambda_\xi^{(n)}$ или же будетъ его границей, если x была границей свободнаго интервала E'. Незахватывающимъ другъ друга интерваламъ $l^{(n)}$ отвѣчаютъ тѣмъ болѣе такого же рода интервалы $\lambda^{(n)}$, и налагающимся другъ на друга $l^{(n)}$—аналогичные интервалы $\lambda^{(n)}$: поэтому нормальнымъ интерваламъ $\{l^n\}$ будутъ отвѣчать нормальные интервалы $\{\lambda^n\}$, для которыхъ ξ можетъ быть или внутренней предѣльной точкой, или границей. Такъ какъ T часто разсѣяна по (0,1), то, какъ это мы видѣли выше, и вся область $\{\xi\}$, и часть ея, состоящая изъ внутреннихъ точекъ, будетъ несчетна; а слѣдовательно будутъ несчетны и области $E = \{x\}$ и P; такимъ образомъ мы имѣемъ:

D. „Если внутренняя предѣльная область не раздѣльна, то она несчетна" [2]);

изъ D непосредственно слѣдуетъ:

E. „Если внутренняя предѣльная область счетна, то она раздѣльна".

Мы приходимъ теперь къ двумъ заключеніямъ:

F. „Всякая область, заключающая сгущенныя или часто разсѣянныя части, можетъ быть внутренней предѣльной областью только въ томъ случаѣ, если она несчетна".

---

[1]) См. выше 22°, стр. 32.

[2]) У *Young'a* сказано: „если внутренняя предѣльная область *несчетна*, то она имѣетъ размѣръ непрерывности"; ср. примѣчаніе стр. 98.

G. „Счетная область можетъ быть внутренней предѣльной областью только при условіи, что она рѣдко разсѣяна и раздѣльна".
Отсюда слѣдуетъ между прочимъ, что

H. „Область какъ раціональныхъ, такъ и алгебрическихъ ирраціональныхъ чиселъ не можетъ быть внутренней предѣльной областью".

155. Имѣя какую нибудь область P, мы можемъ включить ея точки $\{x\}$ въ нормальный рядъ интерваловъ $\{l_x^{(n)}\}$; внутренній предѣльный рядъ $P^{(0)}$, полученный при безконечномъ уменьшеніи всѣхъ интерваловъ $l^{(n)}$, не будетъ непремѣнно тожественъ съ P; онъ можетъ заключать точки, отсутствующія въ P.

Имѣя теоремы F и G, мы въ состояніи во многихъ случаяхъ заранѣе предсказать, каково будетъ отличіе $P^{(0)}$ отъ P, отличіе, на которое — разумѣется — можетъ оказать вліяніе законъ построенія интерваловъ; такъ раздѣльная область P съ несчетной производной P' можетъ быть внутренней предѣльной областью, такъ какъ она располагается на свободныхъ интервалахъ нѣкоторой совершенной области, гдѣ могутъ быть размѣщены также и включающіе P интервалы. Что касается до размѣра областей P и $P^{(0)}$, то, не считая предыдущаго случая, $P^{(0)}$ и $M(P, P')$ равномѣрны.

Вообще говоря, область $P^{(0)}$ не замкнута; въ нее навѣрное не войдутъ 1) предѣльныя точки безконечнаго ряда интерваловъ и 2) налагающіяся другъ на друга границы нормальнаго ряда интерваловъ, если онѣ существуютъ.

Итакъ внутренней предѣльной областью могутъ быть только области:

a) часто разсѣянная однородная [1]) несчетная,

b) всякая раздѣльная,

c) рѣдко разсѣянная сгущенная однородная несчетная,

d) область, состоящая изъ однородной несчетной части U и раздѣльной части, помѣщающейся на свободныхъ интервалахъ совершенной области U'; это будетъ наиболѣе общій случай внутренней предѣльной области.

Къ такому же результату приходитъ, хотя и очень сложнымъ путемъ, *Hobson* [2]); какъ заключеніе къ предыдущему, мы приведемъ его слова [3]): „Опредѣленіе необходимыхъ и достаточныхъ условій, чтобы какая либо данная область могла быть внутренней предѣльной областью,

---

[1]) т. е. несчетная въ произвольной части основного интервала.

[2]) Proc. of Lond. Math. S., (2) 2, p. 317.

[3]) ib. p. 325.

приводится такимъ образомъ къ опредѣленію критерія только для однородной несчетной области, при чемъ случай рѣдко разсѣянной области можно свести, по методу соотвѣтствія, къ области часто разсѣянной". Въ связи съ 162°, это сводится къ опредѣленію условій, при которыхъ часто разсѣянная однородная несчетная область можетъ быть областью второй категоріи, но этого опредѣленія *Hobson'у* сдѣлать не удалось [1]).

156. Статья *Veblen'a* 1904 г. посвящена [2]) уясненію связи между теоремой *Borel'я* [3]), взятой безъ ограниченія относительно счетности ряда интерваловъ, и опредѣленіемъ числа *Dedekind'омъ*:

„Если всѣ числа интервала AB распадаются на двѣ области $\{X\}$ и $\{x\}$, при чемъ каждое число X больше каждаго x, то существуетъ нѣкоторое число ξ, удовлетворяющее условію $X \geqq \xi \geqq x$".

Veblen утверждаетъ, что теорема *Borel'я* является слѣдствіемъ опредѣленія *Dedekind'a*, и обратно; первая часть этого утвержденія слѣдуетъ изъ того, что первое доказательство *Borel'я* [5]) опирается на существованіе числа B_ω, обусловленное опредѣленіемъ *Dedekind'a*; что-же касается второй части, то ее *Veblen* доказываетъ такъ:

Пусть теорема *Borel'я* справедлива, а точка ξ отсутствуетъ; тогда для точекъ X нѣтъ нижней и для x верхней границы, благодаря чему около каждаго X или x можно построить интервалъ, границами и внутренними точками котораго будутъ только точки X или x соотвѣственно; такъ какъ на AB находятся только точки X и x то построенные интервалы удовлетворяютъ условіямъ теоремы *Borel'я*, и изъ нихъ можетъ быть выбрано n интерваловъ $\{l_i\}$, покрывающихъ всѣ точки AB Взявъ наибольшій интервалъ, покрывающій точку A, относящуюся къ области $\{x\}$, мы получимъ, какъ его правую границу, точку x_1 той же области; наибольшій интервалъ изъ $\{l_i\}$, покрывающій x_1, опредѣлитъ, какъ правую границу, точку x_2; и т. д.; такъ какъ число интерваловъ конечно, и нѣтъ ни одной непокрытой ими точки, мы придемъ къ точкѣ B, которая должна оказаться также точкой области $\{x\}$, что противно положенію; такимъ образомъ отрицаніе точки ξ не допустимо

[1]) ib. p. 317.

[2]) Bull. of the Am. Math. Soc., (2) 10, p. 436.

[3]) См. 27°, стр. 37 и 39. Теорема *Borel'я* носитъ часто, хотя едва-ли справедливо, названіе теоремы *Heine-Borel'я* въ виду того, что доказательство теоремы *Heine* о равномѣрной сходимости (Cr. J., 74, S. 188) является частнымъ случаемъ разсужденія теоремы *Borel'я*; поэтому можетъ быть было бы правильнѣе называть теперь эту теорему *Heine*—теоремой *Heine-Borel'я*.

[4]) См. выше 27°, стр. 88

Теорема *Borel'я*, какъ мы видѣли выше[1]), можетъ быть доказана въ болѣе общемъ видѣ для замкнутой области; *Veblen*, приводя новое доказательство этой теоремы, замѣчаетъ, что она справедлива *только* для замкнутой области. Для незамкнутой же области отсутствіе уже одной предѣльной точки влечетъ за собой невозможность включить точки области въ конечное число интерваловъ; это *Veblen* доказываетъ такъ: пусть для области P, расположенной на участкѣ (x_0, X_0), отсутствуетъ одна предѣльная точка ξ; пусть X—всѣ точки интервала (x_0, X_0), лежащія вправо отъ ξ, и x—точки влѣво отъ ξ; тогда всевозможными интервалами (x_0, x), (X, X_0) покрываются всѣ точки области P, такъ какъ для каждой ея точки p влѣво отъ ξ имѣется точка x, лежащая между p и ξ, и для точки p вправо отъ ξ существуютъ точки x между ξ и p; но среди интерваловъ (x_0, x) и (X, X_0) нѣтъ конечнаго ихъ числа, которые бы удовлетворяли теоремѣ *Borel-Young'a*.

157. Въ 1904 г. *Young* даетъ[2]) еще обобщеніе теоремы *Borel'я*.

Малый участокъ (region)[3]) l, связанный съ нѣкоторой опредѣленной точкой P, находящейся внутри его, называется *элементомъ* (tile) l_P, и точка P есть *точка сопряженія* (point of attachment); ея положеніе, форма и величина участка характеризуютъ элементъ; два элемента, совпадающіе по формѣ и величинѣ, различны, если различны точки сопряженія; обыкновенно элементъ можно произвольно уменьшать по краямъ, не лишая его свойствъ. Элементъ *покрываетъ* всѣ точки, лежащія внутри его, но точки его границъ не считаются покрытыми.

Теорема A. „Если данъ рядъ элементовъ, которые могутъ быть уменьшаемы, и точки сопряженія которыхъ заполняютъ замкнутый участокъ S, то можно опредѣлить конечное число элементовъ, обладающихъ слѣдующими свойствами[4]):

a) длина каждаго элемента меньше ε;

b) каждая точка S будетъ покрыта однимъ или болѣе элементами;

c) каждая точка сопряженія P_i покрывается единственнымъ элементомъ l_{P_i};

d) сумма интерваловъ, покрытыхъ болѣе чѣмъ однимъ элементомъ, меньше ε',

при чемъ ε и ε' произвольно малыя положительныя числа".

Такъ какъ элементы могутъ быть уменьшаемы, то мы возьмемъ ихъ уже меньшими ε; по теоремѣ *Borel'я* можно указать конечное число n элементовъ, покрывающихъ S, и всѣ остальные элементы мы отбросимъ.

---

[1]) См. теорема O 49°, стр. 89.
[2]) Messenger of Mathematics, 33, p. 129.
[3]) Опредѣленіе и теорема (см. ниже) можетъ имѣть мѣсто въ многомѣрномъ пространствѣ.
[4]) Теорема доказывается въ предположеніи участка линейнымъ.

Пусть A, B — границы основного интервала S; изъ числа элементовъ, покрывающихъ A, выберемъ тотъ, точка сопряженія котораго лежитъ лѣвѣе всѣхъ другихъ; если ихъ нѣсколько, возьмемъ l_{P_1} — тотъ, который простирается дальше другихъ вправо; уменьшаемъ, въ случаѣ надобности, остальные элементы такъ, чтобы они не доходили до P_1, но не оставляя при этомъ непокрытой ни одной точки S.

Среди остальныхъ $n-1$ элементовъ найдется такой, который покрываетъ точки элемента l_{P_1}; пусть l_{P_2} — тотъ изъ нихъ, точка сопряженія котораго лежитъ возможно лѣвѣе, и, если такихъ нѣсколько, — тотъ, который простирается вправо возможно больше; остальные $n-2$ элемента уменьшимъ такъ, чтобы они не доходили до точки P_2; при этомъ, если одинъ изъ элементовъ окажется покрытымъ другимъ, то первый мы выбрасываемъ совершенно. Если P_2 покрытъ l_{P_1}, мы уменьшимъ l_{P_1} настолько, чтобы точка P_2 оказалась внѣ l_{P_1}. Если общая часть l_{P_1} и l_{P_2} будетъ не меньше $\frac{\varepsilon}{n}$, уменьшимъ l_{P_2}, чтобы сдѣлать эту часть меньшей $\frac{\varepsilon}{n}$; и т. д.; такъ какъ мы имѣемъ дѣло только съ n элементами, мы видимъ, что всѣ условія теоремы окажутся выполненными.

Въ томъ же году *Young* приводитъ[1]) болѣе общую форму теоремы A, доказывая ее вдобавокъ внѣ зависимости отъ теоремы *Borel'я*.

Теорема B. „Если данъ рядъ элементовъ, которые могутъ быть произвольно уменьшаемы, и точки сопряженія которыхъ заполняютъ измѣримую[2]) область S, то возможно опредѣлить конечный или счетный рядъ элементовъ, обладающихъ слѣдующими свойствами:

a) длина каждаго элемента l_{P_i} меньше ε,

b) каждая точка S покрыта однимъ или болѣе элементами,

c) каждая точка сопряженія P_i покрыта единственнымъ элементомъ l_{P_i},

d) сумма элементовъ отличается $M(S) = s$ меньше чѣмъ на ε'“.

Включимъ[3]) S въ рядъ интерваловъ λ_i такихъ, что

$$s < \sum \lambda_i < s + \frac{\varepsilon'}{2},$$

при чемъ всѣ точки S будутъ внутренними для $\{\lambda_i\}$; уменьшаемъ затѣмъ элементы такъ, чтобы они были меньше ε, и чтобы они не

---

[1]) Proceedings of Lond. Mathem. Soc., (2) 2, p. 67.

[2]) См. ниже 171°.

[3]) См. ниже 172°.

покрывали точекъ внѣшнихъ для $\{\lambda_i\}$; тогда и сумма интерваловъ, покрытыхъ элементами, будетъ лежать между s и $s+\frac{\varepsilon'}{2}$. Выбираемъ далѣе среди элементовъ счетный рядъ

$$l',\ l'',\ l''',\ \ldots\ , \tag{1}$$

покрывающій[1]) область S.

Взявъ l' изъ ряда (1), обозначимъ его l_{p_1} и построимъ вправо и влѣво отъ него, придерживаясь пріемовъ теоремы A, интервалы l_{p_2}, l_{p_3}, ..., $l_{p_{\overline{2}}}$, $l_{p_{\overline{3}}}$, ... съ тою только разницей, чтобы общія части элементовъ l_{p_1} и l_{p_2}, $l_{p_{\overline{1}}}$ и $l_{p_{\overline{2}}}$ были меньше $\frac{\varepsilon'}{2^4}$, общія части l_{p_2} и l_{p_3}, $l_{p_{\overline{2}}}$ и $l_{p_{\overline{3}}}$ — меньше $\frac{\varepsilon'}{2^5}$, и т. д.; тогда мы получимъ конечный или счетный рядъ элементовъ, при чемъ сумма дважды покрытыхъ частей основного интервала будетъ меньше $\frac{\varepsilon'}{2^2}$. Если не всѣ точки S окажутся покрытыми, беремъ въ ряду (1) первый неиспользованный еще и покрывающій непокрытыя до сихъ поръ точки элементъ $l^{(\mu)}$, вправо и влѣво отъ котораго появится новый конечный или счетный рядъ элементовъ, при чемъ только вмѣсто $\frac{\varepsilon'}{2^4}=\frac{\varepsilon'}{2^{1+3}}$ беремъ уже $\frac{\varepsilon'}{2^{\mu+3}}$; дважды покрытыя части будутъ здѣсь меньше $\frac{\varepsilon'}{2^{\mu+1}}$. Аналогично можетъ получиться третій рядъ элементовъ, исходящій изъ $l^{(\nu)}$, для $\nu>\mu$, при $\frac{\varepsilon'}{2^{\nu+3}}$ вмѣсто $\frac{\varepsilon'}{2^{1+3}}$ и съ дважды покрытыми частями, меньшими $\frac{\varepsilon'}{2^{\nu+1}}$; и т. д.

Такимъ образомъ мы получимъ, пользуясь рядомъ (1), рядъ элементовъ, удовлетворяющій условіямъ теоремы, при чемъ сумма дважды покрытыхъ интерваловъ будетъ меньше $\frac{\varepsilon'}{2^2}+\frac{\varepsilon'}{2^{\mu+1}}+\frac{\varepsilon'}{2^{\nu+1}}+\ldots<\frac{\varepsilon'}{2}$; а такъ какъ при этомъ сумма интерваловъ, покрытыхъ элементами, лежала между s и $s+\frac{\varepsilon'}{2}$, то сумма самихъ элементовъ будетъ заключаться между s и $s+\varepsilon'$

158. Дальнѣйшее развитіе идеи *Young'a* получили въ 1905 г. въ прекрасной статьѣ, посвященной предѣльнымъ областямъ и теоріи мѣры[2]).

---

[1]) См. выше теорема B, стр. 69.

[2]) Proc. (2) 2. p. 16.

При заданномъ рядѣ интерваловъ мы обыкновенно противополагали внутреннія точки этихъ интерваловъ ихъ границамъ и внѣшнимъ точкамъ; такимъ образомъ въ самомъ началѣ мы имѣемъ дѣло съ одной стороны—съ счетнымъ рядомъ открытыхъ интерваловъ и съ другой—съ ихъ невнутренними точками, образующими замкнутую область.

Если данные интервалы $\{\lambda_i'\}$ уменьшаются, при чемъ каждый интервалъ можетъ также распадаться на конечное или счетное число новыхъ интерваловъ, замкнутая область P_1, опредѣляемая интервалами λ_i', превращается также въ замкнутую область P_2, обнимающую прежнюю область P_1; если G_1 и G_2 — внутреннія точки интерваловъ $\{\lambda_i'\}$ и $\{\lambda_i''\}$, то

$$G_2 \equiv D(G_1), \;\; P_2 \equiv M(P_1).$$

Представимъ себѣ, что процессъ уменьшенія интерваловъ λ_i и роста P_i продолжается безконечно; мы получимъ тогда области

$$G_1,\, G_2,\, G_3,\, \ldots,\, G_n,\, \ldots;\; P_1,\, P_2,\, P_3,\, \ldots,\, P_n,\, \ldots, \tag{1}$$

для которыхъ всегда

$$G_{n+1} \equiv D(G_n), \;\; P_{n+1} \equiv M(P_n). \tag{2}$$

Точки, которыя будутъ общи всѣмъ областямъ $\{G_i\}$, составляютъ *обыкновенную внутреннюю предѣльную область* G_0; другую область P мы получимъ, взявъ различныя точки всѣхъ замкнутыхъ областей P_n; это будетъ *обыкновенная внѣшняя предѣльная область*; такимъ образомъ

$$G_0 \equiv \overset{\infty}{\underset{1}{D}}(G_n), \;\; P \equiv \overset{\infty}{\underset{1}{M}}(P_n). \tag{3}$$

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ непосредственно, что

A. „Внѣшнія точки счетнаго ряда уединенныхъ интерваловъ образуютъ обыкновенную внутреннюю предѣльную область"; и далѣе

B. „Счетный рядъ сплошныхъ замкнутыхъ интерваловъ есть обыкновенная внѣшняя предѣльная область".

Если имѣются области (1) при условіи (2), но G_n не будутъ внутренними точками сплошныхъ интерваловъ, а P_n не будутъ замкнуты, области (3) называются *обобщенными внутренней и внѣшней предѣльными областями;* само собой понятно, что въ отдѣльныхъ случаяхъ намъ нѣтъ необходимости разсматривать одновременно и совмѣстно области $\{G_i\}$ и $\{P_i\}$; насъ могутъ интересовать или только $\{G_n\}$ и G_0, или только $\{P_n\}$ и P.

Ясно также, что при совмѣстномъ разсмотрѣніи *обыкновенныхъ предѣльныхъ областей* $\{G_i\}$ и $\{P_i\}$ мы имѣемъ

$$G_n + P_n \equiv L,\ G_0 + P \equiv L, \tag{4}$$

т. е. соотвѣтственныя точки обѣихъ областей даютъ всѣ точки основного интервала.

159. Мы предполагали въ 158°, что интервалы $\lambda_i^{(n)}$ были открыты; возьмемъ теперь рядъ соотвѣтственныхъ *закрытыхъ* интерваловъ $\{\overline{\lambda}_i^{(n)}\}$ и опредѣляемыя ими области внѣшнихъ точекъ этихъ интерваловъ E_n; обозначимъ еще $G_n + Q_n \equiv \overline{G}_n$. Здѣсь по прежнему

$$\overline{G}_{n+1} \equiv D\,(\overline{G}_n),\ E_{n+1} \equiv M\,(E_n);$$

выяснимъ, въ какомъ отношеніи къ G_0 и P стоятъ области

$$\overline{G}_0 \equiv \mathop{D}_1^{\infty}(\overline{G}_n),\ E \equiv \mathop{M}_1^{\infty}(E_n).$$

Область $\overline{G}_n$ отличается отъ G_n присутствіемъ границъ интерваловъ $\lambda_i^{(n)}$; при переходѣ отъ $\{\lambda^{(n)}\}$ къ $\{\lambda^{(n+1)}\}$ вторые интервалы могутъ или цѣликомъ располагаться внутри первыхъ, или имѣютъ съ ними одну общую границу; если второй случай повторяется въ рядахъ $\{\lambda^{(n)}\}$ для всякаго n, соотвѣтственная граница войдетъ въ составъ предѣльной области $\overline{G}_0$, но не войдетъ въ G_0; если такая случайность исключена, ни одна граница не войдетъ въ $\overline{G}_0$, какъ она не входила и въ G_0. Такимъ образомъ внутренняя предѣльная область G_0 и предѣльная область $\overline{G}_0$ могутъ различаться только на нѣкоторый рядъ границъ интерваловъ, такъ что область $\overline{G}_0 - G_0$ всегда конечна или счетна; всякій разъ, когда строеніемъ области указанный выше случай исключенъ, $\overline{G}_0 \equiv G_0$. Отсюда слѣдуетъ, что точно также область $P - E \equiv Q$ также конечна или счетна, и что $P \equiv E$, если второй случай не возможенъ.

Мы удерживаемъ названіе обыкновенной внутренней предѣльной области только за областью G_0, противно *Young'y*[1]).

160. Прежде чѣмъ идти дальше въ изложеніи свойствъ предѣльныхъ областей, мы дадимъ нѣсколько необходимыхъ ниже теоремъ.

A. „Если на основномъ интервалѣ замкнутой области G взять произвольный закрытый отрѣзокъ, то часть G, помѣщающаяся на немъ, будетъ замкнута“.

---

[1]) ib. p. 31.

Пусть L — основной интервалъ, Λ — его отрѣзокъ, границами котораго могутъ оказаться внутреннія точки свободныхъ интерваловъ $\{l_i\}$ замкнутой области G; если это случится, мы уменьшимъ Λ до Λ_0 такъ, чтобы границами Λ_0 были точки (x_0, ξ_0) области G; на Λ_0 помѣстится нѣкоторый рядъ свободныхъ интерваловъ $\{l_{m_j}\}$, и невнутреннія ихъ точки, будучи точками G, образуютъ замкнутую область.

B. „Если G_1 и G_2—замкнутыя области безъ общихъ точекъ, то каждая изъ нихъ располагается внутри конечнаго числа свободныхъ интерваловъ другой"[1]).

Пусть $\{l_i'\}$—свободные интервалы области G_1; такъ какъ $D(G_1, G_2) = 0$, то точки G_2 могутъ быть только внутренними точками l_i'; если бы онѣ располагались на безконечномъ рядѣ интерваловъ

$$l_{m_1}', \; l_{m_2}', \; \ldots, \; l_{m_n}', \; \ldots, \tag{1}$$

то для ихъ границъ и внутреннихъ точекъ существовала бы нѣкоторая предѣльная точка ξ, которая была бы предѣльной и для точекъ G_2, расположенныхъ на $\{l_{m_n}'\}$; поэтому, такъ какъ G_2 замкнута, ξ была бы точкой G_2 и, слѣдовательно, являлась бы общей точкой G_1 и G_2, что исключено предположеніемъ; итакъ существованіе безконечнаго ряда (1) не возможно. Тоже мы имѣли бы и для интерваловъ $\{l_i''\}$.

C. „Если G_1, G_2 — замкнутыя области безъ общихъ точекъ, то $G_1 + G_2$ также замкнута",
такъ какъ каждая предѣльная точка $G_1 + G_2$, будучи предѣльной точкой для безконечнаго ряда точекъ по крайней мѣрѣ одной изъ G_1, G_2, войдетъ въ эту область, а слѣдовательно и въ $G_1 + G_2$.

D. „Если G_1 и G_2 — замкнуты, то также замкнуты $D(G_1, G_2)$ и $M(G_1, G_2)$"[2]).

E. „Если $G_{n+1} = D(G_n)$, и всѣ G_n замкнуты, то замкнута и внутренняя предѣльная область $G_0 = \overset{\infty}{\underset{1}{D}}(G_n)$"[3]).

161. Для предѣльныхъ областей мы имѣемъ слѣдующія теоремы:

A. „Сумма конечнаго числа обыкновенныхъ внутреннихъ или внѣшнихъ предѣльныхъ областей есть область того же рода".

Первое слѣдуетъ изъ опредѣленія, а второе изъ теоремы D.

---

[1]) ib. p. 23.

[2]) ib. p. 24.

[3]) См. Schoenflies, S. 58-59; Proc. (2) 2, p. 25.

B. „Внутренняя предѣльная область для ряда обыкновенныхъ внутреннихъ предѣльныхъ областей есть обыкновенная внутренняя предѣльная область“ [1]).

Пусть $G_n = \overset{\infty}{\underset{i=1}{D}}(G_{ni})$, гдѣ G_{ni} опредѣляются рядами сплошныхъ открытыхъ интерваловъ, и $G = \overset{\infty}{\underset{1}{D}}(G_n)$; для краткости *Young* пишетъ $K > L$, если $K = M(L)$, и $K < L$, если $K = D(L)$; такъ G —*внутренній* предѣльный рядъ, то должно быть $G_{n+1} < G_n$. Въ связи съ опредѣленіемъ G_ν и $G_{\nu+1}$

$$G_{rs} > G_{r,s+1},\ G_{r+1,s} > G_{r+1,s+1};$$

при этомъ $G_{r,s+1}$ и $G_{r+1,s+1}$ состоятъ изъ сплошныхъ интерваловъ, лежащихъ соотвѣтственно на интервалахъ G_{rs} и $G_{r+1,s}$; если мы возьмемъ $D(G_{rs}, G_{r+1,s})$, то это будутъ общіе ихъ интервалы [2]); точки тѣхъ частей интерваловъ $G_{r+1,s}$, которыя сюда не войдутъ, не войдутъ въ G_{rs} и въ G_r, а слѣдовательно не могутъ войти и въ G_{r+1}, такъ какъ $G_r > G_{r+1}$; поэтому, не мѣняя сути дѣла, мы можемъ всегда отбросить въ $G_{r+1,s}$ и вмѣстѣ съ тѣмъ во всѣхъ $G_{r+1,s+m}$ тѣ интервалы или тѣ части интерваловъ, которыхъ нѣтъ въ G_{rs}; при этомъ окажется, что измѣненная такимъ образомъ область $G_{r+1,s}$ будетъ лежать на интервалахъ G_{rs}; а такъ какъ еще область $G_{r+1,s+1}$ лежитъ на интервалахъ $G_{r+1,s}$, то $G_{r+1,s+1}$ окажется лежащей и на интервалахъ G_{rs}; такимъ образомъ для областей, состоящихъ изъ сплошныхъ интерваловъ, мы получимъ ту же самую таблицу, какъ и у *Young'a* [3]).

Взявъ въ ней рядъ діагональныхъ областей

$$G_{11},\ G_{12},\ \ldots,\ G_{mm},\ \ldots, \tag{2}$$

мы видимъ, въ связи съ предыдущимъ, что всегда интервавлы $G_{r+1,r+1}$ лежатъ на интервалахъ G_{rr}, а въ такомъ случаѣ рядъ (2) опредѣляетъ обыкновенную внутреннюю предѣльную область $G_0 = \overset{\infty}{\underset{1}{D}}(G_{mm})$, которая тожественна съ G.

---

[1]) У *Young'a* (p. 35) пропущено „обыкновенныхъ“, и сверхъ того первая половина доказательства должна быть изложена, какъ здѣсь въ текстѣ.

[2]) Не возможно, чтобы было $D(G_{rs}, G_{r+1,s}) = 0$, такъ какъ иначе G_{r+1} не могло бы быть $D(G_r)$; $D(G_{rs}, G_{r+1,s})$ не можетъ быть и только точечной областью (безъ сплошныхъ интерваловъ), такъ какъ, въ силу неравенства $G_{r+1} < G_r$, должны существовать общія *внутреннія* точки интерваловъ G_{rs} и $G_{r+1,s}$.

[3]) ib. p. 35.

C. „Внѣшняя предѣльная область для ряда обыкновенныхъ внѣшнихъ предѣльныхъ областей есть обыкновенная внѣшняя предѣльная область[1])“.

D. „Разность двухъ замкнутыхъ областей можетъ быть представлена какъ обыкновенная внѣшняя, или какъ обыкновенная внутренняя предѣльная область“.

Вторая часть теоремы *Young'омъ* доказывается[2]) достаточно полно; что касается первой, то для нея желательно не такое, какъ у автора, доказательство, которое вслѣдствіе своей чрезмѣрной краткости не сразу убѣдительно.

Включимъ точки меньшей области H внутрь интерваловъ, меньшихъ e; тогда—согласно теоремѣ *Borel-Young'a*[3])—можетъ быть дано конечное число такихъ интерваловъ $\{\lambda_j^{(e)}\}$ съ тѣмъ-же свойствомъ; по выдѣленіи ихъ изъ L останется также конечное число m по построенію несмежныхъ интерваловъ $\{l_i^{(e)}\}$, въ число границъ которыхъ не входятъ точки H, и на которыхъ будетъ лежать часть $G^{(e)}$ большей области G; на каждомъ изъ $l_i^{(e)}$ располагается нѣкоторая часть $G_i^{(e)}$ области $G^{(e)}$, которая, какъ часть G, согласно A 160°, должна быть замкнута; замкнутой будетъ тогда и $\sum G_i^{(e)} = G^{(e)}$.

При $e' < e$ область $G^{(e')}$ также замкнута, при чемъ $G^{(e')} \geqq G^{(e)}$; если e убываетъ безконечно, мы получимъ обыкновенную внѣшнюю предѣльную область $\bar{G} = \underset{e \ldots o}{M}(G^{(e)})$.

Съ другой стороны, если $K^{(e)}$ есть область внутреннихъ точекъ интерваловъ $\{\lambda_j^{(e)}\}$, $K^{(e')} \leqq K^{(e)}$, при чемъ интервалы $K^{(e')}$ не могутъ выходить за предѣлы интерваловъ $K^{(e)}$, такъ какъ $e' < e$ (точки области H могутъ быть взяты за середины соотвѣтственныхъ интерваловъ), а въ такомъ случаѣ область $\underset{e \ldots o}{D}\{K^{(e)}\} = K^{(0)}$ есть обыкновенная внутренняя предѣльная область, которая—въ силу R 51°—есть ничто иное какъ H.

Въ составъ $\bar{G}$ войдутъ только точки G, и вдобавокъ—каждая изъ нихъ, кромѣ точекъ $K^{(0)} = H$; дѣйствительно: каждая изъ точекъ x

---

[1]) ib. p. 36.

[2]) ib. p. 37.

[3]) См. выше O 49°, стр. 89.

области $G - H$ не войдетъ въ $K^{(0)}$ и, слѣдовательно, она должна быть невнутренней точкой нѣкотораго ряда интерваловъ $\{\lambda_j^{(e_x)}\}$, а затѣмъ и всѣхъ слѣдующихъ рядовъ при $e < e_x$; а въ такомъ случаѣ она войдетъ въ $G^{(e_x)}$ и въ $\overline{G}$. Отсюда $\overline{G} = G - H$, и теорема доказана.

E. „Если изъ обыкновенной внѣшней или внутренней предѣльной области вычесть замкнутую область, то разность окажется соотвѣтственно обыкновенной внѣшней или внутренней предѣльной областью“ [1]).

F. „Разность обыкновенныхъ внутренней (внѣшней) и внѣшней (внутренней) предѣльныхъ областей есть обыкновенная внутренняя (внѣшняя) предѣльная область [2])“.

Таковы тѣ чрезвычайно важныя теоремы относительно предѣльныхъ областей, которыми *Young* завершаетъ ихъ теорію; что-же касается вопросовъ, относящихся къ мѣрѣ области и рѣшенныхъ *Young'омъ* въ той-же статьѣ, то о нихъ будетъ рѣчь въ главѣ IV.

162. О статьѣ *Hobson'a* [3]), написанной имъ одновременно съ упомянутой выше въ 158°-161° работой *Young'a*, мы говорили уже въ 155°; въ ней интереснымъ является еще сопоставленіе предѣльныхъ областей съ областями первой и второй категоріи.

Если P_n — *рѣдко разсѣянныя области*, то $P = \overset{\infty}{\underset{1}{M}}(P_n)$, какъ это мы видѣли въ 37° [4]), называется *областью первой категоріи*; если взять рядъ областей

$$P_1 = Q_1\,,\ \overset{2}{\underset{1}{M}}(P_i) = Q_2\,,\ \ldots\,,\ \overset{n}{\underset{1}{M}}(P_i) = Q_n\,,\ \ldots\,, \qquad (1)$$

то, очевидно, $Q_{n+1} = M(Q_n)$, и $\overset{\infty}{\underset{1}{M}}(Q_n) = P$; такимъ образомъ область первой категоріи P есть ничто иное, какъ *частный случай обобщенной внѣшней предѣльной области*, частный случай — потому что на области Q_n наложено ограниченіе, что онѣ, какъ и P_n, рѣдко разсѣяны.

Если на области P_n наложить еще новое условіе, что всѣ онѣ замкнуты, то, въ силу D 160°, замкнутыми окажутся и всѣ Q_n; P окажется тогда обыкновенной внѣшней предѣльной областью.

Hobson [5]) сразу вводитъ это послѣднее ограниченіе, отсутствующее у *Baire'a* [6]) и не необходимое внѣ связи съ приложеніями теоріи обла-

---

1) ib. p. 37.
2) ib. p. 37-38.
3) ib. p. 316.
4) См. выше стр. 55.
5) Pr. (2) 2. p. 318.
6) Annali di Mat. (3) 3, p. 65, а не 67, какъ указываетъ *Hobson*.

стей къ теоріи функцій. Чтобы различать общій случай области первой категоріи отъ областей *Hobson'a*, можно послѣднія называть *обыкновенными областями первой категоріи.*

Область, дополнительная къ области первой категоріи P, есть область второй категоріи, и она является, въ силу 158°, внутренней предѣльной областью; такимъ образомъ всякая область второй категоріи принадлежитъ къ числу внутреннихъ предѣльныхъ областей, но она есть только ихъ частный случай: область второй категоріи всегда несчетна, тогда какъ внутреннія предѣльныя области, какъ мы видѣли выше[1]), могутъ также быть счетны и даже конечны.

Если на P_n, и слѣдовательно на Q_n, наложить условіе, что онѣ замкнуты, онѣ будутъ задаваться невнутренними точками ряда интерваловъ, тогда какъ дополнительная для Q_n область K_n будетъ состоять изъ внутреннихъ точекъ этихъ интерваловъ; въ такомъ случаѣ $Q = \overset{\infty}{\underset{1}{M}}(Q_n)$ и $K = \overset{\infty}{\underset{1}{D}}(K_n)$ оказываются обыкновенными внѣшней и внутренней предѣльными областями; такъ какъ K есть дополнительная для Q область, то K — область второй категоріи. Чтобы отличать ее отъ общаго случая, мы будемъ называть такія области *обыкновенными областями второй категоріи.*

Итакъ всякая область второй категоріи относится къ числу внутреннихъ предѣльныхъ областей, и всякая обыкновенная область второй категоріи входитъ въ составъ обыкновенныхъ внутреннихъ предѣльныхъ областей; поэтому[2]) „изслѣдованіе природы и свойствъ внутреннихъ предѣльныхъ областей прольетъ свѣтъ на природу областей второй категоріи и будетъ слѣдовательно имѣть вліяніе на теорію точечно-прерывныхъ функцій".

Счетная область есть обыкновенная область первой категоріи, дополнительная къ ней — обыкновенная область второй категоріи; поэтому *область какъ несоизмѣримыхъ, такъ и трансцендентныхъ чиселъ есть* обыкновенная область второй категоріи и слѣдовательно — *обыкновенная внутренняя предѣльная область.*

Hobson говоритъ[3]), что „было бы желательно найти необходимыя и достаточныя условія, чтобы произвольно заданная часто разсѣянная и однородная несчетная область была внутренней предѣльной областью[4]); это равносильно опредѣленію необходимыхъ и достаточ-

---

1) См. 51°.
2) Pr. (2) 2, p. 318-319.
3) ib. p. 317.
4) Ср. конецъ IV главы.

ныхъ условій, чтобы произвольная область могла быть областью второй категоріи".

163. Для обыкновенной внутренней предѣльной области *Hobson* даетъ еще[1]) двѣ теоремы, которыя можно доказать также и въ болѣе общемъ видѣ:

A. „Если P и Q — обобщенныя или обыкновенныя внутреннія предѣльныя области, то D (P, Q) и M (P, Q) будутъ также областями соотвѣтственнаго рода".

Пусть для P и Q составляющими областями будутъ P_n и Q_n

$$P = \overset{\infty}{\underset{1}{D}}(P_n),\ Q = \overset{\infty}{\underset{1}{D}}(Q_n);$$

обозначимъ еще $D(P_n, Q_n) = R_n$, $M(P_n, Q_n) = S_n$; по условію

$$P_{n+1} = D(P_n),\ Q_{n+1} = D(Q_n).$$

a. Область R_{n+1} составляется изъ общихъ точекъ областей P_{n+1} и Q_{n+1}, которыя входятъ цѣликомъ соотвѣтственно въ P_n и Q_n; слѣдовательно — точки R_{n+1} окажутся въ числѣ общихъ точекъ и для областей P_n и Q_n, т. е. $R_{n+1} = D(R_n)$; отсюда слѣдуетъ, что $R = \overset{\infty}{\underset{1}{D}}(R_n)$ будетъ внутренней предѣльной областью; въ нее войдетъ каждая точка, общая P и Q, такъ какъ эта точка входитъ въ каждую изъ P_n и Q_n и, слѣдовательно, въ R_n; съ другой стороны — ни одна точка ξ, не принадлежащая D (P, Q), въ R находиться не можетъ; дѣйствительно: она не войдетъ въ P_{n_1} или въ Q_{n_2} и — слѣдовательно — въ P_n, Q_n при n равномъ большему изъ чиселъ n_1 и n_2; поэтому ея не будетъ и въ R_n; эта точка не можетъ быть такимъ образомъ и точкой R; отсюда слѣдуетъ, что R = D (P, Q), и для обобщенной внутренней предѣльной области теорема доказана; что же касается области обыкновенной, то для нея P_n и Q_n заданы внутренними точками сплошныхъ интерваловъ; поэтому, какъ не трудно видѣть[2]), $R_n = D(P_n, Q_n)$ будетъ задаваться интервалами того же рода: прежде всего въ R_n не могутъ фигурировать отдѣльныя точки, которыя могутъ быть общими границами смежныхъ интерваловъ одного P_n и другого Q_n, такъ какъ эти интервалы — открыты; R_n можетъ состоять только изъ сплошныхъ интерваловъ, которые принадлежатъ одной изъ областей P_n и Q_n, если они располагаются цѣликомъ на интервалахъ другой области, и изъ интерваловъ, которые будутъ общими частями интерваловъ P_n и Q_n.

---

[1]) ib. p. 326, p. 319.

[2]) Ср. доказательство теоремы B 161°.

Итакъ область $R \equiv D(P, Q)$, задаваемая рядомъ областей R сплошныхъ интерваловъ, окажется обыкновенной внутренней предѣльной областью.

b. Область S_{n+1} составляется изъ всѣхъ различныхъ точекъ P_{n+1} и Q_{n+1}, которыя входятъ соотвѣтственно въ P_n и Q_n, а слѣдовательно и въ $M(P_n, Q_n) \equiv S_n$; такимъ образомъ оказывается, что $S_{n+1} \equiv D(S_n)$, и $S \equiv \overset{\infty}{\underset{1}{D}}(S_n)$ будетъ внутренней предѣльной областью.

Каждая точка $M(P, Q)$ принадлежитъ всѣмъ областямъ по крайней мѣрѣ одного изъ рядовъ $\{P_n\}$ или $\{Q_n\}$; поэтому она обязательно войдетъ во всѣ S_n, а слѣдовательно и въ S; съ другой стороны — каждая точка S фигурируетъ во всѣхъ S_n, а слѣдовательно она должна быть точкой каждой области по крайней мѣрѣ одного изъ рядовъ $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$; она должна поэтому войти по крайней мѣрѣ въ одну изъ областей P или Q, и—слѣдовательно—она будетъ точкой области $M(P, Q)$; такимъ образомъ $S \equiv M(P, Q)$, что доказываетъ теорему для обобщенныхъ областей.

Для областей обыкновенныхъ, когда P_n и Q_n задаются сплошными интервалами, область $M(P_n, Q_n) \equiv S_n$ будетъ обладать тѣмъ же свойствомъ; дѣйствительно: она составится во первыхъ—изъ интерваловъ P_n и Q_n, которые не имѣютъ общихъ точекъ, во вторыхъ—изъ интерваловъ одной области, продолженныхъ интервалами другой, если таковые интервалы частью налагаются другъ на друга, и наконецъ въ третьихъ — изъ интерваловъ одной изъ P_n или Q_n, на которые налагаются цѣликомъ равные или меньшіе интервалы другой области; смежные интервалы при этомъ окажутся на положеніи независимыхъ другъ отъ друга, такъ какъ ихъ общая граница не входитъ ни въ одну изъ областей P_n и Q_n; а если S_n задается сплошными интервалами, S будетъ обыкновенная внутренняя предѣльная область.

B „Если P и Q — обобщенныя или обыкновенныя внѣшнія предѣльныя области, то $D(P, Q)$ и $M(P, Q)$ будутъ также областями соотвѣтственнаго рода".

По условію для $P \equiv \overset{\infty}{\underset{1}{M}}(P_n)$ и $Q \equiv \overset{\infty}{\underset{1}{M}}(Q_n)$ мы имѣемъ

$$P_{n+1} \equiv M(P_n),\ Q_{n+1} \equiv M(Q_n), \tag{3}$$

при чемъ за областями R_n, S_n пусть сохраняется прежнее значеніе.

a. Каждая точка R_n входитъ одновременно въ P_n и Q_n, она войдетъ, въ силу (3), въ P_{n+1} и Q_{n+1} и - слѣдовательно - въ R_{n+1};

такимъ образомъ $R_{n+1} \equiv M(R_n)$, и $R \equiv \overset{\infty}{\underset{1}{M}}(R_n)$ есть внѣшняя предѣльная область. Каждая точка $D(P, Q)$ входитъ во всѣ области P_n для $n > n_1$ и во всѣ Q_n для $n > n_2$; для n, большаго или равнаго большему изъ чиселъ n_1 и n_2, эта точка войдетъ тогда одновременно въ P_n и Q_n и — слѣдовательно — въ R_n, а въ такомъ случаѣ она появится и въ R; обратно: каждая точка R появляется во всѣхъ R_n для $n > n_0$; слѣдовательно она будетъ входить при томъ же условіи въ P_n и Q одновременно, а въ такомъ случаѣ она окажется въ P и Q и въ $D(P, Q)$; итакъ $R \equiv D(P, Q)$; этимъ доказана теорема для обобщенной внѣшней предѣльной области; что же касается области обыкновенной то для нея P_n и Q_n, а слѣдовательно — въ силу D 160° — и R_n будутъ замкнуты, вслѣдствіе чего R будетъ обыкновеннымъ внѣшнимъ предѣльнымъ рядомъ.

b. Каждая точка S_n принадлежитъ по крайней мѣрѣ одной изъ областей P_n и Q_n; она входитъ поэтому по крайней мѣрѣ въ одну изъ P_{n+1} или Q_{n+1} и, слѣдовательно, въ S_{n+1}; такимъ образомъ $S_{n+1} \equiv M(S_n)$, и $S \equiv \overset{\infty}{\underset{1}{M}}(S_n)$ есть внѣшняя предѣльная область.

Каждая точка $M(P, Q)$ принадлежитъ по крайней мѣрѣ одной изъ областей P, Q и, слѣдовательно, областямъ P_n или Q_n по крайней мѣрѣ одного изъ рядовъ $\{P_n\}$ или $\{Q_n\}$ для $n > n_0$; для такихъ значеній n она входитъ въ S_n и — слѣдовательно — въ S; съ другой стороны — каждая точка S появляется во всѣхъ S_n для $n > n_0$; для тѣхъ же значеній n она появится тогда по крайней мѣрѣ въ одной изъ областей P_n и Q_n, и въ силу этого по крайней мѣрѣ въ одной изъ областей P, Q и — слѣдовательно — въ $M(P, Q)$. Такимъ образомъ мы находимъ, что $S \equiv M(P, Q)$, и теорема для обобщенныхъ областей P и Q доказана. Въ случаѣ областей обыкновенныхъ, P_n и Q_n и, слѣдовательно, S_n — замкнуты, а въ такомъ случаѣ внѣшняя предѣльная область S будетъ обыкновенна.

Изъ теоремъ A и B непосредственно слѣдуетъ:

C. „Если P и Q — обобщенныя или обыкновенныя внутреннія или внѣшнія предѣльныя области безъ общихъ точекъ, то $P + Q$ есть область соотвѣтственнаго рода“,

такъ какъ въ этомъ случаѣ $P + Q \equiv M(P, Q)$; и далѣе

D. „Если P, Q, R, ..., U — конечный рядъ обобщенныхъ или обыкновенныхъ внутреннихъ или внѣшнихъ предѣльныхъ областей безъ общихъ точекъ, то $P + Q + R + \ldots + U$ есть область соотвѣтственнаго рода“.

Отмѣтимъ еще между прочимъ, что на вопросъ *Schoenflies'a*[1]) *Hobson*[2]) отвѣчаетъ отрицательно, приводя примѣръ области P, состоящей изъ суммы конечнаго числа частей $\sum P_i$, расположенныхъ на смежныхъ интервалахъ $\{\lambda_i\}$, при чемъ на однихъ интервалахъ P_i первой, а на другихъ — второй категоріи.

164. Въ 1° мы говорили[3]), что родоначальникомъ современной теоріи областей нужно признать *Bolzano;* но *Kasner* въ 1905 году отмѣтилъ[4]) фактъ чрезвычайной важности, что эта честь принадлежитъ *Galileo Galilei;* именно — въ „*Discorsi e dimostrazioni matematiche*", изданныхъ въ 1638 г.[5]), приведенъ разговоръ между тремя собесѣдниками о непрерывности и дѣлимости; при этомъ одинъ изъ собесѣдниковъ *Simplicio* говоритъ, что, допуская безконечную дѣлимость, мы должны допустить, что одна безконечность можетъ быть больше другой, такъ какъ длинный отрѣзокъ заключаетъ въ себѣ больше точекъ, чѣмъ короткій; по мнѣнію *Salviati* (автора) затрудненіе возникаетъ здѣсь благодаря тому, что мы, изслѣдуя своимъ конечнымъ умомъ безконечность, приписываемъ ей свойства, выводимыя нами изъ конечнаго и ограниченнаго; а это не справедливо, ибо свойства „больше", „меньше", „равно" не приложимы къ безконечности, такъ какъ нельзя говорить о большихъ, меньшихъ и равныхъ безконечностяхъ. *Salviati* приводитъ затѣмъ примѣръ чиселъ натуральнаго ряда и ихъ квадратовъ, которые въ ряду чиселъ съ удаленіемъ отъ начала встрѣчаются все рѣже и рѣже, но которые могутъ быть взаимно однозначно отнесены къ числамъ натуральнаго ряда.

Такимъ образомъ *Galileo Galilei,* приходя здѣсь къ основнымъ идеямъ современной теоріи областей, еще не рѣшается оперировать съ безконечностями и даже отвергаетъ возможность такихъ операцій; этому едва ли можно удивляться, если вспомнить, что и *Cantor* не сразу рѣшился на опубликованіе результатовъ своихъ изслѣдованій[6]).

165. Въ 1905 г. теорема *Borel'я* привлекла вниманіе *Riesz,* сообщившаго[7]) для нея доказательство, по словамъ[8]) *Borel'я,* почти

---

[1]) См. выше стр. 61.
[2]) Proceed. (2) 2, p. 326.
[3]) Стр. 2.
[4]) Bull. of the Am. Math. Soc., XI, p. 499.
[5]) См. также Ostwald Klassiker, № 11, S. 29.
[6]) M. A., 17, S. 358.
[7]) C. R., CXL, p. 224.
[8]) ib. p. 298.

тожественное съ доказательствомъ *Lebesgue'a*[1]); о другомъ, не болѣе простомъ въ сравненiи съ послѣднимъ, но въ извѣстномъ отношенiи интересномъ доказательствѣ сообщилъ[2]) *Borel'ю* письмомъ *Baire:*

Каждая точка x основного интервала $(0, 1)$ лежитъ внутри цѣлаго ряда $\{(\alpha_x, \beta_x)\}$ интерваловъ *Borel'я;* если h_x есть наименьшее изъ чиселъ $x - \alpha_x$, $\beta_x - x$, и если мы опредѣлимъ $\varepsilon_x = \mathrm{oGr}\, h_x$, то для точки x будетъ существовать или по крайней мѣрѣ одинъ интервалъ, ближайшая къ x граница котораго будетъ удалена отъ x на разстоянiе равное ε_x, или-же — рядъ интерваловъ съ ближайшей границей на разстоянiи, превышающемъ $\varepsilon_x - k$ при произвольномъ маломъ k; ε_x является такимъ образомъ функцiей x и, очевидно, будетъ сверхъ того непрерывной функцiей.

Если мы для интервала $(0, 1)$ найдемъ $\eta = \mathrm{uGr}\, \varepsilon_x$, то $\eta = \varepsilon_{x_0}$ для нѣкоторой опредѣленной точки x_0, и слѣдовательно η отлична отъ 0. При $0 < \eta' < \eta$ для каждой точки x можетъ быть указанъ интервалъ l_x съ удаленiемъ ближайшей границы отъ x, большимъ чѣмъ η'; а изъ ряда $\{l_x\}$ можно выбрать конечное число интерваловъ l_x, удовлетворяющихъ теоремѣ *Borel'я.*

166. Въ статьѣ *Lennes*[3]), посвященной „*Heine-Borel'евой*" теоремѣ для трехмѣрнаго пространства, авторъ приводитъ „теорему непрерывности"[4]), которая для линейныхъ областей можетъ быть выражена такъ:

„Если каждая точка x замкнутой ограниченной области P лежитъ внутри по крайней мѣрѣ одного интервала области интерваловъ $\{l\}$, то существуетъ такое положительное число δ, что каждый интервалъ $\left(x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right)$ будетъ лежать цѣликомъ внутри по крайней мѣрѣ одного изъ интерваловъ $\{l\}$".

Авторъ говоритъ, что на эту теорему наталкивались въ послѣднiй годъ многiя лица, и что теорема, приведенная *Lennes*, можетъ быть отчасти внушена *Bolza;* для линейной области пользовался ею *Wedderburn*, но въ печати она еще не появлялась.

---

[1]) См. выше 27°, стр. 39.

[2]) C. R., CXL, p. 299.

[3]) Bull. of the Amer. Math. Soc., 12, p. 397, May 1906.

[4]) Названiе, предложенное *Veblen'омъ*; ib. p. 398.

ГЛАВА IV.

Ученіе о мѣрѣ области.

167. Пусть точечная область Γ состоитъ изъ всѣхъ точекъ ряда сплошныхъ замкнутыхъ и не налагающихся другъ на друга интерваловъ[1] $\{\lambda_i\}$, число которыхъ можетъ быть конечно или счетно; пусть еще длина основного интервала L, на которомъ располагаются интервалы λ_i, конечна и равна l; тогда $\sum \lambda_i = \lambda_0$ будетъ называться *мѣрой области* Γ.

Пусть затѣмъ всѣ или нѣсколько интерваловъ $\{\lambda_i\}$ будутъ открыты; назовемъ $\{\lambda_i'\}$ такой рядъ интерваловъ въ отличіе отъ замкнутыхъ интерваловъ $\{\lambda_i\}$, и область соотвѣтствующихъ точекъ назовемъ $\Gamma^{(1)}$; пусть Γ — та область, которая получается отъ присоединенія къ $\Gamma^{(1)}$ всѣхъ невходящихъ въ $\{\lambda_i'\}$ границъ интерваловъ; тогда $\Gamma \equiv M(\Gamma^{(1)})$.

Съ другой стороны построимъ внутри каждаго интервала λ_i' интервалъ λ_i'' съ такимъ разсчетомъ, чтобы было $\lambda_i - \lambda_i'' = \varepsilon \lambda_i$, гдѣ ε—нѣкоторое малое положительное число; тогда получается рядъ замкнутыхъ сплошныхъ интерваловъ $\{\lambda_i''\}$, для которыхъ $\sum \lambda_i'' = (1-\varepsilon)\lambda_0$, и всѣ точки которыхъ лежатъ внутри соотвѣтствующихъ интерваловъ λ_i и λ_i', такъ что, если назвать $\overline{\Gamma}$ — область этихъ точекъ, то $\overline{\Gamma} \equiv D(\Gamma^{(1)})$.

Мы строимъ такимъ образомъ для $\Gamma^{(1)}$ двѣ области Γ и $\overline{\Gamma}$, внѣшнюю и внутреннюю, изъ которыхъ одна обнимаетъ собой $\Gamma^{(1)}$, а другая является ея частью, и вдобавокъ—такія, что ихъ мѣрами будутъ соотвѣтственно λ_0 и $(1-\varepsilon)\lambda_0$; въ виду того обстоятельства, что ε можетъ быть взято произвольно малымъ, и что вслѣдствіе этого мѣра

[1]) Такіе интервалы—очевидно—будутъ не смежны.

указанной внѣшней области произвольно мало отличается отъ мѣры внутренней области, мы опредѣляемъ для области $\Gamma^{(1)}$ мѣру $l_0^{(1)}$ какъ

$$\mathrm{uGr}\ \lambda_0 = l_0^{(1)} = \mathrm{oGr}\,(1-\varepsilon)\,\lambda_0,$$

т. е., такъ какъ λ_0 здѣсь постоянна,

$$l_0^{(1)} = \mathrm{oGr}\,(1-\varepsilon)\,\lambda_0 = \lambda_0.$$

Къ только что выведенному результату мы могли бы придти другимъ путемъ, разсуждая такъ: длина интервала λ_i, будутъ ли его границы включены въ область его точекъ или нѣтъ, окажется одна и та-же; слѣдовательно будетъ одно и то-же и значеніе $\sum \lambda_i$ въ обоихъ предположеніяхъ; но—на нашъ взглядъ—такое разсужденіе было бы не вполнѣ строгимъ: оно уже въ самомъ началѣ дѣлало бы предположеніе, что возможно пожертвовать счетнымъ рядомъ точекъ, не измѣняя значенія мѣры точечной области, предположеніе, которое далеко не можетъ считаться безспорнымъ; поэтому мы и миновали этотъ не вполнѣ строгій пріемъ опредѣленія.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ:

A. „Мѣра области точекъ, опредѣляемой рядомъ сплошныхъ интерваловъ, останется одна и та-же, будутъ ли отдѣльные или даже всѣ интервалы замкнуты или нѣтъ“.

168. Установивъ такимъ образомъ мѣру $\mathbf{M}(\Gamma)$ области Γ, заданной рядомъ сплошныхъ интерваловъ, безразлично—замкнутыхъ или открытыхъ, мы переходимъ теперь къ дополнительной области $G = L - \Gamma$, которая, вообще говоря, изъ сплошныхъ интерваловъ не состоитъ; для нея мы *опредѣляемъ мѣру* l_0, полагая $l_0 = l - \lambda_0$; если бы G состояла, также какъ и Γ, изъ точекъ сплошныхъ интерваловъ, для нея послѣднее опредѣленіе совпадало бы съ опредѣленіемъ 167°.

Если всѣ интервалы $\{\lambda_i\}$ области Γ открыты, G является замкнутой областью; если всѣ λ_i замкнуты, G есть область внѣшнихъ точекъ соотвѣтствующей замкнутой области; въ общемъ случаѣ G, включая всѣ внѣшнія точки, будетъ имѣть въ своемъ составѣ еще $D\,(Q)$, гдѣ Q—область границъ интерваловъ λ_i.

Изъ такого опредѣленія мѣры точечной области, какъ слѣдствіе теоремы A, мы имѣемъ прежде всего:

B. „Мѣра замкнутой области равна мѣрѣ какъ области внѣшнихъ точекъ ряда ея свободныхъ интерваловъ, такъ и промежуточныхъ областей, отличающихся отъ послѣдней на конечное или счетное число границъ“.

Таковы исходныя положенія, которыя должны быть положены въ основаніе всего ученія о мѣрѣ; изъ такого опредѣленія мѣры, которое надо признать самымъ простымъ и естественнымъ, развивается вся дальнѣйшая теорія измѣренія областей.

169. Для мѣры l_0 замкнутой области P мы имѣемъ рядъ теоремъ:

C. „Мѣра замкнутой области не можетъ превышать длины основного интервала".

Если замкнутая область P часто разсѣяна, то $P \equiv L$, и $\mathbf{M}(P) = l$; если же она рѣдко разсѣяна, то для нея сумма свободныхъ интерваловъ $\sum \lambda_i > 0$, и слѣдовательно $\mathbf{M}(P) = l - \sum \lambda_i < l$.

D. „Всѣ точки замкнутой области могутъ быть включены въ конечный рядъ интерваловъ съ мѣрой $l_0 + \varepsilon$, произвольно близкой къ l_0"[1]).

E. „Если основной интервалъ l раздѣлить на конечное число m частей $\{\lambda_i^{(m)}\}$ и взять сумму $\sum \bar{\lambda}_i^{(m)} \doteq \lambda_m$ тѣхъ интерваловъ, границами и внутренними точками которыхъ служатъ точки области P, то, при безконечно возрастающемъ m, $lim\, \lambda_m = l_0$"[2]).

F. „Если около каждой точки x области P построить конечный интервалъ одной и той же длины ε, то сумма покрытыхъ этими интервалами частей L стремится, при убываніи ε, къ предѣлу l_0"[3]).

G. „Мѣра l_0 служитъ такимъ предѣломъ и въ томъ случаѣ, когда эти интервалы $(x - \varepsilon_x,\ x + \varepsilon_x)$ будутъ различны для различныхъ точекъ области"[4]).

Въ теоремахъ F и G мы разсматриваемъ — очевидно — данную замкнутую область P какъ обыкновенную внутреннюю предѣльную область.

Изъ предыдущихъ теоремъ слѣдуетъ, что, когда идетъ рѣчь о замкнутой области, всѣ извѣстныя до сихъ поръ опредѣленія мѣры области даютъ одинъ и тотъ же результатъ; различіе между ними начинается только съ той минуты, когда мы переходимъ къ областямъ незамкнутымъ.

H. „Если G_1, G_2 — замкнутыя области безъ общихъ точекъ, то

$$\mathbf{M}(G_1 + G_2) = \mathbf{M}(G_1) + \mathbf{M}(G_2)".$$

Это слѣдуетъ изъ теоремы B 160°; отсюда непосредственно вытекаетъ далѣе:

---

1) См. выше—*Harnack*, 26°, стр. 27; *Osgood*, 34°, стр. 52; *Young*, 50°, стр. 90.

2) См. выше *Stolz*, 19°, стр. 26.

3) См. выше—теорема Q *Young'a*, 50°, стр. 91; *Cantor*, 17°, стр. 23.

4) См.—теорема E *Lindelöf'a*, 42°, стр. 70.

I. „Если $\{G_i\}$ — конечное число m замкнутыхъ областей безъ общихъ точекъ, то $\mathbf{M}\left\{\sum_1^m G_i\right\} = \sum_1^m \mathbf{M}\{G_i\}$".

Если число слагаемыхъ областей безконечно велико, теорема, безъ новыхъ опредѣленій, теряетъ силу, такъ какъ тогда область-сумма перестаетъ быть замкнутой.

J. „Мѣра одной изъ замкнутыхъ областей G_1 и G_2 безъ общихъ точекъ не можетъ превышать суммы свободныхъ интерваловъ другой области".

Какъ мы видѣли[1]), каждая изъ G_1, G_2 располагаются на *конечномъ* числѣ свободныхъ интерваловъ другой области; такимъ образомъ область G_2 лежитъ на интервалахъ $\lambda'_{m_1}, \lambda'_{m_2}, \ldots, \lambda'_{m_k}$ ряда свободныхъ интерваловъ $\{\lambda'_i\}$ области G_1 и разбивается поэтому на k замкнутыхъ областей G_{2j}; согласно теоремѣ C, $\mathbf{M}(G_{2j}) \overline{\overline{<}} \lambda'_{m_j}$, и поэтому—въ связи съ теоремой I—

$$\mathbf{M}(G_2) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{M}(G_{2j}) \overline{\overline{<}} \sum_{j=1}^{k} \lambda'_{m_j} < \sum_1^{\infty} \lambda'_i;$$

тоже относится и къ области G_1.

Если Γ_1 — дополнительная для G_1 область, то она состоитъ изъ внутреннихъ точекъ ряда сплошныхъ интерваловъ $\{\lambda'_i\}$; имѣя это въ виду, можно перефразировать теорему J такимъ образомъ:

K. „Если замкнутая область G_2 состоитъ изъ внутреннихъ точекъ ряда сплошныхъ интерваловъ $\{\lambda'_i\}$, то $\mathbf{M}(G_2)$ не можетъ превышать $\sum \lambda'_i$".

170. Имѣя въ виду теоремы A и B, какъ области, заданныя сплошными замкнутыми или открытыми интервалами, такъ и ихъ дополнительныя мы будемъ называть *первичными;* мѣра ихъ опредѣляется или какъ сумма сплошныхъ интерваловъ, или какъ дополненіе этой суммы до длины основного интервала; мѣра области, не принадлежащей къ первичнымъ, будетъ въ своемъ опредѣленіи опираться на мѣру первичныхъ областей, какъ это мы увидимъ ниже; теперь же мы приведемъ необходимую для дальнѣйшаго изложенія теорему:

L. „Если G и H—двѣ первичныя области, изъ которыхъ $G \equiv D(H)$, то $\mathbf{M}(G) \overline{\overline{<}} \mathbf{M}(H)$".

---

[1]) См. В 160°.

Разберемъ отдѣльно каждый изъ возможныхъ случаевъ:

a. Если G и H задаются рядомъ сплошныхъ интерваловъ $\{\lambda_i\}$ и $\{l_i\}$, при чемъ по условію интервалы λ_i должны быть расположены на интервалахъ l_i, ясно, что $\sum \lambda_i \overline{\overline{<}} \sum l_i$, и теорема доказана.

b. Если ни одна изъ G и H не задается сплошными интервалами, и если $\bar{G}$, $\bar{H}$ — соотвѣтственныя замкнутыя области, то — согласно теоремѣ В 168° — $\mathbf{M}(G) = \mathbf{M}(\bar{G})$, $\mathbf{M}(H) = \mathbf{M}(\bar{H})$. Такъ какъ $G \equiv D(H)$, то должна быть $\bar{G} \equiv D(\bar{H})$; дѣйствительно: каждая точка G есть вмѣстѣ съ тѣмъ точка H; слѣдовательно — каждая предѣльная точка G войдетъ въ составъ $\bar{H}$, такъ что $\bar{G}$ окажется $D(\bar{H})$. Если $\{\lambda_i\}$ и $\{l_i\}$ свободные интервалы соотвѣтственно $\bar{G}$ и $\bar{H}$, то — очевидно — всѣ l_i будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ свободными отъ точекъ $\bar{G}$, такъ что $\sum \lambda_i \overline{\overline{>}} \sum l_i$, и слѣдовательно $\mathbf{M}(\bar{G}) \overline{\overline{<}} \mathbf{M}(\bar{H})$, и вмѣстѣ съ тѣмъ $\mathbf{M}(G) \overline{\overline{<}} \mathbf{M}(H)$.

c. Пусть наконецъ H состоитъ изъ сплошныхъ интерваловъ $\{l_i\}$, а въ составѣ G такихъ интерваловъ нѣтъ; пусть сначала G — замкнутая область, и $\{\lambda_i\}$ — ея свободные интервалы; мы должны доказать неравенство $\mathbf{M}(G) \overline{\overline{<}} \mathbf{M}(H)$, т. е. $l - \sum \lambda_i \overline{\overline{<}} \sum l_i$, или наконецъ

$$\sum l_i + \sum \lambda_i \overline{\overline{>}} l;$$

допустимъ, что это не такъ, что напротивъ того $\sum l_i + \sum \lambda_i < l$; тогда, какъ извѣстно[1]), внѣ интерваловъ $\{\lambda_i, l_i\}$ находится несчетная область точекъ $\{\xi\}$. Если эти точки лежатъ внѣ интерваловъ $\{\lambda_i\}$, то онѣ должны входить въ составъ замкнутой области $L - \{\lambda_i\} \equiv G$ и слѣдовательно въ составъ H, такъ какъ $G \equiv D(H)$; если бы точки $\{\xi\}$ были только границами интерваловъ l_i, то онѣ были бы счетны; а такъ какъ область $\{\xi\}$ несчетна, то несчетное число точекъ ξ должно лежать внутри интерваловъ $\{l_i\}$, что противно опредѣленію области $\{\xi\}$.

Аналогичное мы получимъ, если G есть область внѣшнихъ точекъ замкнутой области $\bar{G}$ съ свободными интервалами $\{\lambda_i\}$; здѣсь, по опредѣленію $\bar{G}$, область $\bar{G} - G$ состоитъ изъ границъ интерваловъ $\{\lambda_i\}$ и будетъ всегда счетна. Какъ и выше, мы должны доказать неравенство

[1]) См. 28°, стр. 40.

$$\mathbf{M}(G) = \mathbf{M}(\bar{G}) = l - \sum \lambda_i \gtrless \sum l_i;$$

предполагая опять

$$\sum \lambda_i + \sum l_i < l,$$

мы будемъ имѣть *несчетную* область $\{\xi\}$, лежащую внѣ интерваловъ $\{\lambda_i, l_i\}$; такъ какъ точки $\{\xi\}$ лежатъ внѣ $\{\lambda_i\}$, онѣ должны входить въ $\bar{G}$ и слѣдовательно въ $G \equiv D(H)$, такъ какъ область $\bar{G} - G$ счетна; несчетная часть области $\{\xi\}$, входящая въ H, должна вмѣстѣ съ тѣмъ составляться изъ внутреннихъ точекъ интерваловъ $\{l_i\}$, чего быть не можетъ.

Такъ какъ предположеніе, что G состоитъ изъ сплошныхъ интерваловъ, а H въ своемъ составѣ такихъ интерваловъ не имѣетъ, не допустимо по существу, то три изслѣдованныхъ случая исчерпываютъ всѣ возможности, и теорема является установленной.

171. Первичныя области, кромѣ замкнутой и ряда конечнаго числа замкнутыхъ интерваловъ, принадлежатъ къ открытымъ областямъ; такимъ образомъ мѣра опредѣляется вначалѣ для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ областей этого рода. Если мы пожелаемъ отъ этихъ частныхъ случаевъ перейти къ общему, намъ придется ввести новыя опредѣленія, являющіяся развитіемъ тѣхъ идей, которыми мы пользовались уже въ 167°.

Если открытая область Q не принадлежитъ къ числу первичныхъ, мы можемъ составить первичныя области — съ одной стороны $P \equiv D(Q)$, являющіяся дѣлителями Q, и съ другой стороны $R \equiv M(Q)$, обнимающія собой Q; область P мы будемъ называть *внутренней* и R — *внѣшней первичной областью*; такъ какъ по условію оказывается $P \equiv D(R)$, то — въ силу теоремы L —

$$\mathbf{M}(P) \lesseqgtr \mathbf{M}(R). \tag{1}$$

Строя всевозможными способами внутреннія и внѣшнія области P и R, мы получимъ различныя значенія $\mathbf{M}(P)$ и $\mathbf{M}(R)$; мы называемъ соотвѣтственно *внутренней и внѣшней мѣрой области* P

$$\text{oGr}\, \mathbf{M}(P) = \mathbf{M}_i(Q), \ \text{uGr}\, \mathbf{M}(R) = \mathbf{M}_e(Q).$$

Изъ (1) слѣдуетъ, что $\text{oGr}\, \mathbf{M}(P) \lesseqgtr \text{uGr}\, \mathbf{M}(R)$, т. е. для всякой области

$$\mathbf{M}_i(Q) \lesseqgtr \mathbf{M}_e(Q). \tag{2}$$

Въ томъ случаѣ, когда обѣ эти границы совпадаютъ, общее ихъ значеніе опредѣляется какъ *мѣра открытой области*

$$\mathrm{uGr}\,\mathbf{M}(P) = \mathbf{M}(Q) = \mathrm{oGr}\,\mathbf{M}(R),$$

и области, обладающія этимъ свойствомъ, называются *измѣримыми*.

Теперь возникаетъ вопросъ, какими же соображеніями руководствоваться при построеніи областей P и R? Такъ какъ каждая изъ нихъ есть прежде всего область первичная, то надо изслѣдовать, какія именно изъ областей этого рода дожны быть использованы для построенія внутренней области P и какія для области R? Начнемъ съ области P, которая, будучи первичной, должна входить въ составъ Q.

Область Q, вообще говоря, не заключаетъ въ своемъ составѣ сплошныхъ интерваловъ; слѣдовательно для P можно взять только или замкнутыя области, являющіяся частями Q, или внѣшнія точки такихъ областей; мѣра тѣхъ и другихъ—согласно теоремѣ B—одна и та-же, но замкнутыя области, какъ болѣе богатыя точками, менѣе отличаются отъ области Q; поэтому естественно брать, какъ области P, заключающіяся въ Q замкнутыя области. Это рѣшеніе не наноситъ ущерба общности и въ томъ случаѣ, когда область Q—смѣшанная, т. е. состоитъ во первыхъ—изъ ряда сплошныхъ интерваловъ и во вторыхъ—изъ точечной части, расположенной на другомъ рядѣ интерваловъ; и въ этомъ случаѣ замкнутыя области являются наиболѣе удобными и болѣе близкими по своему составу къ области Q; эти замкнутыя области будутъ состоять здѣсь съ одной стороны—изъ конечнаго ряда закрытыхъ интерваловъ и съ другой—изъ суммы конечнаго числа замкнутыхъ областей, расположенныхъ каждая на одномъ изъ интерваловъ, дополнительныхъ по отношенію къ первымъ интерваламъ.

Для построенія внѣшней области R у насъ открываются двѣ возможности: мы можемъ взять область $\bar{Q}$, получающуюся отъ замыканія Q, или внѣшнія точки такой области, если въ составъ Q не входитъ ни одна изъ границъ свободныхъ интерваловъ, при чемъ мѣры обѣихъ такихъ областей равны между собой; или мы можемъ около точекъ Q построить рядъ интерваловъ $\{\lambda_i\}$. Мѣра области $\bar{Q}$ не поддается измѣненію, и слѣдовательно ея нижняя граница есть сама $\mathbf{M}(\bar{Q})$; что же касается мѣры ряда интерваловъ, то, избирая послѣдніе такъ или иначе, мы можемъ значительно мѣнять ея значеніе. Поэтому намъ необходимо сравнить $\mathbf{M}(\bar{Q})$ и нижнюю границу $\sum \lambda_i$.

Какъ мы видѣли въ 51°, интервалы λ_i могутъ быть въ извѣстныхъ случаяхъ подбираемы такимъ образомъ, что изъ нихъ послѣдовательно будутъ отсѣиваться не только уединенныя точки λ_i, не входящія въ Q, но даже и предѣльныя точки Q, въ Q не заключающіяся; въ нѣкоторыхъ случаяхъ послѣднія точки отсѣять нельзя, но первыя могутъ быть исключены во всякомъ случаѣ. Такимъ образомъ uGr $\sum \lambda_i$, не заключая въ себѣ никакихъ точекъ, чуждыхъ $\bar{Q}$, можетъ—въ извѣстныхъ случаяхъ—не заключать даже и отсутствующія въ Q предѣльныя точки; такимъ образомъ ясно, что uGr $\sum \lambda_i$, какъ менѣе, сравнительно съ Q, отличающаяся по своему составу отъ Q, должна быть взята за внѣшнюю мѣру области. Что такое рѣшеніе имѣетъ за себя серьезныя основанія, покажетъ еще хотя бы примѣръ счетной часто разсѣянной области; какъ извѣстно, для нея интервалы $\{\lambda_i\}$ могутъ быть построены такъ, что $\sum \lambda_i$ будетъ произвольно мала, и слѣдовательно uGr $\sum \lambda_i = 0$, тогда какъ $\bar{Q}$ здѣсь совпадаетъ съ основнымъ интерваломъ, и $\mathbf{M}(\bar{Q}) = l$. Итакъ

Внутренняя мѣра открытой области Q *опредѣляется какъ верхняя граница мѣры замкнутыхъ областей, входящихъ въ* Q, *и внѣшняя мѣра—какъ нижняя граница мѣры ряда интерваловъ, несущихъ на себѣ точки* Q.

172. Изъ этого опредѣленія непосредственно вытекаетъ такое слѣдствіе:

„Если $\mathbf{M}_i(P) = a$, $\mathbf{M}_e(P) = b$, то область P заключаетъ въ своемъ составѣ замкнутыя части съ мѣрой большей $a - \varepsilon$ и можетъ быть включена въ рядъ интерваловъ съ мѣрой меньшей $b + \varepsilon'$, гдѣ ε, ε'—произвольно малыя положительныя числа“.

Изъ того же опредѣленія слѣдуетъ далѣе, что для *замкнутой области* S должно быть $\mathbf{M}_i(S) = \mathbf{M}(S)$, и — на основаніи теоремъ F и G 169° — также $\mathbf{M}_e(S) = \mathbf{M}(S)$.

Точно также для области Г, состоящей изъ точекъ ряда закрытыхъ интерваловъ $\{\lambda_i\}$, $\mathbf{M}_e(\Gamma) = \mathbf{M}(\Gamma)$; съ другой стороны—точки ряда интерваловъ $\sum_1^n \lambda_i$ даютъ замкнутую область, и oGr $\sum_1^n \lambda_i = \mathbf{M}(\Gamma)$, такъ что $\mathbf{M}_i(\Gamma) = \mathbf{M}(\Gamma)$.

Имѣя въ виду соображенія 167°, мы находимъ затѣмъ, что и для области Г опредѣленной *рядомъ произвольныхъ интерваловъ* $\mathbf{M}_i(\Gamma) = \mathbf{M}(\Gamma)$; очевидно также, что здѣсь $\mathbf{M}_e(\Gamma) = \mathbf{M}(\Gamma)$.

Изъ опредѣленія внѣшней мѣры слѣдуетъ далѣе, что для обыкновенной внутренней предѣльной области G_0, заданной областями G_n, мы имѣемъ

$$\mathbf{M}_e(G_0) = \underset{n \ldots \infty}{\mathrm{uGr}} \sum \lambda_i^{(n)} = lim\, \mathbf{M}(G_n), \tag{3}$$

при чемъ интервалы $\lambda_i^{(n)}$ должны быть тѣ, которымъ обязана своимъ происхожденіемъ область G_0, такъ какъ иначе можетъ появиться область, болѣе богатая точками, которая, въ силу теоремы L, можетъ имѣть большую нижнюю границу.

Изъ опредѣленія внутренней мѣры вытекаетъ, что для обыкновенной внѣшней предѣльной области G, заданной замкнутыми областями G_n,

$$\mathbf{M}_i(G) = \mathrm{oGr}\, \mathbf{M}(G_n) = lim\, \mathbf{M}(G_n). \tag{4}$$

Далѣе намъ необходима лемма[1]) и теорема[2]) *Young'a*:

Лемма. „Если $\Lambda^{(n)} \equiv \{ l_i^{(n)} \}_{i=1}^{i=m_n}$ при произвольно возрастающемъ n есть рядъ рядовъ интерваловъ при конечныхъ m_n, при чемъ $\Lambda^{(n+1)} \equiv \mathrm{D}(\Lambda^{(n)})$, и $\underset{n \ldots \infty}{\mathrm{uGr}} \sum_{i=1}^{m_n} l_i^{(n)} = g > 0$, то существуетъ замкнутая область $\Lambda_0 \equiv \overset{\infty}{\underset{1}{\mathrm{D}}}(\Lambda^{(n)})$, для которой $\mathbf{M}(\Lambda_0) = g$".

M. „Если $\Lambda^{(n)} \equiv \{ l_i^{(n)} \}$ есть рядъ рядовъ интерваловъ, при чемъ

$$\Lambda^{(n+1)} \equiv \mathrm{D}(\Lambda^{(n)}),\ \underset{n \ldots \infty}{\mathrm{uGr}} \sum_{i=1}^{\infty} l_i^{(n)} = g > 0,$$

то существуетъ область $G_0 \equiv \overset{\infty}{\underset{1}{\mathrm{D}}}(\Lambda^{(n)})$, для которой $\mathbf{M}_i(G_0) = g$".

Изъ теоремы M въ связи съ (3) слѣдуетъ, что для обыкновенной внутренней предѣльной области $\mathbf{M}_i(G_0) = \mathbf{M}_e(G)$, т. е.

N. „Обыкновенная внутренняя предѣльная область измѣрима".

---

[1]) Proc. (2) 2, p. 18, теоремы 1 и 2.

[2]) ib. p. 19, теорема 3.

Затѣмъ *Young* доказываетъ[1]), что для обыкновенной внѣшней предѣльной области $\mathbf{M}_e(G) = lim\,\mathbf{M}(G_n)$; а это въ связи съ (4) даетъ заключеніе, что и

O. „Обыкновенная внѣшняя предѣльная область измѣрима".

Такъ какъ область внѣшнихъ точекъ P ряда закрытыхъ интерваловъ является[2]) частнымъ случаемъ обыкновенной внутренней предѣльной области, то для нея — въ силу теоремы O — будетъ $\mathbf{M}_e(P) = \mathbf{M}_i(P)$; такъ какъ тоже мы имѣли въ 172° для замкнутыхъ областей и для областей сплошныхъ интерваловъ, то мы можемъ утверждать, что

P. „Для первичныхъ областей внутренняя и внѣшняя мѣры совпадаютъ и равны мѣрѣ области".

Не трудно видѣть, что въ дополненіе къ теоремѣ L можетъ быть дана теорема

Q. „Если G и H — произвольныя области, и $G = D(H)$, то

$$\mathbf{M}_i(G) \leqq \mathbf{M}_i(H),\quad \mathbf{M}_e(G) \leqq \mathbf{M}_e(H)\text{“}.$$

Это слѣдуетъ изъ того, что для G и H соотвѣтственныя первичныя области будутъ составлять первыя — часть вторыхъ; а отсюда непосредственно вытекаетъ, что

R. „Если G и H — измѣримыя области, и $G = D(H)$, то

$$\mathbf{M}(G) \leqq \mathbf{M}(H)\text{“}.$$

Въ частности мы можемъ еще утверждать, что

„Всякая счетная область G измѣрима, и ея мѣра равна 0",

такъ какъ для нея $\mathbf{M}_e(G) = 0$; наконецъ

„Область ирраціональныхъ дробей измѣрима, и ея мѣра равна 1", что слѣдуетъ изъ того, что эти дроби составляютъ обыкновенную внутреннюю предѣльную область для ряда интерваловъ, сумма которыхъ равна 1.

173. Опредѣленіе $\mathbf{M}_i(P)$ и $\mathbf{M}_e(P)$ внутренней и внѣшней мѣры, приведенное выше, дано независимо другъ отъ друга *Lebesgue'омъ* и *Young'омъ*[3]); что оба опредѣленія тожественны для внѣшней мѣры, ясно сразу; что же касается до $\mathbf{M}_i(P)$, то[4]) включеніе дополнительной области П въ рядъ интерваловъ $\{\lambda_i\}$ опредѣляетъ на основномъ

---

[1]) ib. p. 42.

[2]) См. стр. 215, A 158°.

[3]) ib. p. 28.

[4]) См. выше (6), стр. 63.

интервалѣ L замкнутую область E, состоящую исключительно изъ точекъ P; при всевозможныхъ подборахъ $\{\lambda_i\}$, имѣющихъ цѣлью найти uGr $\sum\lambda_i$, мы будемъ получать новыя замкнутыя части P, все болѣе и болѣе богатыя точками и слѣдовательно — въ силу теоремы L — съ неуменьшающеюся мѣрой; такъ какъ $\mathbf{M}(E) = l - \sum\lambda_i$, то $l -$ uGr $\sum\lambda_i =$ oGr $\mathbf{M}(E)$, а это и есть $\mathbf{M}_i(P)$.

174. Пользуясь понятіемъ о внутренней мѣрѣ, и имѣя въ виду D и E 160°, мы можемъ привести здѣсь[1]) двѣ теоремы, касающіяся замкнутыхъ областей:

S. „Если G_1 и G_2 — замкнуты, то

$$\mathbf{M}(G_1) + \mathbf{M}(G_2) = \mathbf{M}\left[D(G_1, G_2)\right] + \mathbf{M}\left[M(G_1, G_2)\right]“.$$

T. „Если $G_{n+1} = D(G_n)$, и всѣ G_n замкнуты, то

$$\mathbf{M}\left[\overset{\infty}{\underset{1}{D}}(G_n)\right] = lim\, \mathbf{M}(G_n)“.$$

Имѣя дѣло съ произвольными областями, мы можемъ утверждать, что

U. „Если $G = G_1 + G_2$, то

$$\mathbf{M}_i(G_1 + G_2) \overline{>} \mathbf{M}_i(G_1) + \mathbf{M}_i(G_2),$$

$$\mathbf{M}_e(G_1 + G_2) < \mathbf{M}_e(G_1) + \mathbf{M}_e(G_2)“.$$

Пусть

$$\mathbf{M}_i(G_1) = a_1,\ \mathbf{M}_i(G_2) = a_2,\ \mathbf{M}_e(G_1) = b_1,\ \mathbf{M}_e(G_2) = b_2.$$

a. Предположивъ

$$\mathbf{M}_i(G) = a < a_1 + a_2 \tag{1}$$

и назвавъ $a_1 + a_2 - a = \alpha$, допустимъ сначала, что G замкнута; имѣя въ виду слѣдствіе 172°, мы можемъ подобрать такіе замкнутые дѣлители $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$ областей G_1 и G_2, что будетъ

$$\mathbf{M}(\bar{G}_1) = a_1 - \varepsilon_1,\ \mathbf{M}(\bar{G}_2) = a_2 - \varepsilon_2, \tag{2}$$

гдѣ каждое изъ чиселъ ε_1 и ε_2 меньше $\frac{\alpha}{2}$; въ такомъ случаѣ для замкнутой области $\bar{G}_1 + \bar{G}_2$, являющейся дѣлителемъ $G_1 + G_2 = G$, мы — въ силу теоремы L — имѣемъ

---

[1]) См. Proc. (2) 2, p. 24, лемма 3; ср. p. 25, теорема 2'.

$$\mathbf{M}(\bar{\bar{G}}_1) + \mathbf{M}(\bar{\bar{G}}_2) = \mathbf{M}(\bar{\bar{G}}_1 + \bar{\bar{G}}_2) \leqq \mathbf{M}(G)$$

или

$$a_1 + a_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leqq a = a_1 + a_2 - \alpha,$$

откуда слѣдуетъ, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geqq \alpha$, что противно положенію.

Пусть теперь G незамкнута; возьмемъ $\bar{G}$ — замкнутый дѣлитель G съ мѣрой $a - \varepsilon$, при чемъ каждое изъ чиселъ ε, ε_1, ε_2 возьмемъ теперь меньшимъ $\frac{\alpha}{4}$.

Согласно теоремѣ D 160°, $D(\bar{G}, \bar{G}_1) = \bar{\bar{G}}_1$, $D(\bar{G}, \bar{G}_2) = \bar{\bar{G}}_2$, а также и $\bar{\bar{G}}_1 + \bar{\bar{G}}_2$ будутъ замкнуты; на основаніи теоремы S —

$$\mathbf{M}\left[D(\bar{G}, \bar{G}_1)\right] + \mathbf{M}\left[M(\bar{G}, \bar{G}_1)\right] = \mathbf{M}(\bar{G}) + \mathbf{M}(\bar{G}_1); \tag{3}$$

но очевидно $M(\bar{G}, \bar{G}_1)$, будучи замкнутымъ дѣлителемъ G, имѣетъ мѣру, не превышающую a; поэтому (3) намъ даетъ

$$\mathbf{M}(\bar{\bar{G}}_1) + a \geqq a - \varepsilon + a_1 - \varepsilon_1,\ \mathbf{M}(\bar{\bar{G}}_1) \geqq a_1 - (\varepsilon + \varepsilon_1);$$

точно также

$$\mathbf{M}(\bar{\bar{G}}_2) \geqq a_2 - (\varepsilon + \varepsilon_2),$$

откуда

$$\mathbf{M}(\bar{\bar{G}}_1 + \bar{\bar{G}}_2) = \mathbf{M}(\bar{\bar{G}}_1) + \mathbf{M}(\bar{\bar{G}}_2) \geqq a_1 + a_2 - (2\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2); \tag{4}$$

съ другой стороны $\bar{\bar{G}}_1 + \bar{\bar{G}}_2$ составляетъ замкнутый дѣлитель G; поэтому

$$\mathbf{M}(\bar{\bar{G}}_1 + \bar{\bar{G}}_2) \leqq a; \tag{5}$$

изъ (4) и (5) имѣемъ

$$a_1 + a_2 - (2\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leqq a,$$

откуда $2\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geqq \alpha$, что противно положенію.

Такимъ образомъ въ обоихъ случаяхъ невозможность неравенства (1) доказана.

b. Допустимъ, что

$$b = \mathbf{M}_e(G) > \mathbf{M}_e(G_1) + \mathbf{M}_e(G_2) = b_1 + b_2,$$

и назовемъ $b - (b_1 + b_2) = \beta$; включимъ точки каждой изъ G_1 и G_2 въ безконечный рядъ интерваловъ съ мѣрой соотвѣтственно равной $b_1 + \eta_1$, $b_2 + \eta_2$, при чемъ каждое изъ чиселъ η_1 и η_2 возьмемъ меньшимъ $\frac{3}{4}$; тогда область G окажется включенной въ рядъ интерваловъ, сумма которыхъ не будетъ превышать $b_1 + b_2 + \eta_1 + \eta_2$; такимъ образомъ оказывается

$$b = \mathbf{M}_e(G) \leqq b_1 + b_2 + \eta_1 + \eta_2 < b_1 + b_2 + \frac{3}{2},$$

что противно положенію.

175. Переходя далѣе къ весьма важному вопросу относительно сложенія мѣръ, мы приведемъ здѣсь рядъ теоремъ *Young'a*:

V. „Если $G \equiv G_1 + G_2$, и G_1 замкнута, то

$$\mathbf{M}_i(G) = \mathbf{M}(G_1) + \mathbf{M}_i(G_2),\ \mathbf{M}_e(G) = \mathbf{M}(G_1) + \mathbf{M}_e(G_2)\text{“}\ ^{1)}.$$

W. „Если $G_{n+1} \equiv D(G_n)$, то $\mathbf{M}_i\left[\overset{\infty}{\underset{1}{D}}(G_n)\right] = lim\, \mathbf{M}_i(G_n)$“ [2]).

X. „Если $G_{n+1} \equiv M(G_n)$, то $\mathbf{M}_e\left[\overset{\infty}{\underset{1}{M}}(G_n)\right] = lim\, \mathbf{M}_e(G_n)$“ [3]).

Изъ двухъ послѣднихъ теоремъ слѣдуетъ [4])

Y. „Внутренняя и внѣшняя предѣльная область для ряда измѣримыхъ областей $\{G_n\}$ измѣрима и имѣетъ мѣрой $lim\, \mathbf{M}(G_n)$“.

Такъ какъ области G_n измѣримы, то назовемъ

$$\mathbf{M}_i(G_n) = \mathbf{M}_e(G_n) = \mathbf{M}(G_n) = a_n. \tag{1}$$

a. Для внутренней предѣльной области $G_0 \equiv \overset{\infty}{\underset{1}{D}}(G_n)$ — согласно теоремѣ W—

$$a = \mathbf{M}_i(G_0) = lim\, \mathbf{M}_i(G_n) = lim\, a_n;$$

числа a_n, въ силу теоремы R, не возрастаютъ, и слѣдовательно $a \leqq a_n$; въ такомъ случаѣ для произвольно малаго ε можетъ быть опредѣлено число μ такое, что

$$a_n < a + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n > \mu; \tag{2}$$

область G_n, будучи измѣрима, можетъ быть включена — въ силу опредѣленія — въ рядъ интерваловъ съ мѣрой $a_n + \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon$; такъ какъ

---

1) Proc. (2) 2, p. 24, лемма 2; p. 28-29, 9°-10°; p. 44, 18°; p. 46, 19°

2) ib. p. 25-26, теорема 3'; p. 28, теорема 6.

3) ib. p. 44, теорема 6'.

4) ib. p. 45, 18°, слѣдствіе.

G заключается въ составѣ G_n, то и точки G оказываются включенными въ рядъ интерваловъ съ мѣрой меньшей $a+\varepsilon$ съ произвольно малымъ ε, такъ что $\mathbf{M}_e(G_0) = a = \mathbf{M}_i(G_0)$.

b. Для внѣшней предѣльной области $G = \overset{\infty}{\underset{1}{M}}(G_n)$ — согласно теоремѣ X —

$$b = \mathbf{M}_e(G) = lim\, \mathbf{M}_e(G) = lim\, b_n,$$

при чемъ числа b_n не убываютъ; въ такомъ случаѣ $b \geqq b_n$, и слѣдовательно, для достаточно большихъ n, $b - b_n < \frac{\varepsilon}{2}$ или

$$b_n > b - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n > \nu. \tag{3}$$

Такъ какъ области G_n измѣримы, то возможны въ составѣ G_n замкнутыя области съ мѣрой большой $b_n - \frac{\varepsilon}{2}$; а въ такомъ случаѣ, въ связи съ (3), въ составѣ G возможны замкнутыя области съ мѣрой большой $b - \varepsilon$; но ε — произвольно мало, слѣдовательно

$$\mathbf{M}_i(G) = b = \mathbf{M}_e(G).$$

176. Изъ теоремы V мы видимъ, что замкнутая область, суммируясь съ произвольной областью, даетъ область, внутренняя и внѣшняя мѣры которой равны суммамъ соотвѣтствующихъ мѣръ; съ другой стороны изъ теоремы U слѣдуетъ, что сумма двухъ произвольныхъ областей такимъ свойствомъ не обладаетъ, или — по крайней мѣрѣ — мы не имѣемъ пока данныхъ это утверждать; такимъ образомъ для замкнутой области является характернымъ то обстоятельство, что она въ комбинаціи съ произвольной областью „обладаетъ теоремой внутренняго и внѣшняго сложенія“.

Отсюда возникаетъ вопросъ, только ли замкнутая область имѣетъ это свойство, или, напротивъ того, оно принадлежитъ если не всѣмъ, то хотя бы нѣкоторымъ открытымъ областямъ; *Young* доказываетъ, что имѣетъ мѣсто именно второе предположеніе.

Классы областей, обладающіе теоремой внутренняго и внѣшняго сложенія, *Young* называетъ соотвѣственно *внутреннимъ и внѣшнимъ аддитивнымъ классомъ*; къ этому классу, какъ мы только что видѣли, принадлежатъ замкнутыя области; мы сейчасъ же въ состояніи расширить эти классы, имѣя въ виду слѣдующую теорему *Young'a*[1]):

[1]) ib. p. 31-32, теоремы 8 и 9; p. 47, теоремы 8′ и 9′.

I. „Къ внутреннему и внѣшнему аддитивнымъ классамъ принадлежатъ какъ внутреннія, такъ и внѣшнія предѣльныя области областей класса“.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ [1]) далѣе:

II. „Къ обоимъ аддитивнымъ классамъ принадлежатъ обыкновенныя внѣшнія и внутреннія предѣльныя области“.

Какъ частный случай обыкновенной внѣшней предѣльной области, къ аддитивнымъ классамъ принадлежитъ рядъ замкнутыхъ сплошныхъ интерваловъ; на этомъ основаніи вторая часть теоремы II слѣдуетъ изъ ея первой части.

III. „Для обобщенной внѣшней предѣльной области G, если опредѣляющія ее области G_n входятъ въ внутренній аддитивный классъ,

$$\mathbf{M}_i(G) = lim\, \mathbf{M}_i(G_n)\ ^{2})“.$$

Изъ теоремы I, аналогично II, можетъ быть выведена теорема:

IV. „Для обобщенной внутренней предѣльной области G, если опредѣляющія ее области G_n входятъ въ внѣшній аддитивный классъ,

$$\mathbf{M}_e(G) = lim\, \mathbf{M}_e(G_n)“.$$

Въ силу теоремъ D, E, F 160 [2], къ обоимъ аддитивнымъ классамъ принадлежатъ, кромѣ внутреннихъ и внѣшнихъ предѣльныхъ областей областей класса, еще разность замкнутыхъ областей, разность обыкновенныхъ внутреннихъ и внѣшнихъ предѣльныхъ областей — и замкнутыхъ областей, разность обыкновенныхъ внутреннихъ и внѣшнихъ предѣльныхъ областей, или наоборотъ; кромѣ того [3])

V. „Къ обоимъ классамъ принадлежатъ

$$G_1 + G_2,\ G_1 - G_2,\ D(G_1, G_2),\ M(G_1, G_2), \qquad (1)$$

если G_1, G_2 входятъ въ соотвѣтствующіе классы“.

Понятно, что въ первыхъ двухъ случаяхъ (1) предполагается соотвѣтственно, что

$$D(G_1, G_2) = 0, \quad G_2 = D(G_1).$$

Такимъ образомъ оказывается, что всѣ области, получаемыя обычными процессами, принадлежатъ одновременно какъ къ внутреннему, такъ и къ внѣшнему аддитивнымъ классамъ, такъ что эти области образуютъ одинъ единый *аддитивный классъ*, характеризуемый тѣмъ

---

[1]) ib. p. 32 и p. 47, слѣдствія 1 теоремъ 8 и 8′.

[2]) ib. p. 32, слѣдствіе 2.

[3]) ib. p. 33-34, p. 47, теоремы 10, 10′, 11, 11′, 13, 13′.

условіемъ, что всѣ области, входящія въ него, обладаютъ теоремами какъ внутренняго, такъ и внѣшняго сложенія. *Young* доказываетъ еще двѣ теоремы.

VI. „Если область G внутренняго или внѣшняго аддитивнаго класса разбивается на двѣ области G_1 и G_2 при условіи

$$\mathbf{M}_i(G) = \mathbf{M}_i(G_1) + \mathbf{M}_i(G_2),\ \mathbf{M}_e(G) = \mathbf{M}_e(G_1) + \mathbf{M}_e(G_2)$$

— соотвѣтственно, то G_1 и G_2 принадлежатъ соотвѣтствующему классу“[1]).

VII. „Для областей внутренняго и внѣшняго аддитивныхъ классовъ соотвѣтственно

$$\mathbf{M}_i(G_1) + \mathbf{M}_i(G_2) = \mathbf{M}_i\left[D(G_1, G_2)\right] + \mathbf{M}_i\left[M(G_1, G_2)\right],$$

$$\mathbf{M}_e(G_1) + \mathbf{M}_e(G_e) = \mathbf{M}_e\left[D(G_1, G_2)\right] + \mathbf{M}_e\left[M(G_1, G_2)\right]\text{“}^{2)}.$$

177. Въ томъ случаѣ, когда $\mathbf{M}_i(P) = \mathbf{M}_e(P)$, область называется[3]) измѣримой. Если $\mathbf{M}_i(P) = a$, то, чтобы P была измѣрима, $\mathbf{M}_e(P)$ должна быть также равна a, и слѣдовательно для P должно быть возможно включеніе въ рядъ интерваловъ, сумма которыхъ меньше $a + \varepsilon$ при произвольно маломъ ε. Если $\mathbf{M}_e(P) = b$, то, чтобы P была измѣримой, $\mathbf{M}_i(P)$ должна быть равна также b, и слѣдовательно P должна заключать въ себѣ замкнутыя слагаемыя съ мѣрой большей $b - \varepsilon$[4]). Имѣя это въ виду, можно установить[5]), что

VIII. „Каждая область внутренняго или внѣшняго аддитивнаго класса измѣрима“,

откуда—въ силу 176°—слѣдуетъ

Основная теорема. „Области аддитивнаго класса измѣримы“.

Эта теорема *Young'a*—чрезвычайной важности: она показываетъ всю цѣнность изученія областей съ точки зрѣнія обладанія ими теоремой внутренняго и внѣшняго сложенія: изъ нея слѣдуетъ, что къ числу измѣримыхъ областей принадлежатъ[6]):

1) область внѣшнихъ и невнутреннихъ точекъ ряда интерваловъ;
2) область точекъ ряда интерваловъ, закрытыхъ или открытыхъ;
3) обыкновенныя внутреннія и внѣшнія предѣльныя области;
4) внутреннія и внѣшнія предѣльныя области ряда аддитивныхъ областей;

---

[1]) ib. p. 33, теорема 12; p. 47, теорема 12'.

[2]) ib. p. 34, теорема 13; p. 47-48, теорема 13'.

[3]) См. стр. 233, 171°.

[4]) См. 172°.

[5]) Proc. (2) 2, p. 42, теорема 20; p. 43-44, теорема 21.

[6]) ib. p. 48-49.

5) суммы и разности аддитивныхъ областей;

6) общіе дѣлители и наименьшія кратныя аддитивныхъ областей; такимъ образомъ, исходя изъ областей класса и выполняя надъ ними всѣ обычныя операціи, мы получимъ снова области класса, такъ что эти области образуютъ *corpus*[1]).

Если бы мы могли утверждать, что нѣтъ открытыхъ областей, которыя не могли бы быть получены указанными выше процессами, крайне трудный вопросъ объ измѣреніи областей и объ ихъ классификаціи былъ бы рѣшенъ разъ на всегда; чтобы пойти ему на встрѣчу, *Young* даетъ теорему[2]):

IX. „Каждая область съ внутренней мѣрой a есть или замкнутая область, или обыкновенная внѣшняя предѣльная область, или сумма той или другой области и открытой области съ внутренней мѣрой, равной нолю".

Отсюда слѣдуетъ, что, если бы мы могли доказать, что эти послѣднія открытыя области принадлежатъ внутреннему аддитивному классу, задача измѣренія была бы исчерпана, такъ какъ тогда—въ силу теоремы IX и V—всякая открытая область обладала бы теоремой внутренняго сложенія, и—въ силу теоремы VIII—была бы измѣрима.

Такъ какъ всякая счетная область можетъ быть разсматриваема какъ обыкновенная внѣшняя предѣльная область, предыдущая задача можетъ имѣть дѣло только съ открытой внутренне-полой[3]) *несчетной* областью; далѣе—всякая несчетная область P можетъ быть представлена въ видѣ $R + D(S)$, гдѣ S совершенная, а R счетная область, лежащая на свободныхъ интервалахъ S; поэтому вопросъ будетъ стоять только для $D(S)$, т. е. для несчетнаго открытаго внутренне-полаго дѣлителя совершенной области S. Затѣмъ область $D(S)$ можетъ быть разложена на двѣ части $D(E) + D(Q)$, гдѣ E—область внѣшнихъ точекъ ряда уединенныхъ интерваловъ, и Q—область ихъ границъ; такъ какъ Q и слѣдовательно $D(Q)$ счетны, то $D(E) + D(Q)$ обладаетъ теоремой внутренняго сложенія, если ею обладаетъ $D(E)$, при чемъ, какъ мы видѣли въ A 158°, E есть обыкновенная внутренняя предѣльная область; итакъ—изученія требуетъ $D(E) \equiv\!\!|\!\!\equiv E$, т. е. *несчетный внутренне-полый дѣлитель области внѣшнихъ точекъ ряда уединенныхъ интерваловъ*.

Если $\Delta(E)$—дополнительная для $D(E)$ область, то $D(E) \quad E - \Delta(E)$; такъ какъ E входитъ въ внутренній аддитивный классъ, то—въ силу

[1]) ib. p. 35.

[2]) ib. p. 38, теорема 19.

[3]) т. е. съ внутренней мѣрой, равной нолю.

теоремы V—туда войдетъ и D (E), если Δ (E) принадлежитъ этому классу; такимъ образомъ изслѣдованіе D (E) можетъ быть сведено на изученіе Δ (E); въ частности, если Δ (E) счетна, она, а слѣдовательно и D (E), будутъ принадлежать внутреннему аддитивному классу; поэтому мы можемъ предполагать Δ (E) несчетной.

Итакъ для предыдущаго дѣлителя D (E) области внѣшнихъ точекъ ряда уединенныхъ интерваловъ имѣется еще условіе, заключающееся въ томъ, что его дополнительная область Δ (E) должна быть несчетна; этотъ дѣлитель D (E) мы назовемъ *элементарной областью.*

Если такая *элементарная область* можетъ быть всегда получена однимъ изъ указанныхъ выше процессовъ, вопросъ о мѣрѣ области рѣшенъ окончательно: всѣ области окажутся измѣримыми; поэтому теперь стоитъ на очереди только изслѣдованіе, входитъ ли указанная выше элементарная область въ внутренній аддитивный классъ или нѣтъ?

ЛИТЕРАТУРА.

Обозначения: A. d. L.—Atti della R. Accademia dei Lincei; A. d. M.—Annali di Matematica; A. Éc. N.—Annales de l'École Normale; A. M.—Acta Mathematica; Am. J.—American Journal of Mathematics; B. A. M. S.—Bulletin of the American Mathematical Society; B. M.—Bibliotheca Mathematica; C. R.—Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris; Cr. J.—Journal für reine und angewandte Mathematik; G. d. M.—Giornale di Matematiche; G. N.—Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; J. d. M.—Journal de Mathématiques; J. d. M. V.—Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; L. B.—Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig; M. A.—Mathematische Annalen; M. B.—Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München; M. of M.—The Messenger of Mathematics; P. L. M. S.—Proceedings of the London Mathematical Society; Ph. M.—Philosophical Magazine; Quat. J.—Quaterly Journal of Mathematics; R. Ist. L.—Rendiconti del Istituto Lombardo; R. P.—Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; W. B.—Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften in Wien; Z. f. M.—Zeitschrift für Mathematik.

1638. **G. Galilei.** Discorsi e dimostrazioni matematiche.
[Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und Fallgesetze betreffend. Ostwald's Klassiker, № 11, 24, 25. 1890-1891].

1817. **Bolzano.** Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.

1850. **Bolzano.** Paradoxien des Unendlichen.

1854. **B. Riemann.** Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.

1869. **G. Cantor.** Ueber die einfachen Zahlensysteme.
Z. f M. 14, 121. *

1870. **G. Cantor.** Ueber trigonometrische Reihen.
M. A. 4, 139; A. M. 2, 329. *

Hankel. Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen.
M. A. 20, 61.

1872. **Dedekind**. Stetigkeit und irrationale Zahlen.

G. Cantor. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.

M. A. 5, 123; A. M. 2, 336.

Heine. Die Elemente der Functionentheorie.

Cr. J. 74, 172.

1873. **G. Cantor**. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

Cr. J. 77, 258; A. M. 2, 305.

1875. **Ascoli**. Sul concetto di integrale definito.

A. d. L. (2) 2, 862

P. du Bois-Reymond. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen.

Cr. J. 79, 21. *

Darboux. Mémoire sur les fonctions discontinues.

A. Éc. N. (2) 4, 57. *

Smith. On the integration of discontinuous functions.

P. L. M. S. 6, 140.

1877. **G. Cantor**. Ein Beitrag zur Mannichfaltigkeitslehre.

Cr. J. 84, 242; A. M. 2, 311.

1878. **Ascoli**. Nuove ricerche sulla serie di Fourier.

A. d. L. (3) 2, 584.

Dini. Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. [Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse. 1892].

1879-1882. **G. Cantor**. Ueber unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten.

M. A. 15, 1; 17, 355; 20, 113.

A. M 2, 349, 357, 361.

1880. **P. du Bois-Reymond**. Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung.

M. A. 16, 115.

G. Cantor. Bemerkung über trigonometrische Reihen.

M. A. 16, 113. *

Pincherle. Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. C. Weierstrass.

G. d. M. 18, 178, 317.

1881 **Volterra**. Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue.

G. d. M. 19, 76.

Sui principii del calcolo integrale.

G. d. M. 19, 337. *

1882. **P. du Bois-Reymond.** Die allgemeine Functionentheorie.

G. Cantor. Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten von Functionen.

M. A. 19, 588. *

Harnack. Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe.

M. A. 19, 235.

Veltmann. Die Fourier'sche Reihe.

Z. f. M. 27, 193

Ueber die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function.

Z. f. M. 27, 176.

Zur Theorie der Punktmengen.

Z. f. M. 27, 313.

1883. **Ascoli.** Le curve limite di una varietà data di curve.

A. d. L. (3) 18, 521.

Bendixson. Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points.

A. M. 2, 415.

G. Cantor. Fondement d'une théorie génèrale des ensembles.

A. M. 2, 381; M. A. 21, 545.

Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situes dans un espace continu à N dimensions.

A. M. 2, 409.

1883-1884. **G. Cantor.** Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

M. A. 21, 51, 545; 23, 543.

A. M. 2, 372, 381.

1884. **G. Cantor.** De la puissance des ensembles parfaits de points.

A. M. 4, 381.

Harnack. Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen. 2 Theil.

M. A 24, 217.

Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige.

M. A. 23, 285.

Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante.

A. M. 4, 1.

Phragmen. Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre.

A. M. 5, 47.

1884. **Scheeffer**. Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen.
A. M. 5, 183, 279.
Stolz. Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth.
M. A. 23 152.
1885. **G. Cantor**. Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume.
A. M. 7, 105.
Harnack. Ueber den Inhalt der Punktmengen.
M. A. 25, 241.
Phragmen. Über die Begrenzungen von Continua.
A. M. 7, 43. *
1887. **Dedekind**. Was sind und was sollen die Zahlen?
Pasch. Ueber einige Punkte der Functionentheorie.
M. A. 30, 132.
Peano. Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale.
1887-1888. **G. Cantor**. Mittheilungen zur Lehre vom Transfiniten.
Zeitschrift für Philosophie, 91, 92.
1888. **Ascoli**. Riassunto della memoria „Le curve limite di una varietà data di curve" ed osservazioni critiche alla medesima.
R. Ist. L. (2) 21, passim.
H. C. Schwarz. Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen. *
Stolz. Ueber zwei Arten von unendlich kleinen und von unendlich grossen Grössen.
M. A. 31, 601.
1889. **Arzelà**. Funzioni di linee.
A. d. L. (4) 5, 342.
W. F. Meyer. Zur Lehre vom Unendlichen. *
1891. **Veronese**. Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee.
1891-1892. **Hurwitz**. Ueber die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche.
M. A. 39, 279.
1892. **G. Cantor**. Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.
J. d. M. V. 1, 75.
C. Jordan. Cours d'analyse.
Deux éd., t. I.
Remarques sur les intégrales définies.
J. d. M. (4) 8, 69.

1892. **Vivanti**. Notice historique sur la théorie des ensembles.
B. M. (2) 6, 9.

1893. **Borel**. Sur quelques points de la théorie des fonctions.
A. Éc. N. (3) 12, 9.

Levi-Civita. Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici.
Atti d. R. Istituto Veneto. *

1895-1897. **G. Cantor**. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.
M. A. 46, 481; 49, 207.

1896. **Couturat**. De l'infini mathématique.

Osgood. Ueber ungleichmässige Convergenz und die gliedweise Integration der Reihen.
G. N., 283.

Schoenflies. Ueber die Abbildung von Würfeln verschiedener Dimensionen auf einander.
G. N., 255. *

Veronese. Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti ed infinitesimi attuali.
M. A. 47, 421.

1897. **H. Burkhardt**. Functionentheoretische Vorlesungen.

Killing. Ueber transfinite Zahlen.
M. A. 48, 425. *

Osgood. Non-uniform convergence and the integration of series term by term.
Am. J. 19, 155.

Stolz. Zwei Grenzwerthe, von welchen das obere Integral ein besonderer Fall ist.
W. B. 106, 2^a, 453.

1898. **Borel**. Leçons sur la théorie des fonctions.

В. Л. Некрасовъ. Къ теорiи функцiй дѣйствительной перемѣнной.
Дневникъ X Съѣзда Естествоисп. и Врачей, 427.

1899. **Baire**. Sur la théorie des ensembles.
C. R. 129, 946. *

Sur les fonctions de variables réelles.
A. d. M. (3) 3, 1.

Borel. A propos de l'infini nouveau.
Revue Philosophique, 382.

Pringsheim. Zur Theorie der Doppel-Integrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes.
M. B. 29, 39.

1899. **Schoenflies.** Mengenlehre.
Encyklopädie d. Math. W. 1, 184.
Ueber die Verteilung der Stetigkeits- und Unstetigkeitspunkte bei punktweise unstetigen Functionen einer reellen Variabeln.
G. N., 187. *
Ueber einen Satz der Analysis Situs.
G. N., 282. *

1900. **Baire.** Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues.
Bulletin de la Soc. Math. de France, 28, 173. *
Osgood. Zweite Note über analytische Functionen mehrerer Veränderlichen.
M. A. 53, 461. *
Schoenflies. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.
J. d. M. V. 8.
de Stefano. Sopra alcuni punti della teoria delle funzioni di variabili reali.
G. d. M. 38, 178.

1901. **Bernstein.** Untersuchungen aus der Mengenlehre.
[M. A. 61, 117. 1905.].
Hausdorff. Ueber eine gewisse Art geordneter Mengen.
L. B. 53, 460. *
Schoenflies. Transfinite Zahlen, das Axiom des Archimedes und die projective Geometrie.
J. d. M. V. 5, 75. *
Schröder. Über G. Cantor'sche Sätze.
J. d. M. V. 5, 81. *

1902 **Hardy.** A theorem concerning the infinite cardinal numbers.
Quat. J. 35, 87. °
The cardinal number of a closed set of points.
M. of M. 33, 67. *
Jourdain. A general theorem on the transfinite cardinal numbers of aggregates of functions.
Ph. M. (6) 6, 323. *
The cardinal number of the aggregate of integrable functions.
M. of M. 33, 78. *
Lebesgue. Intégrale, longueur, aire.
A. d. M. (3) 7, 231.

1902. **Levi**. Intorno alla teoria degli aggregati.
R. Ist. L. (2) 35, 863.

Whitehead. On cardinal numbers.
Am. J. 24, 367. *

W. H. Young. On the analysis of linear sets of points.
Quat. J. 35, 102.

On the density of linear sets of points.
P. L. M. S. 34, 285.

Über die Einteilung der unstetigen Funktionen und die Verteilung ihrer Stetigkeitspunkte.
W. B. 112, 1307.

Zermelo. Ueber die Addition transfiniter Cardinalzahlen.
G. N. 1901, 34.

1903. **Borel**. Contribution à l'analyse arithmétique du continu.
J. d. M. (5) 9, 329.

Sur l'approximation des nombres par des nombres rationnels.
C. R. 136, 1054.

Un théorème sur les ensembles mesurables.
C. R. 137, 966.

E. Lindelöf. Sur quelques points de la théorie des ensembles.
C. R. 137, 697.

W. H. Young. A note on the condition of integrability of a function of a real variable.
Quat. J. 35, 189 o

A note on unclosed sets of points defined as the limit of a sequence of closed sets of points.
P. L. M. S. 35, 283.

On closed sets of points defined as the limit of a sequence of closed sets of points.
ib., 35, 269.

Overlapping intervals.
ib., 35, 384.

Sets of intervals on the straight line.
ib., 35, 245.

Zur Lehre der nicht abgeschlossenen Punktmengen.
L. B. 287.

1903-1906. **Schoenflies**. Beiträge zur Theorie der Punktmenge.
M. A. 58, 195; 59, 129; 62, 286. *

1904. **Bernstein**. Bemerkung zur Mengenlehre.
G. N., 557. *

1904. **Hausdorff**. Der Potenzbegriff in der Mengenlehre.
J. d. M. V. 13, 569. *

Hobson. On inner limiting sets of points in a linear interval.
P. L. M. S. (2) 2, 316.

Jourdain. On the cardinal numbers of number classes in general.
Ph. M. (6) 7, 294. *

On the transfinite cardinal numbers of well-ordered aggregates.
ib. (6) 7, 61. *

On transfinite cardinal numbers of the exponential form.
ib. (6) 9, 42. *

Lebesgue. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.

Schoenflies. Ueber den Beweis eines Haupttheorems aus der Theorie der Punktmengen.
G. N. 1903, 21.

Veblen. The Heine-Borel theorem.
B. A. M. S. (2) 10, 436.

W. H. Young. On an extension of the Heine Borel theorem.
M. of M. 33, 129.

On closed sets of points and Cantor's numbers.
P. L. M. S. (2) 1, 230.

On sequences of sets of intervals containing a given set of points.
ib. (2) 1, 262.

Open sets and the theory of content.
ib. (2) 2, 16.

The tile theorem.
ib. (2) 2, 67.

The upper and lower integration.
ib. (2) 2, 52.

Zermelo. Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann.
M. A. 59, 514. *

Zoretti. Sur les ensembles parfaits et les fonctions uniformes.
C. R. 138, 674. *

1905. **Baire**. Leçons sur les fonctions discontinues. *

Bernstein. Die Theorie der reellen Zahlen.
J. d. M. V. 14, 447.

Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen.
M. A. 60, 187. *

1905. **Bernstein**. Zum Kontinuumproblem.
ib. 60, 463. *
Zur Mengenlehre.
J. d. M. V. 14, 198. *
Borel. Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes. o
Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles.
M. A. 60, 194. *
Sur une propriété des ensembles fermés.
C. R. 140, 298.
Faber. Über die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen.
M. A. 60, 196. *
Hobson. On the failure of convergence of Fourier's series.
P. L. M. S. (2) 3, 48. o
On the general theory of transfinite numbers and order types.
ib. (2) 3, 170. o
Jourdain. On a proof that every aggregate can be well-ordered.
M. A. 60, 465. *
On the general theory of functions.
Cr. J. 128, 169. *
The definition of a series similarly ordered to the series of all ordinal numbers.
M. of M. 35, 56.
Kasner. Galileo and the modern concept of infinity.
B. A. M. S. (2) 11, 499.
König. Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem.
M. A. 61, 156.
Zum Kontinuum-Problem.
ib. 60, 177.
Riesz. Sur les ensembles discontinus.
C. R. 141, 650. *
Sur un théorème de Borel.
ib. 140, 224.
Über mehrfache Ordnungstypen.
M. A. 61, 406. *
Schoenflies. Über wohlgeordnete Mengen.
ib. 60, 181. *
Vitali. Sulle funzioni ad integrale nullo.
R. P. 20, 136.

1905. **W. H. Young**. Linear content of a plane set of points.
P. L. M. S (2) 3, 461. *○
On a perfect plane set.
M. of M. 34, 160. *
Ordinary inner limiting set in the plan or higher space.
P. L. M. S. (2) 3, 371. *○

1906. **Dixon**. On „well-ordered“ aggregates.
ib. (2) 4, 18. *○

Hardy. The continuum and the second number class.
ib. (2) 4, 10. ○

Hobson. On the arithmetic continuum.
ib. (2) 4, 21. ○

Jourdain. The developpement of the theory ot transfinite numbers.
Archiv der Mathematik, (3) 10. *○

Korselt. Paradoxien der Mengenlehre.
J. d. M. V. 15, 215. *
Über Logik und Mengenlehre.
ib. 15, 266. *

Lennes. Note on the Heine-Borel theorem.
B. A. M. S. 12, 395.

Russel. On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types.
P. L. M. S. (2) 4, 29. ○

Schoenflies. Die Beziehungen der Mengenlehre zur Geometrie und Functionentheorie.
J. d. M. V. 15, 557. *
Ueber die logischen Paradoxien der Mengenlehre.
ib. 15, 19. *

Weber. Elementare Mengenlehre.
ib. 15, 173.

1907. **Hessenberg**. Potenzen transfiniter Ordnungszahlen.
ib. 16, 130. ○