

ИЗВѢСТІЯ
Томскаго Технологическаго Института
Императора Николая II.
т. 7. 1907. № 4.

Н. В. Некрасовъ.

КЪ ТЕОРИИ ФЕРМЪ СЪ ЖЕСТКИМИ СОЕДИНЕНІЯМИ ВЪ УЗЛАХЪ.

1. Опытъ сравнительнаго анализа методовъ разчета. I-VIII, 1-182.

Сглавлненіе.

Литература.
Предисловіе.

Стр.

Глава I. Изслѣдованіе деформациі жесткой фермы.

1. Условія деформациі жесткой фермы	1
2. Общія формулы изгиба бруса съ задѣланными концами, подвергающагося сжатію.	
3. Работа деформациі сжатого и изгибаемаго бруса съ задѣланными концами	
4. Обобщеніе выведенныхъ формулъ для случая совмѣстнаго изгиба и растяженія	
5. Изслѣдованіе функции φ и ψ	17
6. Работа деформациі жесткой фермы и производныя отъ нея. Необходимыя упрощенія.	22

Глава II. Систематизація методовъ разсчета напряженій отъ жесткости узловъ.

7. Группировка существующихъ методовъ	26
8. Обобщенный методъ	26
9. Группа способовъ инж. Передерія	33
10. Способы Мандерла, Мора и т. п.	37
11. Способы Энгессера, Мюллеръ-Бреслау и др.	40

Глава III. Примѣры сравнительныхъ подсчетовъ напряженій жесткости.

12. О выборѣ примѣровъ фермъ для сравнительныхъ подсчетовъ . . .	41
13. Примѣръ I. Двухрѣшетчатая ферма	42
14. Выводъ основныхъ уравненій для вычисленія моментовъ отъ жесткости узловъ	49
15. Вычисленіе коэффициентовъ уравненій	55
16. Сокращенный способъ рѣшенія уравненій	64
17. Примѣръ II. Двухраскосная ферма	81
18. Примѣръ III. Ферма съ треугольной рѣшеткой и дополнительными стойками	100
19. Примѣръ IV. Ферма примѣра III съ уменьшенной вдвое жесткостью поясовъ	109
20. Вліяніе сдѣланныхъ нами допущеній (при обоснованіи обобщеннаго способа)	112

21. Примѣръ V. Ферма съ треугольной рѣшеткой и дополнительными стойками (Мостъ Московско-Виндаво-Рыбинской ж. д.) . 117

Глава IV. Систематизація данныхъ, полученныхъ сравнительными подсчетами.

22. О способѣ сравненія полученныхъ данныхъ 142
 23. Сравнительная точность различныхъ способовъ расчета 153
 24. Работы инж. Патона и Передерія 160

Глава V. Анализъ діаграммъ, построенныхъ инж. Патонемъ.

25. Зависимость между моментами отъ жесткости узловъ и площадями сѣченій отдѣльныхъ элементовъ 164
 26. Колебанія величины коэффициента $\frac{N}{n}$ 168
 27. Діаграммы инж. Патона 173
 28. Критическій обзоръ позднѣйшихъ работъ 178

Литература *).

- Е. О. Патонъ*: Расчетъ сквозныхъ фермъ съ жесткими узлами. Москва 1901 г.
- Е. Ю. Пистолькорсъ*: Расчетъ фермъ съ жесткими узлами на основаніи принципа работы связей. С.-Петербургъ 1903 г.
- Г. П. Передерій*: Вліяніе жесткости узловъ металлическихъ фермъ на усилія и напряженія въ ихъ элементахъ. „Инженерное дѣло“ 1904 г. кн. 1 и 2.
- А. Фанъ-деръ-Флитъ*: Изгибъ сжатыхъ и вытянутыхъ балокъ съ задѣланными концами. С.-Петербургъ. 1904 г.
- Winkler*: Theorie der Brücken II Heft. 1881.
- Ritter. und Tetmajer*: Bericht über die Mönchensteiner Brückenkatastrophe. Schweiz. Bauzeit. 1891.
- Th. Oppoltzer*: Lehrbuch der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, II Band.
- Е. О. Патонъ*: Такъ называемыя силы пружинности. „Извѣстія Собранія Инженеровъ Путей Сообщенія“. 1905 г.
- Е. В. Зотиковъ*: Двухраскосныя фермы и жесткіе узлы. „Журналъ Минист. Пут. Сообщ.“ 1905 г. кн. 9-ая.
- Е. О. Патонъ*: Къ вопросу о двухраскосныхъ фермахъ. „Инженеръ“ 1906 г. №№ 9—10, 1907 г. №№ 2—3.
- Г. В. Передерій*: Ученые эквилибристы. „Инженерное Дѣло“. 1905 г. № 3.

*) Въ перечень вошли тѣ лишь статьи и монографіи, на которыя дѣлаются ссылки въ настоящей работѣ.

За послѣдніе годы русская техническая литература обогатилась нѣсколькими весьма интересными изслѣдованіями по вопросу о дополнительныхъ напряженіяхъ въ фермахъ съ жесткими узловыми соединеніями. Толчокъ въ этомъ направленіи былъ данъ появленіемъ книги инж. Патона: „Расчетъ сквозныхъ фермъ съ жесткими узлами“ *) Москва, 1901 г. Въ этой книгѣ авторъ собралъ и лично произвелъ значительное количество подсчетовъ напряженій отъ жесткости узловыхъ соединеній и пришелъ къ нѣкоторымъ выводамъ, важность которыхъ далеко выходила за границы чисто теоретическаго изслѣдованія. Особенный интересъ возбудилъ подсчетъ напряженій жесткости для двухраскосной фермы, гдѣ инж. Патонъ, примѣняя способъ Мора, пришелъ къ очень тревожнымъ выводамъ относительно прочности фермъ подобной системы.

Работой инж. Патона была навѣяна и появившаяся въ 1903 г. статья инж. Е. Пистолькорса, которая впрочемъ, занималась главнымъ образомъ пространственными фермами.

Наконецъ въ 1904 г. въ журналѣ „Инженерное Дѣло“ помѣщена статья инж. Передерія, который при разсмотрѣніи способа Мора, примѣннаго инж. Патономъ, нашелъ его неточнымъ и дающимъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ, между прочимъ и для упомянутой двухраскосной фермы, весьма преувеличенные результаты. Инж. Передерій предложилъ въ свою очередь новый способъ расчета, основанный на другихъ допущеніяхъ, чѣмъ способъ Мора, примѣнилъ его къ нѣкоторымъ фермамъ и, дѣйствительно, получилъ весьма значительное уменьшеніе напряженій отъ жесткости узловъ сравнительно съ данными инж. Патона.

Однако и способъ инж. Передерія неполнѣ точенъ; поэтому, хотя и нельзя было отрицать, что въ примѣненіи къ упомянутой двухраскосной фермѣ онъ долженъ былъ дать гораздо болѣе точные результаты, чѣмъ способъ Мора,—тѣмъ не менѣе для другихъ случаевъ являлись сомнѣнія относительно границъ примѣнимости его.

Предлагаемая статья имѣетъ цѣлью выяснить, насколько возможно, степень точности упомянутыхъ методовъ и дать нѣкоторыя указанія для выбора того или другого способа расчета въ отдѣльныхъ случаяхъ.

Ходъ изслѣдованія будетъ слѣдующій: прежде всего мы постараемся выработать возможно точный и притомъ выполнимый практи-

*) На нѣмецкомъ языкѣ помѣщена въ сокращенномъ видѣ въ „Zeitschrift d. Arch. u. Ing. Vereins für Hannover“ за 1903 годъ.

чески способъ разсчета, исходя изъ выраженія работы деформациі для бруса, находящагося въ условіяхъ элемента жесткой фермы *) и примѣняя теорему о наименьшей работѣ деформациі ко всей фермѣ съ жесткими соединеніями въ узлахъ.

Далѣе мы получимъ прежніе способы разсчета изъ обобщеннаго и покажемъ, что всѣ онѣ могутъ быть раздѣлены на три группы.

Чтобы составить понятіе о степени точности способовъ, произведемъ рядъ сравнительныхъ подсчетовъ для различныхъ фермъ по нѣсколькимъ способамъ для каждой и сдѣлаемъ соотвѣтствующіе выводы.

Въ заключеніе займемся нѣкоторыми положеніями инж. Патона и постараемся ихъ освѣтить при помощи полученныхъ данныхъ.

Въ нашихъ изслѣдованіяхъ кромѣ тѣхъ допущеній, которыя оговорены особо въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, постоянно принимаются безъ оговорокъ слѣдующія предположенія объ условіяхъ конструкціи и работы разсматриваемыхъ фермъ:

- а) Коэффициентъ упругости матеріала фермъ сохраняетъ постоянную величину, а напряженія не превосходятъ предѣла упругости;
- в) дефекты сборки фермъ не принимаются въ соображеніе и центрировка элементовъ предполагается совершенной;
- с) мѣстныя усиленія сѣченій элементовъ узловыми и стыковыми накладками игнорируются;
- д) температура принимается постоянной и равной температурѣ при сборкѣ фермы;
- е) заклепочныя соединенія въ узлахъ считаются вполне жесткими.

Въ существенныхъ чертахъ предлагаемая работа была закончена весной 1905-го года и осенью того-же года представлена въ инженерно-строительное отдѣленіе Томскаго Технологическаго Института. По независящимъ отъ автора обстоятельствамъ печатаніе статьи сильно задержалось и она появляется въ свѣтъ лишь въ 1907 году.

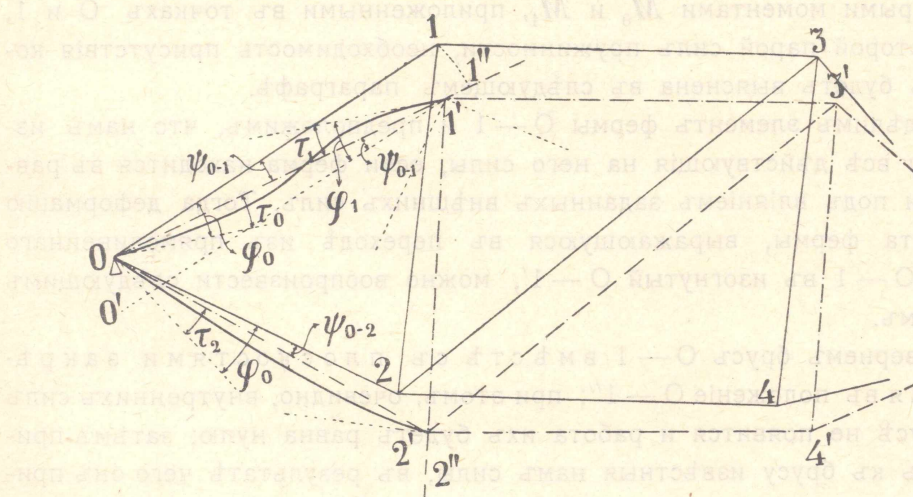
Появившіяся за этотъ промежутокъ времени работы по тому-же вопросу, почти, впрочемъ, не затрагивающія выводовъ автора, отмѣчены въ § 28-омъ.

Авторъ считаетъ своимъ долгомъ принести глубокую благодарность гг. профессорамъ Л. О. Николаи и В. Л. Кирпичеву за цѣнные отзывы о настоящей работѣ, данные ими по просьбѣ инж. стр. отд. Т. Т. И. Нѣкоторыя ихъ указанія были приняты авторомъ во вниманіе при печатаніи работы.

*) При изслѣдованіи элементовъ деформациі такого бруса (§ 1) весьма полезныя указанія были почерпнуты авторомъ изъ диссертациі А. А. Фанъ-дербъ-Флита (см. перечень литературы).

1. Условія деформаціи жесткой фермы.

Разсмотримъ условія деформаціи фермы $O12\dots$ съ жесткими заклепочными соединеніями въ узлахъ. Пусть подъ дѣйствіемъ нѣкоторой внѣшней нагрузки ферма деформируется и въ то время, какъ точка O (опорная) остается на мѣстѣ, узловые точки $1, 2\dots$ занимаютъ новыя положенія $1', 2'\dots$ (черт. 1). При этомъ новыя направ-



Черт. 1.

вленія прямолинейныхъ осей элементовъ, т. е. хордъ, составляютъ съ основными нѣкоторые углы $\psi_{0-1}, \psi_{0-2}\dots$ (всѣ углы будемъ считать положительными въ направленіи по часовой стрѣлкѣ отъ положенія, соотвѣтствующей основной линіи или ея параллели).

Между тѣмъ основное свойство жесткой фермы состоитъ въ томъ, что углы между элементами сохраняются постоянными или, что тоже самое, всѣ концы элементовъ, принадлежащіе одному узлу, поворачиваются на одинъ и тотъ же уголъ. Слѣдствіемъ этого явится изгибъ элементовъ и постоянство угловъ сохранится лишь между касательными къ осямъ изогнутыхъ элементовъ въ узловыхъ точкахъ.

Назовемъ уголъ вращенія концовъ элементовъ, сходящихся въ узлъ О (уголъ вращенія узла О), чрезъ φ_0 , въ узлъ 1 чрезъ φ_1 и т. д.

Изъ чертежа видно, что касательныя къ изогнутой оси элемента О—1 будутъ въ точкахъ О и 1' отклоняться отъ хорды элемента О—1' соотвѣтственно на углы τ_0 и τ_1 .

Проводя чрезъ точку 1' прямую, параллельную О—1 и припоминая правило знаковъ, можемъ написать

$$\tau_0 = \varphi_0 - \psi_{0-1}$$

$$\tau_1 = \varphi_1 - \psi_{0-1}.$$

Рядъ подобныхъ равенствъ можно написать и для прочихъ элементовъ.

Вслѣдствіе рассмотрѣнной деформации какой либо элементъ, напр. О—1, не будетъ подвергаться лишь дѣйствію продольнаго усилія, какъ это имѣетъ мѣсто въ шарнирной фермѣ, но будетъ еще изгибаемъ нѣкоторыми моментами M_0 и M_1 , приложенными въ точкахъ О и 1, и нѣкоторой парой силъ пружинности, необходимость присутствія которыхъ будетъ выяснена въ слѣдующемъ параграфѣ.

Выдѣлимъ элементъ фермы О—1 и предположимъ, что намъ извѣстны всѣ дѣйствующія на него силы, если ферма находится въ равновѣсіи подъ вліяніемъ заданныхъ внѣшнихъ силъ. Тогда деформацию элемента фермы, выражающуюся въ переходѣ изъ прямолинейнаго бруса О—1 въ изогнутый О—1', можно воспроизвести слѣдующимъ образомъ.

Повернемъ брусъ О—1 вмѣстѣ съ плоскостями закрѣпленія въ положеніе О—1''; при этомъ, очевидно, внутреннихъ силъ въ брусѣ не появится и работа ихъ будетъ равна нулю; затѣмъ приложимъ къ брусу извѣстныя намъ силы, въ результатъ чего онъ приметъ деформированное положеніе О—1'; работа деформации внутреннихъ силъ при этомъ будетъ равна той работѣ, которую элементъ поглощалъ при деформации всей фермы.

Подобную же операцію можно произвести съ элементомъ 1—2, перемѣстивъ его въ положеніе 1'—2'', закрѣпивъ точку 1' и приложивъ извѣстную систему силъ.

Вообще участіе элемента жесткой фермы въ ея деформации можно раздѣлить на двѣ части: перемѣщеніе геометрической оси элемента (причемъ работа внутреннихъ силъ равна нулю) и собственно деформацию его.

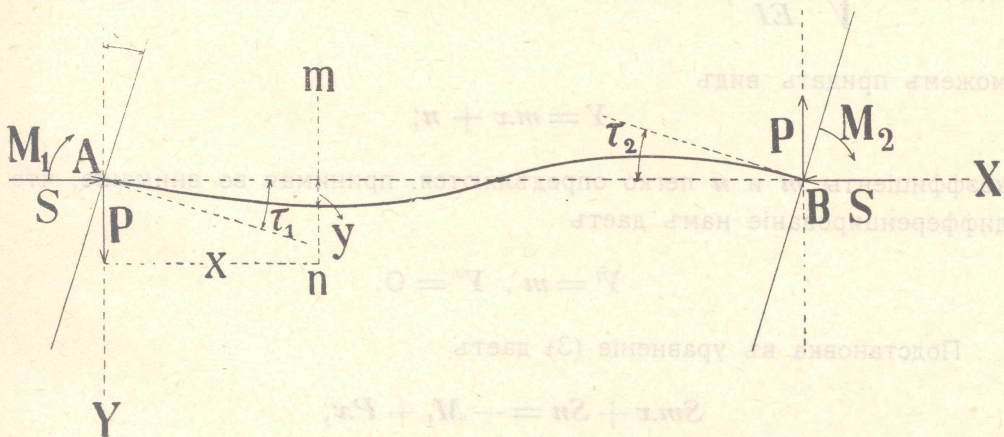
2. Общія формулы изгиба бруса съ задѣланными концами, подвергающагося сжатию.

Изслѣдуемъ деформацию и напряженное состояніе прямого бруса съ задѣланными концами, подвергающагося дѣйствию сжимающей нагрузки по оси и изгибаемаго нѣкоторыми моментами M_1 и M_2 , приложенными къ концевымъ сѣченіямъ бруса.

Опредѣлимъ уравненіе упругой линіи бруса, найдемъ выраженіе изгибающаго момента въ каждомъ сѣченіи, изслѣдуемъ зависимость между углами поворота сѣченій задѣлки τ_1 , τ_2 , моментами M_1 , M_2 и силой S и, наконецъ, напишемъ выраженіе полной работы деформации для разсматриваемаго бруса.

Будемъ попережнему считать положительными моменты, вращающіе по часовой стрѣлкѣ и соотвѣтственно съ этимъ положительные углы τ отсчитывать по часовой стрѣлкѣ отъ хорды до положенія касательной къ оси бруса послѣ деформации.

Начало координатъ установимъ въ точкѣ A и ось Y -овъ направимъ вертикально внизъ (черт. 2). Кромѣ силы S и моментовъ M_1 и M_2



Черт. 2.

для равновѣсія бруса необходимо приложить къ нему еще пару силъ $+P$ и $-P$, какъ это очевидно изъ уравненія равновѣсія $\Sigma M = 0$.

$$M_1 + M_2 - Pl = 0,$$

откуда

$$(1) \quad P = \frac{M_1 + M_2}{l}.$$

Силы P будемъ считать положительными, если онѣ направлены внизъ.

Изгибающій моментъ для какого-нибудь сѣченія бруса mn въ разстояніи x отъ лѣвой опоры напишется

$$(2) \quad M_x = M_1 - Px + Sy.$$

Уравненіе упругой линіи

$$EIy'' = -(M_1 - Px + Sy)$$

или

$$(3) \quad EIy'' + Sy = -M_1 + Px.$$

Это дифференціальное уравненіе второго порядка легко интегрируется слѣдующимъ образомъ

$$(4) \quad y = u + Y.$$

Здѣсь u есть общій интеграль уравненія:

$$u = C \cos ax + D \sin ax,$$

гдѣ $a = \sqrt{\frac{S}{EI}}$, а Y одно изъ частныхъ рѣшеній, которому мы

можемъ придать видъ

$$Y = mx + n;$$

коэффициенты m и n легко опредѣляются, принимая во вниманіе, что дифференцированіе намъ даетъ

$$Y' = m, \quad Y'' = 0.$$

Подстановка въ уравненіе (3) даетъ

$$Smx + Sn = -M_1 + Px,$$

а сравненіе коэффициентовъ опредѣляетъ

$$m = \frac{P}{S},$$

$$n = -\frac{M_1}{S}.$$

Такимъ образомъ общій интегралъ уравненія (3) получимъ въ слѣдующемъ видѣ

$$y = C \cos ax + D \sin ax + \frac{P}{S} x - \frac{M_1}{S}, \quad (5)$$

гдѣ $a = \sqrt{\frac{S}{EI}}$.

Произвольныя постоянныя C и D можемъ найти изъ условій, что

$$1) \text{ при } x = 0 \quad y = 0,$$

$$2) \text{ при } x = l \quad y = 0.$$

Первое изъ этихъ условій даетъ

$$0 = C - \frac{M_1}{S},$$

откуда

$$C = \frac{M_1}{S},$$

а изъ второго получаемъ

$$0 = C \cos al + D \sin al + \frac{P}{S} l - \frac{M_1}{S},$$

$$0 = \frac{M_1}{S} (\cos al - 1) + D \sin al + \frac{P}{S} l,$$

$$D = \frac{M_1}{S \sin al} (1 - \cos al) - \frac{Pl}{S \sin al}.$$

Теперь получаемъ уравненіе упругой линіи

$$y = \frac{M_1}{S} \cos ax + \left[\frac{M_1}{S \sin al} (1 - \cos al) - \frac{Pl}{S \sin al} \right] \sin ax + \frac{P}{S} x - \frac{M_1}{S},$$

или, замѣняя P его выраженіемъ изъ уравненія (1), будемъ имѣть послѣ преобразованій въ окончательномъ видѣ

$$y = \frac{M_1}{S} \cos ax + \left[-\frac{M_1 \cos al}{S \sin al} - \frac{M_2}{S \sin al} \right] \sin ax + \frac{M_1 + M_2}{Sl} x - \frac{M_1}{S}. \quad (6)$$

Для опредѣленія угловъ τ_1 и τ_2 въ функціи отъ M_1 , M_2 и S замѣчаемъ, что

$$1) \text{ при } x = 0 \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 = \text{Tg } \tau_1,$$

$$2) \text{ при } x = l \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_l = \text{Tg } \tau_2,$$

или по малости угловъ τ_1 и τ_2

$$\tau_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_0,$$

$$\tau_2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_l.$$

Дифференцируемъ y по x :

$$y' = -\frac{aM_1}{S} \text{Sin} ax + a \left[\frac{-M_1 \text{Cos} al}{S \text{Sin} al} - \frac{M_2}{S \text{Sin} al} \right] \text{Cos} ax + \frac{M_1 + M_2}{Sl},$$

Отсюда получаемъ соотвѣтственно

$$\tau_1 = -\frac{aM_1 \text{Cos} al}{S \text{Sin} al} - \frac{aM_2}{S \text{Sin} al} + \frac{M_1 + M_2}{Sl},$$

$$\tau_2 = -\frac{aM_1 \text{Sin} al}{S} - \frac{aM_1 \text{Cos}^2 al}{S \text{Sin} al} - \frac{aM_2 \text{Cos} al}{S \text{Sin} al} + \frac{M_1 + M_2}{Sl},$$

или послѣ преобразованій

$$(7) \quad \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{Sl} \left[M_1 \left(1 - \frac{al}{\text{Tg} al} \right) - M_2 \left(\frac{al}{\text{Sin} al} - 1 \right) \right], \\ \tau_2 &= \frac{1}{Sl} \left[-M_1 \left(\frac{al}{\text{Sin} al} - 1 \right) + M_2 \left(1 - \frac{al}{\text{Tg} al} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если въ выраженіяхъ (7) положить $S = 0$, т. е. игнорировать вліяніе продольной силы на деформацию бруса, то эти выраженія получаютъ неопредѣленный видъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ

и $a = \sqrt{\frac{S}{EI}}$ дѣлается равнымъ нулю.

Для выясненія истиннаго значенія выраженій (7) разложимъ въ ряды по степенямъ S входящія въ нихъ функціи

$$\left(1 - \frac{al}{\text{Tg} al} \right) \text{ и } \left(\frac{al}{\text{Sin} al} - 1 \right).$$

Припомнимъ разложенія

$$\text{Sin} al = al - \frac{a^3 l^3}{3!} + \frac{a^5 l^5}{5!} - \dots,$$

$$\text{Tg} al = al + \frac{2}{3!} a^3 l^3 + \frac{2^4}{5!} a^5 l^5 + \frac{2^4 \cdot 17}{7!} a^7 l^7 + \dots,$$

мы легко напишемъ слѣдующія новыя разложенія:

$$\frac{al}{\text{Tg} al} = 1 - \frac{a^2 l^2}{3} - \frac{a^4 l^4}{45} - \frac{2a^6 l^6}{945} - \dots,$$

$$\frac{al}{\text{Sin} al} = 1 + \frac{a^2 l^2}{6} + \frac{7}{360} a^4 l^4 + \frac{31}{15120} a^6 l^6 + \dots$$

Далѣ послѣ сокращеній и преобразованій

$$\left(1 - \frac{al}{\text{Tg} al}\right) = \frac{a^2 l^2}{3} \left(1 + \frac{a^2 l^2}{15} + \frac{2a^4 l^4}{315} + \dots\right),$$

$$\left(\frac{al}{\text{Sin} al} - 1\right) = \frac{a^2 l^2}{6} \left(1 + \frac{7}{60} a^2 l^2 + \frac{31}{2520} a^4 l^4 + \dots\right).$$

Замѣняя a^2 на $\frac{S}{EI}$ и подставляя въ выраженія (7), имѣемъ

$$\begin{aligned} \tau_1 = \frac{l}{3EI} & \left[M_1 \left(1 + \frac{Sl^2}{15EI} + \frac{2S^2 l^4}{315 E^2 I^2} + \dots \right) \right. \\ & \left. - \frac{M_2}{2} \left(1 + \frac{7Sl^2}{60EI} + \frac{31S^2 l^4}{2520 E^2 I^2} + \dots \right) \right], \\ \tau_2 = \frac{l}{3EI} & \left[-\frac{M_1}{2} \left(1 + \frac{7Sl^2}{60EI} + \frac{31S^2 l^4}{2520 E^2 I^2} + \dots \right) \right. \\ & \left. + M_2 \left(1 + \frac{Sl^2}{15EI} + \frac{2S^2 l^4}{315 E^2 I^2} + \dots \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Если въ этихъ выраженіяхъ положимъ $S=0$, то получимъ извѣстную зависимость

$$\tau_1 = \frac{l}{3EI} \left(M_1 - \frac{M_2}{2} \right),$$

$$\tau_2 = \frac{l}{3EI} \left(M_2 - \frac{M_1}{2} \right).$$

Съ другой стороны изъ уравненій (7), рѣшая ихъ относительно M_1 и M_2 , легко получимъ эти послѣднія величины, какъ функціи τ_1 , τ_2 и S .

$$(9) \quad M_1 = \frac{EI}{l} \frac{\left[\tau_1 \left(1 - \frac{al}{\text{Tg}al} \right) + \tau_2 \left(\frac{al}{\text{Sin}al} - 1 \right) \right]}{\left(\frac{\text{Tg} \frac{al}{2}}{\left(\frac{al}{2} \right)} - 1 \right)},$$

$$M_2 = \frac{EI}{l} \frac{\left[\tau_2 \left(1 - \frac{al}{\text{Tg}al} \right) + \tau_1 \left(\frac{al}{\text{Sin}al} - 1 \right) \right]}{\left(\frac{\text{Tg} \frac{al}{2}}{\left(\frac{al}{2} \right)} - 1 \right)}.$$

Легко убѣдиться разложениемъ въ ряды, что выраженія (9) при подстановкѣ $S = 0$, приводятся къ извѣстнымъ формуламъ

$$M_1 = \frac{2EI}{l} (2\tau_1 + \tau_2),$$

$$M_2 = \frac{2EI}{l} (\tau_1 + 2\tau_2).$$

Изгибающій моментъ для сѣченія mn мы получимъ, подставивъ y по формулѣ (6) въ выраженіе (2). По уничтоженіи подобныхъ членовъ получаемъ

$$(10) \quad M_x = M_1 \text{Cos}ax - \frac{M_1 \text{Cos}al}{\text{Sin}al} \text{Sin}ax - M_2 \frac{\text{Sin}ax}{\text{Sin}al},$$

$$M_x = \frac{M_1 \text{Sin}a(l-x) - M_2 \text{Sin}ax}{\text{Sin}al}.$$

Вертикальная перерѣзывающая сила будетъ постоянна по всей длинѣ бруса и по величинѣ равна P .

$$(11) \quad V = P = \frac{M_1 + M_2}{l}.$$

3. Работа деформации сжатого и изгибаемого бруса съ задѣланными концами.

Опредѣливъ величины M_x и V , мы можемъ приступить къ составленію формулы полной работы деформации разсматриваемаго бруса. Выдѣлимъ двумя бесконечно-близкими, параллельными между собой и перпендикулярными къ оси бруса сѣченіями нѣкоторый элементъ $ABCD$ (черт. 3) и разсмотримъ работу, произведенную силами, дѣйствующими на его поверхности. Предположимъ, что одно изъ сѣченій закрѣплено неподвижно и изслѣдуемъ перемѣщенія другого сѣченія и напряженія, проявляющіяся въ немъ.

Подъ вліяніемъ дѣйствующихъ на него силъ сѣченіе бруса CD совершитъ слѣдующія перемѣщенія:

1) перемѣстится въ горизонтальномъ направленіи параллельно самому себѣ на величину $CC_1 = \Delta dx$;

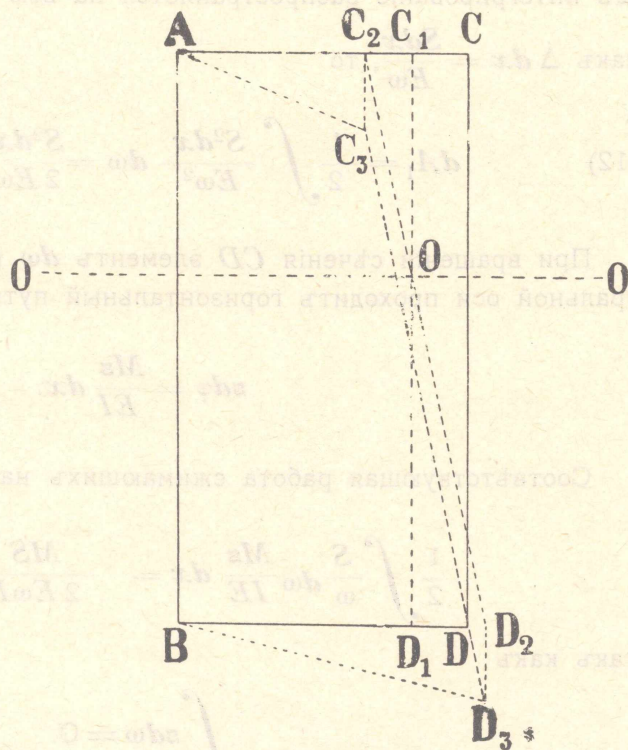
2) повернется около нейтральной оси на уголъ $C_2OC_1 = d\varphi$;

3) сдвинется въ вертикальномъ направленіи на величину $C_2C_3 = du$.

Соотвѣтственно будемъ имѣть троякаго рода напряженія, проявляющіяся въ плоскости сѣченія CD подъ вліяніемъ внѣшнихъ силъ:

1) сжимающія нормальныя напряженія, вызываемыя силою S и равныя

$$\sigma_1 = \frac{S}{\omega}$$



Черт. 3.

2) сжимающія и растягивающія нормальныя напряжения отъ изгиба, соотвѣтствующія изгибающему моменту M_X и выражающіяся формулой

$$\sigma_2 = -\frac{M_X z}{I},$$

3) сдвигающія напряжения, опредѣляемыя вертикальною силой V_X .

Разберемъ отдѣльно работу деформации, производимую каждой изъ этихъ группъ напряженій при перечисленныхъ выше деформацияхъ элемента бруса.

1) Сжимающія напряжения σ_1 производятъ при перемѣщеніи 1-омъ элементарную работу деформации

$$dA_1 = \frac{1}{2} \int \sigma_1 d\omega \Delta dx,$$

гдѣ интегрированіе распространяется на всю площадь сѣченія. Такъ

какъ $\Delta dx = \frac{S dx}{E\omega}$, то

$$(12) \quad dA_1 = \frac{1}{2} \int \frac{S^2 dx}{E\omega^2} d\omega = \frac{S^2 dx}{2 E\omega}$$

При вращеніи сѣченія CD элементъ $d\omega$ въ разстояніи z отъ нейтральной оси проходитъ горизонтальный путь

$$z d\varphi = \frac{Mz}{EI} dx.$$

Соотвѣтствующая работа сжимающихъ напряженій будетъ равна

$$\frac{1}{2} \int \frac{S}{\omega} d\omega \frac{Mz}{IE} dx = \frac{MS}{2 E\omega I} dx \int z d\omega = 0,$$

такъ какъ

$$\int z d\omega = 0.$$

При деформации сдвига пути, проходимые точками сѣченія перпендикулярны къ направленію сжимающихъ напряженій и слѣдовательно работа послѣднихъ равна нулю.

Такимъ образомъ вся работа сжимающихъ напряженій сводится къ величинѣ dA_1 .

2) Нормальныя напряженія изгиба произведутъ при деформациі сжатія работу, равную нулю. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ ихъ работа равна

$$\int \frac{Ms}{I} d\omega \Delta dx = \frac{1}{2} \int \frac{Ms}{I} d\omega \frac{Sdx}{E\omega} = \frac{MSdx}{2E\omega I} \int s d\omega = 0$$

Работа тѣхъ же напряженій при вращеніи сѣченія CD выразится слѣдующимъ образомъ:

$$dA_2 = \frac{1}{2} \int \frac{Ms}{I} d\omega \cdot \frac{Ms}{EI} dx = \frac{1}{2} \frac{M^2 dx}{EI^2} \int s^2 d\omega,$$

или, такъ какъ

$$\int s^2 d\omega = I,$$

$$dA_2 = \frac{M^2 dx}{2EI}. \quad (13)$$

Наконецъ при деформациі сдвига нормальныя напряженія не произведутъ работы по той же причинѣ, что и сжимающія.

3) Переходя къ напряженію сдвигающимъ, мы прежде всего замѣчаемъ, что при деформацияхъ перваго и втораго вида названныя напряженія не производятъ работы, такъ какъ перемѣщенія точекъ сѣченія нормальны къ направленіямъ напряженій.

Что касается деформациі сдвига, то въ этомъ случаѣ элементарная работа сдвигающихъ напряженій опредѣлится

$$dA_3 = \frac{1}{2} V du,$$

или, принимая во вниманіе, что

$$du = K \frac{V dx}{G\omega},$$

(гдѣ K — нѣкоторый постоянный для даннаго сѣченія коэффициентъ, а

$G = 0,4 E$), получимъ

$$dA_3 = K \frac{V^2 dx}{0,8 E\omega}. \quad (14)$$

Складывая полученные выражения dA_1 , dA_2 и dA_3 , определяемъ элементарную работу деформации элемента бруса длиной dx

$$dA = \frac{S^2 dx}{2E\omega} + \frac{M^2 dx}{2EI} + K \frac{V^2 dx}{0,8 E\omega}.$$

Интегрируя это выражение для всего бруса, получимъ полную работу деформации бруса, подвергающагося одновременно сжатію и изгибу, въ слѣдующемъ видѣ:

$$(15) \quad A = \int_0^l dA = \int_0^l \frac{S^2 dx}{2E\omega} + \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_0^l K \frac{V^2 dx}{0,8 E\omega}.$$

Приступая къ вычисленію опредѣленныхъ интеграловъ выражения (15), мы будемъ считать величины ω , I , K постоянными по всей длинѣ бруса, какъ это обычно имѣетъ мѣсто въ элементахъ мостовыхъ фермъ.

Поэтому перепишемъ выражение (15) въ формѣ

$$A = \frac{S^2}{2E\omega} \int_0^l dx + \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dx + \frac{K}{0,8 E\omega} \int_0^l V^2 dx.$$

Первый изъ интеграловъ, очевидно, даетъ

$$(16) \quad A = \frac{S^2 l}{2 E\omega}.$$

Для опредѣленія второго мы должны подставить величину M изъ формулы (10):

$$A_2 = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left[\frac{M_1 \text{Sina}(l-x) - M_2 \text{Sin } ax}{\text{Sin } al} \right] dx.$$

Раздѣляя на три интеграла, имѣемъ

$$(17) \quad A_2 = \frac{1}{2EI \text{Sin}^2 al} \left\{ \int_0^l M_1^2 \text{Sin}^2 a(l-x) dx + \int_0^l M_2^2 \text{Sin}^2 ax dx \right. \\ \left. - \int_0^l 2 M_1 M_2 \text{Sina}(l-x) \text{Sin } ax dx \right\}.$$

Но, производя интегрирование, имѣемъ

$$\int_0^l \sin^2 ax dx = \left| \frac{x}{2} - \frac{\sin ax \cos ax}{2a} \right|_0^l = \left[\frac{l}{2} - \frac{\sin al \cos al}{2a} \right],$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin^2 a(l-x) dx &= \left| \frac{x}{2} + \frac{\sin a(l-x) \cos a(l-x)}{2a} \right|_0^l \\ &= \left[\frac{l}{2} - \frac{\sin al \cos al}{2a} \right], \end{aligned}$$

$$\int_0^l \sin a(l-x) \sin ax dx = \left| \sin al \frac{\sin^2 ax}{2a} \right.$$

$$\left. - \cos al \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin ax \cos ax}{2a} \right) \right|_0^l = \left[\frac{\sin^3 al}{2a} \right.$$

$$\left. - \cos al \left(\frac{l}{2} - \frac{\sin al \cos al}{2a} \right) \right] = \left[\frac{\sin al}{2a} - \frac{l \cos al}{2} \right].$$

Вводя найденныя выраженія въ формулу (17), имѣемъ

$$\begin{aligned} A_2 = \frac{1}{2EI} & \left\{ \frac{M_1^2}{4a \sin^2 al} (2al - \sin 2al) + \frac{M_2^2}{4a \sin^2 al} (2al \right. \\ & \left. - \sin 2al) - \frac{M_1 M_2}{a \sin^2 al} (\sin al - al \cos al) \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Что касается третьяго интеграла формулы (15), то, замѣчая, что

$$V = \frac{M_1 + M_2}{l} = \text{Const.},$$

мы легко получимъ

$$A_3 = K \frac{(M_1 + M_2)^2}{0,8 E \omega l}. \quad (19)$$

Соединяя формулы (16), (18) и (19), имѣемъ окончательное выражение работы деформации бруса

$$(20) \quad A = \frac{S^2 l}{2E\omega} + \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{(M_1^2 + M_2^2)}{4a \sin^2 al} (2al - \sin 2al) - \frac{M_1 M_2}{a \sin^2 al} (\sin al - al \cos al) \right\} + K \frac{(M_1 + M_2)^2}{0,8 E\omega l}.$$

Легко видѣть, что въ послѣдней формулѣ первый и послѣдній члены не мѣняются отъ того, принято ли во вниманіе вліяніе силы S на деформацию бруса при изгибѣ, или нѣтъ. Для того, чтобы уяснить себѣ, насколько вліяетъ принятіе во вниманіе силы S на второй членъ выраженія (20), воспользуемся уже примѣненнымъ нами выше методамъ разложенія функцій въ ряды по степенямъ S .

При помощи извѣстныхъ разложеній $\sin x$ и $\cos x$ очень легко напишемъ и разложенія функцій, входящихъ въ выраженіе (20).

Такъ получимъ

$$\begin{aligned} \sin^2 al &= \frac{1 - \cos 2al}{2} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} (2al)^2 + \frac{1}{4!} (2al)^4 - \dots \right) \right] \\ &= a^2 l^2 \left(1 - \frac{a^2 l^2}{3} + \frac{2a^4 l^4}{45} - \frac{a^6 l^6}{315} + \dots \right), \\ (2al - \sin 2al) &= \left[2al - \left(2al - \frac{(2al)^3}{3!} + \frac{(2al)^5}{5!} - \dots \right) \right] \\ &= \frac{4a^3 l^3}{3} \left[1 - \frac{a^2 l^2}{5} + \frac{2a^4 l^4}{105} - \frac{a^6 l^6}{945} + \dots \right], \\ (\sin al - al \cos al) &= \left[\left(al - \frac{a^3 l^3}{3!} + \frac{a^5 l^5}{5!} - \frac{a^7 l^7}{7!} + \dots \right) - al \left(1 - \frac{a^2 l^2}{2} + \frac{a^4 l^4}{4!} - \frac{a^6 l^6}{6!} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{a^3 l^3}{3} \left[1 - \frac{a^2 l^2}{10} + \frac{a^4 l^4}{280} - \frac{a^6 l^6}{15120} + \dots \right], \\ \frac{2al - \sin 2al}{4a \sin^2 al} &= \frac{l}{3} \left(1 + \frac{2}{15} a^2 l^2 + \frac{2}{105} a^4 l^4 + \frac{4}{1575} a^6 l^6 + \dots \right), \\ \frac{\sin al - al \cos al}{a \sin^2 al} &= \frac{l}{3} \left[1 + \frac{7}{30} a^2 l^2 + \frac{31}{840} a^4 l^4 + \frac{127}{25200} a^6 l^6 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Замѣняя a^2 на $\frac{S}{EI}$ и вводя полученные разложенія въ формулу

(20), найдемъ выраженіе работы деформаци въ слѣдующемъ видѣ:

$$A = \frac{S^2 l}{2E\omega} + \frac{l}{6EI} \left[(M_1^2 + M_2^2) [1 + \varphi(S)] - M_1 M_2 [1 + \psi(S)] \right] + K \frac{(M_1 + M_2)^2}{0,8 E\omega l}, \quad (21)$$

гдѣ черезъ $\varphi(S)$ и $\psi(S)$ обозначены ряды

$$\varphi(S) = \frac{2}{15} \cdot \frac{Sl}{EI} + \frac{2}{105} \cdot \frac{S^2 l^4}{E^2 I^2} + \frac{4}{1575} \cdot \frac{S^3 l^6}{E^3 I^3} + \dots$$

$$\psi(S) = \frac{7}{30} \cdot \frac{Sl^2}{EI} + \frac{31}{840} \cdot \frac{S^2 l^4}{E^2 I^2} + \frac{127}{25200} \cdot \frac{S^3 l^6}{E^3 I^3} + \dots$$

Если въ формулѣ (21) положить S равнымъ нулю, получится извѣстная формула для бруса изгибаемаго двумя моментами

$$A' = \frac{l}{6EI} \left[M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2 \right] + K \frac{(M_1 + M_2)^2}{0,8 E\omega l}.$$

4. Обобщеніе выведенныхъ формулъ для случая совмѣстнаго изгиба и растяженія.

До сихъ поръ мы вели всѣ выводы въ предположеніи сжимающей силы S ; если мы теперь желаемъ получить соотвѣтствующія формулы для случая растягивающей силы, то нѣтъ надобности снова повторять всѣ выкладки. Достаточно лишь во всѣхъ полученныхъ нами формулахъ замѣнить S на $-S$; соотвѣтственно съ этимъ измѣнятся и величины α , α^2 , α^3 , α^4 . . . въ величины $i\alpha$, $-\alpha^2$, $-i\alpha^3$, α^4 . . .

Кромѣ того всѣ тригонометрическія круговыя функціи аргументовъ αx и αl придется замѣнить соотвѣтственными гиперболическими функціями согласно формуламъ

$$\text{Sin} i\alpha l = i \text{Sin} \alpha l$$

$$\text{Cos} i\alpha l = \text{Cosh} \alpha l \text{ и т. д.}$$

Приведемъ наиболѣе важныя формулы изъ числа выведенныхъ выше въ преобразованномъ видѣ для случая растягиваемаго бруса.

1) Уравненіе упругой линіи:

$$y = -\frac{M_1}{S} \operatorname{Cosh} ax + \left\{ \frac{M_1 \operatorname{Cosh} al}{S \operatorname{Sinh} al} + \frac{M_1}{S \operatorname{Sinh} al} \right\} \operatorname{Sinh} ax - \frac{M_1 + M_2}{Sl} x + \frac{M_1}{S}, \quad (6^1)$$

2) Углы τ_1 и τ_2 :

$$\tau_1 = -\frac{1}{Sl} \left[M_1 \left(1 - \frac{al}{\operatorname{Tgh} al} \right) - M_2 \left(\frac{al}{\operatorname{Sinh} al} - 1 \right) \right], \quad (7^1)$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{Sl} \left[-M_1 \left(\frac{al}{\operatorname{Sinh} al} - 1 \right) + M_2 \left(1 - \frac{al}{\operatorname{Tgh} al} \right) \right],$$

или послѣ разложенія въ ряды

$$\tau_1 = \frac{l}{3EI} \left[M_1 \left(1 - \frac{Sl^2}{15EI} + \frac{2S^2l^4}{315E^2I} - \dots \right) - \frac{M_2}{2} \left(1 - \frac{7Sl^2}{60EI} + \frac{31S^2l^4}{2520E^2I^2} - \dots \right) \right], \quad (8^1)$$

$$\tau_2 = \frac{l}{3EI} \left[-\frac{M_1}{2} \left(1 - \frac{7Sl^2}{60EI} + \frac{31S^2l^4}{2520E^2I^2} - \dots \right) + M_2 \left(1 - \frac{Sl^2}{15EI} + \frac{2S^2l^4}{315E^2I^2} - \dots \right) \right],$$

3) Изгибающій моментъ:

$$M_x = \frac{M_1 \operatorname{Sinh} a(l-x) - M_2 \operatorname{Sinh} ax}{\operatorname{Sinh} al}, \quad (10^1)$$

4) Работа деформации:

$$A = \frac{S^2l}{2E\omega} + \frac{1}{2EI} \left\{ -\frac{(M_1^2 + M_2^2)}{4a \operatorname{Sinh}^2 al} (2al - \operatorname{Sinh} 2al) + \frac{M_1 M_2}{a \operatorname{Sinh}^2 al} \left(\operatorname{Sinh} al - al \operatorname{Cosh} al \right) \right\} + K \frac{(M_1 + M_2)^2}{0,8 E\omega l}, \quad (20^1)$$

или въ преобразованномъ при помощи разложенія въ ряды видѣ

$$A = \frac{S^2 l}{2E\omega} + \frac{l}{6EI} \left[(M_1^2 + M_2^2) [1 + \varphi_1(S)] - M_1 M_2 [1 + \psi_1(S)] \right] + K \frac{(M_1 + M_2)^2}{0,8E\omega l}, \quad (21^1)$$

гдѣ

$$\varphi_1(S) = -\frac{2}{15} \cdot \frac{Sl^2}{EI} + \frac{2}{105} \cdot \frac{S^2 l^4}{E^2 I^2} - \frac{4}{1575} \cdot \frac{S^3 l^6}{E^3 I^3} + \dots$$

$$\psi_1(S) = -\frac{7}{30} \cdot \frac{Sl^2}{EI} + \frac{31}{840} \cdot \frac{S^2 l^4}{E^2 I^2} - \frac{127}{25200} \cdot \frac{S^3 l^6}{E^3 I^3} + \dots$$

Какъ и слѣдовало ожидать, мнимыя выраженія въ этихъ формулахъ исчезаютъ и результаты получаются и въ этомъ случаѣ дѣйствительными величинами.

5. Изслѣдованіе функцій φ и ψ .

Займемся нѣсколько подробнѣе величинами $\varphi(S)$, $\psi(S)$, $\varphi_1(S)$ и $\psi_1(S)$; изслѣдуемъ, насколько значительныя величины могутъ получать эти коэффициенты при различныхъ измѣненіяхъ величины продолжной силы S .

Для выбора метода вычисленія величинъ $\varphi(S)$ и т. д. руководящее значеніе имѣетъ величина аргумента $\frac{Sl^2}{EI} = a^2 l^2$.

При малыхъ значеніяхъ этого аргумента, въ особенности меньшихъ единицы, ряды, которыми выражаются искомыя функціи, будутъ настолько быстро сходящимися, что для достиженія вполне достаточной точности можно ограничиваться двумя, тремя членами разложенія—и вычисленіе производится весьма быстро. Иначе дѣло обстоитъ при большихъ значеніяхъ $\frac{Sl^2}{EI}$; тогда приходится или вычислять значительное число членовъ разложенія, или пользоваться для вычисленія непосредственно формулами изъ выраженій (20) и (20¹).



Для большей наглядности воспользуемся тождественностью выражений (20), (20¹) и (21), (21¹); можем написать

$$\frac{1}{2EI} \cdot \frac{(M_1^2 + M_2^2)}{4al \sin^2 al} (2al - \sin 2al) = \frac{l}{6EI} (M_1^2 + M_2^2) \left[1 + \varphi(S) \right],$$

$$\frac{1}{2EI} \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{al \sin^2 al} (\sin al - al \cos al) = \frac{l}{6EI} M_1 M_2 \left[1 + \psi(S) \right],$$

откуда, по сокращении на соответственно общіе множители, легко получимъ выражения $\varphi(S)$ и т. п. въ видѣ тригонометрическихъ функций

$$1 + \varphi(S) = \frac{3(2al - \sin^2 al)}{4al \sin^2 al}, \quad (22)$$

$$1 + \psi(S) = \frac{3(\sin al - al \cos al)}{al \sin^2 al}.$$

Подобно этому для случая растяжения

$$1 + \varphi_1(S) = \frac{3(2al - \sinh 2al)}{4al \sin^2 hal}, \quad (22^1)$$

$$1 + \psi_1(S) = \frac{3(\sinh al - al \cosh al)}{al \sin^2 hal}.$$

Пользуясь этими и прежними формами выражений $\varphi(S)$ и т. п., сдѣлаемъ бѣглый обзоръ ихъ измѣненій въ зависимости отъ значеній аргумента $\frac{Sl^2}{EI}$.

Какъ уже отмѣчено выше, при $S = 0$ (т. е. при $\frac{Sl^2}{EI}$ также равномъ нулю) всѣ функции $\varphi(S)$ и т. п. также обращаются въ нули. Съ возрастаніемъ абсолютной величины $\frac{Sl^2}{EI}$ немедленно начинаютъ возрастать абсолютныя величины функций $\varphi(S)$ и т. п.; при этомъ для случая сжатія эти функции остаются всегда положительными, а для растяженія—отрицательными, т. е. величины коэффиціентовъ

$\left[1 + \varphi(S) \right]$ и $\left[1 + \psi(S) \right]$ всегда больше, а коэффиціентовъ $\left[1 + \varphi_1(S) \right]$ и $\left[1 + \psi_1(S) \right]$ всегда меньше единицы.

При величинѣ $\frac{Sl^2}{EI} = 0,1$ эти коэффициенты получаютъ слѣдующія значенія

$$\begin{aligned} 1 + \varphi(S) &= 1,014, & 1 + \psi(S) &= 1,024, \\ 1 + \varphi_1(S) &= 0,987, & 1 + \psi_1(S) &= 0,977. \end{aligned}$$

При $\frac{Sl^2}{EI} = 1$ коэффициенты будутъ равны

$$\begin{aligned} 1 + \varphi(S) &= 1,155, & 1 + \psi(S) &= 1,275, \\ 1 + \varphi_1(S) &= 0,883, & 1 + \psi_1(S) &= 0,799. \end{aligned}$$

Слѣдую дальше, рассмотримъ случай

$$\frac{Sl^2}{EI} = a^2 l^2 = \frac{\pi^2}{4}, \text{ откуда } al = \frac{\pi}{2}.$$

Въ этомъ случаѣ согласно формуламъ (22) и (22¹) будемъ имѣть

$$\begin{aligned} 1 + \varphi(S) &= 1,500, & 1 + \psi(S) &= 1,910, \\ 1 + \varphi_1(S) &= 0,758, & 1 + \psi_1(S) &= 0,592, \end{aligned}$$

такъ какъ

$$\text{Sinh} al = \text{Sinh} \frac{\pi}{2} = 2,3013,$$

$$\text{Cosh} al = \text{Cosh} \frac{\pi}{2} = 2,5092,$$

$$\text{Sinh} 2al = \text{Sinh} \pi = 11,5489.$$

Наконецъ для значенія

$$\frac{Sl^2}{EI} = \pi^2; \quad = al \pi$$

получимъ соотвѣтственно для сжатія

$$1 + \varphi(S) = \infty, \quad 1 + \psi(S) = \infty.$$

Этотъ результатъ является слѣдствіемъ неточнаго вывода формулъ изгиба, такъ какъ радіусъ кривизны былъ принятъ равнымъ $\frac{1}{y''}$, тогда какъ точная его величина

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Нужно замѣтить, что равенство

$$\frac{SI^2}{EI} = \pi^2,$$

которое можетъ быть иначе написано

$$S = \pi^2 \frac{I^2}{EI},$$

представляетъ собою не что иное, какъ извѣстную формулу Эйлера для продольнаго изгиба прямого бруса, со свободно вращающимися концами.

Для случая растяженія бруса, при условіи

$$\frac{SI^2}{EI} = \pi^2,$$

получимъ по формулѣ (22¹) слѣдующія величины коэффициентовъ:

$$1 + \varphi_1(S) = 0,371, \quad 1 + \psi_1(S) = 0,178,$$

такъ какъ

$$\sinh 2\pi = 267,7278,$$

$$\sinh \pi = 11,5489,$$

$$\cosh \pi = 11,5921.$$

Изъ полученныхъ нами результатовъ можно сдѣлать слѣдующіе выводы:

1) вліяніе продольной силы на работу деформациі при изгибѣ быстро возрастаетъ съ увеличеніемъ ея;

2) при равныхъ величинахъ растягивающей и сжимающей продольной силы вторая оказываетъ сравнительно большее вліяніе въ сторону увеличенія работы деформациі, чѣмъ первая въ сторону уменьшенія.

Для того чтобы уяснить себѣ нѣсколько степеней вліянія введеннаго нами участія продольной силы на величину работы деформациі при различныхъ соотношеніяхъ величинъ изгибающихъ моментовъ, возьмемъ конкретный случай.

Пусть имѣемъ брусъ съ четвернымъ запасомъ прочности по формулѣ Эйлера, т. е. для него

$$\frac{SI^2}{EI} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Выше мы видѣли, что въ этомъ случаѣ

$$1 + \varphi(S) = 1.500,$$

$$1 + \psi(S) = 1.910,$$

слѣдовательно второй членъ (20)

$$A_2 = \frac{l}{6EI} \left[(M_1^2 + M_2^2) 1.500 - 1.910 M_1 M_2 \right].$$

Предположимъ сначала, что оба момента равны и одного знака

$$M_1 = M_2.$$

Тогда работа деформации на изгибъ, если игнорировать вліяніе сжимающей силы:

$$A_2' = \frac{l}{6EI} \cdot M_1^2,$$

а вводя вліяніе сжимающей силы,

$$A_2 = \frac{l}{6EI} \left[3 M_1^2 - 1.910 M_1^2 \right] = 1.09 \cdot \frac{l}{6EI} M_1^2.$$

Пусть теперь одинъ изъ моментовъ равенъ 0

$$M_2 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ

$$A_2' = \frac{l}{6EI} \cdot M_1^2,$$

$$A_2 = 1.5 \frac{l}{6EI} M_1^2.$$

Наконецъ пусть оба момента равны, но различны по знаку:

$$M_2 = -M_1.$$

Тогда

$$A_2' = \frac{l}{6EI} 3M_1^2$$

$$A_2 = \frac{l}{6EI} \cdot 4,91 M_1^2 = 1,637 \frac{l}{6EI} \cdot 3 M_1^2.$$

Какъ видимъ, принятіе во вниманіе сжимающей силы оказываетъ наибольшее вліяніе при моментахъ разныхъ знаковъ, но близкихъ по абсолютной величинѣ и наименьшее—при однозначныхъ моментахъ, также близкихъ по величинѣ.

6. Работа деформации жесткой фермы и производная отъ нея. Необходимыя упрощенія.

При составленіи выраженія работы деформации цѣлой фермы съ жесткими узловыми соединеніями мы будемъ предполагать, что узловые связи не производятъ работы (идеальная связь безъ тренія) и, слѣдовательно, работа деформации фермы можетъ быть получена простымъ суммированіемъ количествъ работъ, производимыхъ внутренними силами каждаго элемента въ отдѣльности. Такъ какъ элементы фермы подвергаются дѣйствию продольнаго сжимающаго или растягивающагося усилія и изгибающихъ моментовъ, появляющихся вслѣдствіе жесткости узловъ, то къ нимъ примѣнимы формулы, выведенныя въ предшествующихъ параграфахъ.

Обозначимъ усиліе въ какомъ либо элементѣ фермы MN черезъ S_{MN} , а моменты отъ жесткости узловъ, дѣйствующіе соотвѣтственно на концы элемента M и N чрезъ

$$M_{M-N} \text{ и } M_{N-M}.$$

Тогда на основаніи формулы (21) будемъ имѣть работу деформации для названнаго элемента

$$A_{MN} = \frac{S_{MN}^2 l_{MN}}{2E\omega_{MN}} + \frac{l_{MN}}{6EI_{MN}} \left[\left(M_{M-N}^2 + M_{N-M}^2 \right) \left[1 + \varphi_{MN}(S) \right] - M_{M-N} \cdot M_{N-M} \left[1 + \psi_{MN}(S) \right] \right] + K \frac{\left(M_{M-N} + M_{N-M} \right)^2}{0,8E\omega_{MN} l_{MN}}.$$

Для всей же фермы

$$\begin{aligned}
 A &= \sum A_{MN} \\
 &= \sum \frac{S_{MN}^2 l_{MN}}{2E\omega_{MN}} + \sum \frac{l_{MN}}{6EI_{MN}} \left\{ (M_{M-N}^2 + M_{N-M}^2) + [1 + \varphi_{MN}(S)] \right. \\
 &\quad \left. + M_{M-N} \cdot M_{N-M} [1 + \psi_{MN}(S)] \right\} + \sum K \frac{(M_{M-N} + M_{N-M})^2}{0,8E\omega_{MN} l_{MN}} \quad (24)
 \end{aligned}$$

Формула (24) представляет собою вполне точно при указанных допущениях выражение работы деформации жесткой фермы, но, как мы сейчас увидимъ, для нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій слишкомъ сложное.

Всякую ферму съ жесткими узлами имѣемъ право разсматривать какъ статически неопредѣлимую систему со многими неизвѣстными и для вычисленія послѣднихъ можемъ примѣнить слѣдующій методъ, основанный на теоремѣ о наименьшей работѣ деформации.

Примемъ неизвѣстные моменты отъ жесткости узловъ за статически-неопредѣлимые величины, выразимъ черезъ нихъ прочія величины — въ нашемъ случаѣ — продольныя усилія S и воспользуемся принципомъ, что во всякомъ тѣлѣ, находящемся подъ дѣйствіемъ заданной системы силъ, напряженія распредѣляются такимъ образомъ, чтобы работа деформации системы имѣла наименьшую величину.

Изъ этого слѣдуетъ, что производныя отъ выраженія работы по статически неопредѣлимымъ величинамъ должны равняться нулю. Очевидно, что такимъ образомъ мы можемъ получить столько же уравненій, сколько имѣется неизвѣстныхъ моментовъ.

Пусть имѣемъ ферму, состоящую изъ нѣкотораго количества элементовъ: $0-1, 0-2, 0-3 \dots, 1-2, 1-3 \dots M-N \dots$ и т. д.

Тогда усиліе въ какомъ либо элементѣ жесткой фермы можетъ быть выражено въ функціи неизвѣстныхъ моментовъ линейнымъ образомъ

$$\begin{aligned}
 S_{MN} &= S_{MN}^0 + \alpha_{MN} M_{0-1} + \beta_{MN} M_{1-0} + \gamma_{MN} M_{1-2} + \dots \\
 &\quad + \rho_{MN} M_{M-N} + \dots \quad (25)
 \end{aligned}$$

гдѣ подъ S_{MN}^0 подразумѣвается усиліе въ элементѣ $M-N$ подъ дѣйствіемъ одной внѣшней нагрузки въ отсутствіи моментовъ, т. е.

Какъ уже упомянуто выше, такихъ уравненій мы получимъ столько же, сколько неизвѣстныхъ моментовъ, которые и опредѣлились бы изъ такой системы.

Въ формулѣ (28) при знакѣ $\sum$ суммирование должно распространяться на всѣ элементы фермы, а при знакѣ $\sum_K$ — лишь на элементы, сходящіеся въ узлѣ K , гдѣ приложенъ моментъ M_{K-L} .

Разсмотримъ теперь, осуществимо ли практически рѣшеніе задачи въ томъ видѣ, какъ это намѣчено выше, и если нѣтъ, то какія измѣненія необходимо сдѣлать, чтобы оно стало возможнымъ.

Въ этомъ отношеніи затрудненіе представляютъ функціи $\varphi(S)$ и $\psi(S)$; какъ мы видѣли выше, онѣ могутъ быть представлены или въ трансцендентномъ видѣ, или въ формѣ бесконечныхъ рядовъ. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ сохраненіе ихъ въ уравненіи дѣлаетъ невозможнымъ рѣшеніе задачи. Поэтому въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ принимать $\varphi(S)$ и $\psi(S)$ равными нулю, иными словами будемъ игнорировать вліяніе продольнаго усилія на изгибъ элемента, хотя мы и видѣли выше, что вліяніе это можетъ достигать довольно большихъ размѣровъ.

Въ концѣ главы III-ей мы постараемся приблизительно оцѣнить вліяніе этого допущенія и увидимъ, что для разбираемыхъ нами случаевъ оно незначительно, чего отнюдь нельзя сказать вообще.

Что касается до послѣдняго члена формулы (28), относящагося къ работѣ сдвигающихъ напряженій, то введеніе его въ вычисленія не представляетъ затрудненій.

Но такъ какъ вліяніе этого фактора менѣе, чѣмъ отбрасываемаго по необходимости члена съ $\varphi(S)$ и $\psi(S)$, а съ другой стороны авторы тѣхъ способовъ, которые намъ предстоитъ изслѣдовать, пренебрегали вліяніемъ работы сдвигающихъ напряженій, то и мы не будемъ вводить его въ вычисленія.

Послѣ этихъ сокращеній основная формула работы деформации жесткой фермы получить слѣдующій видъ:

$$A = \sum \frac{S_{MN}^2 l_{MN}}{2E\omega_{MN}} + \sum \frac{l_{MN}}{6EI_{MN}} \left(M_{M-N}^2 + M_{N-M}^2 - M_{M-N} \cdot M_{N-M} \right) \quad (29)$$

Изъ нея мы и будемъ исходить въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Преобразованная производная отъ работы по M_{K-L}

$$(30) \quad \frac{\partial A}{\partial M_{K-L}} = \sum \frac{S_{MN} \cdot l_{MN}}{E \omega_{MN}} \cdot \frac{\partial S_{MN}}{\partial M_{K-L}} + \sum_K \frac{l_{KS}}{6 EI_{KS}} \left(2M_{K-s} - M_{s-K} \right) \frac{\partial M_{K-s}}{\partial M_{K-L}},$$

гдѣ обозначенія суммъ сохраняютъ прежній смыслъ.

7. Группировка существующихъ методовъ.

Приступая къ характеристикѣ существующихъ методовъ расчета изгибающихъ моментовъ и напряженій отъ жесткости узловъ, мы должны различать слѣдующія четыре группы методовъ:

1) Обобщенный способъ, основанный непосредственно на формулахъ (29) и (30); результаты подсчетовъ по нему послужатъ намъ критеріемъ для сравненія другихъ методовъ;

2) группа методовъ, предложенныхъ инж. Передеріемъ,

3) методы Мора, Мюллеръ-Бреслау, Мандерла и проч.,

4) методы Энгессера, Мюллеръ-Бреслау и т. д.

Къ послѣдовательному изложенію этихъ методовъ мы и перейдемъ теперь.

8. Обобщенный методъ.

Мы могли бы воспользоваться для опредѣленія неизвѣстныхъ моментовъ непосредственно уравненіями вида (30). Если рассматриваемая ферма имѣетъ n узловъ, то для статически опредѣлимой фермы число элементовъ будетъ $2n - 3$ и число неизвѣстныхъ $2(2n - 3)$; для статически неопредѣлимой системы число элементовъ будетъ $(2n - 3) + m$, а неизвѣстныхъ $2(2n - 3) + 2m$, гдѣ m = числу статически неопредѣлимыхъ величинъ *) (лишнихъ стержней).

*) Разумѣется, фермы статически неопредѣлимы лишь относительно опорныхъ реакцій сюда не входятъ.

Пришлось бы слѣдовательно рѣшить соотвѣтствующее количество линейныхъ уравненій. Однако число послѣднихъ можетъ быть значительно уменьшено, если воспользоваться условіемъ, что для каждаго узла сумма моментовъ равна нулю.

Пусть имѣемъ какой-либо узелъ 0, въ которомъ сходятся n элементовъ: $0-1$, $0-2$, $0-(n-1)$, $0-n$; назовемъ моменты, дѣйствующие на эти элементы въ узлѣ 0 (кромѣ $0-n$) соотвѣтственно

$$M_{0-1} = M_1,$$

$$M_{0-2} = M_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$M_{0-(n-1)} = M_{n-1}.$$

Тогда согласно условію

$$\Sigma M = 0,$$

$$M_{0-n} = -(M_1 + M_2 + \dots + M_{n-1}).$$

Будемъ теперь подразумѣвать подъ M_1 совокупность моментовъ $+M_1$, дѣйствующаго на элементъ $0-1$, и $-M_1$, дѣйствующаго на элементъ $0-n$; точно также M_2 и т. д. Такимъ образомъ число неизвѣстныхъ элементовъ въ этомъ узлѣ будетъ на единицу меньше. Повторяя эту манипуляцію для всѣхъ узловъ, уменьшимъ число неизвѣстныхъ для статически опредѣлимой фермы до $(3n-6)$, а для статически неопредѣлимой до $(3n-6) + 2m$.

Для статически опредѣлимыхъ фермъ введеніе уравновѣшенныхъ моментовъ выгодно еще въ томъ отношеніи, что при этомъ многіе коэффициенты α, β и т. д., изъ формулъ вида

$$S = S^0 + \alpha M_1 + \beta M_2 + \dots\dots\dots,$$

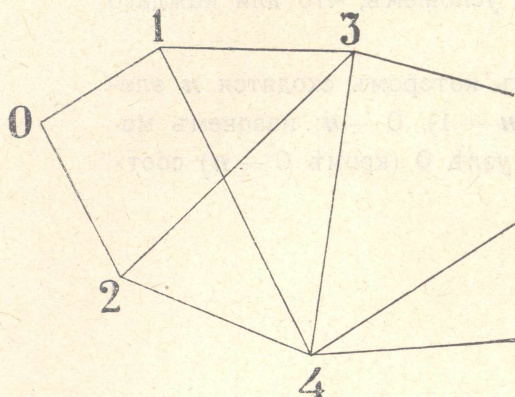
обращаются въ 0, чѣмъ облегчаются вычисленія.

Весьма важно отмѣтить здѣсь нѣкоторыя свойства системъ уравненій, къ которымъ приводитъ примѣненіе этого метода,—свойства, на которыхъ основанъ излагаемый нами ниже сокращенный методъ рѣшенія названныхъ системъ.

Пусть имѣемъ нѣкоторую ферму 01234 . . . (черт. 4), для которой желаемъ опредѣлить моменты отъ жесткости узловъ.

Введемъ, какъ указано выше, обозначенія

Черт. 4.



$$M_{0-1} = M_1, \quad M_{1-0} = -(M_2 + M_3),$$

$$M_{0-2} = -M_1, \quad M_{2-0} = -(M_4 + M_5),$$

$$M_{1-4} = M_3, \quad M_{4-1} = M_7,$$

$$M_{1-3} = M_2, \quad M_{3-1} = M_6,$$

$$M_{2-4} = M_5, \quad M_{4-2} = M_8,$$

$$M_{2-3} = M_4, \quad M_{3-2} = M_9,$$

$$\dots, \dots$$

Работа деформации отдѣльныхъ элементовъ фермы выразится на основаніи (29) слѣдующими формулами:

$$A_{0-1} = \frac{S_{0-1}^2 l_{0-1}}{2E\omega_{0-1}} + \frac{l_{0-1}}{6EI_{0-1}} \left[M_1^2 + (M_2 + M_3)^2 + M_1(M_2 + M_3) \right],$$

$$A_{0-2} = \frac{S_{0-2}^2 l_{0-2}}{2E\omega_{0-2}} + \frac{l_{0-2}}{6EI_{0-2}} \left[M_1^2 + (M_4 + M_5)^2 - M_1(M_4 + M_5) \right],$$

$$A_{1-3} = \frac{S_{1-3}^2 l_{1-3}}{2E\omega_{1-3}} + \frac{l_{1-3}}{6EI_{1-3}} \left[M_2^2 + M_6^2 - M_6 M_2 \right],$$

$$A_{1-4} = \frac{S_{1-4}^2 l_{1-4}}{2E\omega_{1-4}} + \frac{l_{1-4}}{6EI_{1-4}} \left[M_3^2 + M_7^2 - M_3 M_7 \right],$$

Дифференцируемъ полную работу всей фермы

$$A = A_{0-1} + A_{0-2} + A_{1-3} + A_{1-4} + \dots$$

последовательно по M_1, M_2 и т. д.;

замѣчаемъ при этомъ, что

$$S_{0-1} = S_{0-1}^0 + \alpha_{0-1} M_1 + \beta_{0-1} M_2 + \gamma_{0-1} M_3 + \dots,$$

$$S_{0-2} = S_{0-2}^0 + \alpha_{0-2} M_1 + \beta_{0-2} M_2 + \gamma_{0-2} M_3 + \dots,$$

и слѣдовательно

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{0-1}}{\partial M_1} &= \alpha_{0-1} ; \quad \frac{\partial S_{0-1}}{\partial M_2} = \beta_{0-1} ; \quad \\ \frac{\partial S_{0-2}}{\partial M_1} &= \alpha_{0-2} ; \quad \frac{\partial S_{0-2}}{\partial M_2} = \beta_{0-2} ; \quad \\\end{aligned}$$

Полагая кромѣ того

$$\begin{aligned}\frac{l_{0-1}}{6EI_{0-1}} &= \Delta\gamma_{0-1} ; \quad \frac{l_{0-2}}{6EI_{0-2}} = \Delta\gamma_{0-2} ; \quad \\ \frac{l_{0-1}}{E\omega_{0-1}} &= \Delta\lambda_{0-1} ; \quad \frac{l_{0-2}}{E\omega_{0-2}} = \Delta\lambda_{0-2} ; \quad\end{aligned}$$

получимъ систему уравненій для опредѣленія неизвѣстныхъ моментовъ

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial M_1} &= \sum S\Delta\lambda . \alpha + \Delta\gamma_{0-1} (2M_1 + M_2 + M_3) \\ &\quad + \Delta\gamma_{0-2} (2M_1 - M_4 - M_5) = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial M_2} &= \sum S\Delta\lambda . \beta + \Delta\gamma_{0-1} (2M_2 + 2M_3 + M_1) \\ &\quad + \Delta\gamma_{1-3} (2M_2 - M_6) = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial M_3} &= \sum S\Delta\lambda . \gamma + \Delta\gamma_{0-1} (2M_2 + 2M_3 + M_1) \\ &\quad + \Delta\gamma_{1-4} (2M_3 - M_7) = 0,\end{aligned}\tag{31}$$

Разсмотримъ порядокъ составленія суммъ, входящихъ въ эти уравненія

$$\begin{aligned}\sum S\Delta\lambda . \alpha &= \Delta\lambda_{0-1} \left[S_{0-1}^0 \alpha_{0-1} + \alpha_{0-1} \alpha_{0-1} M_1 + \alpha_{0-1} \beta_{0-1} M_2 \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{0-1} \gamma_{0-1} M_3 + \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta\lambda_{0-2} \left[S_{0-2}^0 \alpha_{0-2} + \alpha_{0-2} \alpha_{0-2} M_1 + \alpha_{0-2} \beta_{0-2} M_2 \right. \\
& \quad \left. + \alpha_{0-2} \gamma_{0-2} M_3 + \dots \right] \\
& + \Delta\lambda_{1-3} \left[S_{1-3}^0 \alpha_{1-3} + \alpha_{1-3} \alpha_{1-3} M_1 + \alpha_{1-3} \beta_{1-3} M_2 \right. \\
& \quad \left. + \alpha_{1-3} \gamma_{1-3} M_3 + \dots \right] \\
& + \dots, \\
\sum S\Delta\lambda. \beta &= \Delta\lambda_{0-1} \left[S_{0-1}^0 \beta_{0-1} + \alpha_{0-1} \beta_{0-1} M_1 + \beta_{0-1} \beta_{0-1} M_2 \right. \\
& \quad \left. + \beta_{0-1} \gamma_{0-1} M_3 + \dots \right] \\
& + \Delta\lambda_{0-2} \left[S_{0-2}^0 \beta_{0-2} + \alpha_{0-2} \beta_{0-2} M_1 + \beta_{0-2} \beta_{0-2} M_2 \right. \\
& \quad \left. + \beta_{0-2} \gamma_{0-2} M_3 + \dots \right] \\
& + \dots, \\
\sum S\Delta\lambda. \gamma &= \Delta\lambda_{0-1} \left[S_{0-1}^0 \gamma_{0-1} + \alpha_{0-1} \gamma_{0-1} M_1 + \beta_{0-1} \gamma_{0-1} M_2 \right. \\
& \quad \left. + \gamma_{0-1} \gamma_{0-1} M_3 + \dots \right] \\
& + \Delta\lambda_{0-2} \left[S_{0-2}^0 \gamma_{0-2} + \alpha_{0-2} \gamma_{0-2} M_1 + \beta_{0-2} \gamma_{0-2} M_2 \right. \\
& \quad \left. + \gamma_{0-2} \gamma_{0-2} M_3 + \dots \right] \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Легко видѣть, что эти суммы могутъ быть переписаны съ символическими обозначеніями слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned}
\sum S\Delta\lambda. \alpha &= (S^0 \alpha) + (\alpha \alpha) M_1 + (\alpha \beta) M_2 + (\alpha \gamma) M_3 + \dots, \\
(32) \quad \sum S\Delta\lambda. \beta &= (S^0 \beta) + (\beta \alpha) M_1 + (\beta \beta) M_2 + (\beta \gamma) M_3 + \dots, \\
\sum S\Delta\lambda. \gamma &= (S^0 \gamma) + (\gamma \alpha) M_1 + (\gamma \beta) M_2 + (\gamma \gamma) M_3 + \dots,
\end{aligned}$$

Здѣсь символами $(S^0\alpha)$, $(\alpha\alpha)$ и т. д. обозначены суммы

$$(S^0\alpha) = (S_{0-1}^0 \Delta\lambda_{0-1} \alpha_{0-1} + S_{0-2}^0 \Delta\lambda_{0-2} \alpha_{0-2} + \dots),$$

$$(S^0\beta) = (S_{0-1}^0 \Delta\lambda_{0-1} \beta_{0-1} + S_{0-2}^0 \Delta\lambda_{0-2} \beta_{0-2} + \dots),$$

$$\dots$$

$$(\alpha\alpha) = (\Delta\lambda_{0-1} \alpha_{0-1}^2 + \Delta\lambda_{0-2} \alpha_{0-2}^2 + \dots),$$

$$(\beta\beta) = (\Delta\lambda_{0-1} \beta_{0-1}^2 + \Delta\lambda_{0-2} \beta_{0-2}^2 + \dots),$$

$$\dots$$

$$(\alpha\beta) = (\Delta\lambda_{0-1} \alpha_{0-1} \beta_{0-1} + \Delta\lambda_{0-2} \alpha_{0-2} \beta_{0-2} + \dots),$$

$$(\beta\alpha) = (\Delta\lambda_{0-1} \beta_{0-1} \alpha_{0-1} + \Delta\lambda_{0-2} \beta_{0-2} \alpha_{0-2} + \dots),$$

$$\dots$$

Непосредственно изъ закона составленія этихъ суммъ слѣдуетъ, очевидно,

$$(\alpha\beta) = (\beta\alpha); (\alpha\gamma) = (\gamma\alpha); \text{ и т. д.}$$

Такимъ образомъ, если составить таблицу коэффициентовъ при M_1 , получающихся изъ разбираемыхъ нами суммъ, то увидимъ, что они расположатся симметрично относительно діагонали, на которой будутъ находиться двойные символы вида $(\alpha\alpha)$, $(\beta\beta)$ и т. п.

$(\alpha\alpha)$	$(\alpha\beta)$	$(\alpha\gamma)$	$(\alpha\delta)$	...
$(\alpha\beta)$	$(\beta\beta)$	$(\beta\gamma)$	$(\beta\delta)$	...
$(\alpha\gamma)$	$(\beta\gamma)$	$(\gamma\gamma)$	$(\gamma\delta)$	...
$(\alpha\delta)$	$(\beta\delta)$	$(\gamma\delta)$	$(\delta\delta)$	...

Интересно еще отмѣтить, что суммы вида $(\alpha\alpha)$, $(\beta\beta)$ и т. п. всегда положительны.

Если мы теперь обратимся къ остальнымъ членамъ уравненій (31) и расположимъ встрѣчающіеся въ нихъ коэффициенты также въ таблицу, то снова найдемъ характерную симметричность относительно діагонали, совершенно очевидную изъ таблицы

$(2\Delta\gamma_{0-1} + 2\Delta\gamma_{0-2})$	$\Delta\gamma_{0-1}$	$\Delta\gamma_{0-1}$	$-\Delta\gamma_{0-2}$	$-\Delta\gamma_{0-2}$	
$\Delta\gamma_{0-1}$	$(2\Delta\gamma_{0-1} + 2\Delta\gamma_{1-3})$	$2\Delta\gamma_{0-1}$	0	0	(33)
$\Delta\gamma_{0-1}$	$2\Delta\gamma_{0-1}$	$(2\Delta\gamma_{0-1} + 2\Delta\gamma_{1-4})$	0	0	

Очевидно, что при сложении соответствующих коэффициентов при M въ общую таблицу симметричность будетъ сохранена; кроме того легко усмотрѣть, что изъ ряда коэффициентовъ для каждого неизвѣстнаго наибольшій будетъ расположенъ на діагонали.

Въ окончательномъ видѣ система уравненій (31) можетъ быть представлена въ нижеслѣдующей таблицѣ (34):

Коэффиц. при M_1	Коэффиц. при M_2	Коэффиц. при M_3		Сво- бодн. членъ.
$(\alpha\alpha) + 2(\Delta\gamma_{0-1} + \Delta\gamma_{0-2})$	$(\alpha\beta) + \Delta\gamma_{0-1}$	$(\alpha\gamma) + \Delta\gamma_{0-1}$	. . .	(S^0_α)
$(\alpha\beta) + \Delta\gamma_{0-1}$	$(\beta\beta) + 2(\Delta\gamma_{0-1} + \Delta\gamma_{1-3})$	$(\beta\gamma) + 2\Delta\gamma_{0-1}$	. . .	(S^0_β)
$(\alpha\gamma) + \Delta\gamma_{0-1}$	$(\beta\gamma) + 2\Delta\gamma_{0-1}$	$(\gamma\gamma) + 2(\Delta\gamma_{0-1} + \Delta\gamma_{1-4})$	. . .	(S^0_γ)
$(\alpha\delta) - \Delta\gamma_{0-2}$	$(\beta\delta)$		. . .	(S^0_δ)
$(\alpha\varepsilon) - \Delta\gamma_{0-5}$	$(\beta\varepsilon)$		. . .	(S^0_ε)
.			. . .	. . .

(34)

Инж. Пистолькорсъ приходитъ къ только что изложенному способу нѣсколько инымъ методомъ, основаннымъ на «принципѣ работы связей». Однако, къ плоскимъ системамъ онъ вовсе не примѣняетъ этотъ способъ разсчета ввиду большого количества уравненій, къ пространственнымъ же примѣняетъ со многими допущеніями. Такъ какъ въ настоящей статьѣ мы занимаемся исключительно плоскими системами, то и не будемъ подробно останавливаться на этой работѣ.

Въ статьѣ инж. Передерія авторъ также упоминаетъ объ этомъ способѣ въ общихъ чертахъ, но не примѣняетъ его на дѣлѣ, считая слишкомъ сложнымъ. Дѣйствительно, для двухъ изъ фермъ, разсмотрѣнныхъ инж. Передеріемъ примѣненіе этого метода практически невозможно. Изъ нашихъ подсчетовъ мы убѣдились, что даже при употребленіи сокращеннаго метода рѣшенія уравненій, увеличеніе числа уравненій въ системѣ свыше 14—15-ти ведетъ къ чрезвычайно запутаннымъ выкладкамъ.

Нашъ опытъ — примѣнить изложенный методъ къ изслѣдованію является поэтому первымъ въ литературѣ.

9. Группа способовъ инж.

Передерія.

Какъ уже упомянуто выше, обобщенный методъ разсчета не можетъ быть примѣняемъ къ фермамъ со сколько-нибудь значительнымъ числомъ элементовъ.

Для того чтобы уменьшить число неизвѣстныхъ величинъ, возможно въ нѣкоторыхъ случаяхъ съ достаточной для практическихъ цѣлей точностью предположить, что жесткія узловые соединенія существуютъ лишь между частями поясовъ, рѣшетка же фермы прикрѣплена шарнирно. Это предположеніе равносильно тому, что всѣ моменты отъ жесткости узловъ, дѣйствующие на элементы рѣшетки, приравниваются нулю.

Въ такомъ случаѣ въ каждомъ узлѣ фермы оказываются лишь два равныхъ по величинѣ и обратныхъ по знаку момента; слѣдовательно, число неизвѣстныхъ величинъ падаетъ до числа узловъ n .

Разумѣется, такое упрощеніе не будетъ значительно вліять на точность результатовъ лишь въ томъ случаѣ, если изгибающіе моменты въ рѣшеткѣ незначительны по сравненію съ моментами въ элементахъ поясовъ.

Для разсмотрѣнной нами выше фермы 01234... требуемая для опредѣленія неизвѣстныхъ уравненія легко получимъ, приравнявъ въ уравненіи (31) и формулѣ (32) соотвѣтствующие моменты нулю:

$$M_{1-4} = M_3 = 0, \quad M_{4-1} = M_7 = 0,$$

$$M_{2-3} = M_4 = 0, \quad M_{3-2} = M_9 = 0.$$

Получимъ

$$\sum S \Delta \lambda \cdot \alpha + \Delta \gamma_{0-1} (2M_1 + M_2) + \Delta \gamma_{0-2} (2M_1 - M_3) = 0,$$

$$\sum S \Delta \lambda \cdot \beta + \Delta \gamma_{0-1} (2M_2 + M_1) + \Delta \gamma_{1-3} (2M_2 - M_6) = 0, \quad (31')$$

.....,

гдѣ на этотъ разъ

$$\begin{aligned} \sum S \Delta \lambda \cdot \alpha &= (S^0 \alpha) + (\alpha \alpha) M_1 + (\alpha \beta) M_2 + (\alpha \varepsilon) M_3 + \dots, \\ (32') \quad \sum S \Delta \lambda \cdot \beta &= S^0 \beta + (\alpha \beta) M_1 + (\beta \beta) M_2 + (\beta \varepsilon) M_3 + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Инженеромъ Передеріемъ предложено въ статьѣ его нѣсколько способовъ разсчета, различныхъ по формѣ, но по внутреннему содержанию однородныхъ съ только что изложеннымъ нами, который имъ также намѣченъ схематически подъ названіемъ „способа наименьшей работы“.

Изъ остальныхъ описанныхъ имъ способовъ „способъ измѣненія угловъ“ заключается въ слѣдующемъ.

Сравниваются два выраженія для измѣненія угла между двумя элементами поясовъ, сходящимися въ какомъ-либо узлѣ; съ одной стороны это измѣненіе можетъ быть выражено черезъ моменты, дѣйствующие въ данномъ узлѣ— M_m и въ двухъ сосѣднихъ узлахъ— M_{m-1} и M_{m+1} :

$$(35) \quad \Delta \Theta_m = -\frac{l_m}{6EI_m} (2M_m + M_{m-1}) - \frac{l_{m+1}}{6EI_{m+1}} (2M_m + M_{m+1})$$

(Черезъ l_m и l_{m+1} обозначены длины элементовъ $(m-1) - m$ и $(m+1) - m$).

При опредѣленіи знака момента необходимо мысленно помѣститься въ средину жесткаго контура фермы; тогда для праваго конца каждаго элемента положительнымъ моментомъ будетъ считаться вращающій по часовой стрѣлкѣ, а для лѣваго—обратно. Примѣняя формулу (35) для примѣра къ узлу О нашей фермы 01234... (черт. 4) и обращая вниманіе на знаки моментовъ, получимъ

$$(36) \quad \Delta \Theta_0 = -\frac{l_{0-1}}{6EI_{0-1}} (2M_1 + M_2) - \frac{l_{0-2}}{6EI_{0-2}} (2M_1 - M_3).$$

Съ другой стороны $\Delta \Theta_m$ можетъ быть выражено въ функціи неизвѣстныхъ моментовъ, или по извѣстной формулѣ Мюллеръ-Бреслау, или на основаніи начала возможныхъ перемѣщеній:

$$1 \cdot \Delta \Theta_m = \sum \Delta l \cdot S_0,$$

гдѣ подъ Δl подразумѣваются удлинненія элементовъ фермы при дѣйствительной нагрузкѣ фермы

$$\Delta I = \frac{SI}{E_{\omega}} = \left(S^0 + \alpha M_1 + \beta M_2 + \dots \right) \frac{l}{E_{\omega}},$$

а S_0 суть усилія въ элементахъ шарнирной фермы отъ дѣйствія момента $M=1$.

Легко видѣть, что $\Delta \theta_m = \sum S_0 \Delta I$ тождественно съ величиной $\sum S \Delta \lambda \cdot \alpha$; подставляя послѣднюю въ формулу (36), получимъ первое изъ уравненій (31'); такимъ же путемъ найдутся и остальные.

„Способъ возможныхъ перемѣщеній“ также сводится къ данному нами въ началѣ этого параграфа.

Нѣсколько отличенъ отъ другихъ „способъ перемѣщеній узловъ для фермъ съ параллельными поясами“. Между тѣмъ какъ въ вышеизложенныхъ способахъ жесткій контуръ фермы предполагается замкнутымъ, т.-е. для фермъ съ параллельными поясами сопряженіе опорныхъ стоекъ съ поясами—жесткимъ,—въ этомъ послѣднемъ способѣ авторъ предполагаетъ, что изгибающіе моменты для опорныхъ стоекъ равны нулю. Слѣдовательно оба пояса раздѣлены и свободно лежатъ на опорахъ, благодаря чему количество неизвѣстныхъ понижается до $n-4$ для статич. опредѣл. и до $n-4+2m$ для статич. неопредѣл. фермы.

Кромѣ того этотъ способъ отличается отъ предыдущихъ тѣмъ, что за неизвѣстныя приняты не изгибающіе моменты, а силы P (см. I главу), называемыя инж. Передеріемъ силами пружинности. Тѣмъ не менѣе основа метода остается таже, какъ это легко видѣть изъ слѣдующихъ соображеній.

Для полученія уравненій, изъ которыхъ опредѣляются силы P , инж. Передерій приравниваетъ одно другому два выраженія прогибовъ узловъ фермы; первое изъ нихъ получается въ функціи силъ P , какъ прогибы узловъ жесткой фермы подъ дѣйствіемъ заданной нагрузки, или, что тоже самое, шарнирной фермы подъ дѣйствіемъ заданной нагрузки плюсъ силы пружинности; второе выраженіе прогибовъ получается, рассматривая каждый поясъ, какъ балку на двухъ опорахъ, нагруженную системой силъ, обратныхъ силамъ пружинности. Должны, слѣдовательно, имѣть мѣсто уравненія вида:

$$y_i = -f_i^*).$$

*) Инж. Передерій пишетъ $y_i + f_i = 0$ и нагружаетъ балку во второмъ случаѣ прямо силами пружинности.

Величину f_i можно получить, дифференцируя работу деформации пояса, изгибаемого силами пружинности, по этимъ неизвѣстнымъ силамъ.

Но упомянутая работа есть не что иное, какъ работа элементовъ пояса на изгибъ подъ дѣйствіемъ моментовъ отъ жесткости узловъ; въ этомъ легко убѣдиться, подставивъ въ формулы вмѣсто силъ пружинности ихъ выраженія чрезъ моменты. Итакъ

$$f_i = \frac{\partial A_{\text{изг. пояс.}}}{\partial P_i};$$

съ другой стороны

$$y_i = \sum \sigma_i \cdot S \frac{l}{E\omega},$$

гдѣ $S = (S^0 + \sigma_1 P_1 + \sigma_2 P_2 + \dots + \sigma_i P_i + \dots)$ есть усиліе въ элементѣ жесткой фермы подъ дѣйствіемъ заданной нагрузки, а $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots$ — усилія въ частяхъ шарнирной фермы отъ нагрузки силами $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$

Ясно, что

$$\sigma_i = \frac{\partial S}{\partial P_i},$$

а слѣдовательно

$$y_i = \frac{\partial \sum S^2 \frac{l}{2E\omega}}{\partial P_i} = \text{производной работы деформации продольныхъ уси-}$$

лій фермы, взятой по силѣ P_i .

Изъ сопоставленія величинъ f_i и y_i очевидно, что уравненіе

$$y_i + f_i = 0$$

есть не что иное, какъ производная полной работы деформации, приравненная нулю, причемъ работа рѣшетки на изгибъ не принята во вниманіе.

Такъ какъ совершенно безразлично, опредѣляются ли сначала моменты или силы пружинности, то и этотъ способъ оказывается однороднымъ съ предшествующими *).

*) Только, какъ упомянуто, стойки опорныя предполагаются шарнирно-связанными съ поясами.

$$M_1 = -M_{0.2} = -\frac{1}{3\Delta\gamma_{0.2}}(2\tau_{0.2} + \tau_{2.0}),$$

$$(M_4 + M_3) = -M_{2.0} = -\frac{1}{3\Delta\gamma_{0.2}}(2\tau_{2.0} + \tau_{0.2}) \text{ и т. д.,}$$

мы получимъ основныя уравненія Мандерла:

$$\begin{aligned}\tau_{0.1} - \tau_{0.2} &= -\Delta\Theta_{102}, \\ -\tau_{1.0} + \tau_{1.3} &= -\Delta\Theta_{310}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Такъ какъ большинство прочихъ способовъ этой группы отличаются лишь деталями рѣшенія уравненій, то мы остановимся подробнѣе лишь на способѣ Мора и примѣненіи его къ вычисленіямъ инж. Патономъ. Какъ извѣстно, основное отличіе способа Мора состоитъ въ томъ, что вмѣсто непосредственнаго вычисленія моментовъ M или угловъ τ предварительно опредѣляются такъ называемые углы вращенія узловъ φ и углы вращенія элементовъ ψ . (см. § 1). Зависимость между M , φ и ψ , выводъ которой приводитъ излишне, такова:

$$M_{M-N} = \frac{2EI_{MN}}{l_{MN}}(2\varphi_M + \varphi_N - 3\psi_{MN})$$

Пользуясь условіемъ $\Sigma M = 0$, получаютъ для какого-угодно узла M уравненіе

$$(38) \quad 2\varphi_M \sum N_{MX} + \sum_{X \neq M} N_{MX} = 3 \sum N_{MX} \cdot \psi_{MX},$$

гдѣ обозначено

$$N_{MX} = \frac{2EI_{MX}}{l_{MX}} = \frac{1}{3\Delta\gamma_{MX}};$$

для составленія суммъ нужно послѣдовательно вмѣсто X подставлять номера всѣхъ узловъ, непосредственно соединенныхъ съ M . Уравненія (38) можно получить и непосредственно изъ уравненій (37).

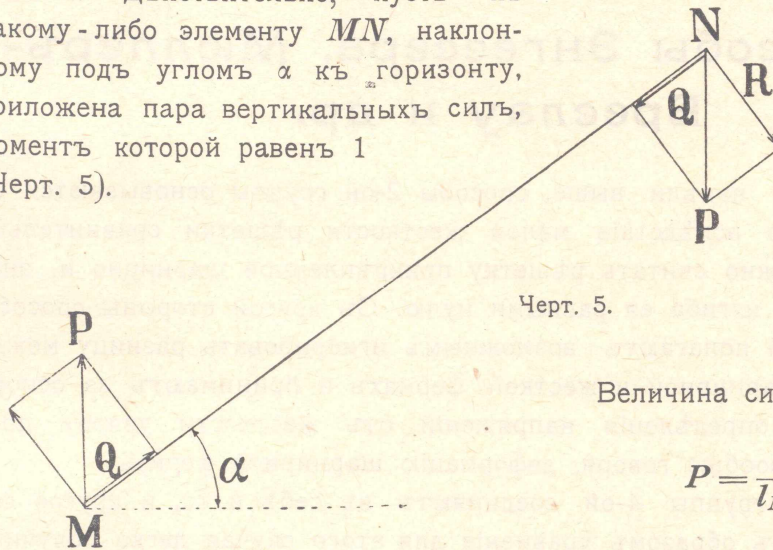
Изъ системы уравненій типа (38) опредѣляются углы φ , между тѣмъ какъ величины ψ вычисляются предварительно. Для этого Моръ пользуется началомъ возможныхъ перемѣщеній, прилагая къ элементу MN пару силъ, перпендикулярныхъ къ оси элемента и рав-

ныхъ $\frac{1}{l_{MN}}$ (т. е. моментъ пары равенъ единицѣ). Тогда виртуальная работа этой пары должна равняться виртуальной работѣ деформациі всѣхъ элементовъ фермы:

$$1 \cdot \psi_{MN} = \sum \sigma_{MN} \cdot \Delta l,$$

гдѣ $\Delta l = \frac{Sl}{E\omega}$ —измѣненіе длины элемента при дѣйствительной нагрузкѣ, а σ_{MN} —усилія отъ дѣйствія пары. Этимъ способомъ углы ψ опредѣляются для всѣхъ элементовъ.

Примѣняя способъ Мора въ своихъ расчетахъ инж. Патонъ допустилъ въ этомъ пунктѣ, умышленно или нечаянно, неточность. Вмѣсто пары силъ перпендикулярныхъ къ оси стержня онъ прилагаетъ ко всѣмъ элементамъ кромѣ стоекъ пары силъ, направленныхъ вертикально. Для горизонтальныхъ поясовъ дѣло не мѣняется, но для раскосовъ и наклонныхъ поясовъ получается довольно значительная ошибка. Дѣйствительно, пусть къ какому-либо элементу MN , наклонному подъ угломъ α къ горизонту, приложена пара вертикальныхъ силъ, моментъ которой равенъ 1 (Черт. 5).



Черт. 5.

Величина силъ

$$P = \frac{1}{l_{MN} \cdot \cos \alpha}.$$

Разложимъ каждую изъ силъ на двѣ составляющихъ: нормальную къ оси элемента

$$R = \frac{1}{l_{MN} \cos \alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{1}{l_{MN}}$$

и по оси элемента

$$Q = \frac{1}{l_{MN} \cos \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{l_{MN}} \operatorname{Tg} \alpha$$

Тогда виртуальная работа пары силъ R при поворотѣ элемента на уголъ ψ_{MN} будетъ

$$\frac{1}{l_{MN}} \cdot \psi_{MN} \cdot l_{MN} = 1 \cdot \psi_{MN}.$$

Но кромѣ того силы Q произведутъ еще дополнительную работу при укороченіи или удлиненіи стержня

$$\pm Q \cdot \Delta l = \pm \frac{\Delta l_{MN}}{l_{MN}} \text{Tg} \alpha.$$

Такимъ образомъ уравненіе работъ (38) для вертикальной пары силъ непримѣнимо. Ошибка при этомъ можетъ получиться въ нѣкоторыхъ случаяхъ довольно значительная, къ чему мы еще вернемся въ главѣ IV.

11. Способы Энгессера, Мюллеръ-Бреслау и др.

Какъ мы видѣли выше, способы 2-ой группы основываются на допущеніи, что вслѣдствіе малой жесткости рѣшетки сравнительно съ поясами можно считать рѣшетку прикрѣпленной шарнирно и, значитъ, моменты изгиба ея равными нулю. Съ другой стороны способы группы третьей полагаютъ возможнымъ игнорировать разницу между усиліями въ шарнирной и жесткой фермахъ и принимаютъ за основу расчета для опредѣленія напряженій отъ жесткости узловъ преувеличенную, вообще говоря, деформацию шарнирной фермы.

Способы группы 4-ой соединяютъ въ себѣ и то, и другое допущеніе; такимъ образомъ уравненія для этого случая легко получить изъ формулы (37), полагая изгибающіе моменты для рѣшетки равными нулю.

$$\Delta \gamma_{0-1} (2M_1 + M_2) + \Delta \gamma_{0-2} (2M_1 - M_3) = - \sum S^0 \Delta \lambda \cdot \alpha$$

$$\Delta \gamma_{0-1} (2M_2 + M_1) + \Delta \gamma_{1-3} (2M_2 - M_6) = - \sum S^0 \Delta \lambda \cdot \beta,$$

.....

Мы не будемъ подробно разсматривать эти методы, такъ какъ а priori можно сказать, что результаты ихъ примѣненія нельзя будетъ

считать достовѣрными. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что оба допущенія противорѣчатъ одно другому: если можно принять прикрѣпленіе рѣшетки шарнирнымъ ввиду большой жесткости поясовъ, то именно эта жесткость не позволяетъ пренебречь работой деформации поясовъ на изгибъ. Мы увидимъ на примѣрахъ, что это апіорное заключеніе оправдывается результатами сравнительныхъ подсчетовъ.

Изъ обзора всѣхъ рассмотрѣнныхъ методовъ расчета очевидно, что для сравненія ихъ точности достаточно изъ каждой группы выбрать по одному способу, такъ какъ остальные, различаясь по формѣ и деталямъ, въ сущности основаны на общихъ принципахъ и должны давать соотвѣтственно одинаковые для каждой группы результаты.

12. О выборѣ примѣровъ фермъ для сравнительныхъ подсчетовъ.

При выборѣ фермъ, какъ объектовъ для производства сравнительныхъ подсчетовъ, намъ приходилось руководствоваться различными соображеніями. На первомъ планѣ стояла возможность примѣнить къ данной фермѣ обобщенный методъ расчета, чѣмъ необходимо ограничивалось количество элементовъ, а также и пролетъ фермы.

Что касается до системы фермъ, то здѣсь желательно было, конечно, выбрать именно такія, для которыхъ прежніе подсчеты давали наиболѣе различные результаты. Главное мѣсто въ этомъ отношеніи занимали двухъ раскосныя и двухъ рѣшетчатыя фермы, для которыхъ подсчеты инженеровъ Патона и Переденія привели къ столь рѣзко различнымъ выводамъ. Такъ какъ по мнѣнію инж. Передерія можно было ожидать подобныхъ результатовъ вообще въ фермахъ съ ∞ -образнымъ изгибомъ поясовъ, то для третьяго примѣра взята была ферма треугольной системы съ дополнительными стойками.

Что касается до сѣченій элементовъ фермъ, то опытъ показалъ, что наиболѣе разнорѣчивые результаты получаются при сѣченіяхъ съ сравнительно большими моментами инерціи. Поэтому сѣченія были подобраны со значительнымъ запасомъ противъ обычной для мостовыхъ фермъ нагрузки. Соотвѣтственно съ этимъ и расчетная нагрузка была выбрана значительно больше предписываемой. Такъ какъ дѣло идетъ о сравнительныхъ подсчетахъ, то такое несогласіе заданія съ практическими условіями не имѣетъ большаго значенія.

Большая часть сѣченій заимствована изъ фермъ, разобранныхъ въ книгѣ инж. Патона, чтобы достигнуть нѣкоторой однородности матеріала; при этомъ, напр., сѣченія, заимствованныя изъ двухраскосной фермы, были внесены именно въ ферму той-же системы и т. д.

Для каждой изъ трехъ избранныхъ нами фермъ были произведены параллельные подсчеты по слѣдующимъ четыремъ способамъ:

- 1) обобщенный способъ;
- 2) основной способъ 2-ой группы;
- 3) способъ Мора;
- 4) способъ 4-й группы.

Для фермы № 3 были кромѣ того произведены тѣ-же подсчеты въ предположеніи, что моменты инерціи поясовъ уменьшены въ два раза, а всѣ прочія данныя не измѣнились.

13. Примѣръ I. Двухрѣшетчатая ферма.

Двухрѣшетчатая ферма, изображенная на черт. 6, основные размеры сѣченій элементовъ которой даны въ таблицѣ I, представляетъ собою статически неопредѣлимую систему съ одной лишней неизвѣстной. Дѣйствительно, число узловъ фермы $n = 10$; слѣдовательно возможное число уравненій для опредѣленія усилій въ элементахъ шарнирной фермы

$$k = 2n - 3 = 17;$$

число же неизвѣстныхъ усилій въ элементахъ

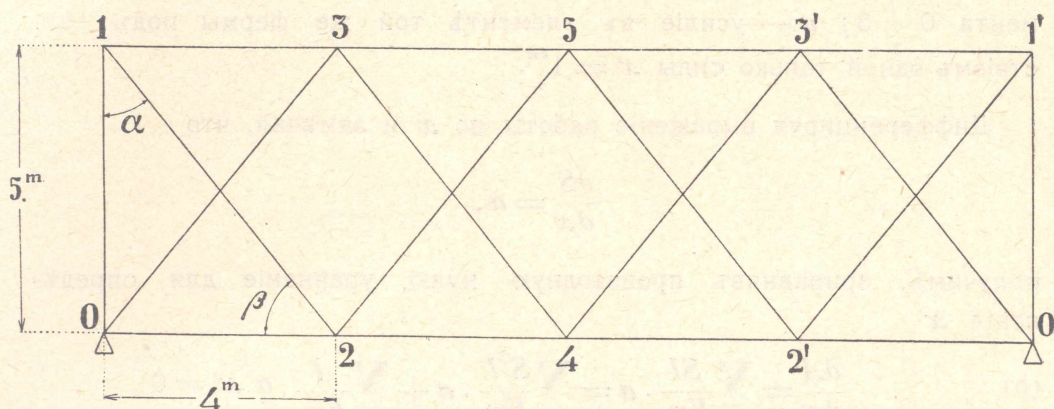
$$m = 18.$$

Примѣнимъ поэтому для опредѣленія усилій теорему о наименьшей работѣ деформации. Принимая, что треніе въ опорахъ не существуетъ и что работа опорныхъ реакцій равна нулю, а также припоминая, что шарнирные соединенія по нашему основному предположенію вовсе не производятъ работы, можемъ написать работу деформации шарнирной фермы

$$A = \sum \frac{S^2 l}{2E\omega},$$

гдѣ суммирование должно быть распространено на всѣ элементы фермы. Примемъ усиліе въ элементѣ 0—3 за неизвѣстное и назовемъ его x .

Черт. 6.



$$\alpha = 38^{\circ} 40'$$

$$\sin \alpha = \cos \beta = 0.6247$$

$$\beta = 51^{\circ} 20'$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = 0.7809$$

$$\operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Cotg} \beta = 0.8000$$

Таблица I.

Название элемент.	N ⁰ N ⁰ элемент.	ω brutto cm ² .	I brutto cm ⁴ .	e_1 cm.	e_2 cm.	l cm.	$N = \frac{2EI}{l}$ 10 tn. m.	$\Delta \lambda = \frac{l}{6EI}$ $\frac{1}{10^5 \text{ tn. m.}}$	$\frac{l}{\omega}$ $\frac{1}{\text{cm.}}$
Верхний пояс.	1—3	80	3700	7,2	15,8	400	37,0	90,09	5,0000
	3—5	100	4500	5,3	18,7	400	45,0	74,07	4,0000
Нижний пояс.	0—2	80	3700	7,2	15,8	400	37,0	90,09	5,0000
	2—4	100	4500	5,3	18,7	400	45,0	74,07	4,0000
Раскосы.	1—2	36	2100	13	13	640	13,1	254,45	17,7778
	3—4	28	900	10	10	640	5,6	595,24	22,8571
	0—3	106	2500	12	12	640	15,6	213,68	6,0377
	2—5	96	1700	10	10	640	10,6	314,47	6,6667
Стойка.	0—1	96	1400	8	8	500	11,2	297,62	5,2083

Тогда усилие въ любомъ элементѣ можемъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$S = S^0 + ax, \quad (a)$$

гдѣ S^0 —усилія отъ внѣшней нагрузки въ основной статически-опре-

дѣлимой фермѣ (черт. 7), получающейся изъ заданной удаленіемъ элемента 0—3; a — усилие въ элементѣ той же фермы подѣйствіемъ одной только силы $x = 1^{tn}$.

Дифференцируя выраженіе работы по x и замѣчая, что

$$\frac{\partial S}{\partial x} = a,$$

получимъ, приравнявъ производную нулю, уравненіе для опредѣленія x

$$(b) \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \sum \frac{Sl}{E\omega} \cdot a = \sum \frac{S^0 l}{E\omega} \cdot a + \sum \frac{l}{E\omega} \cdot a^2 x = 0$$

Отсюда

$$(c) \quad x = - \frac{\sum \frac{S^0 l}{\omega} \cdot a}{\sum \frac{l}{\omega} \cdot a^2}.$$

Для цѣлей нашего подсчета опредѣлимъ усилія въ слѣдующихъ случаяхъ единичной нагрузки:

1) для груза $P = 1^{tn}$, послѣдовательно приложеннаго въ узлахъ 1, 2, 3, 4, 5;

2) для пары силъ, моментъ которой равенъ единицѣ, а составляющія приложены послѣдовательно нормально къ осямъ элементовъ 0—1, 0—3, 2—5, 1—2, 3—4 въ ихъ концевыхъ точкахъ.

Результаты вычисленій сгруппированы въ таблицахъ.

Таблица II даетъ опредѣленіе величины $\sum a^2 \frac{l}{\omega}$, остающейся постоянной для всѣхъ случаевъ загрузки, таблицы III и IV содержатъ величины S^0 и $S^0 \frac{al}{\omega}$ для упомянутыхъ случаевъ нагрузки, а въ двухъ нижнихъ строкахъ помѣщены суммы $S^0 \frac{al}{\omega}$ и полученные по нимъ величины x .

Въ таблицѣ V представлены окончательныя величины усилій для рассмотрѣнныхъ случаевъ нагрузки. Кромѣ того по этимъ усиліямъ опредѣлены соотвѣтственнымъ сложениемъ усилія отъ дѣйствія паръ силъ = 1 тн.-м. на элементы поясовъ и помѣщены въ первыхъ четырехъ графахъ таблицы VI.

Для изслѣдованія напряженій отъ жесткости узловъ нагрузка выбрана симметричная, но неравномѣрная, чтобы получить значительныя

величины упомянутыхъ напряженій: въ узлахъ 3 и 3' предположены грузы по 50^{тн}. Для этой нагрузки вычислены усилія, напряженія и измѣненія длинъ элементовъ шарнирной фермы и помѣщены въ послѣднихъ трехъ графахъ таблицы VI.

Черт. 7.

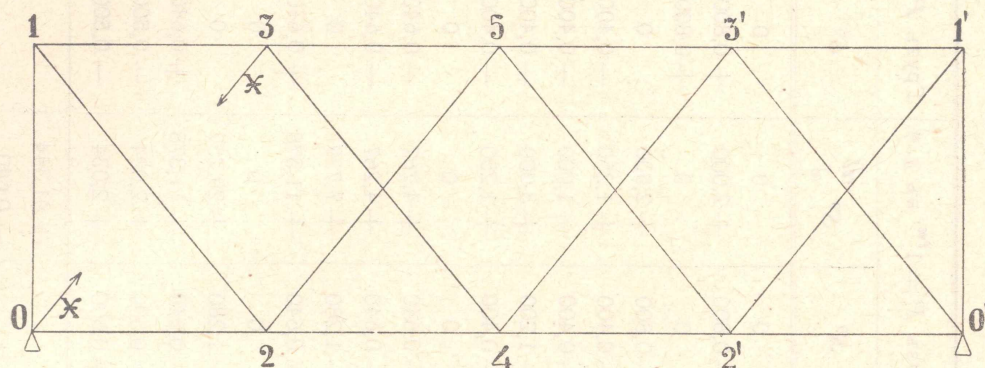


Таблица II.

Названіе эле- ментовъ	$\frac{l}{\omega} \left(\frac{1}{\text{см.}} \right)$	$a \text{ тн.}$	$a \cdot \frac{l}{\omega} \left(\frac{\text{тн.}}{\text{см.}} \right)$	$a^2 \frac{l}{\omega} \left(\frac{\text{тн.}^2}{\text{см.}} \right)$
0—2	5,0000	— 0,625	— 3,125	+ 1,953
2—4	4,0000	+ 0,625	+ 2,500	+ 1,563
4—2'	4,0000	— 0,625	— 2,500	+ 1,563
2'—0'	5,0000	+ 0,625	+ 3,125	+ 1,953
1—3	5,0000	— 0,625	— 3,125	+ 1,953
3—5	4,0000	+ 0,625	+ 2,500	+ 1,563
5—3'	4,0000	— 0,625	— 2,500	+ 1,563
3'—1'	5,0000	+ 0,625	+ 3,125	+ 1,953
0—3	6,0377	+ 1,000	+ 6,038	+ 6,038
2—5	6,6667	— 1,000	— 6,667	+ 6,667
5—2'	6,6667	+ 1,000	+ 6,667	+ 6,667
3'—0'	6,0377	— 1,000	— 6,038	+ 6,038
1—2	17,7778	+ 1,000	+ 17,773	+ 17,778
3—4	22,8571	— 1,000	— 22,857	+ 22,857
4—3'	22,8571	+ 1,000	+ 22,857	+ 22,857
2'—1'	17,7778	— 1,000	— 17,778	+ 17,778
0—1	5,2083	— 0,781	— 4,068	+ 3,177
0'—1'	5,2083	+ 0,781	+ 4,068	+ 3,177

$$\sum a \frac{l}{\omega} = + 127.098$$

Таблица III.

46

Н. В. НЕЕРАСОВЪ.

Элементы	Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 1.		Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 2.		Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 3.		Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 4.		Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 5.	
	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$
0—2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—4	0	0	+ 0,400	+ 1,000	+ 1,200	+ 3,000	+ 0,800	+ 2,000	+ 0,800	+ 2,000
4—2'	0	0	+ 0,400	— 1,000	— 0,400	+ 1,000	0	0	+ 0,800	— 2,000
2'—0'	0	0	0	0	+ 0,800	+ 2,500	+ 0,800	+ 2,500	0	0
1—3	0	0	— 0,600	+ 1,875	— 0,600	+ 1,875	— 0,400	+ 1,250	— 0,400	+ 1,250
3—5	0	0	— 0,600	— 1,500	+ 0,200	+ 0,500	— 0,400	— 1,000	— 0,400	— 1,000
5—3'	0	0	— 0,200	+ 0,500	— 1,000	+ 2,500	— 1,200	+ 3,000	— 0,400	+ 1,000
3'—1'	0	0	— 0,200	— 0,625	+ 0,600	+ 1,875	+ 0,400	+ 1,250	— 0,400	— 1,250
0—3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—5	0	0	+ 0,320	— 2,133	— 0,960	+ 6,400	— 0,640	+ 4,267	— 0,640	+ 4,267
5—2'	0	0	— 0,320	— 2,133	+ 0,960	+ 6,400	+ 0,640	+ 4,267	— 0,640	— 4,267
3'—0'	0	0	0	0	— 1,280	+ 7,729	— 1,280	+ 7,729	0	0
1—2	0	0	+ 0,960	+ 17,067	+ 0,960	+ 17,067	+ 0,640	+ 11,378	+ 0,640	+ 11,378
3—4	0	0	0	0	— 1,280	+ 29,257	0	0	0	0
4—3'	0	0	0	0	+ 1,280	+ 29,257	+ 1,280	+ 29,257	0	0
2'—1'	0	0	+ 0,320	— 5,689	— 0,960	+ 5,689	— 0,640	+ 11,378	+ 0,640	— 11,378
0—1	— 1,000	+ 4,068	— 0,750	+ 3,051	— 0,750	+ 3,051	— 0,500	+ 2,034	— 0,500	+ 2,034
0'—1'	0	0	— 0,250	— 1,017	+ 0,750	— 3,051	+ 0,500	+ 2,034	— 0,500	— 2,034
$\Sigma \frac{S^0 al}{\omega}$		+ 4,068		+ 9,913		+ 115,049		+ 81,344		0
x		— 0,032		— 0,078		— 0,905		— 0,640		0

Таблица IV.

Элементы	Пара силъ, прил. къ элементу 0—1.		Пара силъ, прил. къ элементу 0—3.		Пара силъ, прил. къ 2—5.		Пара силъ, прил. къ 1—2.		Пара силъ, прил. къ 1—4.	
	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$
0—2	+ 2,000	— 6,250	+ 1,220	— 3,813	0	0	0	0	0	0
2—4	+ 1,000	+ 2,500	+ 1,781	+ 4,453	+ 1,000	+ 2,500	+ 1,000	+ 2,500	— 1,000	— 2,500
4—2'	+ 1,000	— 2,500	+ 0,219	— 0,548	+ 1,000	— 2,500	+ 1,000	— 2,500	+ 1,000	— 2,500
2'—0'	0	0	+ 0,781	+ 2,441	0	0	0	0	0	0
1—3	— 1,500	+ 4,688	— 0,281	+ 0,878	+ 0,500	— 1,563	— 1,500	+ 4,688	+ 0,500	— 1,563
3—5	— 1,500	— 3,750	— 0,720	— 1,800	+ 0,500	+ 1,250	— 1,500	— 3,750	— 1,500	— 3,750
5—3'	— 0,500	+ 1,250	— 1,281	+ 3,203	— 0,500	+ 1,250	— 0,500	+ 1,250	— 0,500	+ 1,250
3'—1'	— 0,500	— 1,563	+ 0,281	+ 0,878	— 0,500	— 1,563	— 0,500	— 1,563	— 0,500	— 1,563
0—3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—5	+ 0,800	— 5,333	— 0,449	+ 2,993	— 0,449	+ 2,993	+ 0,800	— 5,333	+ 0,800	— 5,333
5—2'	— 0,800	— 5,333	— 0,449	+ 2,993	— 0,800	— 5,333	— 0,800	— 5,333	— 0,800	— 5,333
3'—0'	0	0	— 1,250	+ 7,548	0	0	0	0	0	0
1—2	— 0,800	— 14,222	+ 0,449	+ 7,982	— 0,800	— 14,222	+ 0,449	+ 7,982	— 0,800	— 14,222
3—4	0	0	— 1,250	+ 28,571	0	0	0	0	+ 1,250	— 28,571
4—3'	0	0	+ 1,250	+ 28,571	0	0	0	0	0	0
2'—1'	+ 0,800	— 14,222	— 0,449	+ 7,982	+ 0,800	— 14,222	+ 0,800	— 14,222	+ 0,800	— 14,222
0—1	+ 0,625	— 2,543	— 0,351	+ 1,428	+ 0,625	— 2,543	+ 0,625	— 2,543	+ 0,625	— 2,543
0'—1'	— 0,625	— 2,543	+ 0,351	+ 1,428	— 0,625	— 2,543	— 0,625	— 2,543	— 0,625	— 2,543
$\Sigma \frac{S^0 al}{\omega}$		— 49,821		+ 95,188		— 36,496		— 21,367		— 83,393
x		+ 0,392		— 0,749		+ 0,287		+ 0,168		+ 0,656

ФЕРМЫ СЪ ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ.

Таблица V.

48

Н. В. НЕКРАСОВЪ.

Элементы	Грузъ $P = 1 \text{ tn.}$ въ узлахъ:					Пара $P'l = 1 \text{ tn.-m.}$ въ узлахъ:				
	1	2	3	4	5	0—1	0—3	2—5	1—2	3—4
0—2	+ 0,020	+ 0,049	+ 0,566	+ 0,400	0	+ 1,755	+ 1,688	— 0,179	— 0,105	— 0,410
2—4	— 0,020	+ 0,351	+ 0,634	+ 0,400	+ 0,800	+ 1,245	+ 1,312	+ 1,179	+ 1,105	— 0,590
4—2'	+ 0,020	+ 0,449	+ 0,166	+ 0,400	+ 0,800	+ 0,755	+ 0,688	+ 0,821	+ 0,895	+ 0,590
2'—0'	— 0,020	— 0,049	+ 0,234	+ 0,400	0	+ 0,245	+ 0,312	+ 0,179	+ 0,105	+ 0,410
1—3	+ 0,020	— 0,551	— 0,034	0	— 0,400	— 1,745	+ 0,188	+ 0,321	— 1,605	+ 0,090
3—5	— 0,020	— 0,649	— 0,366	— 0,800	— 0,400	— 1,255	— 1,188	+ 0,679	— 1,395	— 1,090
5—3'	+ 0,020	— 0,151	— 0,434	— 0,800	— 0,400	— 0,745	— 0,812	— 0,679	— 0,605	— 0,910
3'—1'	— 0,020	— 0,249	+ 0,034	0	— 0,400	— 0,255	— 0,188	— 0,321	— 0,395	— 0,090
0—3	— 0,032	— 0,078	— 0,905	— 0,640	0	+ 0,392	— 0,749	+ 0,287	+ 0,168	+ 0,656
2—5	+ 0,032	+ 0,398	— 0,055	0	— 0,640	+ 0,408	+ 0,300	— 0,736	+ 0,632	+ 0,144
5—2'	— 0,032	— 0,398	+ 0,055	0	— 0,640	— 0,408	— 0,300	— 0,513	— 0,632	— 0,144
3'—0'	+ 0,032	+ 0,078	— 0,375	— 0,640	0	— 0,392	— 0,500	— 0,287	— 0,168	— 0,656
1—2	— 0,032	— 0,882	+ 0,055	0	+ 0,640	— 0,408	— 0,300	— 0,513	+ 0,617	— 0,144
3—4	+ 0,032	+ 0,078	— 0,375	+ 0,640	0	— 0,392	— 0,500	— 0,287	— 0,168	+ 0,594
4—3'	— 0,032	— 0,078	+ 0,375	+ 0,640	0	+ 0,392	+ 0,500	+ 0,287	+ 0,168	+ 0,656
2'—1'	+ 0,032	+ 0,398	— 0,055	0	+ 0,640	+ 0,408	+ 0,300	+ 0,513	+ 0,632	+ 0,144
0—1	— 0,975	— 0,689	— 0,043	0	— 0,500	+ 0,319	+ 0,234	+ 0,401	+ 0,494	+ 0,112
0'—1'	— 0,025	— 0,311	+ 0,043	0	— 0,500	— 0,319	— 0,234	— 0,401	— 0,494	— 0,112

Таблица VI.

Элем.	Усилия отъ пары силъ $P'l = 1$, прил. въ узлахъ:				Усилия отъ грузовъ $P = 1 \text{ tn.}$ прил. въ 3 и 3'.	Усилия отъ груз. $P = 50 \text{ tn}$ прилож. въ узлахъ 3 и 3'.		
	0—2	2—4	1—3	3—5		Усилия tn.	Напряж. kg./cm ² .	$\lambda = \frac{Sl}{E\omega} \cdot 10^2$ cm.
0—2	+ 0,122	+ 0,878	+ 1,365	— 1,415	+ 0,800	+ 40,00	+ 500	+ 10,000
2—4	+ 0,878	+ 0,122	+ 1,635	+ 0,415	+ 0,800	+ 40,00	+ 400	+ 8,000
4—2'	+ 1,122	— 0,122	+ 0,365	+ 1,585	+ 0,800	+ 40,00	+ 400	+ 8,000
2'—0'	— 0,122	+ 1,122	+ 0,635	— 0,585	+ 0,800	+ 40,00	+ 500	+ 10,000
1—3	— 1,378	+ 1,378	— 0,135	— 0,915	0	0	0	0
3—5	— 1,622	— 0,378	— 0,865	— 0,085	— 0,800	— 40,00	— 400	— 8,000
5—3'	— 0,378	— 0,622	— 1,135	— 0,085	— 0,800	— 40,00	— 400	— 8,000
3'—1'	— 0,622	+ 0,622	+ 0,135	— 1,085	0	0	0	0
0—3	— 0,195	— 1,405	— 2,183	+ 2,263	— 1,280	— 64,00	— 604	— 19,321
2—5	+ 0,995	— 0,995	— 0,217	— 1,463	0	0	0	0
5—2'	— 0,995	+ 0,995	+ 0,217	— 1,737	0	0	0	0
3'—0'	+ 0,195	— 1,795	— 1,017	+ 0,937	— 1,280	— 64,00	— 604	— 19,321
1—2	+ 2,205	— 2,205	+ 0,217	+ 1,463	0	0	0	0
3—4	+ 0,195	+ 1,405	— 1,017	+ 0,937	0	0	0	0
4—3'	— 0,195	+ 1,795	+ 1,017	— 0,937	0	0	0	0
2'—1'	+ 0,995	— 0,995	— 0,217	+ 1,737	0	0	0	0
0—1	— 1,722	+ 1,722	+ 2,330	— 1,143	0	0	0	0
0'—1'	— 0,778	+ 0,778	+ 0,170	— 1,357	0	0	0	0

14. Выводъ основныхъ уравненій для вычисленія моментовъ отъ жестко- сти узловъ.

Имѣя основныя усиія въ шарнирной фермѣ, мы можемъ теперь приступить къ изслѣдованію фермы въ предположеніи жесткихъ узловыхъ соединеній. Какъ мы видѣли во второй главѣ, вліяніе жесткихъ узловъ на продольныя усиія въ элементахъ фермы можетъ быть выражено формулами вида

$$S = S^0 + \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 + \dots \quad (d)$$

Подъ символами M_1 , M_2 и т. д. мы понимали совокупность взаимно-уравновѣшивающихся моментовъ, напр. $+M_{0-2}$ и $-M_{0-1}$ и т. д.

Въ разсматриваемомъ нами теперь случаѣ симметричность фермы и нагрузки позволяетъ дать величинамъ M_1 , M_2 нѣсколько другое значеніе. Дѣло въ томъ, что въ этомъ случаѣ абсолютныя величины моментовъ, дѣйствующихъ на симметрично расположенные элементы, будутъ равны, т. е. мы будемъ имѣть

$$|M_{0-2}| = |M_{0'-2'}|,$$

.

$$|M_{0-1}| = |M_{0'-1'}| \text{ и т. д. .}$$

На этомъ основаніи можемъ подразумѣвать подъ M_1 совокупность 4-хъ взаимно уравновѣживающихся моментовъ: $+M_{0-2}$; $-M_{0-1}$; $+M_{0'-2'}$; $-M_{0'-1'}$.

На прилагаемой таблицѣ для ясности представлены схематически нагрузки для каждого изъ 14 случаевъ M_1 , M_2 и т. д. (черт. 8).

При этомъ моменты, дѣйствующіе на концы элементовъ, замѣнены эквивалентными парами силъ.

При помощи схемы легко написать слѣдующую табличку моментовъ:

$$M_{0-1} = -M_1, \quad M_{1-0} = M_3,$$

$$M_{0-2} = M_1 + M_2, \quad M_{2-0} = -(M_5 + M_6 + M_7),$$

$$M_{0-3} = -M_2, \quad M_{3-0} = M_8,$$

$$M_{1-2} = -M_4, \quad M_{2-1} = M_5,$$

$$M_{1-3} = M_3 + M_4, \quad M_{3-1} = -(M_8 + M_9 + M_{10}),$$

$$M_{2-4} = M_7, \quad M_{4-2} = -M_{11},$$

$$M_{2-5} = M_6 ,$$

$$M_{5-2} = -M_{12} ,$$

$$M_{3-4} = M_9 ,$$

$$M_{4-3} = -M_{13} ,$$

$$M_{3-5} = M_{10} ,$$

$$M_{5-3} = -M_{14} .$$

Работа деформации отдельных элементов выразится согласно этимъ обозначеніямъ

$$A_{0-1} = A'_{0-1} + \Delta\gamma_{0-1} [M_1^2 + M_3^2 - M_1 M_3] ,$$

$$A_{0-2} = A'_{0-2} + \Delta\gamma_{0-2} [(M_1 + M_2)^2 + (M_5 + M_9 + M_7)^2 + (M_1 + M_2) (M_5 + M_6 + M_7)] ,$$

$$A_{0-3} = A'_{0-3} + \Delta\gamma_{0-3} [M_2^2 + M_8^2 + M^2 M_8] ,$$

$$A_{1-2} = A'_{1-2} + \Delta\gamma_{1-2} [M_4^2 + M_5^2 + M_4 M_5] ,$$

$$A_{1-3} = A'_{1-3} + \Delta\gamma_{1-3} [(M_3 + M_4)^2 + (M_8 + M_9 + M_{10})^2 + (M_3 + M_4) (M_8 + M_9 + M_{10})] ,$$

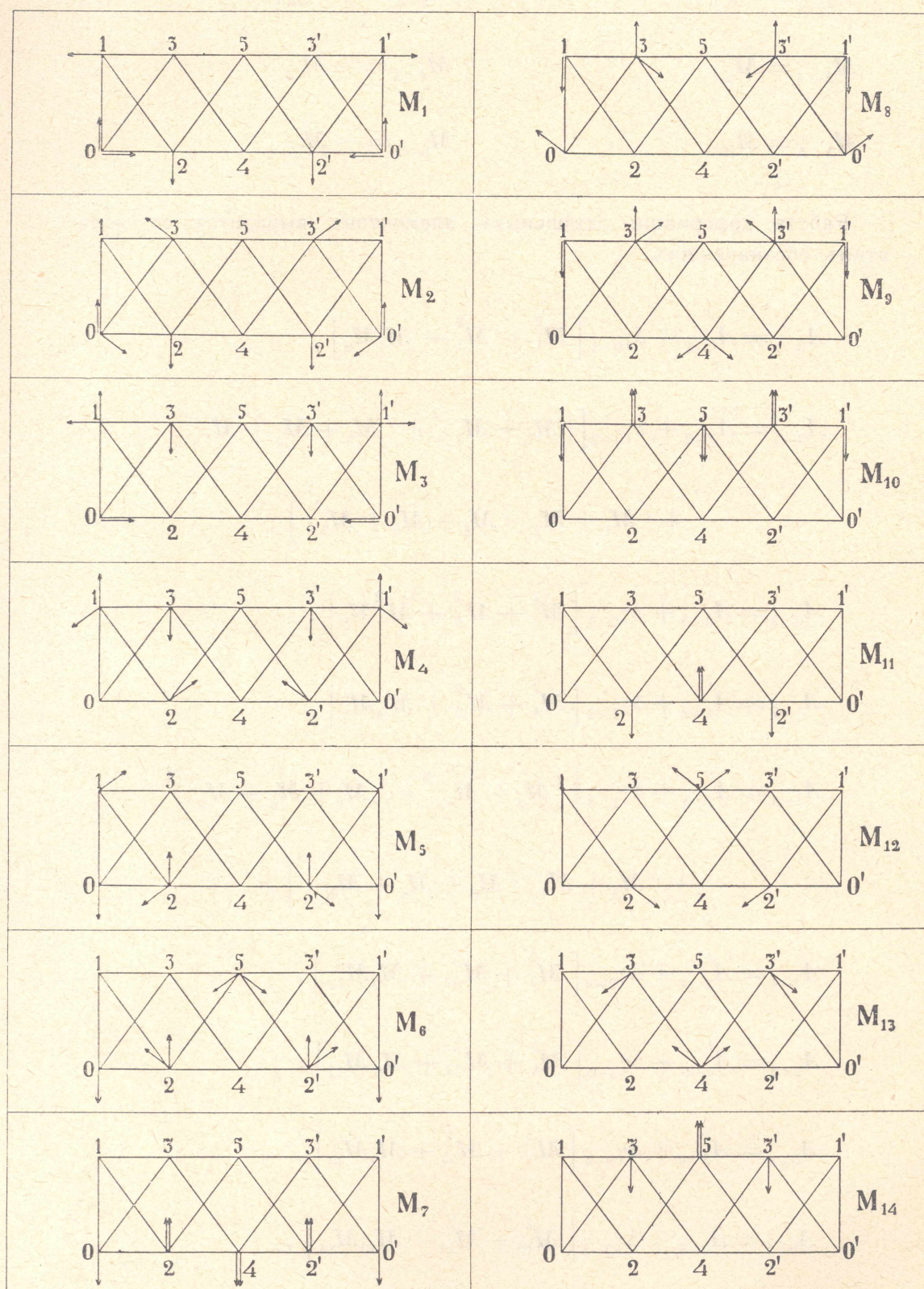
$$A_{2-4} = A'_{2-4} + \Delta\gamma_{2-4} [M_7^2 + M_{11}^2 + M_7 M_{11}] ,$$

$$A_{2-5} = A'_{2-5} + \Delta\gamma_{2-5} [M_6^2 + M_{12}^2 + M_6 M_{12}] ,$$

$$A_{3-4} = A'_{3-4} + \Delta\gamma_{3-4} [M_9^2 + M_{13}^2 + M_9 M_{13}] ,$$

$$A_{3-5} = A'_{3-5} + \Delta\gamma_{3-5} [M_{10}^2 + M_{14}^2 + M_{10} M_{14}] ,$$

Черт. 8.



Здѣсь чрезъ A'_{0-1} A'_{0-2} и т. п. обозначены выраженія вида

$$A'_{0-1} = \frac{S_{0-1}^2 l_{0-1}}{2E\omega_{0-1}},$$

т. е. работа внутреннихъ силъ элемента подѣйствіемъ продольнаго усиія.

Замѣчая, что работа деформации для всей фермы равняется суммѣ работъ всѣхъ элементовъ

$$A = (A_{0-1} + A_{0-2} + A_{0-3} + \dots + A_{2-4} + A_{3-5}) \times 2$$

и дифференцируя A послѣдовательно по неизвѣстнымъ M , получимъ 14 уравненій

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial M_1} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_1} + \Delta\gamma_{0-1}(2M_1 - M_3) + \Delta\gamma_{0-2}(2M_1 + 2M_2 \\ + M_5 + M_6 + M_7) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial M_2} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_2} + \Delta\gamma_{0-2}(2M_1 + 2M_2 + M_5 + M_6 + M_7) \\ + \Delta\gamma_{0-3}(2M_2 + M_8) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial M_3} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_3} + \Delta\gamma_{0-1}(2M_3 - M_1) + \Delta\gamma_{1-3}(2M_3 + 2M_4 \\ + M_8 + M_9 + M_{10}) = 0, \end{aligned} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial M_4} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_4} + \Delta\gamma_{1-2}(2M_4 + M_5) + \Delta\gamma_{1-3}(2M_3 + 2M_4 \\ + M_8 + M_9 + M_{10}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial M_5} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_5} + \Delta\gamma_{1-2}(2M_5 + M_4) + \Delta\gamma_{0-2}(2M_5 + 2M_6 \\ + 2M_7 + M_1 + M_2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial M_6} &= \sum \frac{\partial A'}{\partial M_6} + \Delta\gamma_{0-2} (2M_5 + 2M_6 + 2M_7 + M_1 + M_2) \\ &\quad + \Delta\gamma_{2-5} (2M_6 + M_{12}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial M_7} &= \sum \frac{\partial A'}{\partial M_7} + \Delta\gamma_{0-2} (2M_5 + 2M_6 + 2M_7 + M_1 + M_2) \\ &\quad + \Delta\gamma_{2-4} (2M_7 + 2M_{11}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial M_8} &= \sum \frac{\partial A'}{\partial M_8} + \Delta\gamma_{1-3} (2M_8 + 2M_9 + 2M_{10} + M_3 + M_4) \\ &\quad + \Delta\gamma_{0-3} (2M_8 + M_2) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial M_9} &= \sum \frac{\partial A'}{\partial M_9} + \Delta\gamma_{1-3} (2M_8 + 2M_9 + 2M_{10} + M_3 + M_4) \\ &\quad + \Delta\gamma_{3-4} (2M_9 + M_{13}) = 0,\end{aligned}\tag{e}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial M_{10}} &= \sum \frac{\partial A'}{\partial M_{10}} + \Delta\gamma_{1-3} (2M_8 + 2M_9 + 2M_{10} + M_3 + M_4) \\ &\quad + \Delta\gamma_{3-5} (2M_{10} + M_{14}) = 0,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_{11}} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_{11}} + \Delta\gamma_{2-4} (2M_{11} + M_7) = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_{12}} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_{12}} + \Delta\gamma_{2-5} (2M_{12} + M_6) = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_{13}} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_{13}} + \Delta\gamma_{3-4} (2M_{13} + M_9) = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_{14}} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_{14}} + \Delta\gamma_{3-5} (2M_{14} + M_{10}) = 0,$$

15. Вычисленіе коэффиціентовъ уравненій.

Займемся теперь нахожденіемъ суммъ, входящихъ въ лѣвыя части уравненій (e).

Въ главѣ второй мы видѣли, что эти суммы могутъ быть написаны:

$$\sum \frac{\partial A'}{\partial M_1} = (S^0_\alpha) + (\alpha\alpha) M_1 + (\alpha\beta) M_2 + \dots + (\alpha\rho) M_{14},$$

$$\sum \frac{\partial A'}{\partial M_2} = (S^0_\beta) + (\alpha\beta) M_1 + (\beta\beta) M_2 + \dots + (\beta\rho) M_{14},$$

.....

Значенія символовъ (S^0_α) , $(\alpha\alpha)$ и т. п. сохраняютъ опредѣленія главы второй.

Замѣтимъ, что благодаря отмѣченному нами свойству симметричности символовъ намъ придется лишь для первой суммы вычислить всѣ 15 коэффиціентовъ, а затѣмъ для каждой послѣдующей суммы придется вычислять однимъ коэффиціентомъ меньше, такъ что для послѣдней нужно будетъ лишь опредѣлить величины $(\rho\rho)$ и (S^0_ρ) .

Находимъ прежде всего величины $\alpha, \beta, \dots, \rho$; при помощи данныхъ изъ таблицъ V и VI составляемъ сначала таблицу VII усилий въ элементахъ всей фермы отъ дѣйствія симметрично приложенныхъ моментовъ = 1 (наприм. къ элем. 0—1 и 0'—1' и т. д.), а затѣмъ таблицу VIII отъ симметричнаго загруженія моментами $M_1 = 1$; $M_2 = 1$ и т. д.; это и будутъ искомыя $\alpha, \beta, \dots, \rho$.

Таблица VII.

Элементы.	Усилия отъ симметричной нагрузки парами силъ, равными, единицъ элементовъ:								
	0—2 0'—2'	2—4 4—2'	1—3 1'—3'	3—5 5—3'	0—3 0'—3'	2—5 5—2'	1—2 1'—2'	3—4 3'—4'	0—1 0'—1'
0—2	0	+ 0,200	+ 0,200	— 0,200	+ 0,200	0	0	0	+ 0,200
2—4	+ 0,200	0	+ 0,200	+ 0,200	+ 0,200	+ 0,200	+ 0,200	0	+ 0,200
1—3	— 0,200	+ 0,200	0	— 0,200	0	0	— 0,200	0	— 0,200
3—5	— 0,200	— 0,200	— 0,200	0	— 0,200	0	— 0,200	— 0,200	— 0,200
0—3	0	— 0,320	— 0,320	+ 0,320	— 0,125	0	0	0	0
2—5	0	0	0	— 0,320	0	— 0,125	0	0	0
1—2	+ 0,320	— 0,320	0	+ 0,320	0	0	+ 0,125	0	0
3—4	0	+ 0,320	0	0	0	0	0	+ 0,125	0
0—1	— 0,250	+ 0,250	+ 0,250	— 0,250	0	0	0	0	0

Таблицы VIII и IX.

Элем.	α	β	γ	δ	ϵ	η	ϑ	χ	λ	μ	ν	σ	π	ρ
0—2	—0,200	—0,200	0	+0,200	0	0	+0,200	0	—0,200	—0,400	—0,200	0	0	+0,200
2—4	0	0	0	0	0	0	—0,200	0	—0,200	0	0	—0,200	0	—0,200
1—3	0	—0,200	+0,200	+0,200	0	+0,200	+0,400	0	0	—0,200	—0,200	0	0	+0,200
3—5	0	0	0	0	0	+0,200	0	0	0	+0,200	+0,200	+0	+0,200	0
0—3	0	+0,125	—0,320	—0,320	0	0	—0,320	+0,195	+0,320	+0,640	+0,320	0	0	—0,320
2—5	0	0	0	0	0	—0,125	0	0	0	—0,320	0	+0,125	0	+0,320
1—2	+0,320	+0,320	0	—0,125	—0,195	—0,320	—0,640	0	0	+0,320	+0,320	0	0	—0,320
3—4	0	0	0	0	0	0	+0,320	0	+0,125	0	—0,320	0	—0,125	0
0—1	—0,250	—0,250	+0,250	+0,250	+0,250	+0,250	+0,500	—0,250	—0,250	—0,500	—0,250	0	0	+0,250
Произведения величинъ $\Delta\lambda = \frac{l}{E\omega}$ на коэффициенты:														
Элем.	α	β	γ	δ	ϵ	η	ϑ	χ	λ	μ	ν	σ	π	ρ
0—2	—0,500	—0,500	0	+0,500	0	0	+0,500	0	—0,500	—1,000	—0,500	0	0	+0,500
2—4	0	0	0	0	0	0	—0,400	0	—0,400	0	0	—0,400	0	—0,400
1—3	0	—0,500	+0,500	+0,500	0	+0,500	+1,000	0	0	—0,500	—0,500	0	0	+0,500
3—5	0	0	0	0	0	+0,400	0	0	0	+0,400	+0,400	0	+0,400	0
0—3	0	+0,377	—0,966	—0,966	0	0	—0,966	+0,589	+0,966	+1,932	+0,966	0	0	—0,966
2—5	0	0	0	0	0	—0,417	0	0	0	—1,067	0	+0,417	0	+1,067
1—2	+2,844	+2,844	0	—1,111	—1,733	—2,844	—5,689	0	0	+2,844	+2,844	0	0	—2,844
3—4	0	0	0	0	0	0	+3,657	0	+1,429	0	—3,657	0	—1,429	0
0—1	—0,651	—0,651	+0,651	+0,651	+0,651	+0,651	+1,302	—0,651	—0,651	—1,302	—0,651	0	0	+0,651

Таблица X.

58

Н. В. НЕКРАСОВЪ.

коэфф. элем.	$(\alpha\alpha)$	$(\alpha\beta)$	$(\alpha\gamma)$	$(\alpha\delta)$	$(\alpha\varepsilon)$	$(\alpha\eta)$	$(\alpha\theta)$	$(\alpha\kappa)$	$(\alpha\lambda)$	$(\alpha\mu)$	$(\alpha\nu)$	$(\alpha\sigma)$	$(\alpha\pi)$	$(\alpha\rho)$
0—2	+ 0,100	+ 0,100	0	— 0,100	0	0	— 0,100	0	+ 0,100	+ 0,200	+ 0,100	0	0	— 0,100
2—4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3—5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0—3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—2	+ 0,910	+ 0,910	0	— 0,356	— 0,555	— 0,910	— 1,820	0	0	+ 0,910	+ 0,910	0	0	— 0,910
3—4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0—1	+ 0,163	+ 0,163	— 0,163	— 0,163	— 0,163	— 0,163	— 0,326	+ 0,163	+ 0,163	+ 0,326	+ 0,163	0	0	— 0,163
Σ	+ 1,173	+ 1,173	— 0,163	— 0,619	— 0,718	— 1,073	— 2,246	+ 0,163	+ 0,263	+ 1,436	+ 1,173	0	0	— 1,173
коэфф. элем.		$(\beta\beta)$	$(\beta\gamma)$	$(\beta\delta)$	$(\beta\varepsilon)$	$(\beta\eta)$	$(\beta\theta)$	$(\beta\kappa)$	$(\beta\lambda)$	$(\beta\mu)$	$(\beta\nu)$	$(\beta\sigma)$	$(\beta\pi)$	$(\beta\rho)$
0—2		+ 0,100	0	— 0,100	0	0	— 0,100	0	+ 0,100	+ 0,200	+ 0,100	0	0	— 0,100
2—4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—3		+ 0,100	— 0,100	— 0,100	0	— 0,100	— 0,200	0	0	+ 0,100	+ 0,100	0	0	— 0,100
3—5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0—3		+ 0,047	— 0,121	— 0,121	0	0	— 0,121	+ 0,074	+ 0,121	+ 0,242	+ 0,121	0	0	— 0,121
2—5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—2		+ 0,910	0	— 0,356	— 0,555	— 0,910	— 1,820	0	0	+ 0,910	+ 0,910	0	0	— 0,910
3—4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0—1		+ 0,163	— 0,163	— 0,163	— 0,163	— 0,163	— 0,326	+ 0,163	+ 0,163	+ 0,326	+ 0,173	0	0	— 0,163
Σ		+ 1,320	— 0,384	— 0,840	— 0,718	— 1,173	— 2,567	+ 0,237	+ 0,384	+ 1,778	+ 1,394	0	0	— 1,394

Таблица XI.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}
+1,17	+1,17	-0,16	-0,62	-0,72	-1,07	-2,25	+0,16	+0,26	+1,44	+1,17	0	0	-1,17
+1,17	+1,32	-0,38	-0,84	-0,72	-1,17	-2,57	+0,24	+0,38	+1,78	+1,39	0	0	-1,39
-0,16	-0,38	+0,57	+0,57	+0,16	+0,26	+0,84	-0,35	-0,47	-1,04	-0,57	0	0	+0,57
-0,62	-0,84	+0,57	+0,81	+0,38	+0,62	+1,65	-0,35	-0,57	-1,60	-1,03	0	0	+1,03
-0,72	-0,72	+0,16	+0,38	+0,50	+0,72	+1,44	-0,16	-0,16	-0,88	-0,72	0	0	+0,72
-1,07	-1,17	+0,26	+0,62	+0,72	+1,31	+2,35	-0,16	-0,16	-1,12	-1,09	-0,05	+0,08	+1,04
-2,25	-2,57	+0,84	+1,65	+1,44	+2,35	+6,35	-0,51	-0,20	-3,49	-3,93	+0,08	-0,46	+2,84
+0,16	+0,24	-0,35	-0,35	-0,16	-0,16	-0,51	+0,29	+0,35	+0,70	+0,35	0	0	-0,35
+0,26	+0,38	-0,47	-0,57	-0,16	-0,16	-0,20	+0,35	+0,83	+1,14	+0,12	+0,08	-0,18	-0,49
+1,44	+1,78	-1,04	-1,60	-0,88	-1,12	-3,49	+0,70	+1,14	+3,72	+2,23	-0,13	+0,08	-2,50
+1,17	+1,39	-0,57	-1,03	-0,72	-1,09	-3,93	+0,35	+0,12	+2,23	+2,83	0	+0,54	-1,58
0	0	0	0	0	-0,05	+0,08	0	+0,08	-0,13	0	+0,13	0	+0,21
0	0	0	0	0	+0,08	-0,46	0	-0,18	+0,08	+0,54	0	+0,26	0
-1,17	-1,39	+0,57	+1,03	+0,72	+1,04	+2,84	-0,35	-0,49	-2,50	-1,58	+0,21	0	+2,00

Таблица XII.

60

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}
+ 775,42	+ 180,18	- 297,62	0	+ 90,09	+ 90,09	+ 90,09	0	0	0	0	0	0	0
+ 180,18	+ 607,54	0	0	+ 90,09	+ 90,09	+ 90,09	+ 213,68	0	0	0	0	0	0
- 297,62	0	+ 775,42	+ 180,18	0	0	0	+ 90,09	+ 90,09	+ 90,09	0	0	0	0
0	0	+ 180,18	+ 689,08	+ 254,45	0	0	+ 90,09	+ 90,09	+ 90,09	0	0	0	0
+ 90,09	+ 90,09	0	+ 254,45	+ 689,08	+ 180,18	+ 180,18	0	0	0	0	0	0	0
+ 90,09	+ 90,09	0	0	+ 180,18	+ 809,12	+ 180,18	0	0	0	0	+ 314,47	0	0
+ 90,09	+ 90,09	0	0	+ 180,18	+ 180,18	+ 328,32	0	0	0	+ 74,07	0	0	0
0	+ 213,68	+ 90,09	+ 90,09	0	0	0	+ 607,54	+ 180,18	+ 180,18	0	0	0	0
0	0	+ 90,09	+ 90,09	0	0	0	+ 180,18	+ 1370,66	+ 180,18	0	0	+ 595,24	0
0	0	+ 90,09	+ 90,09	0	0	0	+ 180,18	+ 180,18	+ 328,32	0	0	0	+ 74,07
0	0	0	0	0	0	+ 74,07	0	0	0	+ 148,14	0	0	0
0	0	0	0	0	+ 314,47	0	0	0	0	0	+ 628,94	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	+ 595,24	0	0	0	+ 1190,48	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 74,07	0	0	0	+ 148,14

Н. В. НЕПРАСОВЪ.

Таблица XIII.

Элемен.	(S^0_α)	(S^0_β)	(S^0_γ)	(S^0_δ)	(S^0_ε)	(S^0_η)	(S^0_θ)	$\lambda \times 10^4$ m.
0—2	— 20,00	— 20,00	0	+ 20,00	0	0	+ 20,00	+ 10,00
2—4	0	0	0	0	0	0	— 16,00	+ 8,000
1—3	0	0	0	0	0	0	0	0
3—5	0	0	0	0	0	— 16,00	0	— 8,000
0—3	0	— 24,15	+ 61,88	+ 61,83	0	0	+ 61,83	— 19,321
2—5	0	0	0	0	0	0	0	0
1—2	0	0	0	0	0	0	0	0
3—4	0	0	0	0	0	0	0	0
0—1	0	0	0	0	0	0	0	0
Σ	— 20,00	— 44,15	+ 61,83	+ 81,83	0	— 16,00	+ 65,83	
Элемен.	(S^0_κ)	(S^0_λ)	(S^0_μ)	(S^0_ν)	(S^0_ω)	(S^0_π)	(S^0_ρ)	$\lambda \times 10^4$ m.
0—2	0	— 20,00	— 40,00	— 20,00	0	0	+ 20,00	+ 10,000
2—4	0	— 16,00	0	0	— 16,00	0	— 16,00	+ 8,000
1—3	0	0	0	0	0	0	0	0
3—5	0	0	— 16,00	— 16,00	0	— 16,00	0	— 8,000
0—3	— 37,68	— 61,83	— 123,65	— 61,83	0	0	+ 61,83	— 19,321
2—5	0	0	0	0	0	0	0	0
1—2	0	0	0	0	0	0	0	0
3—4	0	0	0	0	0	0	0	0
0—1	0	0	0	0	0	0	0	0
Σ	— 37,68	— 97,83	— 179,65	— 97,83	— 16,00	— 16,00	+ 65,83	

Помноживъ коэффициенты таблицы VIII на соотвѣтственныя величины

$$\Delta \lambda = \frac{l}{E\omega} \times 10^5,$$

выраженныя въ $\frac{m}{tn.}$, составимъ таблицу IX величинъ вида $\alpha \Delta \lambda \times 10^3$ и т. п.

Теперь суммы, обозначенныя символами, легко получаются умноженіемъ таблицы IX послѣдовательно на соотвѣтствующій каждому моменту вертикальный столбецъ табл. VIII и суммированіемъ произведеній. Для ясности въ таблицѣ X указанъ подробно ходъ вычисленій для первыхъ двухъ суммъ, а для остальныхъ приведены лишь окончательныя величины (выраженныя въ $\frac{1}{\text{tn.} \times \text{m.}}$ и увеличенныя въ 10^5 разъ) въ таблицѣ XI.

Послѣдняя заключаетъ въ себѣ, слѣдовательно, коэффициенты при неизвѣстныхъ моментахъ, представляющіе результатъ раскрытія суммъ уравненій (e), обозначенныхъ символами.

Затѣмъ въ таблицѣ XII помѣщены коэффициенты при неизвѣстныхъ, получающіеся отъ раскрытія скобокъ со множителями $\Delta \gamma = \frac{l}{6EI} \times 10^5$; (они также выражены въ $\frac{1}{\text{tn.} \times \text{m.}}$ и увеличены въ 10^5 разъ).

Остается еще вычисленіе величинъ, обозначенныхъ символами $(S^0\alpha)$, $(S^0\beta)$ и т. д.

Припомнимъ ихъ значеніе:

$$(S^0\alpha) = \sum S^0\Delta\lambda \cdot \alpha = \sum \frac{S^0l}{E\omega} \cdot \alpha = \sum \lambda \cdot \alpha \text{ и т. п.}$$

Беремъ величины α , β ... изъ таблицы VIII, а λ — изъ послѣдней графы таблицы VI.

Произведенія $\alpha\lambda$, $\beta\lambda$... и суммы ихъ приведены въ таблицѣ XIII, увеличенныя въ 10^5 разъ. Теперь имѣемъ всѣ величины, входящія въ уравненія (e). Складываемъ соотвѣтственно коэффициенты при одинаковыхъ M и помѣщаемъ ихъ въ таблицу XVI.

Въ графу, обозначенную A , помѣщаемъ величины $(S^0\alpha)$, $(S^0\beta)$ и т. д. съ обратными знаками, т. к. для рѣшенія свободные члены переносимъ въ правыя части уравненій (e). Предпослѣдній столбецъ таблицы XVI содержитъ (онъ отмѣченъ буквой Σ) въ себѣ такъ называемыя контрольныя суммы, служащія для повѣрки правильности вычисленій во время рѣшенія уравненій.

Для полученія этихъ суммъ складываются алгебраически величины всѣхъ коэффициентовъ въ данномъ уравненіи, въ томъ числѣ и свободного члена.

Значеніе этихъ суммъ выяснится при изложеніи примѣненнаго нами сокращеннаго метода рѣшенія уравненій, къ чему мы теперь и приступимъ.

Таблица XIV.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9
+ 776,59	+ 181,35	— 297,78	— 0,62	+ 89,37	+ 89,02	+ 87,84	+ 0,16	+ 0,26
+ 181,35	+ 608,86	— 0,38	— 0,84	+ 89,37	+ 88,92	+ 87,52	+ 213,92	+ 0,38
— 297,78	— 0,38	+ 775,99	+ 180,75	+ 0,16	+ 0,26	+ 0,84	+ 89,74	+ 89,62
— 0,62	— 0,84	+ 180,75	+ 689,89	+ 254,83	+ 0,62	+ 1,65	+ 89,74	+ 89,52
+ 89,37	+ 89,37	+ 0,16	+ 254,83	+ 689,58	+ 180,90	+ 181,62	— 0,16	— 0,16
+ 89,02	+ 88,92	+ 0,26	+ 0,62	+ 180,90	+ 810,43	+ 182,53	— 0,16	— 0,16
+ 87,84	+ 87,52	+ 0,84	+ 1,65	+ 181,62	+ 182,53	+ 334,67	— 0,51	— 0,20
+ 0,16	+ 213,92	+ 89,74	+ 89,74	— 0,16	— 0,16	— 0,51	+ 607,83	+ 180,53
+ 0,26	+ 0,38	+ 89,62	+ 89,52	— 0,16	— 0,16	— 0,20	+ 180,53	+ 1371,49
+ 1,44	+ 1,78	+ 89,05	+ 88,49	— 0,88	— 1,12	— 3,49	+ 180,88	+ 181,32
+ 1,17	+ 1,39	— 0,57	— 1,03	— 0,72	— 1,09	+ 70,14	+ 0,35	+ 0,12
0	0	0	0	0	+ 314,42	+ 0,08	0	+ 0,08
0	0	0	0	0	+ 0,08	— 0,46	0	+ 595,06
— 1,17	— 1,39	+ 0,57	+ 1,03	+ 0,72	+ 1,04	+ 2,84	— 0,35	— 0,49

M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	A	Σ	
+ 1,44	+ 1,17	0	0	— 1,17	+ 20,00	+ 947,63	1
+ 1,78	+ 1,39	0	0	— 1,39	+ 44,15	+ 1315,03	2
+ 89,05	— 0,57	0	0	+ 0,57	— 61,83	+ 866,42	3
+ 88,49	— 1,03	0	0	+ 1,03	— 81,83	+ 1312,20	4
— 0,88	— 0,72	0	0	+ 0,72	0	+ 1484,63	5
— 1,12	— 1,09	+ 314,42	+ 0,08	+ 1,04	+ 16,00	+ 1681,69	6
— 3,49	+ 70,14	+ 0,08	— 0,46	+ 2,84	— 65,83	+ 879,24	7
+ 180,88	+ 0,35	0	0	— 0,35	+ 37,68	+ 1399,65	8
+ 181,32	+ 0,12	+ 0,08	+ 595,06	— 0,49	+ 97,83	+ 2605,20	9
+ 332,04	+ 2,23	— 0,13	+ 0,08	+ 71,57	+ 179,65	+ 1122,91	10
+ 2,23	+ 150,97	0	+ 0,54	— 1,58	+ 97,83	+ 319,75	11
— 0,13	0	+ 629,07	0	+ 0,21	+ 16,00	+ 959,73	12
+ 0,08	+ 0,54	0	+ 1190,74	0	+ 16,00	+ 1802,04	13
+ 71,57	— 1,58	+ 0,21	0	+ 150,14	— 65,83	+ 157,31	14

16. Сокращенный способ рѣшенія уравненій *).

Изслѣдуемъ вопросъ сперва въ отвлеченной формѣ съ буквенными коэффициентами. Возьмемъ для опредѣленности выкладокъ систему уравненій съ шестью неизвѣстными; для большаго или меньшаго числа неизвѣстныхъ легко развить или сократить предлагаемую схему рѣшенія.

Уравненія напомнимъ съ символическими обозначеніями коэффициентовъ

$$\begin{aligned}
 (aa) M_1 + (ab) M_2 + (ae) M_3 + (ad) M_4 + (ae) M_5 \\
 + (af) M_6 &= (am) & (an), \\
 (ab) M_1 + (bb) M_2 + (bc) M_3 + (bd) M_4 + (be) M_5 \\
 + (bf) M_6 &= (bm) & (bn), \\
 (ac) M_1 + (bc) M_2 + (cc) M_3 + (cd) M_4 + (ce) M_5 \\
 + (cf) M_6 &= (cm) & (cn), \\
 (ad) M_1 + (bd) M_2 + (cd) M_3 + (dd) M_4 + (de) M_5 \\
 + (df) M_6 &= (dm) & (dn), \\
 (ae) M_1 + (be) M_2 + (ce) M_3 + (de) M_4 + (ee) M_5 \\
 + (ef) M_6 &= (em) & (en), \\
 (af) M_1 + (bf) M_2 + (cf) M_3 + (df) M_4 + (ef) M_5 \\
 + (ff) M_6 &= (fm) & (fn),
 \end{aligned}
 \tag{f}$$

Символами (an) , (bn) ... обозначены контрольныя суммы.

*) Идея этого способа принадлежит Гауссу; въ изложеніи его мы слѣдуемъ превосходной книгѣ Оппольцера (см. перечень литературы).

Начнемъ рѣшеніе уравненій съ исключенія неизвѣстнаго M_1 ; какъ мы указали въ главѣ II, наибольшій коэффициентъ при M_1 будетъ на діагонали, т. е. въ первомъ уравненіи, откуда и опредѣлимъ его, чтобы по возможности уменьшить ошибку; при всѣхъ вычисленіяхъ будемъ производить съ контрольными суммами всѣ тѣ дѣйствія, что и съ прочими коэффициентами.

M_1 опредѣлится:

$$M_1 = -\frac{(ab)}{(aa)} M_2 - \frac{(ac)}{(aa)} M_3 - \frac{(ad)}{(aa)} M_4 - \frac{(ae)}{(aa)} M_5 - \frac{(af)}{(aa)} M_6 \\ + \frac{(am)}{(aa)}, \quad -\frac{(an)}{(aa)}.$$

Подставимъ эту величину M_1 въ остальные пять уравненій и соберемъ коэффициенты при одинаковыхъ M . Получимъ

$$\left[(bb) - \frac{(ab)}{(aa)} (ab) \right] M_2 + \left[(bc) - \frac{(ab)}{(aa)} (ac) \right] M_3 + \left[(bd) - \frac{(ab)}{(aa)} (ad) \right] M_4 \\ + \left[(be) - \frac{(ab)}{(aa)} (ae) \right] M_5 + \left[(bf) - \frac{(ab)}{(aa)} (af) \right] M_6 = \left[(bm) - \frac{(ab)}{(aa)} (am) \right], \\ \left[(bn) - \frac{(ab)}{(aa)} (an) \right],$$

$$\left[(bc) - \frac{(ac)}{(aa)} (ab) \right] M_2 + \left[(cc) - \frac{(ac)}{(aa)} (ac) \right] M_3 + \left[(cd) - \frac{(ac)}{(aa)} (ad) \right] M_4 \\ + \left[(ce) - \frac{(ac)}{(aa)} (ae) \right] M_5 + \left[(cf) - \frac{(ac)}{(aa)} (af) \right] M_6 = \left[(cm) - \frac{(ac)}{(aa)} (am) \right], \\ \left[(cn) - \frac{(ac)}{(aa)} (an) \right],$$

$$\begin{aligned} & \left[(bd) - \frac{(ad)}{(aa)} (ab) \right] M_2 + \left[(cd) - \frac{(ad)}{(aa)} (ac) \right] M_3 + \left[(dd) - \frac{(ad)}{(aa)} (ad) \right] M_4 \\ & + \left[(de) - \frac{(ad)}{(aa)} (ae) \right] M_5 + \left[(df) - \frac{(ad)}{(aa)} (af) \right] M_6 = \left[(dm) - \frac{(ad)}{(aa)} (am) \right], \\ & \left[(dn) - \frac{(ad)}{(aa)} (an) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[(be) - \frac{(ae)}{(aa)} (ab) \right] M_2 + \left[(ce) - \frac{(ae)}{(aa)} (ac) \right] M_3 + \left[(de) - \frac{(ae)}{(aa)} (ad) \right] M_4 \\ & + \left[(ee) - \frac{(ae)}{(aa)} (ae) \right] M_5 + \left[(ef) - \frac{(ae)}{(aa)} (af) \right] M_6 = \left[(em) - \frac{(ae)}{(aa)} (am) \right], \\ & \left[(en) - \frac{(ae)}{(aa)} (an) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[(bf) - \frac{(af)}{(aa)} (ab) \right] M_2 + \left[(cf) - \frac{(af)}{(aa)} (ac) \right] M_3 + \left[(df) - \frac{(af)}{(aa)} (ad) \right] M_4 \\ & + \left[(ef) - \frac{(af)}{(aa)} (ae) \right] M_5 + \left[(ff) - \frac{(af)}{(aa)} (af) \right] M_6 = \left[(fm) - \frac{(af)}{(aa)} (am) \right], \\ & \left[(fn) - \frac{(af)}{(aa)} (an) \right]. \end{aligned}$$

Изъ разсмотрѣнія этихъ новыхъ уравненій легко вывести два слѣдствія:

1) новые коэффициенты при неизвѣстныхъ расположены также симметрично относительно діагонали;

2) сумма всѣхъ коэффициентовъ cadaго новаго уравненія равняется величинѣ, полученной путемъ параллельнаго съ прочими коэффициентами преобразованія контрольной суммы стараго уравненія.

Дѣйствительно, возьмемъ на примѣръ величину преобразованной суммы перваго изъ новыхъ уравненій и подставимъ въ нее вмѣсто (an) и (bn) ихъ выраженія:

$$\begin{aligned} & \left[(bn) - \frac{(ab)}{(aa)} (an) \right] = \left[(ab) + (bb) + (bc) + (bd) + (be) + (bf) \right. \\ & \left. + (bn) - \frac{(ab)}{(aa)} \{ (aa) + (ab) + (ac) + (ad) + (ae) + (af) + (an) \} \right]; \end{aligned}$$

очевидно, эта величина и выражаетъ сумму всѣхъ коэффициентовъ новаго уравненія.

Введемъ новыя символическія обозначенія

$$\left[(bb) - \frac{(ab)}{(aa)} (ab) \right] = (bb_1); \left[(bc) - \frac{(ab)}{(aa)} (bc) \right] = (bc_1) \text{ и т. п.}$$

и перепишемъ преобразованную систему въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} (bb_1) M_2 + (bc_1) M_3 + (bd_1) M_4 + (be_1) M_5 + (bf_1) M_6 &= (bm_1), (bn_1), \\ (bc_1) M_2 + (cc_1) M_3 + (cd_1) M_4 + (ce_1) M_5 + (cf_1) M_6 &= (cm_1), (cn_1), \\ (bd_1) M_2 + (cd_1) M_3 + (dd_1) M_4 + (de_1) M_5 + (df_1) M_6 &= (dm_1), (dn_1), (g) \\ (be_1) M_2 + (ce_1) M_3 + (de_1) M_4 + (ee_1) M_5 + (ef_1) M_6 &= (em_1), (en_1), \\ (bf_1) M_2 + (cf_1) M_3 + (df_1) M_4 + (ef_1) M_5 + (ff_1) M_6 &= (fm_1), (fn_1). \end{aligned}$$

Опредѣляемъ по предыдущему изъ перваго уравненія

$$\begin{aligned} M_2 &= -\frac{(bc_1)}{(bb_1)} M_3 - \frac{(bd_1)}{(bb_1)} M_4 - \frac{(be_1)}{(bb_1)} M_5 \\ &\quad - \frac{(bf_1)}{(bb_1)} M_6 + \frac{(bm_1)}{(bb_1)}, \quad -\frac{(bn_1)}{(bb_1)}. \end{aligned}$$

Подставляя въ прочія уравненія и вводя новыя символы (cc_2) , (cd_2) , получимъ

$$\begin{aligned} (cc_2) M_3 + (cd_2) M_4 + (ce_2) M_5 + (cf_2) M_6 &= (cm_2), (cn_2), \\ (cd_2) M_3 + (dd_2) M_4 + (de_2) M_5 + (df_2) M_6 &= (dm_2), (dn_2), \\ (ce_2) M_3 + (de_2) M_4 + (ee_2) M_5 + (ef_2) M_6 &= (em_2), (en_2), \\ (cf_2) M_3 + (df_2) M_4 + (ef_2) M_5 + (ff_2) M_6 &= (fm_2), (fn_2). \end{aligned} \quad (h)$$

Опредѣляемъ

$$M_3 = -\frac{(cd_2)}{(cc_2)} M_4 - \frac{(ce_2)}{(cc_2)} M_5 - \frac{(cf_2)}{(cc_2)} M_6 + \frac{(cm_2)}{(cc_2)}, -\frac{(cn_2)}{(cc_2)},$$

и, послѣ подстановки въ уравненія имѣемъ

$$(i) \quad \begin{aligned} (dd_3) M_4 + (de_3) M_5 + (df_3) M_6 &= (dm_3), (dn_3), \\ (de_3) M_4 + (ee_3) M_5 + (ef_3) M_6 &= (em_3), (en_3), \\ (df_3) M_4 + (ef_3) M_5 + (ff_3) M_6 &= (fm_3), (fn_3). \end{aligned}$$

Далѣе

$$M_4 = -\frac{(de_3)}{(dd_3)} M_5 - \frac{(df_3)}{(dd_3)} M_6 + \frac{(dm_3)}{(dd_3)}, -\frac{(dn_3)}{(dd_3)}.$$

Отсюда

$$(k) \quad \begin{aligned} (ee_4) M_5 + (ef_4) M_6 &= (em_4), (en_4), \\ (ef_4) M_5 + (ff_4) M_6 &= (fm_4), (fn_4). \end{aligned}$$

Изъ перваго уравненія системы (k) находимъ

$$M_5 = -\frac{(ef_4)}{(ee_4)} M_6 + \frac{(em_4)}{(ee_4)}, -\frac{(en_4)}{(ee_4)}$$

и послѣ подстановки имѣемъ уравненіе

$$(l) \quad (ff_5) M_6 = (fm_5), (fn_5),$$

изъ котораго окончательно опредѣляется

$$M_6 = +\frac{(fm_5)}{(ff_5)}.$$

Послѣ этого остальные неизвѣстныя легко найдутся обратной подстановкой.

При рѣшеніи подобной системы съ числовыми коэффициентами громадное сокращеніе работы достигается примѣненіемъ логариѳмической схемы, представленной на таблицѣ XV.

Въ верхнюю строку таблицы выписываются всѣ коэффициенты уравненія перваго и подъ ними ихъ логариѳмы; затѣмъ подписываются коэффициенты втораго уравненія кромѣ перваго коэффициента, одинаковаго со вторымъ перваго уравненія. Въ первый столбецъ слѣва помѣщаемъ $\lg \frac{(ab)}{(aa)}$ — логариѳмъ величины, на которую, какъ мы видѣли выше, нужно умножить всѣ коэффициенты (начиная со втораго) перваго уравненія и произведенія вычесть изъ соответствующихъ коэффициентовъ втораго уравненія.

Поэтому пишемъ $\lg \frac{(ab)}{(aa)}$ на нижній край бумажной ленты и, держа его послѣдовательно надъ каждымъ логариѳмомъ второй строки, получаемъ сложеніемъ логариѳмы вышеупомянутыхъ произведеній.

Подписывая величины этихъ произведеній подъ соответствующими коэффициентами уравненія втораго и производя вычитаніе, находимъ коэффициенты новаго уравненія, изъ котораго исключено M_1 ; подъ ними пишемъ опять таки ихъ логариѳмы.

Затѣмъ выписываемъ коэффициенты (кромѣ первыхъ двухъ) уравненія третьаго, съ которыми продѣлываемъ изложенную операцію два раза, и т. д. Ходъ вычисленія ясенъ изъ схемы; замѣтимъ, что послѣднія уравненія, получающіяся изъ cadaго основнаго и отмѣченнаго нами справа буквой *E*, можно назвать исключаящими уравненіями (Eliminationsgleichungen); при помощи ихъ ведется обратная подстановка неизвѣстныхъ. Провѣрка вычисленій легко достигается вычисленіемъ контрольных суммъ; нужно лишь особенно тщательно вычислять логариѳмы, помѣщенные въ первомъ столбцѣ, такъ какъ ошибка въ нихъ легко ускользаетъ отъ контроля.

При нѣкоторомъ навыкѣ въ вычисленіяхъ можно для провѣрки ограничиваться лишь вычисленіемъ суммъ, отмѣченныхъ!.

Схема вычисленія неизвѣстныхъ по окончаніи процесса исключенія показана на таблицѣ XVI и не требуетъ поясненій.

Опытъ показалъ, что для вычисленій со вполне достаточной точностью можно пользоваться пятизначными логариѳмами. Въ таблицахъ XVII и XVIII приведенъ числовой примѣръ рѣшенія системы шести уравненій при помощи описанной схемы. Въ послѣдней графѣ таблицы XVII подсчитаны контрольныя суммы, по которымъ можно судить о степени точности повѣрки.

Таблица XV.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	A	Σ	
(aa) $\lg(aa)$	(ab) $\lg(ab)$	(ac) $\lg(ac)$	(ad) $\lg(ad)$	ae $\lg(ac)$	af $\lg(af)$	am $\lg(am)$	an $\lg(an)$	E
$\lg \frac{(ab)}{(aa)}$	(bb) $\frac{(ab)}{(aa)} (ab)$	(bc) $\frac{(ab)}{(aa)} (ac)$	(bd) $\frac{(ab)}{(aa)} (ad)$	(be) $\frac{(ab)}{(aa)} (ae)$	(bf) $\frac{(ab)}{(aa)} (af)$	(bm) $\frac{(ab)}{(aa)} (am)$	(bn) $\frac{(ab)}{(aa)} (an)$	
	(bb_1) $\lg(bb_1)$	(bc_1) $\lg(bc_1)$	(bd_1) $\lg(bd_1)$	(be_1) $\lg(be_1)$	(bf_1) $\lg(bf_1)$	(bm_1) $\lg(bm_1)$	(bn_1) $\lg(bn_1)$	1 E!
$\lg \frac{(ac)}{(aa)}$		(cc) $\frac{(ac)}{(aa)} (ac)$	(cd) $\frac{(ac)}{(aa)} (ad)$	(ce) $\frac{(ac)}{(aa)} (ae)$	(cf) $\frac{(ac)}{(aa)} (af)$	(cm) $\frac{(ac)}{(aa)} (am)$	(cn) $\frac{(ac)}{(aa)} (an)$	
	$\frac{(bc_1)}{(bb_1)}$	(cc_1) $\frac{(bc_1)}{(bb_1)} (bc_1)$	(cd_1) $\frac{(bc_1)}{(bb_1)} (bd_1)$	(ce_1) $\frac{(bc_1)}{(bb_1)} (be_1)$	(cf_1) $\frac{(bc_1)}{(bb_1)} (bf_1)$	(cm_1) $\frac{(bc_1)}{(bb_1)} (bm_1)$	(cn_1) $\frac{(bc_1)}{(bb_1)} (bn_1)$	2
$\lg \frac{(ad)}{(aa)}$		(cc_2) $\lg(cc_2)$	(cd_2) $\lg(cd_2)$	(ce_2) $\lg(be_2)$	(cf_2) $\lg(cf_2)$	(cm_2) $\lg(cm_2)$	(cn_2) $\lg(cn_2)$	3 E!
			(dd) $\frac{(ad)}{(aa)} (ad)$	(de) $\frac{(ad)}{(aa)} (ae)$	(df) $\frac{(ad)}{(aa)} (af)$	(dm) $\frac{(ad)}{(aa)} (am)$	(dn) $\frac{(ad)}{(aa)} (an)$	
$\lg \frac{(bd_1)}{(bb_1)}$			(dd_1) $\frac{(bd_1)}{(bb_1)} (bd_1)$	(de_1) $\frac{(bd_1)}{(bb_1)} (be_1)$	(df_1) $\frac{(bd_1)}{(bb_1)} (bf_1)$	(dm_1) $\frac{(bd_1)}{(bb_1)} (bm_1)$	(dn_1) $\frac{(bd_1)}{(bb_1)} (bn_1)$	4
$\lg \frac{(cd_2)}{(cc_2)}$			(dd_2) $\frac{(cd_2)}{(cc_2)} (cd_2)$	(de_2) $\frac{(cd_2)}{(cc_2)} (ce_2)$	(df_2) $\frac{(cd_2)}{(cc_2)} (cf_2)$	(dm_2) $\frac{(cd_2)}{(cc_2)} (cm_2)$	(dn_2) $\frac{(cd_2)}{(cc_2)} (cn_2)$	5

Таблица XV (продолжение).

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	A	Σ	
			(dd_3) $\lg(dd_3)$	(de_3) $\lg(de_3)$	(df_3) $\lg(df_3)$	(dm_3) $\lg(dm_3)$	(dn_3) $\lg(dn_3)$	6 E!
$\lg \frac{(ae)}{(aa)}$				(ee) $\frac{(ae)}{(aa)}(ae)$	(ef) $\frac{(ae)}{(aa)}(af)$	(em) $\frac{(ae)}{(aa)}(am)$	(en) $\frac{(ae)}{(aa)}(an)$	
$\lg \frac{(be_1)}{(bb_1)}$				ee_1 $\frac{(be_1)}{(bb_1)}(be_1)$	ef_1 $\frac{(be_1)}{(bb_1)}(bf_1)$	em_1 $\frac{(be_1)}{(bb_1)}(bm_1)$	en_1 $\frac{(be_1)}{(bb_1)}(bn_1)$	7
$\lg \frac{(ce_2)}{(cc_2)}$				(ee_2) $\frac{(ce_2)}{(cc_2)}(ce_2)$	(ef_2) $\frac{(ce_2)}{(cc_2)}(cf_2)$	(em_2) $\frac{(ce_2)}{(cc_2)}(cm_2)$	(en_2) $\frac{(ce_2)}{(cc_2)}(cn_2)$	8
$\lg \frac{(de_3)}{(dd_3)}$				(ee_3) $\frac{(de_3)}{(dd_3)}(de_3)$	(ef_3) $\frac{(de_3)}{(dd_3)}(df_3)$	(em_3) $\frac{(de_3)}{(dd_3)}(dm_3)$	(en_3) $\frac{(de_3)}{(dd_3)}(dn_3)$	9
				(ee_4) $\lg(ee_4)$	(ef_4) $\lg(ef_4)$	(em_4) $\lg(em_4)$	(en_4) $\lg(en_4)$	10 E!
$\lg \frac{(af)}{(aa)}$					(ff) $\frac{(af)}{(aa)}(af)$	(fm) $\frac{(af)}{(aa)}(am)$	(fn) $\frac{(af)}{(aa)}(an)$	
$\lg \frac{(bf_1)}{(bb_1)}$					(ff_1) $\frac{(bf_1)}{(bb_1)}(bf_1)$	(fm_1) $\frac{(bf_1)}{(bb_1)}(bm_1)$	(fn_1) $\frac{(bf_1)}{(bb_1)}(bn_1)$	11
$\lg \frac{(cf_2)}{(cc_2)}$					(ff_2) $\frac{(cf_2)}{(cc_2)}(cf_2)$	(fm_2) $\frac{(cf_2)}{(cc_2)}(cm_2)$	(fn_2) $\frac{(cf_2)}{(cc_2)}(cn_2)$	12

Таблица XV (окончаніе).

lg	M_6	A	Σ	
$\lg \frac{(df_3)}{(dd_3)}$	(ff_3) $\frac{(df_3)}{(dd_3)} df_3$	(fm_3) $\frac{(df_3)}{(dd_3)} (dm_3)$	(fn_3) $\frac{(df_3)}{(dd_3)} (dn_3)$	13
$\lg \frac{(ef_4)}{(ee_4)}$	(ff_4) $\frac{(ef_4)}{(ee_4)} (ef_4)$	(fm_4) $\frac{(ef_4)}{(ee_4)} (em_4)$	(fn_4) $\frac{(ef_4)}{(ee_4)} (en_4)$	14
	(ff_5) $\lg(ff_5)$	(fm_5) $\lg(fm_5)$	(fn_5)	15 E !

Таблица XVI.

M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	
(fm_5)	(em_4) $-(ef_4) M_6$	(dm_3) $-(df_3) M_6$ $-(de_3) M_5$	(cm_2) $-(cf_2) M_6$ $-(ce_2) M_5$ $-(cd_2) M_4$	(bm_1) $-(bf_1) M_6$ $-(be_1) M_5$ $-(bd_1) M_4$ $-(bc_1) M_3$	(am) $-(af) M_6$ $-(ae) M_5$ $-(ad) M_4$ $-(ac) M_3$ $-(ab) M_2$	A M_6 M_5 M_4 M_3 M_2
(fm_5) $\lg(fm_5)$ $\lg(ff_5)$	$\Sigma(ex_4)$ $\lg \Sigma(ex_4)$ $\lg(ee_4)$	$\Sigma(dx_3)$ $\lg \Sigma(dx_3)$ $\lg(dd_3)$	$\Sigma(cx_2)$ $\lg \Sigma(cx_2)$ $\lg(cc_2)$	$\Sigma(bx_1)$ $\lg \Sigma(bx_1)$ $\lg(bb_1)$	$\Sigma(ax)$ $\lg \Sigma(ax)$ $\lg(aa)$	Σ $\lg \Sigma$ $\lg D$
$\lg M_6$ M_6	$\lg M_5$ M_5	$\lg M_4$ M_4	$\lg M_3$ M_3	$\lg M_2$ M_2	$\lg M_1$ M_1	$\lg M$ M

Контрольные суммы.

$(bb_1) + (bc_1) + (bd_1) + (be_1) + (bf_1) + (bm_1) = (bn_1)$	1!
$(bc_1) + (cc_1) + (cd_1) + (ce_1) + (cf_1) + (cm_1) = (cn_1)$	2
$(cc_2) + (cd_2) + (ce_2) + (cf_2) + (cm_2) = (cn_2)$	3!
$(bd_1) + (cd_1) + (dd_1) + (de_1) + (df_1) + (dm_1) = (dn_1)$	4
$(cd_2) + (dd_2) + (de_2) + (df_2) + (dm_2) = (dn_2)$	5
$(dd_3) + (de_3) + (df_3) + (dm_3) = (dn_3)$	6!
$(be_1) + (ce_1) + (de_1) + (ee_1) + (ef_1) + (em_1) = (en_1)$	7
$(ce_2) + (de_2) + (ee_2) + (ef_2) + (em_2) = (en_2)$	
$(de_3) + (ee_3) + (ef_3) + (em_3) = (en_3)$	9
$(ee_4) + (ef_4) + (em_4) = (en_4)$	10!
$(bf_1) + (cf_1) + (df_1) + (ef_1) + (ff_1) + (fm_1) = (fn_1)$	11
$(cf_2) + (df_2) + (ef_2) + (ff_2) + (fm_2) = (fn_2)$	12
$(df_3) + (ef_3) + (ff_3) + (fm_3) = (fn_3)$	13
$(ef_4) + (ff_4) + (fm_4) = (fn_4)$	14
$(ff_5) + (fm_5) = (fn_5)$	15!

Примѣняя только что описанный методъ къ системѣ уравненій, коэффициенты которыхъ даны въ таблицѣ XIV, мы опредѣлимъ величины неизвѣстныхъ

$$\begin{array}{ll}
 M_1 = -0,0392, & M_8 = -0,2344, \\
 M_2 = +0,1975, & M_9 = -0,0063, \\
 M_3 = -0,1158, & M_{10} = +0,9437, \\
 M_4 = -0,2466, & M_{11} = +0,8862, \\
 M_5 = +0,1968, & M_{12} = -0,0234, \\
 M_6 = +0,0988, & M_{13} = +0,0159, \\
 M_7 = -0,5662, & M_{14} = -0,8666.
 \end{array}$$

Для того чтобы получить изъ уравненій обобщеннаго метода уравненія для второй группы способовъ, достаточно, какъ мы видѣли въ главѣ II, приравнять нулю изгибающіе моменты для элементовъ рѣшетки, т. е. въ нашемъ случаѣ положить

$$M_2 = M_4 = M_8 = M_6 = M_8 = M_9 = M_{12} = M_{13} = 0.$$

При этомъ условіи, отбросивъ соотвѣтствующіе члены табл. XIV, получимъ новую систему

$$+ 776,59 M_1 - 297,78 M_3 + 87,84 M_7 + 1,44 M_{10} + 1,17 M_{11} - 1,17 M_{14} = 20,00,$$

$$- 297,78 M_1 + 775,99 M_3 + 0,84 M_7 + 89,05 M_{10} - 0,57 M_{11} + 0,57 M_{14} = -61,83,$$

$$+ 87,84 M_1 + 0,84 M_3 + 334,67 M_7 - 3,49 M_{10} + 70,14 M_{11} + 2,84 M_{14} = -65,83,$$

$$+ 1,44 M_1 + 89,05 M_3 - 3,49 M_7 + 332,04 M_{10} + 2,23 M_{11} + 71,57 M_{14} = 179,65,$$

$$+ 1,17 M_1 - 0,57 M_3 + 70,14 M_7 + 2,23 M_{10} + 150,97 M_{11} \\ - 1,58 M_{14} = 97,83,$$

$$- 1,17 M_1 + 0,57 M_3 + 2,84 M_7 + 71,57 M_{10} - 1,58 M_{11} \\ + 150,14 M_{14} = - 65,83.$$

Рѣшеніе этой системы было только что дано въ таблицахъ XVII-ой и XVIII-ой. Имѣемъ

$$\begin{aligned} M_1 &= - 0,0017 \text{ tn. - m,} & M_{10} &= + 0,7437, \\ M_3 &= - 0,1641, & M_{11} &= + 0,7895, \\ M_7 &= - 0,3470, & M_{14} &= - 0,7775. \end{aligned}$$

Перейдемъ теперь къ вычисленію по способу Мора. Величины угловъ вращенія элементовъ опредѣляются формулами вида

$$\psi_{0-1} = \sum \lambda \cdot \sigma_{0-1} \text{ и т. п.,}$$

гдѣ суммирование распространяется на всѣ элементы фермы. Величины λ беремъ изъ таблицы VI, а σ изъ таблицъ V и VI.

Имѣя углы ψ , легко опредѣлимъ углы вращенія узловъ φ — изъ системы уравненій вида (см. главу II)

$$2\varphi_N \sum N_{NX} + \sum N_{NX} \varphi_X = 3 \sum N_{NX} \psi_{NX}.$$

Входящія въ это уравненіе суммы $\sum N_{NX}$ и $\sum N_{NX} \psi_{NX}$ помѣщены въ

таблицѣ XX для узловъ 0, 1, 2, 3; ввиду симметричности нагрузки углы вращенія узловъ 4 и 5 равняются нулю

$$\varphi_4 = \varphi_5 = 0.$$

Табли

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
+ 776,59 2,89019	— 297,78 2 _n 47390	+ 87,84 1,94369	+ 1,44 0,15836	+ 1,17 0,06819
9 _n 58370	+ 775,990 + 114,182	+ 0,840 — 33,682	+ 89,050 — 0,552	— 0,570 — 0,449
	+ 661,808 2,82073	+ 34,522 1,53810	+ 89,602 1,95232	— 0,121 9 _n 08279
9,05350		+ 334,670 + 9,936	— 3,490 + 0,163	+ 70,140 + 0,132
8,71737		+ 324,734 + 1,801	— 3,653 + 4,674	+ 70,008 — 0,006
		+ 322,933 2,50911	— 8,327 0 _n 92049	+ 70,014 1,84518
7,26817			+ 332,040 + 0,003	+ 2,230 + 0,002
9,13159			+ 332,037 + 12,131	+ 2,228 — 0,016
8 _n 41138			+ 319,906 + 0,215	+ 2,244 — 1,805
			+ 319,691 2,50473	+ 4,049 0,60735
7,17800				+ 150,970 + 0,002
6 _n 26206				+ 150,968 0
9,33607				+ 150,968 + 15,179
8,10262				+ 135,789 + 0,051
				+ 135,738 2,13270
7 _n 17800				
6,26206				
7,96306				
9,35038				
8 _n 36257				

ца XVII.

XVII

M_6	A	Σ		Σ'
—1,17 0 _n 06819	+ 20,00 1,30103	+ 588,09 2,76944	E	
+ 0,570 + 0,449	— 61,830 — 7,669	+ 506,270 — 225,501		
+ 0,121 9,08279	— 54,161 1 _n 73369	+ 731,771 2,86438	1 E'	+ 731,771
+ 2,840 — 0,132	— 65,830 — 2,262	+ 427,010 + 66,519		
+ 2,972 + 0,006	— 68,092 — 2,825	+ 360,491 + 38,172	2	+ 360,491
+ 2,966 0,47217	— 65,267 1 _n 81469	+ 322,319 2,50829	3 E'	+ 322,319
+ 71,570 — 0,002	+ 179,650 + 0,037	+ 672,490 + 1,090		
+ 71,572 + 0,016	+ 179,613 — 7,333	+ 671,400 + 99,077	4	+ 671,399
+ 71,556 — 0,076	+ 186,946 + 1,683	+ 572,323 — 8,311	5	+ 572,325
+ 71,632 1,85511	+ 185,263 2,26779	+ 580,634 2,76390	6 E'	+ 580,635
— 1,580 — 0,002	+ 97,830 + 0,030	+ 320,190 + 0,886		
— 1,578 0	+ 97,800 + 0,010	+ 319,304 — 0,134	7	+ 319,305
— 1,578 + 0,643	+ 97,790 — 14,150	+ 319,438 + 69,882	8	+ 319,438
— 2,221 + 0,907	+ 111,940 + 2,347	+ 249,556 + 7,354	9	+ 249,557
— 3,128 0 _n 49527	+ 109,593 2,03978	+ 242,202 2,38418	10 E'	+ 242,203
+ 150,140 + 0,002	— 65,830 — 0,030	+ 156,540 — 0,886		
+ 150,138 0	— 65,800 — 0,010	+ 157,426 + 0,134	11	+ 157,425
+ 150,138 + 0,027	— 65,790 — 0,599	+ 157,292 + 2,960	12	+ 157,292
+ 150,111 + 16,050	— 65,191 + 41,512	+ 154,332 + 130,101	13	+ 154,331
+ 134,061 + 0,072	— 106,703 — 2,526	+ 24,231 — 5,582	14	+ 24,230
+ 133,989 2,12707	— 104,177 2 _n 01777	+ 29,813	15 E'	+ 29,812

Таблица XVIII.

M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	A
— 104,177	+ 109,593	+ 185,263	— 65,267	— 54,161	+ 20,000	A
	— 2,432	+ 55,693	+ 2,306	+ 0,094	— 0,910	M_6
		— 3,197	— 55,274	+ 0,096	— 0,924	M_5
			+ 6,193	— 66,640	— 1,071	M_4
				+ 11,978	+ 30,476	M_3
					— 48,880	M_2
						M_1
— 104,177	+ 107,161	+ 237,759	— 112,042	— 108,633	— 1,309	Σ
2_n 01777	2,03004	2,37614	2_n 04938	2_n 03596	0_n 11694	$\lg \Sigma$
2,12707	2,13270	2,50473	2,50911	2,82073	2,89019	$\lg D$
9_n 89070	9,89734	9,87141	9_n 54027	9_n 21523	7_n 22675	$\lg M$
— 0,7775	+ 0,7895	0,7437	— 0,3470	— 0,1641	— 0,0017	M

Таблица XIX.

Углы ψ увеличены въ 10^5 разъ.

Эле- мен- ты.	0—2	2—4	1—3	3—5	0—3	2—5	1—2	3—4	0—1	$\lambda \times 10^2$ см.
0—2	0	+20,00	+20,00	—20,00	+20,00	0	0	0	+20,00	+10,000
0'—2'										+10,000
2—4	+16,00	0	+16,00	+16,00	+16,00	+16,00	+16,00	0	+16,00	+ 8,000
4—2'										+ 8,000
1—3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1'—3'										0
3—5	+16,00	+16,00	+16,00	0	+16,00	0	+16,00	+16,00	+16,00	+ 8,000
5—3'										+ 8,000
0—3	0	+61,83	+61,83	—61,83	+24,15	0	0	0	0	—19,321
0'—3'										—19,321
ψ	+32,00	+97,83	+113,83	—65,83	+76,15	+16,00	+32,10	+16,00	+52,00	

Таблица XX.

Узлы.	Элем.	$N = \frac{2EI}{l}$ 10 tn. - m.	ΣN	$\psi \times 10^4$	$\psi N \times 10^4$ 10 tn. - m.	$\Sigma \psi N$	$3\Sigma \psi N$
0	0—1	11,2	63,8	+ 5,200	+ 58,24	+ 295,43	+ 886,29
	0—2	37,0		+ 3,200	+ 118,40		
	0—3	15,6		+ 7,615	+ 118,79		
1	1—0	11,2	61,3	+ 5,200	+ 58,24	+ 521,33	+ 1563,99
	1—2	13,1		+ 3,200	+ 41,92		
	1—3	37,0		+ 11,383	+ 421,17		
2	2—0	37,0	105,7	+ 3,200	+ 118,40	+ 617,52	+ 1852,56
	2—1	13,1		+ 3,200	+ 41,92		
	2—4	45,0		+ 9,783	+ 440,24		
	2—5	10,6		+ 1,600	+ 16,96		
3	3—0	15,6	103,2	+ 7,615	+ 118,79	+ 252,68	+ 758,04
	3—1	37,0		+ 11,383	+ 421,17		
	3—4	5,6		+ 1,600	+ 8,96		
	3—5	45,0		— 6,583	— 296,24		

Подставляя найденныя въ табл. XX величины въ уравненія, получимъ систему

$$127,6\varphi_0 + 11,2\varphi_1 + 37,0\varphi_2 + 15,6\varphi_3 = 886,29,$$

$$11,2\varphi_0 + 122,6\varphi_1 + 13,1\varphi_2 + 37,0\varphi_3 = 1563,99,$$

$$37,0\varphi_0 + 13,1\varphi_1 + 211,4\varphi_2 = 1852,56,$$

$$15,6\varphi_0 + 37,0\varphi_1 + 206,4\varphi_3 = 758,04.$$

Разрѣшая ее, находимъ величины

$$\varphi_0 = 3,6369, \quad \varphi_2 = 7,4321,$$

$$\varphi_1 = 11,2117, \quad \varphi_3 = 1,3879.$$

Затѣмъ по формулѣ

$$M_{MN} = N_{MN} (2\varphi_M + \varphi_X - 3\psi_{MN})$$

опредѣляемъ изгибающіе моменты, а также напряженія и отношенія полныхъ напряженій къ основнымъ. Всѣ эти величины помѣщены въ табл. XXI.

Таблица XXI.

Элементы.	Углы.	Величина угловъ.	Результ. углы.	Моменты кг.-см	Наиб. напр. кг./см. ²	$\frac{N}{n}$
0—1	φ_0	+ 3,6369	+ 2,8855	+ 3232	± 67	—
	φ_1	+ 11,2117	+ 10,4603	+ 11716		
	ψ_{0-1}	+ 5,200				
0—2	φ_0	+ 3,6369	+ 5,1059	+ 18892	+ 142	1,28
	φ_2	+ 7,4321	+ 8,9011	+ 32934		
	ψ_{0-2}	+ 3,200				
0—3	φ_0	+ 3,6369	— 14,1833	— 22126	± 123	1,20
	φ_3	+ 1,3879	— 16,4323	— 25634		
	ψ_{0-3}	+ 7,615				
1—2	φ_1	+ 11,2117	+ 20,2555	+ 26535	± 164	—
	φ_2	+ 7,4321	+ 16,4759	+ 21583		
	ψ_{1-2}	+ 3,200				
1—3	φ_1	+ 11,2117	— 10,3377	— 38249	— 164	—
	φ_3	+ 1,3879	— 20,1615	— 74598	+ 318	
	ψ_{1-3}	+ 11,383				
2—4	φ_2	+ 7,4321	— 14,4848	— 65182	+ 270	1,68
	φ_4	0	— 21,9169	— 98626		
	ψ_{2-4}	+ 9,783				
2—5	φ_2	+ 7,4321	+ 10,0642	+ 10668	± 63	—
	φ_5	0	+ 2,6321	+ 2790		
	ψ_{2-5}	+ 1,600				
3—4	φ_3	+ 1,3879	— 2,0242	— 1134	± 21	—
	φ_4	0	— 3,4121	— 1911		
	ψ_{3-4}	+ 1,600				
3—5	φ_3	+ 1,3879	+ 22,5248	+ 101362	— 376	1,94
	φ_5	0	+ 21,1369	+ 95116		
	ψ_{3-5}	— 6,583				

Наконецъ для разсчета по четвертому способу нужно игнорировать вліяніе жесткости узловъ на величину продольныхъ усилій и кромѣ того предполагать рѣшетку прикрѣпленной шарнирно.

Соотвѣтственно этимъ допущеніямъ, мы получимъ нужныя уравненія изъ таблицъ XII и XIII, полагая снова

$$M_2 = M_4 = M_5 = M_6 = M_8 = M_9 = M_{12} = M_{13} = 0$$

и отбрасывая соотвѣтствующія этимъ моментамъ уравненія

Имѣемъ систему

$$\begin{aligned} + 775,42 M_1 - 297,62 M_3 + 90,09 M_7 &= + 20,00, \\ - 297,62 M_1 + 775,42 M_3 + 90,09 M_{10} &= - 61,83, \\ + 90,09 M_1 + 328,32 M_7 + 74,07 M_{11} &= - 65,83, \\ + 90,09 M_3 + 328,32 M_{10} + 74,07 M_{14} &= + 179,65, \\ + 74,07 M_7 + 148,14 M_{11} &= + 97,83, \\ + 74,07 M_{10} + 148,14 M_{14} &= - 66,83. \end{aligned}$$

Рѣшая ее, находимъ

$$\begin{aligned} M_1 &= + 0,0075 \text{ тн.-м.}, & M_{10} &= + 0,7816, \\ M_3 &= - 0,1677, & M_{11} &= + 0,8585, \\ M_7 &= - 0,3962, & M_{14} &= - 0,8352. \end{aligned}$$

17. Примѣръ II. Двухраскосная ферма.

Двухраскосная ферма примѣра II-го является статически-неопредѣлимой системой, такъ какъ число узловъ ея $n = 10$, а число элементовъ равно 19, что даетъ двѣ статически неопредѣлимыхъ величины.

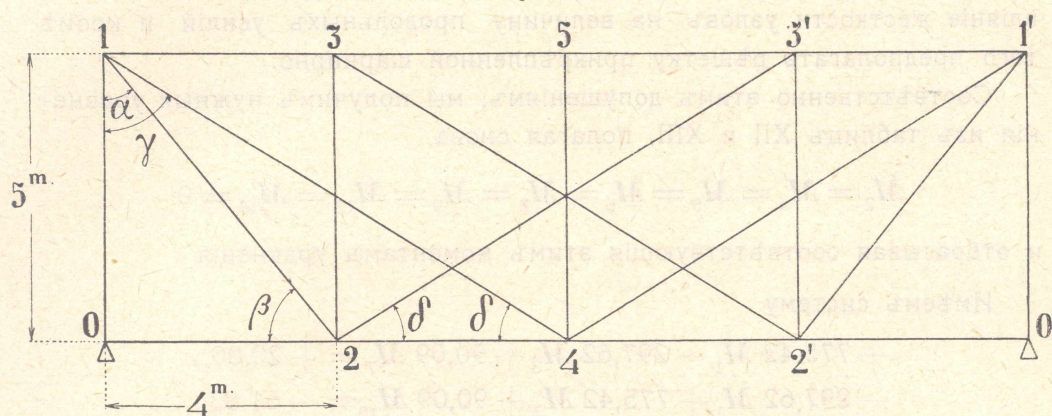
Поэтому разсчетъ усилій въ элементахъ шарнирной фермы долженъ быть произведенъ по теоремѣ о наибольшей работѣ деформации. При этомъ не будемъ разсматривать вліяніе измѣненій температуры на усилія и пренебрежемъ работой опорныхъ реакцій. Тогда для составленія выраженія работы деформации придется взять сумму работъ отдѣльныхъ элементовъ

$$A = \sum \frac{S^2 l}{2E\omega} \quad (a)$$

Примемъ усилія въ элементахъ 3—2' и 2—3' за неизвѣстныя величины и назовемъ

$$\begin{aligned} S_{3-2}' &= x, \\ S_{2-3}' &= y. \end{aligned}$$

Черт. 9.



$$\begin{aligned}
 \alpha &= 38^{\circ}40' & \sin \alpha &= \cos \beta = 0,6247 & \gamma &= 58^{\circ} & \sin \gamma &= \cos \delta = 0,8480 \\
 \beta &= 51^{\circ}20' & \cos \alpha &= \sin \beta = 0,7809 & \delta &= 32^{\circ} & \sin \delta &= \cos \gamma = 0,5299 \\
 & & \operatorname{Tg} \alpha &= \operatorname{Cotg} \beta = 0,8000 & & & \operatorname{Tg} \gamma &= \operatorname{Cotg} \delta = 1,6000
 \end{aligned}$$

Таблица XXII.

Название элем.	№ № элемент.	ω brutto cm^2 .	ω netto cm^2 .	I brutto cm^4 .	I netto cm^4 .	e_1	e_2	l
Нижний поясъ.	0 — 2	94	80	10127	8266	10	25	400
	2 — 4	94	80	10127	8266	10	25	400
Верхний поясъ.	1 — 3	142	121	17124	16932	7	32	400
	3 — 5	200	172	37397	36867	8	42	400
Раскосы.	1 — 2	87	81	8542	8098	17	17	640
	1 — 4	91	81	1877	1471	10	10	943
	3 — 2'	37	32,5	1286	1220	13	13	943
Стойки.	0 — 1	131	120	9775	9091	17,5	17,5	500
	2 — 3	79	70	2890	2151	13	13	500
	4 — 5	64	56	1066	864	9	9	500

Тогда усилие S въ какомъ-либо элементѣ статически неопредѣлимой фермы выразится формулой

$$(b) \quad S = S^0 + ax + by.$$

Здѣсь S^0 —усиліе въ соответствующемъ элементѣ основной статически опредѣлимой фермы (получается изъ данной удаленіемъ элементовъ 3—2' и 2—3') подѣ дѣйствіемъ заданной нагрузки; a и b соответственно усилія въ томъ же элементѣ отъ дѣйствія силъ $x=1$ и $y=1$ на основную ферму (черт. 10). Дифференцируя $A(a)$ послѣдовательно по x и по y и приравнявая производныя нулю, получимъ

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \sum \frac{Sl}{E\omega} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \sum \frac{Sl}{E\omega} \cdot \frac{\partial S}{\partial y} = 0,$$

или

$$\sum \frac{S^0 l}{E\omega} \cdot a + \sum \frac{l}{E\omega} \cdot a^2 x + \sum \frac{l}{E\omega} \cdot aby = 0,$$

$$\sum \frac{S^0 l}{E\omega} \cdot b + \sum \frac{l}{E\omega} \cdot abx + \sum \frac{l}{E\omega} \cdot b^2 y = 0.$$

Сокращая на E и полагая

$$\sum a \cdot \frac{S^0 l}{\omega} = C, \quad \sum b \cdot \frac{S^0 l}{\omega} = D, \quad \sum ab \cdot \frac{l}{\omega} = B,$$

и, вслѣдствіе симметричности фермы,

$$\sum a^2 \frac{l}{\omega} = \sum b^2 \frac{l}{\omega} = A,$$

получимъ уравненія

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ Bx + Ay + D &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x = \frac{BD - AC}{A^2 - B^2}; \quad y = \frac{BC - AD}{A^2 - B^2}.$$

Подстановка вычисленныхъ x и y въ формулы вида (b) дастъ усилія въ статически неопредѣлимой шарнирной фермѣ.

Вычисленіе произведено для груза $P=1^{tn}$, помѣщенного послѣдовательно въ узлахъ 2, 3, 4, 5. При положеніи груза въ узлѣ 1, очевидно, только $S_{0-1} = -1^{tn}$, прочія же усилія равны нулю.

Такъ какъ при дальнѣйшемъ подсчетѣ приходится пользоваться усиліями отъ горизонтальныхъ и наклонныхъ силъ, то кромѣ подсчетовъ для груза P , были произведены опредѣленія усилій отъ дѣйствія горизонтальной силы $P'=1^{tn}$, направленной слѣва направо и прилагаемой послѣдовательно во всѣхъ узлахъ фермы. При этомъ при положеніи силы $P'=1$ въ узлѣ 2' лишь $S^{1'-2'} = -1^{tn}$, прочія

Черт. 10.

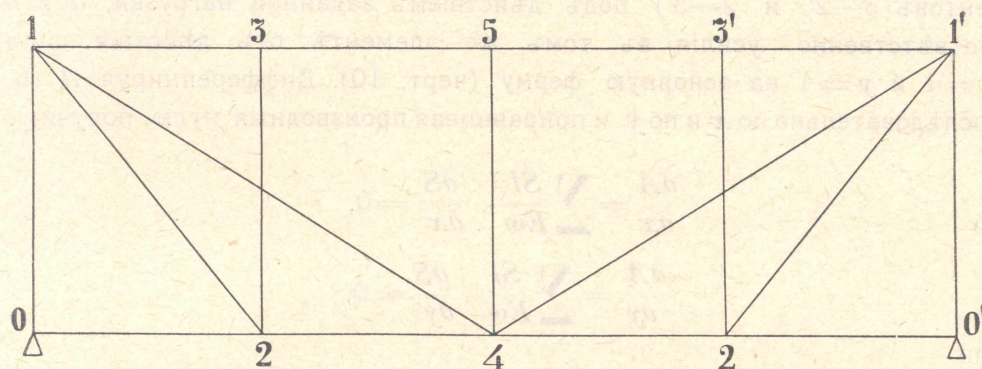


Таблица XXIII.

Элементы.	a	b	$\frac{l}{\omega} \left(\frac{1}{\text{cm.}} \right)$	$\frac{al}{\omega} \left(\frac{1}{\text{cm.}} \right)$	$\frac{bi}{\omega} \left(\frac{1}{\text{cm.}} \right)$	$\frac{a^2 l}{\omega} \left(\frac{1}{\text{cm.}} \right)$	$\frac{abl}{\omega} \left(\frac{1}{\text{cm.}} \right)$
0 — 2	0	0	4,2553	0	0	0	0
2 — 4	+ 0,424	— 1,272	4,2553	+ 1,804	— 5,413	+ 0,765	— 2,295
4 — 2'	— 1,272	+ 0,424	4,2553	— 5,413	+ 1,804	+ 6,885	— 2,295
2' — 0'	0	0	4,2353	0	0	0	0
1 — 3	+ 0,424	— 0,424	2,8169	+ 1,194	— 1,194	+ 0,506	— 0,506
3 — 5	— 0,424	— 0,424	2,0000	— 0,848	— 0,848	+ 0,360	+ 0,360
5 — 3'	— 0,424	— 0,424	2,0000	— 0,848	— 0,848	+ 0,350	+ 0,360
3' — 1'	— 0,424	+ 0,424	2,8169	— 1,194	+ 1,194	+ 0,506	— 0,506
0 — 1	0	0	3,8168	0	0	0	0
2 — 3	— 0,530	0	6,3291	— 3,354	0	+ 1,778	0
4 — 5	0	0	7,8125	0	0	0	0
3' — 2'	0	— 0,530	6,3291	0	— 3,354	0	0
0' — 1'	0	0	3,8168	0	0	0	0
1 — 2	+ 0,679	— 0,679	7,3553	+ 4,995	— 4,995	+ 3,392	— 3,392
1 — 4	— 1,000	+ 1,000	10,3626	— 10,363	— 10,363	+ 10,363	— 10,363
2 — 3'	+ 1,000	0	25,4855	+ 25,487	0	+ 25,487	0
3 — 2'	0	+ 1,000	25,4865	0	+ 25,487	0	0
4 — 1'	+ 1,000	— 1,000	10,3626	+ 10,363	— 10,363	+ 10,363	— 10,363
2 — 1'	— 0,679	+ 0,679	7,3553	— 4,995	+ 4,995	+ 3,392	— 3,392
					$\Sigma =$	+ 64,157	— 32,392

Таблица XXIV.

Элементы.	Грузъ $P = 1^{tn}$ въ узлахъ:				Горизонтальная сила $P = 1^{tn}$ въ узлахъ:							
	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	3'	1'
0—2	0	0	0	0	—1,000	0	0	0	0	0	0	0
2—4	+0,800	+0,800	0	0	—1,000	0	—1,000	0	0	0	0	0
4—2'	0	0	0	0	—1,000	—1,000	—1,000	—1,000	—1,000	—1,000	—1,000	—1,000
2'—0'	0	0	0	0	—1,000	—1,000	—1,000	—1,000	—1,000	—1,000	—1,000	—1,000
1—3	—0,400	—0,400	—0,800	—0,800	0	—0,500	0	+0,500	0	+0,500	+0,500	+0,500
3—5	—0,400	—0,400	—0,800	—0,800	0	—0,500	0	—0,500	0	+0,500	+0,500	+0,500
5—3'	—0,400	—0,400	—0,800	—0,800	0	—0,500	0	—0,500	0	—0,500	+0,500	+0,500
3'—1'	—0,400	—0,400	—0,800	—0,800	0	—0,500	0	—0,500	0	—0,500	—0,500	+0,500
0—1	—0,750	—0,750	—0,500	—0,500	0	+0,313	0	+0,313	0	+0,313	+0,313	+0,313
2—3	0	—1,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—5	0	0	0	—1,000	0	0	0	0	0	0	0	0
2'—3'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0'—1'	—0,250	—0,250	—0,500	—0,500	0	—0,313	0	—0,313	0	—0,313	—0,313	—0,313
1—2	+1,280	+1,280	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—4	—0,472	—0,472	+0,943	+0,943	0	—0,590	0	—0,590	0	—0,590	—0,590	—0,590
2'—3'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3—2'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—1'	+0,472	+0,472	+0,943	+0,943	0	+0,590	0	+0,590	0	+0,590	+0,590	+0,590
2'—1'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ФЕРМЫ СЪ ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ.

Таблица XXV.

86

Нагрузк.	Грузъ $P=1^{tn}$. въ у. 2.		Грузъ $P=1^{tn}$. въ у. 3.		Грузъ $P=1^{tn}$. въ у. 4.		Грузъ $P=1^{tn}$. въ у. 5.		Сила $P'=1^{tn}$. въ у. 0.		Сила $P'=1^{tn}$. въ у. 1.	
Элем.	$S^0 \frac{al}{\omega} \text{ tn.}$ $\omega \text{ cm.}$	$S^0 \frac{bl}{\omega} \text{ tn.}$ $\omega \text{ cm.}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$
0—2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—4	+ 1,443	— 4,330	+ 1,443	— 4,330	0	0	0	0	— 1,804	+ 5,413	0	0
4—2'	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 5,413	— 1,804	+ 5,413	— 1,804
2'—0'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—3	— 0,478	+ 0,478	— 0,478	+ 0,478	— 0,955	+ 0,955	— 0,955	+ 0,955	0	0	— 0,597	+ 0,597
3—5	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,678	+ 0,678	+ 0,678	+ 0,678	0	0	+ 0,424	+ 0,424
5—3'	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,678	+ 0,678	+ 0,678	+ 0,678	0	0	+ 0,424	+ 0,424
3'—1'	+ 0,478	— 0,478	+ 0,478	— 0,478	+ 0,955	— 0,955	+ 0,955	— 0,955	0	0	+ 0,597	— 0,597
0—1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—3	0	0	+ 3,354	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2'—3'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0'—1'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—2	+ 6,394	— 6,394	+ 6,394	— 6,394	0	0	0	0	0	0	0	0
1—4	+ 4,891	— 4,891	+ 4,891	— 4,891	— 9,772	+ 9,772	— 9,772	+ 9,772	0	0	+ 6,114	— 6,114
2—3'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3—2'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—1'	+ 4,891	— 4,891	+ 4,891	— 4,891	+ 9,772	— 9,772	+ 9,772	— 9,772	0	0	+ 6,114	— 6,114
2'—1'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Σ	+ 18,297	— 19,828	+ 21,651	— 19,828	+ 1,356	+ 1,356	+ 1,356	+ 1,356	+ 3,609	+ 3,609	+ 18,489	— 13,184

Н. В. НЕПРАСОВЪ.

Таблица XXVI.

Нагр.	Сила $P' = 1^{tn}$. въ у. 2.		Сила $P' = 1^{tn}$. въ у. 3.		Сила $P' = 1^{tn}$. въ у. 4.		Сила $P' = 1^{tn}$. въ у. 5.		Сила $P' = 1^{tn}$. въ у. 3'.		Сила $P' = 1^{tn}$. въ у. 1'.	
Элем.	$S^0 \frac{al}{\omega} \text{ tn.}$ $\omega \text{ см.}$	$S^0 \frac{bl}{\omega} \text{ tn.}$ $\omega \text{ см.}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$
0—2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—4	—1,804	+5,413	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—2'	+5,413	—1,804	+5,413	—1,804	+5,413	—1,804	+5,413	—1,804	+5,413	—1,804	+5,413	—1,804
2'—0'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—3	0	0	+0,597	—0,597	0	0	+0,597	—0,597	+0,597	—0,597	+0,597	—0,597
3—5	0	0	+0,424	+0,424	0	0	—0,424	—0,424	—0,424	—0,424	—0,424	—0,424
5—3'	0	0	+0,424	+0,424	0	0	+0,424	+0,424	—0,424	—0,424	—0,424	—0,424
3'—1'	0	0	+0,597	—0,597	0	0	+0,597	—0,597	+0,597	—0,597	—0,597	+0,597
0—1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2'—3'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0'—1'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—4	0	0	+6,114	—6,114	0	0	+6,114	—6,114	+6,114	—6,114	+6,114	—6,114
2—3'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3—2'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—1'	0	0	+6,114	—6,114	0	0	+6,114	—6,114	+6,114	—6,114	+6,114	—6,114
2'—1'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Σ	+3,609	+3,609	+19,683	—14,378	+5,413	—1,804	+18,835	—15,226	+17,987	—16,074	+16,793	—14,880

ФЕРМЫ СЪ ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ.

Таблица XXVII.

Наимен. величинъ.	Грузъ $P = 1^{tn.}$, прилож. въ узлахъ:				Сила $P' = 1^{tn.}$ въ узл.	
	2	3	4	5	0	1
<i>C</i>	+ 18,297	+ 21,651	+ 1,356	+ 1,356	+ 3,609	+ 18,489
<i>D</i>	— 19,828	— 19,828	+ 1,356	+ 1,356	+ 3,609	— 13,184
<i>BD</i>	+ 642,269	+ 642,269	— 43,924	— 43,924	— 116,903	+ 427,056
<i>AC</i>	+ 1173,881	+ 1389,063	+ 86,997	+ 86,997	+ 231,543	+ 1186,199
<i>BC</i>	— 592,676	— 701,319	— 43,924	— 43,924	— 116,903	— 598,896
<i>AD</i>	— 1272,105	— 1272,105	+ 86,997	+ 86,997	+ 231,543	— 845,846
<i>x</i>	— 0,1733	— 0,2435	— 0,0427	— 0,0427	— 0,1136	— 0,2475
<i>y</i>	+ 0,2215	+ 0,1861	— 0,0427	— 0,0427	— 0,1136	+ 0,0805

Наимен. величинъ.	Сила $P' = 1^{tn.}$ приложена въ узлахъ:					
	2	3	4	5	3 ¹	1 ¹
<i>C</i>	+ 3,609	+ 19,683	+ 5,413	+ 18,835	+ 17,987	+ 16,793
<i>D</i>	+ 3,609	— 14,378	— 1,804	— 15,226	— 16,074	— 14,880
<i>BD</i>	— 116,903	+ 465,732	+ 58,435	+ 493,201	+ 520,669	+ 481,993
<i>AC</i>	+ 231,543	+ 1262,802	+ 347,282	+ 1208,397	+ 1153,992	+ 1077,389
<i>BC</i>	— 116,903	— 637,572	— 175,338	— 610,103	— 582,635	— 543,959
<i>AD</i>	+ 231,543	— 922,449	— 115,739	— 976,854	— 1031,260	— 954,656
<i>x</i>	— 0,1136	— 0,2599	— 0,0942	— 0,2332	— 0,2065	— 0,1941
<i>y</i>	— 0,1136	+ 0,0929	— 0,0194	+ 0,1196	+ 0,1463	+ 0,1339

же усилія равны нулю. Въ таблицѣ XXIII приведены усилія *a* и *b* для элементовъ основной статически опредѣлимой фермы, далѣе произведенія

$$\frac{al}{\omega}, \frac{bl}{\omega}, \frac{a^2l}{\omega}, \frac{abl}{\omega}$$

и подсчитаны суммы двухъ послѣднихъ произведеній для всѣхъ элементовъ. Въ табл. XXIV содержится усилія въ элементахъ основной фермы для вышеназванныхъ случаевъ единичной нагрузки.

Таблица XXVIII.

Элементы.	Грузъ $P' = 1^{tn}$. въ узлахъ:				Горизонтальн. сила $P' = 1^{tn}$. въ узлахъ:							
	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	3'	1'
0—2	0	0	0	0	— 1,000	0	0	0	0	0	0	0
2—4	+ 0,445	+ 0,460	+ 0,037	+ 0,037	— 0,903	— 0,208	— 0,903	— 0,228	— 0,016	— 0,252	— 0,274	— 0,252
4—2'	+ 0,314	+ 0,389	+ 0,037	+ 0,037	— 0,903	— 0,651	— 0,903	— 0,630	— 0,888	— 0,653	— 0,675	— 0,696
2'—0'	0	0	0	0	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000
1—3	— 0,567	— 0,582	— 0,800	— 0,800	0	— 0,639	0	+ 0,351	— 0,032	+ 0,350	+ 0,350	+ 0,361
3—5	— 0,421	— 0,376	— 0,764	— 0,764	+ 0,097	— 0,429	+ 0,097	— 0,429	+ 0,048	+ 0,548	+ 0,526	+ 0,525
5—3'	— 0,421	— 0,376	— 0,764	— 0,764	+ 0,097	— 0,429	+ 0,097	— 0,429	+ 0,048	— 0,452	+ 0,526	+ 0,525
3'—1'	— 0,233	— 0,218	— 0,800	— 0,800	0	— 0,361	0	— 0,351	+ 0,032	— 0,350	— 0,350	+ 0,639
0—1	— 0,750	— 0,750	— 0,500	— 0,500	0	+ 0,313	0	+ 0,313	0	+ 0,313	+ 0,313	+ 0,313
2—3	+ 0,092	— 0,871	+ 0,023	+ 0,023	+ 0,060	+ 0,131	+ 0,060	+ 0,138	+ 0,050	+ 0,123	+ 0,110	+ 0,103
4—5	0	0	0	— 1,000	0	0	0	0	0	0	0	0
2'—3'	— 0,118	— 0,099	+ 0,023	+ 0,023	+ 0,060	— 0,043	+ 0,060	— 0,049	+ 0,010	— 0,064	— 0,077	— 0,071
0'—1'	— 0,250	— 0,250	— 0,500	— 0,500	0	— 0,313	0	— 0,313	0	— 0,313	— 0,313	— 0,313
1—2	+ 1,012	+ 0,988	0	0	0	— 0,223	0	— 0,240	— 0,051	— 0,239	— 0,240	— 0,223
1—4	— 0,077	— 0,042	+ 0,943	+ 0,943	0	— 0,261	0	— 0,237	+ 0,075	— 0,237	— 0,237	— 0,262
2—3'	+ 0,222	+ 0,186	— 0,043	— 0,043	— 0,114	+ 0,081	— 0,114	+ 0,093	— 0,019	+ 0,120	+ 0,146	+ 0,134
3—2'	— 0,173	— 0,244	— 0,043	— 0,043	— 0,114	— 0,248	— 0,114	— 0,260	— 0,094	— 0,233	— 0,207	— 0,194
1'—4'	+ 0,077	+ 0,042	+ 0,943	+ 0,943	0	+ 0,261	0	+ 0,237	— 0,075	+ 0,237	+ 0,237	+ 0,262
1'—2'	+ 0,268	+ 0,292	0	0	0	+ 0,223	0	+ 0,240	+ 0,051	+ 0,239	+ 0,240	+ 0,223

ФЕРМЫ СЪ ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ.

Таблица XXIX.

Усилия выражены въ $\frac{1}{10m}$.

Элементъ.	Усилия въ элементахъ подъ дѣйств. паръ силъ $= 1^{th}$, приложенныхъ къ элементамъ:									
	0—2	2—4	1—3	3—5	0—1	2—3	1—2	1—4	3—2'	2—3'
0—2	0	0	0	0	+ 2,000	0	0	0	0	0
2—4	+ 1,113	— 1,020	+ 1,150	— 1,058	+ 1,390	+ 1,350	+ 1,282	— 0,075	— 0,257	+ 0,303
4—2'	+ 0,785	— 0,693	+ 0,973	— 0,880	+ 0,504	+ 0,546	+ 0,613	+ 0,166	— 0,304	+ 0,257
2'—0'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—3	— 1,418	— 0,582	— 1,455	— 0,545	— 1,278	+ 0,702	— 1,333	— 1,060	+ 0,511	+ 0,511
3—5	— 1,053	— 0,858	— 0,940	— 0,970	— 1,052	— 1,052	— 1,053	— 0,955	— 0,281	+ 0,281
5—3'	— 1,053	— 0,858	— 0,940	— 0,970	— 1,052	— 1,052	— 1,053	— 0,955	— 0,281	+ 0,281
3'—1'	— 0,582	— 1,418	— 0,545	— 1,455	— 0,722	— 0,702	— 0,667	— 0,940	— 0,511	— 0,511
0—1	— 1,875	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625
2—3	+ 0,230	— 0,173	— 2,178	+ 2,235	+ 0,142	+ 0,156	+ 0,177	+ 0,067	+ 0,755	— 0,144
4—5	0	0	0	— 2,500	0	0	0	0	0	0
2'—3'	— 0,295	+ 0,353	— 0,248	+ 0,305	— 0,206	— 0,218	— 0,241	— 0,009	+ 0,144	— 0,755
0'—1'	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625
1—2	+ 2,530	— 2,530	+ 2,470	— 2,470	— 0,446	— 0,480	+ 0,716	— 0,097	— 0,782	— 0,782
1—4	— 0,193	+ 2,550	— 0,105	+ 2,463	— 0,522	— 0,474	— 0,393	+ 0,659	— 0,026	— 0,026
3—2'	— 0,433	+ 0,325	— 0,610	+ 0,503	— 0,268	— 0,292	— 0,332	— 0,126	+ 0,271	+ 0,271
2—3'	+ 0,555	— 0,663	+ 0,465	— 0,573	+ 0,390	+ 0,414	+ 0,455	+ 0,017	— 0,271	— 0,271
4—1'	+ 0,193	+ 2,165	+ 0,105	+ 2,253	+ 0,522	+ 0,474	+ 0,393	+ 1,037	+ 0,026	+ 0,026
2'—1'	+ 0,670	— 0,670	+ 0,730	— 0,730	+ 0,446	+ 0,480	+ 0,534	+ 0,097	+ 0,782	+ 0,782

Далѣе въ таблицахъ XXV и XXVI помѣщены величины $S^0 \frac{al}{\omega}$ и $S^0 \frac{bl}{\omega}$, а также подсчитаны ихъ суммы.

Таблица XXVII даетъ схему вычисленія статически неопредѣлимыхъ x и y , а въ табл. XXVIII заключаются усилія въ элементахъ статически неопредѣлимой шарнирной фермы для 12 случаевъ единичной нагрузки. По этимъ даннымъ легко вычислить также усилія отъ нагрузки различныхъ элементовъ единицами паръ силъ, нормальныхъ къ осямъ элементовъ; эти усилія помѣщены въ табл. XXIX.

Дальнѣйшій расчетъ напряженій отъ жесткости узловъ ведется совершенно подобно примѣру 1-му. Мы не будемъ поэтому останавливаться на немъ подробно, а ограничимся необходимыми объясненіями къ таблицамъ.

Нагрузка фермы и для этого случая выбрана симметричная, но неравномѣрная, такъ что одна система раскосовъ нагружена значительно сильнѣе, а потому можно ожидать значительныхъ напряженій отъ жесткости узловъ.

Въ узлахъ 2 и 2' помѣщены грузы по 50^{tn} , въ узлѣ же 4—лишь 20^{tn} .

Получающіяся при такой нагрузкѣ усилія, напряженія и измѣненія длинъ элементовъ, а также нѣкоторыя другія нужныя для расчета величины помѣщены въ таблицѣ XXX.

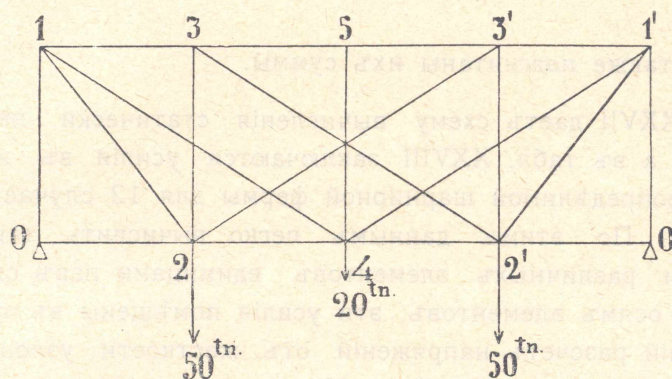
Выбираемъ 14 неизвѣстныхъ $M_1 \dots M_{14}$, связанныя слѣдующимъ образомъ съ моментами отъ жесткости узловъ:

$$\begin{aligned} M_{0-1} &= -M_1, & M_{1-0} &= +M_2, \\ M_{0-2} &= +M_1, & M_{2-0} &= -(M_5 + M_6 + M_7 + M_8), \\ M_{1-2} &= +M_3, & M_{2-1} &= +M_5, \\ M_{1-3} &= +(M_2 + M_3 + M_4), & M_{3-1} &= +M_9, \\ M_{1-4} &= +M_4, & M_{4-1} &= +M_{13}, \\ M_{2-3} &= +M_6, & M_{3-2} &= +M_{10}, \\ M_{2-4} &= +M_8, & M_{4-2} &= -M_{12}, \\ M_{2-3'} &= +M_7, & M_{3'-2} &= -M_{11}, \\ M_{3-5} &= -(M_9 + M_{10} + M_{11}), & M_{5-3} &= +M_{14}, \\ M_{3-2'} &= +M_{11}, & M_{2'-3} &= -M_7. \end{aligned}$$

При этомъ подъ величинами $M_1 \dots M_{14}$ будемъ снова подразумѣвать всю совокупность симметричной нагрузки фермы четырьмя равными по абсолютной величинѣ и попарно уравновѣшенными моментами.

Величины усилій $\alpha, \beta, \gamma \dots \rho$ въ элементахъ фермы отъ дѣйствія соотвѣтственныхъ нагрузокъ $M_1 \dots M_{14}$, равныхъ единицъ, даны къ таблицѣ XXXI.

Схема нагрузки.



Черт. 11.

Таблица XXX.

Элемент.	Усилия отъ $P = 1 \text{ tn.}$ въ у. 2 и 2'	Усилия отъ $P = 1 \text{ tn.}$ въ у. 4	Усилия при нагр. по схемѣ.	$\lambda = \frac{Sl}{E\omega} \cdot 10^2$ m.	$\Delta\gamma \times 10^5$ $\frac{1}{\text{tn.} - \text{m.}}$	$\Delta\lambda = \frac{l}{E\omega} + 10^5$ $\frac{\text{m.}}{\text{tn.}}$	Напряж. kg./cm ² .
0—2	0	0	0	0	30,62	1,9792	0
2—4	+ 0,759	+ 0,037	+ 38,69	+ 7,658	30,62	1,9792	+ 484
1—3	— 0,800	— 0,800	— 56,00	— 7,337	18,11	1,3102	— 463
3—5	— 0,842	— 0,764	— 57,38	— 5,338	8,29	0,9302	— 334
0—1	— 1,000	— 0,500	— 60,00	— 10,652	39,65	1,7753	— 500
2—3	— 0,026	+ 0,023	— 0,84	— 0,247	134,11	2,9438	— 12
1—2	+ 1,280	0	+ 64,00	+ 21,898	58,08	3,4215	+ 790
1—4	0	+ 0,943	+ 18,86	+ 9,090	389,46	4,8198	+ 233
2—3'	+ 0,049	— 0,043	+ 1,59	+ 1,885	568,44	11,8542	+ 49

Таблица XXXI.

Элем.	α	β	γ	δ	ε	η	θ	z	λ	μ	ν	σ	π	ρ
0-2	-0,200	+0,200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2-4	0	-0,023	-0,023	-0,203	0	0	-0,134	-0,361	+0,406	+0,383	+0,138	+0,171	+0,009	-0,194
1-3	0	0	0	0	0	+0,200	+0,200	0	0	+0,200	+0,200	+0,200	-0,200	-0,200
3-5	0	-0,023	-0,023	-0,003	0	0	+0,267	+0,039	+0,006	-0,016	+0,138	+0,171	-0,191	-0,194
0-1	-0,250	0	0	0	+0,250	+0,250	+0,250	+0,250	0	0	0	0	0	0
2-3	0	+0,236	+0,236	+0,248	0	0	-0,083	+0,025	-0,496	-0,270	-0,164	-0,018	+0,006	+0,254
1-2	+0,320	-0,320	-0,195	-0,320	-0,195	-0,320	-0,320	-0,640	+0,640	+0,320	+0,320	+0,320	0	-0,320
1-4	0	0	0	+0,170	0	0	0	+0,472	-0,472	-0,472	-0,472	-0,472	+0,170	+0,472
2-3'	0	+0,027	+0,027	+0,004	0	0	-0,012	-0,046	-0,007	+0,019	+0,007	+0,034	-0,01	-0,007

Таблица XXXII.

94

Уравн.	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}
1	+ 0,54	— 0,43	— 0,21	— 0,35	— 0,33	— 0,46	0,46	— 0,81	+ 0,70	+ 0,35	+ 0,35	+ 0,35	0	— 0,35
2	— 0,43	+ 0,60	+ 0,39	+ 0,53	+ 0,21	+ 0,35	+ 0,29	+ 0,72	— 1,07	— 0,54	— 0,47	— 0,36	0	+ 0,54
3	— 0,21	+ 0,39	+ 0,31	+ 0,40	+ 0,13	+ 0,21	+ 0,15	+ 0,44	— 0,79	— 0,40	— 0,34	— 0,23	0	+ 0,40
4	— 0,35	+ 0,53	+ 0,40	+ 0,75	+ 0,21	+ 0,35	+ 0,34	+ 1,25	— 1,61	— 1,08	— 0,91	— 0,82	+ 0,14	+ 1,00
5	— 0,33	+ 0,21	+ 0,13	+ 0,21	+ 0,24	+ 0,33	+ 0,33	+ 0,54	— 0,43	— 0,21	— 0,21	— 0,21	0	+ 0,21
6	— 0,46	+ 0,35	+ 0,21	+ 0,35	+ 0,33	+ 0,51	+ 0,51	+ 0,81	— 0,70	— 0,30	— 0,30	— 0,30	— 0,05	+ 0,30
7	— 0,46	+ 0,29	+ 0,15	+ 0,34	+ 0,32	+ 0,51	+ 0,64	+ 0,92	— 0,68	— 0,34	— 0,26	— 0,30	— 0,10	+ 0,24
8	— 0,81	+ 0,72	+ 0,44	+ 1,25	+ 0,54	+ 0,81	+ 0,92	+ 2,87	— 2,80	— 2,08	— 1,88	— 1,91	+ 0,38	+ 1,93
9	+ 0,70	— 1,07	— 0,79	— 1,61	— 0,43	— 0,70	— 0,68	— 2,80	+ 3,53	+ 2,46	+ 2,13	+ 1,94	— 0,39	— 2,30
10	+ 0,35	— 0,54	— 0,40	— 1,08	— 0,21	— 0,30	— 0,34	— 2,08	+ 2,46	+ 1,97	+ 1,70	+ 1,62	— 0,44	— 1,82
11	+ 0,35	— 0,47	— 0,33	— 0,91	— 0,21	— 0,30	— 0,26	— 1,88	+ 2,13	+ 1,70	+ 1,61	+ 1,56	— 0,47	— 1,68
12	+ 0,35	— 0,36	— 0,23	— 0,82	— 0,21	— 0,30	— 0,30	— 1,91	+ 1,94	+ 1,62	+ 1,56	+ 1,58	— 0,47	— 1,59
13	0	0	0	+ 0,14	0	— 0,05	— 0,10	+ 0,38	— 0,39	— 0,44	— 0,46	— 0,47	+ 0,23	+ 0,47
14	— 0,35	+ 0,54	+ 0,40	+ 1,00	+ 0,21	+ 0,30	+ 0,24	+ 1,93	— 2,30	— 1,82	— 1,68	— 1,59	+ 0,47	+ 1,78

И. В. НЕПРАСОВЪ.

Таблица XXXIII.

Уравн.	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}
1	+ 140,54	+ 39,65	0	0	+ 30,62	+ 30,62	+ 30,62	+ 30,62	0	0	0	0	0	0
2	+ 39,65	+ 115,52	+ 36,22	+ 36,22	0	0	0	0	+ 18,11	0	0	0	0	0
3	0	+ 36,22	+ 152,38	+ 36,22	- 58,08	0	0	0	+ 18,11	0	0	0	0	0
4	0	+ 36,22	+ 36,22	+ 815,14	0	0	0	0	+ 18,11	0	0	0	- 389,46	0
5	+ 30,62	0	- 58,08	0	+ 177,40	+ 61,24	+ 61,24	+ 61,24	0	0	0	0	0	0
6	+ 30,62	0	0	0	+ 61,24	+ 329,46	+ 61,24	+ 61,24	0	- 134,11	0	0	0	0
7	+ 30,62	0	0	0	+ 61,24	+ 61,24	+ 1198,12	+ 61,24	0	0	+ 568,44	0	0	0
8	+ 30,62	0	0	0	+ 61,24	+ 61,24	+ 61,24	+ 122,48	0	0	0	+ 30,62	0	0
9	0	+ 18,11	+ 18,11	+ 18,11	0	0	0	0	+ 52,80	+ 16,58	+ 16,58	0	0	+ 8,29
10	0	0	0	0	0	- 134,11	0	0	+ 16,58	+ 284,80	+ 16,58	0	0	+ 8,29
11	0	0	0	0	0	0	+ 568,44	0	+ 16,58	+ 16,58	+ 1153,46	0	0	+ 8,29
12	0	0	0	0	0	0	0	+ 30,62	0	0	0	+ 61,24	0	0
13	0	0	0	- 389,46	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 778,92	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 8,29	+ 8,29	+ 8,29	0	0	+ 16,58

ФЕРМЫ СЪ ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ.

Таблица XXXIV.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8		
+ 141,08	+ 39,22	— 0,21	— 0,35	+ 30,29	+ 30,16	+ 30,16	+ 29,81		
+ 39,22	+ 116,12	+ 36,61	+ 36,75	+ 0,21	+ 0,35	+ 0,29	+ 0,72		
— 0,21	+ 36,61	+ 152,69	+ 36,62	— 57,95	+ 0,21	+ 0,15	+ 0,44		
— 0,35	+ 36,75	+ 36,62	+ 815,89	+ 0,21	+ 0,35	+ 0,34	+ 1,25		
+ 30,29	+ 0,21	— 57,95	+ 0,21	+ 177,64	+ 61,57	+ 61,57	+ 61,78		
+ 30,16	+ 0,35	+ 0,21	+ 0,35	+ 61,57	+ 329,97	+ 61,75	+ 62,05		
+ 30,16	+ 0,29	+ 0,15	+ 0,34	+ 61,57	+ 61,75	+ 1198,76	+ 62,16		
+ 29,81	+ 0,72	+ 0,44	+ 1,25	+ 61,78	+ 62,05	+ 62,16	+ 125,35		
+ 0,70	+ 17,04	+ 17,32	+ 0,56	— 0,43	— 0,70	— 0,68	— 2,80		
+ 0,35	— 0,54	— 0,40	— 1,08	— 0,21	— 134,41	— 0,34	— 2,08		
+ 0,35	— 0,47	— 0,34	— 0,91	— 0,21	— 0,30	+ 568,18	— 1,88		
+ 0,35	— 0,36	— 0,23	— 0,82	— 0,21	— 0,30	— 0,30	+ 28,71		
0	0	0	— 389,32	0	— 0,05	— 0,10	+ 0,38		
— 0,35	+ 0,54	+ 0,40	+ 1,00	+ 0,21	+ 0,30	+ 0,24	+ 1,93		
M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	A	Σ		
+ 0,70	+ 0,35	+ 0,35	+ 0,35	0	— 0,35	— 96,74	+ 204,82	1	
+ 17,04	— 0,54	— 0,47	— 0,36	0	+ 0,54	+ 70,70	+ 317,18	2	
+ 17,32	— 0,40	— 0,34	— 0,23	0	+ 0,40	+ 43,31	+ 228,62	3	
+ 16,50	— 1,08	— 0,91	— 0,82	— 389,32	+ 1,00	+ 70,60	+ 587,03	4	
— 0,43	— 0,21	— 0,21	— 0,21	0	+ 0,21	+ 69,35	+ 403,82	5	
— 0,70	— 134,41	— 0,30	— 0,30	— 0,05	+ 0,30	+ 111,40	+ 522,35	6	
— 0,68	— 0,34	+ 568,18	— 0,30	— 0,10	+ 0,24	+ 135,88	+ 2118,06	7	
— 2,80	— 2,08	— 1,88	+ 28,71	+ 0,38	+ 1,93	+ 154,58	+ 522,40	8	
+ 56,33	+ 19,04	+ 18,71	+ 1,94	— 0,39	+ 5,99	— 129,14	+ 19,43	9	
+ 19,04	+ 286,77	+ 18,28	+ 1,62	— 0,44	+ 6,47	— 43,78	+ 149,25	10	
+ 18,71	+ 18,28	+ 1155,07	+ 1,56	— 0,47	+ 6,61	— 16,26	+ 1747,92	11	
+ 1,94	+ 1,62	+ 1,56	+ 62,82	— 0,47	— 1,59	— 17,18	+ 75,54	12	
— 0,39	— 0,44	— 0,47	— 0,47	+ 779,15	+ 0,47	— 40,77	+ 347,99	13	
+ 5,99	+ 6,47	+ 6,61	— 1,59	+ 0,47	+ 18,36	+ 17,78	+ 58,36	14	

Подобно тому, какъ мы поступали въ первомъ примѣрѣ, легко составить выраженіе работы деформации фермы (ввиду симметріи нагрузки—для половины фермы) въ функции отъ неизвѣстныхъ M , затѣмъ продифференцировать это выраженіе послѣдовательно по каждому изъ неизвѣстныхъ M и, приравнявъ производныя нулю, получить систему 14 уравненій для опредѣленія всѣхъ M .

Въ таблицѣ XXXII мы помѣстили величины, обозначенныя нами выше символами $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$ etc., въ табл. XXXIII—коэффициенты вида $\Delta\gamma$ и $2\Delta\gamma$, наконецъ табл. XXXIV представляетъ окончательную систему уравненій.

Рѣшая ее методомъ, указаннымъ въ прим. I, получимъ величины неизвѣстныхъ

$$\begin{array}{ll} M_1 = -1,4450 \text{ tn.} - \text{m.} & M_8 = +1,4807, \\ M_2 = +1,3931, & M_9 = -2,9041, \\ M_3 = +0,3024, & M_{10} = +0,1170, \\ M_4 = +0,0482, & M_{11} = +0,0004, \\ M_5 = +0,1225, & M_{12} = -0,8047, \\ M_6 = +0,1959, & M_{13} = -0,0318, \\ M_7 = +0,0538, & M_{14} = +1,5663. \end{array}$$

Изъ уравненій табл. XXXIV легко получимъ упрощенныя уравненія второго метода, положивъ

$$M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_{10} = M_{11} = M_{13} = 0.$$

Получается система

$$\begin{aligned} &+141,08 M_1 + 39,22 M_2 + 29,81 M_8 + 0,70 M_9 + 0,35 M_{12} \\ &\quad - 0,35 M_{14} = -96,74, \\ &+39,22 M_2 + 116,12 M_2 + 0,72 M_8 + 17,04 M_9 - 0,36 M_{12} \\ &\quad + 0,54 M_{14} = +70,70, \\ &+29,81 M_1 + 0,72 M_2 + 125,35 M_8 - 2,80 M_9 + 28,71 M_{12} \\ &\quad + 1,93 M_{14} = +154,58, \\ &+0,70 M_1 + 17,04 M_2 - 2,80 M_8 + 56,33 M_9 + 1,94 M_{12} \\ &\quad + 5,99 M_{14} = -129,14, \\ &+0,35 M_1 - 0,36 M_2 + 28,71 M_8 + 1,94 M_9 + 62,82 M_{12} \\ &\quad - 1,59 M_{14} = -17,18, \\ &-0,35 M_1 + 0,54 M_2 + 1,93 M_8 + 5,90 M_9 - 1,59 M_{12} \\ &\quad + 18,36 M_{14} = +17,78. \end{aligned}$$

Разрѣшая ее, найдемъ

$$M_1 = -1,4380^{\text{tn.-m.}}, \quad M_9 = -2,7718,$$

$$M_2 = +1,4793, \quad M_{12} = -0,9031,$$

$$M_8 = +1,6867, \quad M_{14} = +1,5463,$$

Разсчетныя данныя для способа Мора даны въ таблицахъ XXXV и XXXVI, совершенно аналогичныхъ табл. XX и XXI примѣра I-го, а потому не требующихъ поясненій.

Для опредѣленія угловъ вращенія узловъ получаются уравненія

$$386,0 \varphi_0 + 84,1 \varphi_1 + 108,9 \varphi_2 = 5514,72,$$

$$84,1 \varphi_0 + 668,4 \varphi_1 + 57,4 \varphi_2 + 184,1 \varphi_3 = 8453,82,$$

$$108,9 \varphi_0 + 57,4 \varphi_1 + 612,0 \varphi_2 + 19,0 \varphi_3 = 5296,35,$$

$$+ 184,1 \varphi_1 + 19,0 \varphi_2 + 1233,8 \varphi_3 = 4198,20.$$

Отсюда получимъ

$$\varphi_0 = 10,4004,$$

$$\varphi_2 = 5,7773,$$

$$\varphi_1 = 10,3560,$$

$$\varphi_3 = 1,7684.$$

Послѣ этого моменты и напряженія легко опредѣляются обычнымъ путемъ, что и сдѣлано въ табл. XXXVI.

Таблица XXXV.

Узлы.	Элем.	$N = \frac{2EIbr}{l}$ 10 tn. - m.	ΣN 10 tn. - m.	$\psi \times 10^4$	$\psi N \times 10^4$ 10 tn. - m.	$\Sigma \psi N$	$3 \Sigma \psi N$
0	0—1	84,1	193,0	+ 4,066	+ 341,95	+ 1838,24	+ 5514,72
	0—2	108,9		+ 13,740	+ 1496,29		
1	1—0	84,1	334,2	+ 4,066	+ 341,95	+ 2817,94	+ 8453,82
	1—2	57,4		+ 6,805	+ 390,61		
	1—3	184,1		+ 11,137	+ 2050,32		
	1—4	8,6		+ 4,077	+ 35,06		
2	2—0	108,9	306,0	+ 13,740	+ 1496,29	+ 1765,45	+ 5296,35
	2—1	57,4		+ 6,805	+ 390,61		
	2—3	24,9		+ 2,600	+ 64,74		
	2—4	108,9		— 1,718	— 187,09		
	2—3'	5,9		+ 0,152	+ 0,90		
3	3—1	184,1	616,9	+ 11,137	+ 2050,32	+ 1399,40	+ 4198,20
	3—2	24,9		+ 2,600	+ 64,74		
	3—5	402,0		— 1,778	— 714,76		
	'	5,9		— 0,152	— 0,90		

Таблица XXXVI.

Элементы.	Углы.	Величина угловъ.	Результ. углы.	Моменты кг.-см.	Напряж. кг./см. ²	$\frac{N}{n}$
0—1	φ_0	+ 10,4004	+ 18,9588	+ 159444	± 307	1,61
	φ_1	+ 10,3560		+ 159070		
	ψ_{0-1}	+ 4,066	+ 18,9144			
0—2	φ_0	+ 10,4004	— 14,6419	— 159450	+ 482	—
	φ_2	+ 5,7773			— 193	
	ψ_{0-2}	+ 13,740	— 19,2650	— 20979	— 635	
1—2	φ_1	+ 10,3560	+ 6,0743	+ 34866	+ 65	1,08
	φ_2	+ 5,7773				
	ψ_{1-2}	+ 6,805	+ 1,4956	+ 8585		
1—3	φ_1	+ 10,3560	— 10,9306	— 201232	+ 83	1,82
	φ_3	+ 1,7684			— 380	
	ψ_{1-3}	+ 11,137	— 19,5182	— 359330	— 149	
1—4	φ_1	+ 10,3560	+ 8,4810	+ 7294	± 50	1,21
	φ_4	0				
	ψ_{1-4}	+ 4,077	— 1,8750	— 1613		
2—3	φ_2	+ 5,7773	+ 5,5230	+ 13752	± 83	7,92
	φ_3	+ 1,7684				
	ψ_{2-3}	+ 2,600	+ 1,5141	+ 3770		
2—4	φ_2	+ 5,7773	+ 16,7086	+ 181957	— 552	1,74
	φ_4	0			+ 220	
	ψ_{2-4}	— 1,718	+ 10,9313	+ 119042	+ 360	
2—3'	φ_2	+ 5,7773	+ 9,3302	+ 5505	± 59	2,20
	φ_3'	— 1,7684				
	ψ_{2-3}'	+ 0,152	+ 1,7845	+ 1053		
3—5	φ_3	+ 1,7684	+ 8,8708	+ 356606	— 77	1,97
	φ_5	0			+ 407	
	ψ_{3-5}	— 1,778	+ 7,1022	+ 285508	+ 62	
					— 325	

Наконецъ для четвертаго способа по предыдущему напишемъ при помощи таблицъ XXXIII и XXXIV уравненія

$$\begin{aligned} 140,54 M_1 + 39,65 M_2 + 30,62 M_8 &= - 96,74, \\ 39,65 M_1 + 115,52 M_2 + 18,11 M_9 &= + 70,70, \\ 30,62 M_1 + 122,48 M_8 + 30,62 M_{12} &= + 154,58, \\ 18,11 M_2 + 52,80 M_9 + 8,29 M_{14} &= - 129,14, \\ 30,62 M_8 + 61,24 M_{12} &= - 17,18, \\ 8,29 M_9 + 16,58 M_{14} &= + 17,18. \end{aligned}$$

Рѣшая систему, получимъ

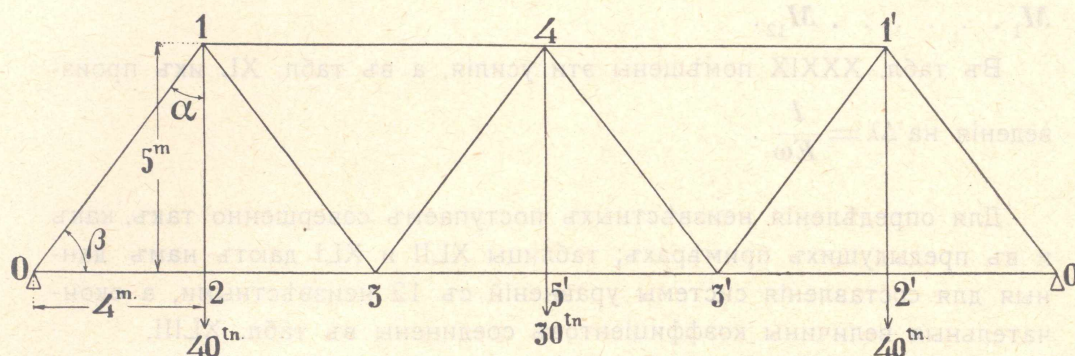
$$\begin{aligned} M_1 &= - 1,6016 \text{ tn.-m.}, & M_9 &= - 3,4726, \\ M_2 &= + 1,7064, & M_{12} &= - 1,2710, \\ M_8 &= + 1,9805, & M_{14} &= + 2,8084. \end{aligned}$$

18. Примѣръ III. Ферма съ треугольной рѣшеткой и дополнительными стойками.

Опредѣленіе усилий въ фермѣ (черт. 12), какъ статически опредѣлимой системѣ, не представляетъ затрудненій. Въ таблицѣ XXXVII даны основные размѣры сѣченій и усилия отъ принятой, показанной на чертежѣ, нагрузки. Точно также въ табл. XXXVIII помѣщены нужныя для дальнѣйшаго разсчета величины усилий отъ нагрузки парами силъ. Для разсчета изгибающихъ моментовъ отъ жесткости узловъ намъ придется на этотъ разъ опредѣлить 12 неизвѣстныхъ, черезъ которыя всѣ моменты выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} M_{0-1} &= - M_1, & M_{1-0} &= + M_2, \\ M_{0-2} &= + M_1, & M_{2-0} &= - (M_5 + M_6), \\ M_{1-2} &= + M_3, & M_{2-1} &= + M_5, \\ M_{1-3} &= + M_4, & M_{3-1} &= + M_7, \\ M_{1-4} &= - (M_2 + M_3 + M_4), & M_{4-1} &= + M_{10}, \\ M_{2-3} &= + M_6, & M_{3-2} &= - (M_7 + M_8 + M_9), \\ M_{3-4} &= + M_8, & M_{4-3} &= - M_{11}, \\ M_{3-5} &= + M_9, & M_{5-3} &= - M. \end{aligned}$$

Черт. 12.



$$\alpha = 38^{\circ}40' \quad \sin \alpha = \cos \beta = 0,6247$$

$$\beta = 51^{\circ}20' \quad \cos \alpha = \sin \beta = 0,7809$$

$$\operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Cotg} \beta = 0,8000$$

Таблица XXXVII.

Элем.	ω br. см. ²	I br. см. ⁴	e_1 см.	e_2 см.	l см.	$N = \frac{2EI}{l}$ 10tn.-m.	$\Delta\gamma = \frac{l}{6EI}$ $\frac{1}{10^5 \text{ tn.-m.}}$	Усилия. S tn.	Напр. кг./см. ²	$\lambda = \frac{Sl}{E\omega} \times 10^2$ см.
0—2	106	14700	9,0	31,8	400	147,0	22,68	+ 44,00	+ 415	+ 8,302
2—3	106	14700	9,0	31,8	400	147,0	22,68	+ 44,00	+ 415	+ 8,302
3—5	138	16850	7,6	34,0	400	168,5	19,78	+ 68,00	+ 493	+ 9,855
1—4	138	16850	7,6	34,0	800	84,2	39,56	— 56,00	— 406	— 16,232
0—1	145	5080	16	16	640	31,7	104,99	— 70,40	— 486	— 15,537
1—3	92	3000	12,5	12,5	640	18,7	177,78	+ 19,20	+ 209	+ 6,678
3—4	92	3000	12,5	12,5	640	18,7	177,78	— 19,20	— 209	— 6,678
1—2	80	2890	13	13	500	23,1	144,18	+ 40,00	+ 500	+ 12,500
4—5	80	2890	13	13	500	23,1	144,18	+ 30,00	+ 375	+ 9,375

Соотвѣтственно опредѣлимъ величины усилій $\alpha, \beta \dots$ въ элементахъ фермы подъ дѣйствіемъ симметричныхъ нагрузокъ $M_1 \dots M_{12}$.

Въ табл. XXXIX помѣщены эти усилія, а въ табл. XL ихъ произведенія на $\Delta\lambda = \frac{l}{E\omega}$.

Для опредѣленія неизвѣстныхъ поступаемъ совершенно такъ, какъ и въ предыдущихъ примѣрахъ; таблицы XLII и XLI даютъ намъ данныя для составленія системы уравненій съ 12 неизвѣстными, а окончательныя величины коэффициентовъ соединены въ табл. XLIII.

Рѣшеніе этой системы опредѣлитъ намъ величины неизвѣстныхъ

$$\begin{aligned} M_1 &= -0,4209^{\text{tn.-m.}}, & M_7 &= +0,0081, \\ M_2 &= +0,0663, & M_8 &= +0,0572, \\ M_3 &= +0,0833, & M_9 &= -1,1586, \\ M_4 &= +0,0414, & M_{10} &= -0,8147, \\ M_5 &= +0,1289, & M_{11} &= +0,0483, \\ M_6 &= +1,6439, & M_{12} &= +2,1070. \end{aligned}$$

Далѣе уравненія второго метода, полагая

$$M_3 = M_4 = M_5 = M_7 = M_8 = M_{11} = 0,$$

получатся изъ табл. XLIII въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} +255,62 M_1 + 105,04 M_2 + 22,15 M_6 + 0,20 M_9 &= -61,55, \\ +105,04 M_1 + 289,49 M_2 - 0,42 M_6 - 0,06 M_9 + 39,41 M_{10} \\ + 0,18 M_{12} &= -47,49, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +22,15 M_1 - 0,42 M_2 + 92,23 M_6 + 21,93 M_9 \\ + 0,18 M_{10} &= 124,06, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +0,20 M_1 - 0,06 M_2 + 21,93 M_6 + 86,72 M_9 - 0,06 M_{10} \\ + 18,64 M_{12} &= -22,22, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +39,41 M_2 + 0,18 M_6 - 0,06 M_9 + 79,39 M_{10} \\ - 0,24 M_{12} &= -57,31, \end{aligned}$$

$$+0,18 M_2 + 18,64 M_9 - 0,24 M_{10} + 40,76 M_{12} = +64,52.$$

Таблица XXXVIII.

(Усилия выражены въ $\frac{1}{10 \text{ м.}}$)

Элем.	Усилія въ элементахъ фермы отъ дѣйствія пары силъ + 1 тн.м., приложенной нормально къ элементамъ:								
	0—2	2—3	3—5	1—4	0—1	1—3	3—4	1—2	4—5
0—2	+ 1,667	— 0,333	— 0,333	— 0,333	+ 1,667	— 0,333	— 0,333	— 0,333	
2—3	+ 1,667	— 0,333	— 0,333	— 0,333	+ 1,667	— 0,333	— 0,333	+ 1,667	
3—5	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	
5—3'	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	
3'—2'	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	
2'—0'	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	
1—4	— 1,333	— 1,333	+ 0,667	— 0,333	— 1,333	— 1,333	+ 0,667	— 1,333	
4—1'	— 0,667	— 0,667	— 0,667	— 0,667	— 0,667	— 0,667	— 0,667	— 0,667	
0—1	— 2,667	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	— 0,717	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	
1—3	— 0,533	— 2,667	— 0,533	+ 1,067	— 0,533	+ 0,717	— 0,533	— 0,533	
3—4	+ 0,533	+ 0,533	— 2,667	— 1,067	+ 0,533	+ 0,533	— 0,717	+ 0,533	
4—3'	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	
3'—1'	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	
1'—0'	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	
1—2	+ 2,500	— 2,500	0	0	0	0	0	0	
4—5	0	0	+ 2,500	0	0	0	0	0	
1'—2'	0	0	0	0	0	0	0	0	

Ввиду симметричности нагрузки стойка 4—5 не подвергается изгибу.

Ввиду симметричности нагрузки стойка 4—5 не подвергается изгибу.

Таблица XXXIX.

Элементы.	α	β	γ	δ	ε	η	θ	κ	λ	μ	ν	σ
0—2	0	+0,200	0	0	—0,200	—0,200	0	0	0	0	0	0
2—3	0	+0,200	+0,200	0	0	—0,200	0	0	0	0	0	0
3—5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+0,200	—0,200	—0,200
1—4	0	—0,100	—0,100	—0,100	0	0	0	+0,200	+0,200	—0,100	0	0
0—1	—0,195	—0,125	0	0	+0,320	+0,320	0	0	0	0	0	0
1—3	0	—0,160	—0,160	—0,035	0	+0,320	—0,195	—0,320	—0,320	+0,160	0	0
3—4	0	+0,160	+0,160	+0,160	0	0	0	—0,125	—0,320	—0,160	+0,125	+0,320
1—2	+0,250	0	0	0	—0,250	—0,500	+0,250	+0,250	+0,250	0	0	0
4—5	0	0	0	0	0	0	0	0	+0,500	0	0	—0,500

Таблица XL.

Элем.	Произведения $\Delta\lambda$ на соответственные величины усилий:												$\Delta\lambda = \frac{l}{E\omega} 10^3$ m, tn.
	α	β	γ	δ	ε	η	θ	κ	λ	μ	ν	σ	
0—2	0	+0,377	0	0	—0,377	—0,377	0	0	0	0	0	0	1,8868
2—3	0	+0,377	+0,377	0	0	—0,377	0	0	0	0	0	0	1,8868
3—5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+0,290	—0,290	—0,290	1,4493
1—4	0	—0,290	—0,290	—0,290	0	0	0	+0,580	+0,580	—0,290	0	0	2,8986
0—1	—0,430	—0,276	0	0	+0,706	+0,706	0	0	0	0	0	0	2,2069
1—3	0	—0,557	—0,557	—0,122	0	+1,113	—0,678	—1,113	—1,113	+0,557	0	0	3,4783
3—4	0	+0,557	+0,557	+0,557	0	0	0	—0,435	—1,113	—0,557	+0,435	+1,113	3,4783
1—2	+0,781	0	0	0	—0,781	—1,562	+0,781	+0,781	+0,781	0	0	0	3,1250
4—5	0	0	0	0	0	0	0	0	+1,562	0	0	—1,562	3,1250

Таблица ХЛІ.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	A	
+ 255,34	+ 104,99	0	0	+ 22,68	+ 22,68	0	0	0	0	0	0	— 61,55	1
+ 104,99	+ 289,10	+ 79,12	+ 79,12	0	0	0	0	0	+ 39,56	0	0	— 47,49	2
0	+ 79,12	+ 367,48	+ 79,12	— 144,18	0	0	0	0	+ 39,56	0	0	— 11,47	3
0	+ 79,12	+ 79,12	+ 434,68	0	0	— 177,78	0	0	+ 39,56	0	0	— 3,21	4
+ 22,68	0	— 144,18	0	+ 333,72	— 45,36	0	0	0	0	0	0	+ 97,57	5
+ 22,68	0	0	0	+ 45,36	+ 90,72	+ 22,68	+ 22,68	+ 22,68	0	0	0	+ 124,06	6
0	0	0	— 177,78	0	+ 22,68	+ 400,92	+ 45,36	+ 45,36	0	0	0	— 18,23	7
0	0	0	0	0	+ 22,68	+ 45,36	+ 400,92	+ 45,36	0	+ 177,78	0	+ 14,24	8
0	0	0	0	0	+ 22,68	+ 45,36	+ 45,36	+ 84,92	0	0	+ 19,78	— 22,22	9
0	+ 39,56	+ 39,56	+ 39,56	0	0	0	0	0	+ 79,12	0	0	— 57,31	10
0	0	0	0	0	0	0	+ 177,78	0	0	+ 355,56	0	+ 28,06	11
0	0	0	0	0	0	0	0	+ 19,78	0	0	+ 39,56	+ 64,52	12

ФЕРМЫ СЪ ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ.

Таблица XLII.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	
+0,28	+0,05	0	0	-0,33	-0,53	+0,20	+0,20	+0,20	0	0	0	1
+0,05	+0,39	+0,28	+0,14	-0,16	-0,42	+0,11	+0,05	-0,06	-0,15	+0,07	+0,18	2
0	+0,28	+0,28	+0,14	0	-0,25	+0,11	+0,05	-0,06	-0,15	+0,07	+0,18	3
0	+0,14	+0,14	+0,12	0	-0,04	+0,02	-0,09	-0,20	-0,08	+0,07	+0,18	4
-0,33	-0,16	0	0	+0,50	+0,69	-0,20	-0,20	-0,20	0	0	0	5
-0,53	-0,42	-0,25	-0,04	+0,69	+1,51	-0,61	-0,75	-0,75	+0,18	0	0	6
+0,20	+0,11	+0,11	+0,02	-0,20	-0,61	+0,33	+0,41	+0,41	-0,11	0	0	7
+0,20	+0,05	+0,05	-0,09	-0,20	-0,75	+0,41	+0,72	+0,81	-0,17	-0,05	-0,14	8
+0,20	-0,06	-0,06	-0,20	-0,20	-0,75	+0,41	+0,81	+1,80	-0,06	-0,14	-1,14	9
0	-0,15	-0,15	-0,08	0	+0,18	-0,11	-0,17	-0,06	+0,27	-0,13	-0,24	10
0	+0,07	+0,07	+0,07	0	0	0	-0,05	-0,14	-0,13	+0,11	+0,20	11
0	+0,18	+0,18	+0,18	0	0	0	-0,14	-1,14	-0,24	+0,20	+1,20	12

Отсюда получаемъ

$$\begin{aligned}
 M_1 &= -0,4302^{\text{тн.-м.}}, & M_9 &= -1,1895, \\
 M_2 &= +0,0976, & M_{10} &= -0,7686, \\
 M_6 &= +1,7332, & M_{12} &= +2,1004.
 \end{aligned}$$

Въ расчетъ по способу Мора мы послѣ вычисленія угловъ ϕ будемъ имѣть слѣдующую систему уравненій для опредѣленія угловъ φ :

$$\begin{aligned}
 357,4\varphi_0 + 31,7\varphi_1 + 147,0\varphi_2 &= 8332,71, \\
 31,7\varphi_0 + 315,4\varphi_1 + 23,1\varphi_2 + 18,7\varphi_3 &= 3260,46, \\
 147,0\varphi_0 + 23,1\varphi_1 + 634,2\varphi_2 + 147,0\varphi_3 &= 9677,67, \\
 18,7\varphi_1 + 147,0\varphi_2 + 705,8\varphi_3 &= 5623,38.
 \end{aligned}$$

Рѣшая эту систему, найдемъ ея корни

$$\begin{aligned}
 \varphi_0 &= +18,8452, & \varphi_2 &= +9,2674, \\
 \varphi_1 &= +7,4182, & \varphi_3 &= +5,8408.
 \end{aligned}$$

Послѣ этого обычнымъ путемъ опредѣлимъ моменты и напряженія, что и выполнено въ таб. XLIV.

Въ виду того, что разница между произведенными для этого случая тремя подсчетами незначительна, расчета по четвертому способу не произведено для этой фермы.

Таблица XLIII.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}^*	A	Σ	
+ 255,62	+ 105,04	0	0	+ 22,35	+ 22,15	+ 0,20	+ 0,20	+ 0,20	0	0	0	— 61,55	+ 344,21	1
+ 105,04	+ 289,49	+ 79,40	+ 79,26	— 0,16	— 0,42	+ 0,11	+ 0,05	— 0,06	+ 39,41	+ 0,07	+ 0,18	— 47,49	+ 544,88	2
0	+ 79,40	+ 367,76	+ 79,26	— 144,18	— 0,25	+ 0,11	+ 0,05	— 0,06	+ 39,41	+ 0,07	+ 0,18	— 11,47	+ 410,28	3
0	+ 79,26	+ 79,26	+ 434,80	0	— 0,04	— 177,76	— 0,09	— 0,20	+ 39,48	+ 0,07	+ 0,18	— 3,21	+ 451,75	4
+ 22,35	— 0,16	— 144,18	0	+ 334,22	+ 46,05	— 0,20	— 0,20	— 0,20	0	0	0	+ 97,57	+ 355,25	5
+ 22,15	— 0,42	— 0,25	— 0,04	+ 46,05	+ 92,23	+ 22,07	+ 21,93	+ 21,93	+ 0,18	0	0	+ 124,06	+ 349,89	6
+ 0,20	+ 0,11	+ 0,11	— 177,76	— 0,20	+ 22,07	+ 401,25	+ 45,77	+ 45,77	— 0,11	0	0	— 18,23	+ 318,98	7
+ 0,20	+ 0,05	+ 0,05	— 0,09	— 0,20	+ 21,93	+ 45,77	+ 401,64	+ 46,17	— 0,17	+ 177,73	— 0,14	+ 14,24	+ 707,18	8
+ 0,20	+ 0,06	— 0,06	— 0,20	— 0,20	+ 21,93	+ 45,77	+ 46,17	+ 86,72	— 0,06	— 0,14	+ 18,64	— 22,22	+ 196,49	9
0	+ 39,41	+ 39,41	+ 39,48	0	+ 0,18	— 0,11	— 0,17	— 0,06	+ 79,39	— 0,13	— 0,24	— 57,31	+ 139,85	10
0	+ 0,07	+ 0,07	+ 0,07	0	0	0	+ 177,73	— 0,14	— 0,13	+ 355,67	+ 0,20	+ 28,06	+ 561,60	11
0	+ 0,18	+ 0,18	+ 0,18	0	0	0	— 0,14	+ 18,64	— 0,24	+ 0,20	+ 40,76	+ 64,52	+ 124,28	12

ФЕРМЫ СЪ ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ.

Таблица XLIV.

Элем.	Углы.	Величины угловъ.	Результ. углы.	Моменты kg.-см.	Напряж. kg./cm ² .	$\frac{N}{n}$
0—1	φ_0	+ 18,8452	+ 13,6686	+ 43329	± 137	1,28
	φ_1	+ 7,4182		+ 7106		
	ψ_{0-1}	+ 10,480				
0—2	φ_0	+ 18,8452	— 2,9472	— 43324	+ 94	1,23
	φ_2	+ 9,2674		— 184118		
	ψ_{0-2}	+ 16,635				
1—2	φ_1	+ 7,4182	+ 3,4698	+ 8015	± 55	1,11
	φ_2	+ 9,2674		+ 12287		
	ψ_{1-2}	+ 6,878				
1—3	φ_1	+ 7,4182	+ 2,5212	+ 4715	± 20	1,10
	φ_3	+ 5,8408		+ 1765		
	ψ_{1-3}	+ 6,052				
1—4	φ_1	+ 7,4182	— 2,3566	— 19843	+ 9 — 40	1,10
	φ_4	0		— 82304		
	ψ_{1-4}	+ 5,731				
2—3	φ_2	+ 9,2674	+ 11,6886	+ 171822	+ 263	1,63
	φ_3	+ 5,8408		+ 121451		
	ψ_{2-3}	+ 4,229				
3—4	φ_3	+ 5,8408	+ 3,2636	+ 6103	± 25	1,12
	φ_4	0		— 4819		
	ψ_{3-4}	+ 2,806				
3—5	φ_3	+ 5,8408	— 7,6744	— 129314	+ 261	1,53
	φ_5	0		— 227731		
	ψ_{3-5}	+ 6,452				

19. Примѣръ IV. Ферма примѣра III съ уменьшенной вдвое жесткостью поясовъ.

Для лучшаго выясненія того значенія, которое имѣетъ жесткость поясовъ фермъ при сравненіи подсчетовъ напряженій жесткости по различнымъ методамъ, рассчитаемъ упомянутыя напряженія для фермы III въ предположеніи, что моменты инерціи и сопротивленія всѣхъ элементовъ поясовъ фермы уменьшены вдвое, а прочія данныя остались неизмѣнными.

При подсчетѣ по обобщенному методу такое измѣненіе отразится прежде всего въ таблицѣ XLIII и выразится въ томъ, что величины $\Delta\gamma$, соотвѣтствующія элементамъ поясовъ, увеличатся вдвое.

Получается новая таблица XLIII'; измѣняя соотвѣтственно общій видъ уравненій, придемъ къ новой системѣ, изображенной въ табл. XLIV', изъ которой

$$\begin{aligned} M_1 &= -0,3546 \text{ tn.-m.}, & M_7 &= +0,0040, \\ M_2 &= +0,0190, & M_8 &= +0,0557, \\ M_3 &= +0,0703, & M_9 &= -0,6262, \\ M_4 &= +0,0319, & M_{10} &= -0,4213, \\ M_5 &= +0,1227, & M_{11} &= +0,0500, \\ M_6 &= +0,8424; & M_{12} &= +1,1013. \end{aligned}$$

Для второго метода будемъ имѣть систему

$$300,98M_1 + 105,04M_2 + 44,83M_6 + 0,20M_9 = -61,55,$$

$$105,04M_1 + 368,61M_2 - 0,42M_6 - 0,06M_9 + 78,97M_{10} + 0,18M_{12} = -47,49,$$

$$44,83M_1 - 0,42M_2 + 182,95M_6 + 44,61M_9 + 0,18M_{10} = +124,06,$$

$$0,20M_1 - 0,06M_2 + 44,61M_6 + 171,64M_9 - 0,06M_{10} + 38,42M_{12} = -22,22,$$

$$+78,97M_2 + 0,18M_6 - 0,06M_9 + 158,51M_{10} - 0,24M_{12} = -57,31,$$

$$+0,18M_2 + 38,42M_9 - 0,24M_{10} + 80,32M_{12} = +64,52.$$

Таблица XLIII'.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	
+ 300,70	+ 104,99	0	0	+ 45,36	+ 45,36	0	0	0	0	0	0	1
+ 104,99	+ 368,22	+ 158,24	+ 158,24	0	0	0	0	0	+ 79,12	0	0	2
0	+ 158,24	+ 446,60	+ 158,24	- 144,18	0	0	0	0	+ 79,12	0	0	3
0	+ 158,24	+ 158,24	+ 513,80	0	0	- 177,78	0	0	+ 79,12	0	0	4
+ 45,36	0	- 144,18	0	+ 379,08	+ 90,72	0	0	0	0	0	0	5
+ 45,36	0	0	0	+ 90,72	+ 181,44	+ 45,36	+ 45,36	+ 45,36	0	0	0	6
0	0	0	- 177,78	0	+ 45,36	+ 446,28	+ 90,72	+ 90,72	0	0	0	7
0	0	0	0	0	+ 45,36	+ 90,72	+ 446,28	+ 90,72	0	+ 177,78	0	8
0	0	0	0	0	+ 45,36	+ 90,72	+ 90,72	+ 169,84	0	0	+ 39,56	9
0	+ 79,12	+ 79,12	+ 79,12	0	0	0	0	0	+ 158,24	0	0	10
0	0	0	0	0	0	0	+ 177,78	0	0	+ 355,56	0	11
0	0	0	0	0	0	0	0	+ 39,56	0	0	+ 79,12	12

Таблица XLIV.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	A	Σ	
+ 300,98	+ 105,04	0	0	+ 45,03	+ 44,83	+ 0,20	+ 0,20	+ 0,20	0	0	0	— 61,55	+ 434,93	1
+ 105,04	+ 368,61	+ 158,52	+ 158,38	— 0,16	— 0,42	+ 0,11	+ 0,05	— 0,06	+ 78,97	+ 0,07	+ 0,18	— 47,49	+ 821,80	2
0	+ 158,52	+ 446,88	+ 158,38	— 144,18	— 0,25	+ 0,11	+ 0,05	— 0,06	+ 78,97	+ 0,07	+ 0,18	— 11,47	+ 687,20	3
0	+ 158,38	+ 158,38	+ 513,92	0	— 0,04	— 177,76	— 0,09	— 0,20	+ 79,04	+ 0,07	+ 0,18	— 3,21	+ 728,67	4
+ 45,03	— 0,16	— 144,14	0	+ 379,58	+ 91,41	— 0,20	— 0,20	— 0,20	0	0	0	+ 97,57	+ 468,65	5
+ 44,83	— 0,42	— 0,25	— 0,04	+ 91,41	+ 182,95	+ 44,75	+ 44,61	+ 44,61	+ 0,18	0	0	+ 124,06	+ 576,69	6
+ 0,20	+ 0,11	+ 0,11	— 177,76	— 0,20	+ 44,75	+ 446,61	+ 91,13	+ 91,13	— 0,11	0	0	— 18,23	+ 477,74	7
+ 0,20	+ 0,05	+ 0,05	— 0,09	— 0,20	+ 44,61	+ 91,13	+ 447,00	+ 91,53	— 0,17	+ 177,73	— 0,14	+ 14,24	+ 865,94	8
+ 0,20	— 0,06	— 0,06	— 0,20	— 0,20	+ 44,61	+ 91,13	+ 91,53	+ 171,64	— 0,06	— 0,14	+ 38,42	— 22,22	+ 414,59	9
0	+ 78,97	+ 78,97	+ 79,04	0	+ 0,18	— 0,11	— 0,17	— 0,06	+ 158,51	— 0,13	— 0,24	— 57,31	+ 337,65	10
0	+ 0,07	+ 0,07	+ 0,07	0	0	0	+ 177,73	— 0,14	— 0,13	+ 355,67	+ 0,20	+ 28,06	+ 561,60	11
0	+ 0,18	+ 0,18	+ 0,18	0	0	0	— 0,14	+ 38,42	— 0,24	+ 0,20	+ 80,32	+ 64,52	+ 183,62	12

ФЕРМЫ ОТ ЖЕСТКИХ УЗЛАМ.

Отсюда

$$\begin{aligned} M_1 &= -0,3608 \text{ tn.-m.}, & M_9 &= -0,6124, \\ M_2 &= +0,0579, & M_{10} &= -0,3900, \\ M_6 &= +0,9164, & M_{12} &= +1,0949. \end{aligned}$$

Для способа Мора вычисленные ранѣ углы ψ не мѣняются, а φ вычисляются изъ уравненій

$$\begin{aligned} 210,4\varphi_0 + 31,7\varphi_1 + 73,5\varphi_2 &= 4664,67, \\ 31,7\varphi_0 + 231,2\varphi_1 + 23,1\varphi_2 + 18,7\varphi_3 &= 2536,65, \\ 73,5\varphi_0 + 23,1\varphi_1 + 340,2\varphi_2 + 73,5\varphi_3 &= 5077,14, \\ 18,7\varphi_1 + 73,5\varphi_2 + 390,2\varphi_3 &= 3059,19. \end{aligned}$$

Находимъ

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= +17,8308, & \varphi_2 &= +9,3480, \\ \varphi_1 &= +7,1289, & \varphi_3 &= +5,7374. \end{aligned}$$

Для моментовъ получимъ величины

$$\begin{aligned} M_{0-1} &= +35981 \text{ kg.-cm.}, & M_{1-0} &= +2056 \text{ kg.-cm.}, \\ M_{0-2} &= -35981, & M_{2-0} &= -98330, \\ M_{1-2} &= +6865, & M_{2-1} &= +11991, \\ M_{0-3} &= +3439, & M_{3-1} &= +837, \\ M_{1-4} &= -12357, & M_{4-1} &= -42370, \\ M_{2-3} &= +86336, & M_{3-2} &= +59798, \\ M_{3-4} &= +5716, & M_{4-3} &= -5013, \\ M_{3-5} &= -66360, & M_{5-3} &= -114669. \end{aligned}$$

20. Вліяніе едѣланныхъ нами допущеній (при вычисленіи смѣщеннаго способа).

Попытаемся въ заключеніе нашихъ подсчетовъ опредѣлить хотя приблизительно, въ какой степени вліяютъ на окончательные результаты подсчетовъ тѣ допущенія, которыя необходимо было ввести (какъ мы видѣли въ главѣ I), чтобы задача опредѣленія моментовъ отъ жесткости узловъ была разрѣшима безъ помощи нѣсколькихъ приближеній—съ одного подсчета.

Наиболѣе важное допущеніе заключалось въ томъ, что при составленіи выраженія работы деформации элементовъ фермы на изгибъ мы игнорировали вліяніе продольнаго усилія въ элементѣ на его изгибъ.

Нѣкоторое представленіе о размѣрахъ ошибки, которую мы при этомъ дѣлаемъ, можно составить себѣ слѣдующимъ путемъ. Какъ мы видѣли (форм. [21] гл. I), работа деформации элемента на изгибъ выражается точно

$$A = \frac{l}{6EI} \left\{ (M_1^2 + M_2^2) \left[1 + \varphi(S) \right] - M_1 M_2 \left[1 + \psi(S) \right] \right\}.$$

Во всѣхъ нашихъ подсчетахъ мы принимали $\varphi(S)$ и $\psi(S)$ равными нулю.

Большую точность подсчета можно получить, полагая

$$\varphi(S) = \alpha = \text{Const.} \quad \text{и} \quad \psi(S) = \beta = \text{Const.}$$

Предполагаемъ, слѣдовательно, что функции $\varphi(S)$ и $\psi(S)$ не зависятъ отъ моментовъ M , и вычисляемъ величины этихъ функций, подставляя въ соотвѣтствующія формулы или ряды вмѣсто S величину S^0 — усилія въ элементѣ шарнирной фермы.

Подставляя затѣмъ вычисленныя для cadaго элемента величины α и β въ формулы работы деформации и дифференцируя, получимъ для всѣхъ элементовъ серію выражений вида

$$\frac{\partial A_{0-1}}{\partial M_i} = \frac{\partial A'_{0-1}}{\partial M_i} + \Delta\gamma_{0-1} \left[\frac{\partial \sum M^2}{\partial M_i} (1 + \alpha_{0-1}) + \frac{\partial \sum MM}{\partial M_i} (1 + \beta_{0-1}) \right],$$

.....
которыя можно переписать иначе

$$\frac{\partial A_{0-1}}{\partial M_i} = \frac{\partial A'_{0-1}}{\partial M_i} + \Delta\gamma_{0-1} (1 + \alpha_{0-1}) \frac{\partial \sum M^2}{\partial M_i} + \Delta\gamma_{0-1} (1 + \beta_{0-1}) \frac{\partial \sum MM}{\partial M_i},$$

.....
Суммируя эти выраженія для cadaго M_i и приравнивая суммы нулю, получимъ уравненія, совершенно подобныя уравненіямъ вышеизложеннаго обобщеннаго способа.

Рѣшая ихъ, найдемъ моменты отъ жесткости узловъ, а затѣмъ и усилія въ элементахъ жесткой фермы.

Сравнивая послѣднія съ усиліями въ шарнирной фермѣ, будемъ видѣть приблизительно, насколько значительная ошибка была нами сдѣлана при опредѣленіи α и β .

Примѣнимъ изложенный методъ къ фермѣ примѣра III. Для вычисленія α и β будемъ пользоваться при небольшихъ величинахъ $\alpha^2 l^2 = \frac{Sl^2}{EI}$ разложеніями въ ряды (21) и (21'), а при значительныхъ—формулами (22) и (22').

Результаты подсчета α , β и прочихъ величинъ приведены въ табл. XLIV.

Приступая теперь къ составленію обычныхъ уравненій, замѣтимъ, что данныя табл. XLII сохраняютъ свое значеніе и для новаго расчета; табл. же XLI замѣнится помѣщаемой ниже табл. XLI bis

Изъ сопоставленія табл. XLI bis и XLII получимъ табл. XLIII bis, представляющую нужныя намъ уравненія для опредѣленія величинъ M .

$$\begin{aligned} M_1 &= -0,3275 (-0,4209), & M_7 &= +0,0030 (+0,0081), \\ M_2 &= +0,1214 (+0,0663), & M_8 &= +0,0466 (+0,0572), \\ M_3 &= +0,0712 (+0,0833), & M_9 &= -1,1422 (-1,1586), \\ M_4 &= +0,0388 (+0,0414), & M_{10} &= -0,8116 (-0,8147), \\ M_5 &= +0,1342 (+0,1289), & M_{11} &= +0,0368 (+0,0483), \\ M_6 &= +1,6527 (+1,6439), & M_{12} &= +2,1456 (+2,1070). \end{aligned}$$

Для сравненія въ скобкахъ приведены вычисленные нами выше по первому способу величины, весьма близко сходящіяся съ вновь полу-

Таблица XLIV.

Эле- менты.	Усилія въ шарн. ф.	$\alpha^2 l^2 =$ $-\frac{Sl^2}{EI}$	$(1 + \beta)$	$(1 + \alpha)$	$\Delta\gamma(1 + \beta)$	$2 \Delta\gamma(1 + \alpha)$	Усилія въ жестк. ф.
0—2	+ 44,00	— 0,24	0,946	0,969	21,46	43,95	+ 43,67
2—3	+ 44,00	— 0,24	0,946	0,969	21,46	43,95	+ 43,71
3—5	+ 68,00	— 0,32	0,929	0,959	18,38	37,94	+ 67,40
1—4	— 56,00	+ 0,27	1,066	1,038	42,17	82,13	— 56,16
0—1	— 70,40	+ 2,84	2,139	1,622	224,57	340,59	— 69,77
1—3	+ 19,20	— 1,31	0,747	0,852	132,80	302,94	+ 19,92
3—4	— 19,20	+ 1,31	1,381	1,214	245,51	431,65	— 17,99
1—2	+ 40,00	— 1,73	0,684	0,816	98,62	235,30	+ 40,00
4—5	+ 30,00	— 1,30	0,749	0,853	107,99	245,97	+ 28,37

Таблица XLI bis.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	
+ 384,54	+ 224,57	0	0	+ 21,46	+ 21,46	0	0	0	0	0	0	1
+ 224,57	+ 422,72	+ 82,13	+ 82,13	0	0	0	0	0	+ 42,17	0	0	2
0	+ 82,13	+ 317,43	+ 82,13	- 98,62	0	0	0	0	+ 42,17	0	0	3
0	+ 82,13	+ 82,13	+ 385,07	0	0	- 132,80	0	0	+ 42,17	0	0	4
+ 21,46	0	- 98,62	0	+ 279,25	+ 43,95	0	0	0	0	0	0	5
+ 21,46	0	0	0	+ 43,95	+ 87,90	+ 21,46	+ 21,46	+ 21,46	0	0	0	6
0	0	0	- 132,80	0	+ 21,46	+ 346,89	+ 43,95	+ 43,95	0	0	0	7
0	0	0	0	0	+ 21,46	+ 43,95	+ 475,60	+ 43,95	0	+ 245,51	0	8
0	0	0	0	0	+ 21,46	+ 43,95	+ 43,95	+ 81,89	0	0	+ 18,38	9
0	+ 42,17	+ 42,17	+ 42,17	0	0	0	0	0	+ 82,13	0	0	10
0	0	0	0	0	0	0	+ 245,51	0	0	+ 431,65	0	11
0	0	0	0	0	0	0	0	+ 18,38	0	0	+ 37,94	12

ФЕРМЫ СЪ ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ.

Таблица XLIII bis.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	A	Σ	
+ 384,82	+ 224,62	0	0	+ 21,13	+ 20,93	+ 0,20	+ 0,20	+ 0,20	0	0	0	— 61,55	+ 590,55	1
+ 224,62	+ 423,11	+ 82,41	+ 82,27	— 0,16	— 0,42	+ 0,11	+ 0,05	— 0,06	+ 42,02	+ 0,07	+ 0,18	— 47,49	+ 806,71	2
0	+ 82,41	+ 317,71	+ 82,27	— 98,62	0	+ 0,11	+ 0,05	— 0,06	+ 42,02	+ 0,07	+ 0,18	— 11,47	+ 414,42	3
0	+ 82,27	+ 82,27	+ 385,19	0	— 0,04	— 132,78	— 0,09	— 0,20	+ 42,09	+ 0,07	+ 0,18	— 3,21	+ 455,75	4
+ 21,13	— 0,16	— 98,62	0	+ 279,75	+ 44,64	— 0,20	— 0,20	— 0,20	0	0	0	+ 97,57	+ 343,71	5
+ 20,93	— 0,42	— 0,25	— 0,04	+ 44,64	+ 89,41	+ 20,85	+ 20,71	+ 20,71	+ 0,18	0	0	+ 124,06	+ 340,78	6
+ 0,20	+ 0,11	+ 0,11	— 132,78	— 0,20	+ 20,85	+ 347,22	+ 44,36	+ 44,36	— 0,11	0	0	— 18,23	+ 305,89	7
+ 0,20	+ 0,05	+ 0,05	— 0,09	— 0,20	+ 20,71	+ 44,36	+ 476,32	+ 44,76	— 0,17	+ 245,46	— 0,14	+ 14,24	+ 845,55	8
+ 0,20	— 0,06	— 0,06	— 0,20	— 0,20	+ 20,71	+ 44,36	+ 44,76	+ 83,69	— 0,06	— 0,14	+ 17,24	— 22,22	+ 188,02	9
0	+ 42,02	+ 42,02	+ 42,09	0	+ 0,18	— 0,11	— 0,17	— 0,06	+ 82,40	— 0,13	— 0,24	— 57,31	+ 150,69	10
0	+ 0,07	+ 0,07	+ 0,07	0	0	0	+ 245,46	— 0,14	— 0,13	+ 431,76	+ 0,20	+ 28,06	+ 705,42	11
0	+ 0,18	+ 0,18	+ 0,18	0	0	0	— 0,14	+ 17,24	— 0,24	+ 0,20	+ 39,14	+ 64,52	+ 121,26	12

ченными. Нѣкоторое уклоненіе представляютъ лишь моменты M_1 и M_2 , приходящіеся по концамъ элемента 0—1, на которомъ принятіе въ расчетъ продольнаго усилія отразилось всего сильнѣе.

Въ общемъ точность нашего способа можно слѣдовательно для разсматриваемыхъ фермъ признать достаточной.

Какъ видно изъ послѣдующей сравнительной таблички, вычисленные усилія въ жесткой фермѣ нѣсколько несходны съ усиліями въ шарнирной фермѣ (послѣднія помѣщены въ скобкахъ).

$$\begin{aligned} S_{0-2} &= +43,67 (44,00), & S_{1-4} &= -56,16 (-56,00), \\ S_{0-1} &= -69,77 (-70,40), & S_{3-4} &= -17,99 (-19,20), \\ S_{2-3} &= +43,71 (44,00), & S_{3-5} &= +67,40 (+68,00), \\ S_{1-3} &= +19,92 (+19,20), & S_{1-2} &= +38,78 (+40,00). \end{aligned}$$

21. Примѣръ V. Ферма съ треугольной рѣшеткой и дополнительными стойками. (Мостъ Московско-Виндаво-Рыбинской жел. дор.).

Всѣ разсмотрѣнные нами до сихъ поръ примѣры фермъ были специально спроектированы нами для опредѣленной цѣли сравнительныхъ подсчетовъ. Стремясь получить наиболѣе рельефные результаты сравненія, мы сознательно жертвовали полнымъ соотвѣтствіемъ нашихъ фермъ требованіямъ практической примѣнимости. Это обстоятельство отнюдь не лишаетъ наши подсчеты практическаго значенія, такъ какъ сравненія съ однородными подсчетами другихъ авторовъ для практическихъ случаевъ даютъ совпадающіе результаты.

Тѣмъ не менѣе для полноты картины мы рассмотримъ еще одинъ примѣръ, выбравъ его изъ числа примѣненныхъ на практикѣ конструкций.

Ферма моста, изображенная на черт. 12^{bis}, принадлежитъ къ числу тѣхъ, которыя согласно извѣстнаго циркуляра Управленія желѣзныхъ дорогъ отъ 29 сент. 1900 г. могли быть примѣняемы безъ особаго разрѣшенія Министерства Путей Сообщеній. Мостъ, отверстіемъ 20 саж., былъ спроектированъ впервые въ 1898 г. для Московско-Виндавской линіи Общества Московско-Виндаво-Рыбинской желѣзной дороги.

Единственное измѣненіе, сдѣланное нами, заключается въ томъ что всѣ панели взяты равной длины, тогда какъ по проекту двѣ опорныя панели на 4" длиннѣе прочихъ. Основные размѣры фермы пока-

заны на черт. 12 *bis*, а длины элементов, размѣры ихъ поперечныхъ сѣченій и нѣкоторыя другія данныя, необходимыя для нашихъ расчетовъ, даны въ таблицѣ XLV.

Поперечныя сѣченія поясовъ имѣютъ П-образную форму и составлены изъ двухъ вертикальных листовъ размѣромъ $20'' \times \frac{7}{16}''$, одного-двухъ горизонтальных $20'' \times \frac{3}{8}''$ и двухъ-четырехъ уголковъ $3\frac{1}{2}'' \times 3\frac{1}{2}'' \times \frac{3}{8}''$.

Разстояніе между вертикальными листами—12".

Наклонный элементъ пояса 1—3 окаймленъ по нижнему краю вертикальных листовъ уголками $3\frac{1}{2}'' \times 3\frac{1}{2}'' \times \frac{3}{8}''$.

Раскосы двутаврового составного сѣченія изъ четырехъ уголковъ $6'' \times 4'' \times \frac{7}{16}''$ и одного листа $12'' \times \frac{5}{16}''$ (раскосъ 3—4) или двухъ листовъ $12\frac{1}{2}'' \times \frac{7}{16}''$ и четырехъ уголковъ $6'' \times 4'' \times \frac{3}{8}''$ (раскосы 4—7 и 7—8).

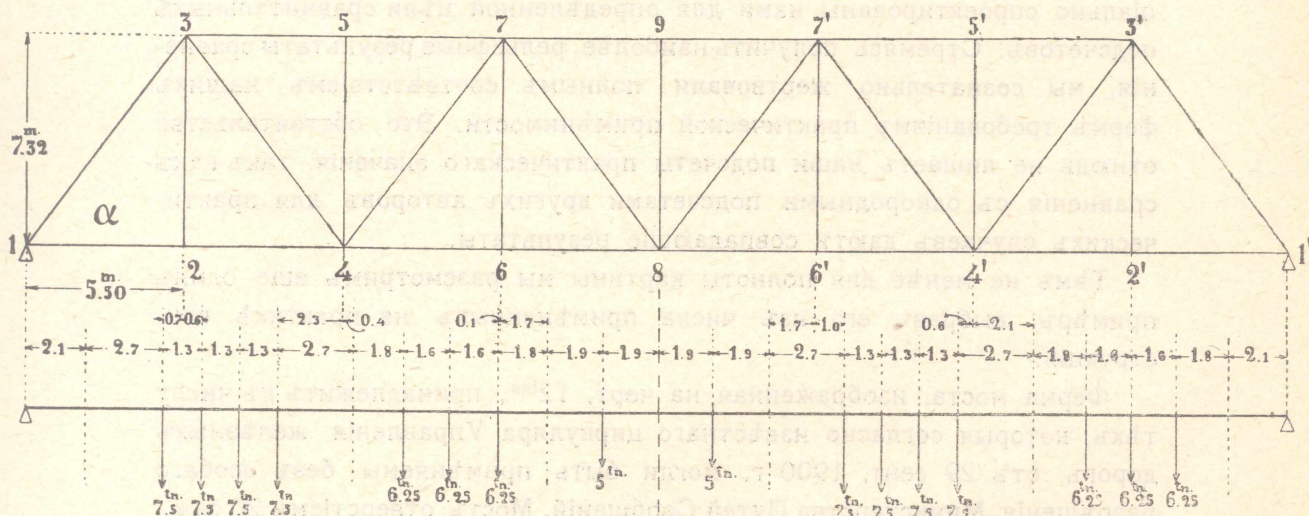
Стойки изъ четырехъ уголковъ размѣромъ $3'' \times 3\frac{1}{2}'' \times \frac{3}{8}''$ приклепываются съ наружной стороны поясныхъ листовъ.

Нагрузка фермы принята двоякая:

а. постоянная: 5 тоннъ на каждый узелъ верхняго пояса и 8 тоннъ на узелъ нижняго пояса;

б. временная въ видѣ двухъ паровозовъ съ тендерами и одного вагона, причемъ паровозы обращены тендерами другъ къ другу.

Черт. 12 bis.



$$\alpha = 53^\circ, \sin \alpha = 0.7986 \approx 0.80, \cos \alpha = 0.6018 \approx 0.60$$

Временная нагрузка, очевидно, расположена симметрично на пролетѣ, притомъ такимъ образомъ, чтобы вызвать по возможности большія усилія въ стойкахъ.

Расположеніе временной нагрузки показано на черт. 12^{bis} для лѣвой половины пролета; на правой сторонѣ показанъ другой возможный вариантъ расположенія нагрузки (паровозы трубами другъ къ другу). При выбранномъ положеніи поѣзда временная нагрузка распре- дѣлится слѣдующимъ образомъ на узлы нижняго пояса:

$$\text{Узелъ 2: } Q_2 = \frac{7,5}{5,5} (4,8 + 2,3 + 3,6 + 4,9) = 21,^{tn}27$$

$$\dots 4: Q_4 = \frac{7,5}{5,5} (0,6 + 1,9 + 3,2) + \frac{6,25}{5,5} (0,1 + 1,7 + 3,3) = 13,^{tn}57$$

$$\dots 6: Q_6 = \frac{6,25}{5,5} (2,2 + 3,8 + 5,4) + \frac{5 \times 1,9}{5,5} = 14,^{tn}68$$

$$\dots 8: Q_8 = \frac{5 \times 3,6}{5,5} \times 2 = 6,^{tn}55$$

$$\dots 1: Q_1 = \frac{7,5 \times 0,7}{5,5} = 0,^{tn}96$$

Для опредѣленія усилій въ элементахъ фермы дѣлаемъ сначала вычисленія усилій отъ единичной нагрузки; такъ какъ намъ придется имѣть дѣло исключительно съ симметричной нагрузкой, то въ таблицѣ XLVI приведены усилія въ элементахъ лѣвой половины фермы отъ послѣдовательнаго загрузенія силами, равными 1^{tn}. попарно узловъ 2 и 2', 3 и 3' и т. д.; въ той же таблицѣ даны усилія отъ загрузе- нія горизонтальными силами и равными 1^{tn}. попарно узловъ 2 и 2',
..... 7 и 7'.

Затѣмъ въ таблицѣ XLVII дано вычисленіе полныхъ усилій въ эле- ментахъ фермы отъ дѣйствія заданной постоянной и временной нагрузки.

Полныя усилія помѣщены въ послѣдней графѣ этой таблицы, соотвѣтствующія же напряженія можно найти въ послѣдней графѣ таблицы XLV.

Пользуясь таблицей XLVI, легко составимъ таблицу усилій въ элементахъ подѣ дѣйствіемъ паръ силъ, равныхъ 1^{tn.-cm.} и прило- женныхъ попарно къ симметрично расположеннымъ элементамъ. Со- ставляющія пару силы, какъ всегда, направлены перпендикулярно къ оси элемента. Соотвѣтствующія усилія въ тоннахъ, увеличенныя въ 100 разъ, представлены въ таблицѣ XLVIII.

Приступая къ изслѣдованію напряженій отъ жесткости узловъ по первому (обобщенному) методу, мы должны ввести 21 неизвѣстную величину, каждая изъ которыхъ выражаетъ собой абсолютное значеніе четырехъ равныхъ взаимно-уравновѣшивающихся паръ.

Таблица XLV.

Наз- ваніе эле- мента	Длина l см.	Площ. ω_1 дм. ²	Площ. ω см. ²	Мом. инерц. I дм. ⁴	Мом. инерц. I см. ⁴	Разст. ц. тяж. e_1 см.	Разст. ц. тяж. e_2 см.	$\frac{l}{\omega}$ $\frac{1}{\text{см.}}$	$\Delta\gamma = \frac{l}{6I} 10^4$ $\frac{1}{\text{см.}^3}$	$\frac{N}{l} = \frac{2I}{l}$ см. ³	На- пряж. кг. см. ²
1—2	550	29,996	193,5	1275,7	53100	35,6	16,1	2,84	17,26	193,1	+ 381
2—4	550	29,996	193,5	1275,7	53100	35,6	16,1	2,84	17,26	193,1	+ 381
4—6	550	34,992	225,8	1391,0	57900	37,5	14,3	2,44	15,83	210,5	+ 664
6—8	550	34,992	225,8	1391,0	57900	37,5	14,3	2,44	15,83	210,5	+ 664
1—3	916	34,992	225,8	2014,6	83850	20,8	30,9	4,06	18,21	183,1	— 544
3—5	550	29,996	193,5	1275,7	53100	16,1	35,6	2,84	17,26	193,1	— 629
5—7	550	29,996	193,5	1275,7	53100	16,1	35,6	2,84	17,26	193,1	— 629
7—9	550	37,496	241,9	1535,8	63920	13,7	39,0	2,27	14,34	232,4	— 650
3—4	916	20,522	132,4	135,4	5640	15,6	15,6	6,92	270,69	12,3	+ 604
4—7	916	25,402	163,9	258,5	10760	15,6	15,6	5,59	141,88	23,5	— 286
7—8	916	25,402	163,9	258,5	10760	15,6	15,6	5,59	141,88	23,5	+ 75
2—3	732	9,268	59,9	24,6	1020	9,3	9,3	12,22	1196,08	2,8	+ 489
4—5	732	9,268	59,9	24,6	1020	9,3	9,3	12,22	1196,08	2,8	— 83
6—7	732	9,268	59,9	24,6	1020	9,3	9,3	12,22	1196,08	2,8	+ 379
8—9	732	9,268	58,9	24,6	1020	9,3	9,3	12,22	1196,08	2,8	— 83

Изгибающіе моменты, дѣйствующіе на концевыя сѣченія элемен-
товъ вслѣдствіе жесткости узловъ, выражаются слѣдующимъ образомъ
черезъ упомянутыя неизвѣстныя:

$$M_{1-2} = + M_1,$$

$$M_{1-3} = - M_1,$$

$$M_{2-1} = - (M'_2 + M_3),$$

$$M_{2-3} = + M'_2,$$

$$M_{2-4} = + M_3,$$

$$M_{3-1} = - (M'_4 + M'_5 + M_6),$$

$$M_{3-2} = + M'_4,$$

$$M_{3-4} = + M'_5,$$

$$M_{3-5} = + M_6,$$

$$M_{4-2} = - (M'_7 + M'_8 + M'_9 + M_{10}),$$

$$M_{4-3} = + M'_7,$$

$$M_{4-5} = + M'_8,$$

$$M_{4-7} = + M'_9,$$

$$M_{4-6} = + M_{10},$$

$$M_{5-3} = - (M'_{11} + M_{12}),$$

$$M_{5-4} = + M'_{11},$$

$$M_{5-7} = + M_{12},$$

$$M_{6-4} = - (M'_{13} + M_{14}),$$

$$M_{6-7} = + M'_{13},$$

$$M_{6-8} = + M_{14},$$

Таблица XLVI.

Усилия въ элементахъ шарнирной фермы подѣ дѣйствіемъ нагрузки:														
Элементы.	Вертик. силами = $1tn.$, прилож. попарно въ узлахъ:								Гориз. силами = $1tn.$, прилож. попарно въ узлахъ.					
	2 и 2'	3 и 3'	4 и 4'	5 и 5'	6 и 6'	7 и 7'	8 ($2tn.$)	9 ($2tn.$)	2 и 2'	3 и 3'	4 и 4'	5 и 5'	6 и 6'	7 и 7'
1—2	+0,75	+0,75	+0,75	+0,75	+0,75	+0,75	+0,75	+0,75	0	0	0	0	0	0
2—4	+0,75	+0,75	+0,75	+0,75	+0,75	+0,75	+0,75	+0,75	+1,00	0	0	0	0	0
4—6	+0,75	+0,75	+1,50	+1,50	+2,25	+2,25	+2,25	+2,25	+1,00	0	+1,00	0	0	0
6—8	+0,75	+0,75	+1,50	+1,50	+2,25	+2,25	+2,25	+2,25	+1,00	0	+1,00	0	+1,00	0
3—5	—0,75	—0,75	—1,50	—1,50	—1,50	—1,50	—1,50	—1,50	0	+1,00	0	0	0	0
5—7	—0,75	—0,75	—1,50	—1,50	—1,50	—1,50	—1,50	—1,50	0	+1,00	0	+1,00	0	0
7—9	—0,75	—0,75	—1,50	—1,50	—2,25	—2,25	—3,00	—3,00	0	+1,00	0	+1,00	0	+1,00
1—3	—1,25	—1,25	—1,25	—1,25	—1,25	—1,25	—1,25	—1,25	0	0	0	0	0	0
3—4	0	0	+1,25	+1,25	+1,25	+1,25	+1,25	+1,25	0	0	0	0	0	0
4—7	0	0	0	0	—1,25	—1,25	—1,25	—1,25	0	0	0	0	0	0
7—8	0	0	0	0	0	0	+1,25	+1,25	0	0	0	0	0	0
2—3	+1,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—5	0	0	0	—1,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6—7	0	0	0	0	+1,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0
—9	0	0	0	0	0	0	0	—2,00	0	0	0	0	0	0

Таблица XLVII.

Усилия въ элементахъ шарнирной фермы подъ дѣйствіемъ грузовъ:							
Элементы.	5 ^{tn} . въ узлахъ в. пояса.	8 ^{tn} . въ узлахъ н. пояса.	21 ^{tn} . 27 въ узлахъ 2 и 2'	13 ^{tn} . 57 въ узлахъ 4 и 4'	14 ^{tn} . 68 въ узлахъ 6 и 6'	6 ^{tn} . 55 въ узлѣ 8	полной нагрузки фермы.
1—2	+ 13,125	+ 21,000	+ 15,953	+ 10,178	+ 11,010	+ 2,456	+ 73,722
2—4	+ 13,125	+ 21,000	+ 15,953	+ 10,178	+ 11,010	+ 2,456	+ 73,722
4—6	+ 28,125	+ 45,000	+ 15,953	+ 20,355	+ 33,030	+ 7,369	+ 149,832
6—8	+ 28,125	+ 45,000	+ 15,953	+ 20,355	+ 33,030	+ 7,369	+ 149,832
3—5	— 22,500	— 36,000	— 15,953	— 20,355	— 22,020	— 4,913	— 121,741
5—7	— 22,500	— 36,000	— 15,953	— 20,355	— 22,020	— 4,913	— 121,741
7—9	— 30,000	— 48,000	— 15,953	— 20,355	— 33,030	— 9,825	— 157,163
1—3	— 21,875	— 35,000	— 26,588	— 16,963	— 18,350	— 4,094	— 122,870
3—4	+ 15,625	+ 25,000	0	+ 16,963	+ 18,350	+ 4,094	+ 80,032
4—7	— 9,375	— 15,000	0	0	— 18,350	— 4,094	— 46,819
7—8	+ 3,125	+ 5,000	0	0	0	+ 4,094	+ 12,219
2—3	0	+ 8,000	+ 21,270	0	0	0	+ 29,270
4—5	— 5,000	0	0	0	0	0	— 5,000
6—7	0	+ 8,000	0	0	+ 14,680	0	+ 22,680
8—9	— 5,000	0	0	0	0	0	— 5,000

$$M_{7-5} = -(M'_{15} + M'_{16} + M'_{17} + M'_{18}),$$

$$M_{7-4} = +M'_{15},$$

$$M_{7-6} = +M'_{16},$$

$$M_{7-8} = +M'_{17},$$

$$M_{7-9} = +M_{18},$$

$$M_{8-6} = -M_{19},$$

$$M_{8-7} = -M'_{20},$$

$$M_{9-7} = -M_{21},$$

$$M_{8-9} = M_{9-8} = 0.$$

Изъ таблицы XLV легко видѣть значительную разницу въ значеніяхъ величинъ $\Delta\gamma$ для элементовъ контура фермы и ея рѣшетки; вслѣдствіе этого и коэффициенты при величинахъ M въ уравненіяхъ для ихъ вычисленія будутъ весьма различны по величинѣ, что невыгодно отзывается на точности рѣшенія уравненій.

Во избѣжаніе этого условимся выражать моменты для рѣшетки въ десятыхъ доляхъ тоннометровъ, а для контура попрежнему въ тоннометрахъ. Тогда получимъ выраженія работы деформации отдѣльных элементовъ

$$A_{1-2} = A'_{1-2} + \frac{\Delta\gamma_{1-2}}{E} \left[M_1^2 + \left(\frac{M_2}{10} + M_3 \right)^2 + M_1 \left(\frac{M_2}{10} + M_3 \right) \right],$$

$$A_{2-4} = A'_{2-4} + \frac{\Delta\gamma_{2-4}}{E} \left[M_3^2 + \left(\frac{M_7 + M_8 + M_9}{10} + M_{10} \right)^2 + M_3 \left(\frac{M_7 + M_8 + M_9}{10} + M_{10} \right) \right],$$

$$A_{4-6} = A'_{4-6} + \frac{\Delta\gamma}{E} \left[M_{10}^2 + \left(\frac{M_{13}}{10} + M_{14} \right)^2 + M_{10} \left(\frac{M_{13}}{10} + M_{14} \right) \right],$$

$$A_{6-8} = A'_{6-8} + \frac{\Delta\gamma_{6-8}}{E} \left[M_{14}^2 + M_{19}^2 + M_{14} \cdot M_{19} \right],$$

$$A_{3-5} = A'_{3-5} + \frac{\Delta\gamma_{3-5}}{E} \left[M_6^2 + \left(\frac{M_{11}}{10} + M_{12} \right)^2 + M_6 \left(\frac{M_{11}}{10} + M_{12} \right) \right],$$

$$A_{5-7} = A'_{5-7} + \frac{\Delta\gamma_{5-7}}{E} \left[M_{12}^2 + \left(\frac{M_{15} + M_{16} + M_{17}}{10} + M_{18} \right)^2 + M_{12} \left(\frac{M_{15} + M_{16} + M_{17}}{10} + M_{18} \right) \right],$$

$$A_{7-9} = A'_{7-9} + \frac{\Delta\gamma_{7-9}}{E} \left[M_{18}^2 + M_{21}^2 + M_{18} \cdot M_{21} \right],$$

Таблица XLVIII.
Усилия увеличены въ 100 разъ.

Элем.	Усилия въ элементахъ шарнирной фермы подъ дѣйствіемъ паръ силъ = $1\text{тн.}-\text{см.}$, которыми загружаются попарно элементы:													
	1—2 и 1'—2'	2—4 и 2'—4'	4—6 и 4'—6'	6—8 и 6'—8	3—5 и 3'—5'	5—7 и 5'—7'	7—9 и 7'—9	1—3 и 1'—3'	3—4 и 3'—4'	4—7 и 4'—7'	7—8 и 7'—8	2—3 и 2'—3'	4—5 и 4'—5'	6—7 и 6'—7'
1—2	+0,136	0	0	0	0	0	0	+0,136	0	0	0	0	0	0
2—4	+0,136	0	0	0	0	0	0	+0,136	0	0	0	+0,136	0	0
4—6	+0,136	+0,136	+0,136	0	+0,136	+0,136	0	+0,136	+0,136	+0,136	0	+0,136	+0,136	0
6—8	+0,136	+0,136	+0,136	0	+0,136	+0,136	0	+0,136	+0,136	+0,136	0	+0,136	+0,136	+0,136
3—5	—0,136	—0,136	0	0	—0,136	0	0	—0,136	—0,136	0	0	—0,136	0	0
5—7	—0,136	—0,136	0	0	—0,136	0	0	—0,136	—0,136	0	0	—0,136	—0,136	0
7—9	—0,136	—0,136	—0,136	—0,136	—0,136	—0,136	—0,136	—0,136	—0,136	—0,136	—0,136	—0,136	—0,136	—0,136
1—3	—0,227	0	0	0	0	0	0	—0,082	0	0	0	0	0	0
3—4	0	+0,227	0	0	+0,227	0	0	0	+0,082	0	0	0	0	0
4—7	0	0	—0,227	0	0	—0,227	0	0	0	—0,082	0	0	0	0
7—8	0	0	0	+0,227	0	0	+0,227	0	0	0	+0,082	0	0	0
2—3	+0,182	—0,182	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—5	0	0	0	0	—0,182	+0,182	0	0	0	0	0	0	0	0
6—7	0	0	+0,182	—0,182	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8—9	0	0	0	0	0	0	—0,364	0	0	0	0	0	0	0

$$A_{1-3} = A'_{1-3} + \frac{\Delta\gamma_{1-3}}{E} \left[M_1^2 + \left(\frac{M_4 + M_5}{10} + M_6 \right)^2 - M_1 \left(\frac{M_4 + M_5}{10} + M_6 \right) \right],$$

$$A_{3-4} = A'_{3-4} + \frac{\Delta\gamma_{3-4}}{100E} \left[M_5^2 + M_7^2 - M_5 \cdot M_7 \right],$$

$$A_{4-7} = A'_{4-7} + \frac{\Delta\gamma_{4-7}}{100E} \left[M_9^2 + M_{15}^2 - M_9 \cdot M_{15} \right],$$

$$A_{7-8} = A'_{7-8} + \frac{\Delta\gamma_{7-8}}{100E} \left[M_{17}^2 + M_{20}^2 + M_{17} \cdot M_{20} \right],$$

$$A_{2-3} = A'_{2-3} + \frac{\Delta\gamma_{2-3}}{100E} \left[M_2^2 + M_4^2 - M_2 \cdot M_4 \right],$$

$$A_{4-5} = A'_{4-5} + \frac{\Delta\gamma_{4-5}}{100E} \left[M_8^2 + M_{11}^2 - M_8 \cdot M_{11} \right],$$

$$A_{6-7} = A'_{6-7} + \frac{\Delta\gamma_{6-7}}{100E} \left[M_{13}^2 + M_{16}^2 - M_{13} \cdot M_{16} \right].$$

Въ этихъ формулахъ A' по прежнему обозначаютъ величину работы элементовъ при простомъ растяженіи или сжатіи; кромѣ того положено

$$\begin{aligned} M_2 &= 10M'_2; & M_4 &= 10M'_4; & M_5 &= 10M'_5; & M_7 &= 10M'_7; \\ M_8 &= 10M'_8; & M_9 &= 10M'_9; & M_{11} &= 10M'_{11}; & M_{13} &= 10M'_{13}; \\ M_{15} &= 10M'_{15}; & M_{16} &= 10M'_{16}; & M_{17} &= 10M'_{17}; & M_{20} &= 10M'_{20}. \end{aligned}$$

Величины $M'_2, M'_4, \dots, M'_{20}$ выражены въ $\frac{\text{тн.-м.}}{10}$.

Вычислимъ теперь на основаніи введенныхъ обозначеній при помощи таблицы XLVIII величины усилий въ элементахъ фермы подѣйствіемъ единичной нагрузки группами силъ $M_1 = 1; M_2 = 1; \dots M_{21} = 1$.

Усилія увеличены въ 100 разъ

[illegible]

Т а б л и ц а I L. (Продолженіе).

Усилія увеличены въ 100 разъ.

Усилия въ элементахъ шарнирной фермы подѣ дѣйствіемъ группъ силъ, равныхъ 1 тн.-см.										
M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	M_{20}	M_{21}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0,136	-0,136	0	-0,136	-0,136	-0,136	0	0	0
0	0	0	-0,136	0	0	-0,136	-0,136	0	0	0
+0,136	+0,136	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	+0,136	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	+0,136	+0,136	+0,136
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0,227	-0,227	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0,227	+0,227	+0,227	+0,145	+0,227	+0,227	+0,227	0	0	0
0	0	0	+0,227	0	0	+0,082	+0,227	-0,227	-0,082	-0,227
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+0,182	+0,364	0	0	-0,182	-0,182	-0,182	-0,182	0	0	0
0	0	-0,182	-0,364	0	0	0	0	+0,182	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0,364	0	0	+0,346

Легко видѣть, что для полученія усилій отъ $M_1 = 1$ достаточно изъ величинъ 1-й графы табл. XLVIII вычесть соотвѣтственные величины графы 8-й; для $M_2 = 1$ —вычесть изъ 12-й графы 1-ю и т. д.

Всѣ эти величины усилій сведены въ таблицу II. (Усилія увеличены въ 100 разъ).

Затѣмъ умноженіемъ чиселъ таблицы II на соотвѣтствующія каждому элементу величины $\frac{l}{\omega}$ (см. табл. XLV) получена табл. L.

Не слѣдуетъ забывать, что мы условились выражать изгибающіе моменты для элементовъ рѣшетки въ десятыхъ тонна-метра, таблицы же II и L составлены для величинъ M , равныхъ 1 тонна-сантиметру, но увеличены въ 100 разъ, т. е. фактически соотвѣтствуютъ 1 тонна-метру. Другими словами, величины таблицы II представляютъ собою коэффициенты $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu$ слѣдующаго выраженія усилій въ элементахъ жесткой фермы:

$$S = S^0 + \alpha M_1 + \beta M_2 + \dots + \mu M_{20} + \nu M_{21};$$

переходя же къ величинамъ $M_2, M_4, \dots, M_{20}$, выраженнымъ въ десятыхъ tn.—m., мы получили формулу

$$S = S^0 + \alpha M_1 + \frac{\beta}{10} M_2 + \dots + \frac{\mu}{10} M_{20} + \nu M_{21},$$

т. е. величины таблицъ II и L, соотвѣтствующія моментамъ, изгибающимъ рѣшетку, должны быть уменьшены въ 10 разъ.

Принимая въ соображеніе это обстоятельство, приступаемъ къ вычисленію коэффициентовъ при M въ основныхъ уравненіяхъ; для этого мы должны, какъ извѣстно, умножать послѣдовательно числа таблицы L на числа вертикальныхъ рядовъ таблицы II, соотвѣтствующія каждому M , и въ полученныхъ 21 таблицахъ просуммировать вертикальные столбцы.

Не приводя промежуточныхъ вычисленій, мы даемъ въ таблицѣ II окончательные результаты подсчета этихъ коэффициентовъ. Въ послѣдней графѣ помѣщены величины свободного члена для уравненій; послѣднія получены послѣдовательнымъ умноженіемъ полныхъ усилій шарнирной фермы на вертикальные столбцы таблицы L съ послѣдующимъ суммированіемъ.

Затѣмъ въ таблицѣ LII помѣщены величины коэффициентовъ при M типа $\frac{\Delta\gamma}{E}$; наконецъ таблица LIII даетъ окончательный видъ основныхъ уравненій обобщеннаго способа для вычисленія величинъ M .

Самое вычисленіе не представляетъ какихъ либо особенностей по сравненію съ предыдущими примѣрами, если не считать чрезвычайно большого количества вычисленій, обусловленнаго значительнымъ числомъ неизвѣстныхъ.

Произведенный по обычной сокращенной логариѳмической схемѣ подсчетъ опредѣляетъ величины неизвѣстныхъ

$$M_1^* = -3.2070,$$

$$M_{12}^* = +2.8820,$$

$$M_2 = +0.9934,$$

$$M_{13} = +0.2666,$$

$$M_3^* = +3.3565,$$

$$M_{14}^* = +4.3942,$$

$$M_4 = +0.8401,$$

$$M_{15} = +0.3735,$$

$$M_5 = +1.4860,$$

$$M_{16} = +0.2355,$$

$$M_6^* = -2.1770,$$

$$M_{17} = +1.8910,$$

$$M_7 = +0.5659,$$

$$M_{18}^* = +0.4845,$$

$$M_8 = +0.7849,$$

$$M_{19}^* = -1.5787,$$

$$M_9 = +4.0064,$$

$$M_{20} = +0.9815,$$

$$M_{10}^* = -1.3913,$$

$$M_{21}^* = +2.3672.$$

$$M_{11} = +0.8759,$$

Моменты, отмѣченные *, выражены въ тонна-метрахъ, остальные—въ десятыхъ тонна-метра. Чтобы перейти отъ обобщеннаго способа къ способамъ второй группы, мы должны, какъ извѣстно изъ предыдущаго, приравнять нулю изгибающіе рѣшетку моменты, т. е. положить

$$M_2 = M_4 = M_5 = M_7 = M_8 = M_9 = M_{11} = M_{13} = M_{15} = M_{16} = \\ = M_{17} = M_{20} = 0.$$

[illegible]

л и ц а L.

э ф ф и ц и е н т ы п р и н е и з в ъ с т н ы х ъ:
и у в е л и ч е н ы в ъ 100 р а з ъ).

M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	M_{20}	M_{21}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0,332	-0,332	0	-0,332	-0,332	-0,332	0	0	0
0	0	0	-0,332	0	0	-0,332	-0,332	0	0	0
+0,386	+0,386	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	+0,386	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	+0,309	+0,309	+0,309
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1,571	-1,571	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1,269	+1,269	+1,269	+0,811	+1,269	+1,269	+1,269	0	0	0
0	0	0	+1,269	0	0	+0,458	+1,269	-1,269	-0,458	-1,269
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+2,224	+4,448	0	0	-2,224	-2,224	-0,224	-2,224	0	0	0
0	0	-2,224	-4,448	0	0	0	0	+2,224	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-4,448	0	0	+4,448

Та ѓ

[illegible]

л и ц а L I.

уравнений вида $\sum a^2 \frac{l}{\omega}$ при неизвестных:										Своб. членъ А
M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	M_{20}	M_{21}	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 137,47
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— 20,68
— 0,36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— 174,66
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— 6,94
— 0,01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— 5,25
— 1,17	0	0	+ 0,04	+ 0,04	+ 0,04	+ 0,41	0	0	0	+ 39,02
+ 0,02	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— 1,52
+ 0,04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— 10,76
+ 0,06	0	— 0,01	0	0	0	— 0,01	0	0	0	— 13,32
+ 0,75	— 0,07	— 1,10	— 0,02	— 0,03	— 0,03	— 0,29	+ 0,41	0	0	— 44,77
+ 0,1	0	0	0	0	0	— 0,04	0	0	0	— 18,38
+ 2,37	— 0,03	— 0,29	— 0,10	— 0,11	— 0,11	— 1,10	0	0	0	— 182,54
— 0,03	+ 0,01	+ 0,11	0	0	0	+ 0,03	— 0,04	0	0	— 15,96
— 0,29	+ 0,11	+ 2,29	+ 0,02	+ 0,03	+ 0,05	+ 0,67	— 1,10	— 0,01	— 0,29	— 244,28
— 0,10	0	+ 0,02	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,06	0	0	0	— 2,69
— 0,11	0	+ 0,03	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,07	0	0	0	— 9,80
— 0,11	0	+ 0,05	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,09	— 0,01	0	— 0,01	— 14,22
— 1,10	+ 0,03	+ 0,07	+ 0,06	+ 0,07	+ 0,09	+ 1,88	— 0,29	— 0,01	— 1,10	— 121,16
0	— 0,04	— 1,10	0	0	— 0,01	— 0,29	+ 0,74	+ 0,01	+ 0,33	— 13,63
0	0	— 0,01	0	0	0	— 0,01	+ 0,01	0	+ 0,01	— 5,42
0	0	— 0,29	0	0	— 0,01	— 1,10	+ 0,33	+ 0,01	+ 1,14	— 75,19

Т а б л и

[illegible]

ца LII.

нений вида $\frac{\Delta \gamma}{E}$ при неизвестныхъ:

M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	M_{20}	M_{21}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+ 1,73	+ 17,26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— 11,96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	— 1,42	0	0	0	0	0	0
0	0	+ 1,58	+ 15,83	0	0	0	0	0	0	0
+ 24,27	+ 3,45	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+ 3,45	+ 69,04	0	0	+ 1,73	+ 1,73	+ 1,73	+ 17,26	0	0	0
0	0	+ 24,24	+ 3,17	0	— 11,96	0	0	0	0	0
0	0	+ 3,17	+ 63,32	0	0	0	0	+ 15,83	0	0
0	+ 1,73	0	0	+ 3,19	+ 0,35	+ 0,35	+ 3,45	0	0	0
0	+ 1,73	— 11,96	0	+ 0,35	+ 24,27	+ 0,35	+ 3,45	0	0	0
0	+ 1,73	0	0	+ 0,35	+ 0,35	+ 3,19	+ 3,45	0	+ 1,42	0
0	+ 17,26	0	0	+ 3,45	+ 3,45	+ 3,45	+ 63,20	0	0	+ 14,34
0	0	0	+ 15,83	0	0	0	0	+ 31,66	0	0
0	0	0	0	0	0	+ 1,42	0	0	+ 2,84	0
0	0	0	0	0	0	0	+ 14,34	0	0	+ 28,68

Т а б л и

[illegible]

ца ЛШ.

ний при неизвестных:										Свободн. членъ А	Контр. суммы Σ
M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	M_{20}	M_{21}		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 137,47	+ 205,53
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— 20,68	— 3,15
— 0,36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— 174,66	— 62,33
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— 6,94	+ 7,58
— 0,01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— 5,25	+ 0,03
+ 16,09	0	0	+ 0,04	+ 0,04	+ 0,04	+ 0,41	0	0	0	+ 39,02	+ 118,27
+ 0,02	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— 1,52	+ 7,44
+ 0,04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— 10,76	+ 7,46
+ 0,06	0	— 0,01	— 1,42	0	0	— 0,01	0	0	0	— 13,32	— 5,62
+ 0,75	+ 1,51	+ 14,73	— 0,02	— 0,03	— 0,03	— 0,29	+ 1,41	0	0	— 44,77	+ 66,72
+ 3,57	0	0	0	0	0	— 0,04	0	0	0	— 18,38	— 0,88
+ 71,41	— 0,03	— 0,29	+ 1,63	+ 1,62	+ 1,62	+ 16,16	0	0	0	— 182,54	— 70,26
— 0,03	+ 24,25	+ 3,28	0	— 11,96	0	+ 0,03	— 0,04	0	0	— 15,96	+ 1,08
— 0,29	+ 3,28	+ 65,61	+ 0,02	+ 0,03	+ 0,05	+ 0,67	+ 14,73	— 0,01	— 0,29	— 244,28	— 145,76
+ 1,63	0	+ 0,02	+ 3,20	+ 0,36	+ 0,36	+ 3,51	0	0	0	— 2,69	+ 4,99
+ 1,62	— 11,96	+ 0,03	+ 0,36	+ 24,28	+ 0,36	+ 3,52	0	0	0	— 9,80	+ 8,42
+ 1,62	0	+ 0,05	+ 0,36	+ 0,36	+ 3,20	+ 3,54	— 0,01	+ 1,42	— 0,01	— 14,22	— 3,68
+ 16,16	+ 0,03	+ 0,67	+ 3,51	+ 3,52	+ 3,54	+ 65,08	— 0,29	— 0,01	+ 13,24	— 121,16	— 15,64
0	— 0,04	+ 14,73	0	0	— 0,01	— 0,29	+ 32,40	+ 0,01	+ 0,33	— 13,63	+ 33,91
0	0	— 0,01	0	0	+ 1,42	— 0,01	+ 0,01	+ 2,84	+ 0,01	— 5,42	— 1,16
0	0	— 0,29	0	0	— 0,01	+ 13,24	+ 0,33	+ 0,01	+ 29,82	— 75,19	— 32,09

При этомъ условіи получаемъ новую систему 9 уравненій съ столькими же неизвѣстными, коэффициенты которыхъ представлены въ таблицѣ LIV.

Рѣшая эту систему, получаемъ новыя величины для девяти моментовъ, выраженные въ тн.—м.,

$$\begin{aligned} M_1 &= -3,2369, & M_{14} &= +4,3404, \\ M_3 &= +3,4720, & M_{18} &= +0,6230, \\ M_6 &= -2,0572, & M_{19} &= -1,5566, \\ M_{10} &= -1,1193, & M_{21} &= +2,3043. \\ M_{12} &= +2,9261, \end{aligned}$$

Остается дать еще исчисленіе моментовъ по способу Мора, которое для этого примѣра исполнено нѣсколько иначе, чѣмъ для предыдущихъ. Въ уравненіи для вычисленія угловъ вращенія узловъ

$$2\varphi'_N \sum N'_{NX} + \sum N'_{NX} \cdot \varphi'_X = 3 \sum N'_{NX} \cdot \psi'_{NX}$$

мы обозначаемъ чрезъ N'_{NX} не величину $\frac{2EI}{l}$, какъ прежде, но лишь

$\frac{2I}{l}$; соотвѣтственно съ этимъ величины φ' и ψ' имѣютъ значенія

$$\varphi' = \varphi \cdot E, \quad \psi' = \psi \cdot E,$$

гдѣ φ и ψ суть извѣстные элементы деформации шарнирной фермы.

Вышеупомянутое уравненіе можетъ быть, слѣдовательно, переписано для нашихъ обозначеній

$$2\varphi_N E \sum N'_{NX} - \sum N'_{NX} \cdot \varphi \cdot E = 3 \sum \psi_{NX} \cdot N'_{NX} \cdot E.$$

Вычисленіе величинъ, входящихъ въ уравненія этого типа, показано въ табл. LV; величины ψE вычислены по формулѣ

$$\psi_{NX} \cdot E = \sum S^0 \cdot \frac{l}{\omega} \cdot a_{NX},$$

гдѣ S^0 —усилія въ элементахъ шарнирной фермы отъ заданной нагрузки, a_{NX} —усилія отъ нагрузки элемента $N-X$ парой силъ $= +1$, а суммирование распространяется на всѣ элементы. Получаемъ систему уравненій

$$75,20\varphi'_1 + 19,30\varphi'_2 + 18,30\varphi'_3 = 462,96,$$

$$19,30\varphi'_1 + 77,80\varphi'_2 + 0,30\varphi'_3 + 19,30\varphi'_4 = 454,06,$$

$$18,30\varphi'_1 + 0,30\varphi'_2 + 78,20\varphi'_3 + 1,20\varphi'_4 + 19,30\varphi'_5 = 418,77,$$

$$19,30\varphi'_2 + 1,20\varphi'_3 + 88,60\varphi'_4 + 0,30\varphi'_5 + 21,10\varphi'_6 + 2,4\varphi'_7 = 362,82,$$

$$19,30\varphi'_3 + 0,30\varphi'_4 + 77,80\varphi'_5 + 19,30\varphi'_7 = 334,80,$$

$$21,10\varphi'_4 + 85,00\varphi'_6 + 0,30\varphi'_7 = 172,75,$$

$$2,40\varphi'_4 + 19,30\varphi'_5 + 0,30\varphi'_6 + 95,20\varphi'_7 = 182,99.$$

Рѣшеніе системы даетъ въ $\frac{\text{тн.}}{10 \text{ см.}^2}$

$$\varphi'_1 = +4,2512,$$

$$\varphi'_5 = +3,1143,$$

$$\varphi'_2 = +4,0736,$$

$$\varphi'_6 = +1,3333,$$

$$\varphi'_3 = +3,5330,$$

$$\varphi'_7 = +1,2161.$$

$$\varphi'_4 = +2,7989,$$

Кромѣ того по симметріи фермы и нагрузки

$$\varphi_8 = 0, \quad \varphi_9 = 0.$$

Имѣя величины φ' и ψ' , легко опредѣлимъ всѣ моменты отъ жесткости узловъ по формулѣ

$$M_{MN} = N'_{MN} \left(2\varphi'_M + \varphi'_N - 3\psi'_{MN} \right).$$

Результаты вычисленія приведены въ послѣдней графѣ таблицы LV.

Таблица LIV.

140

№№ уравн.	Коэффициенты при неизвестных:									Своб. членъ A	Контр. сумма Σ
	M_1	M_3	M_6	M_{10}	M_{12}	M_{14}	M_{18}	M_{19}	M_{21}		
1	+ 71,43	+ 16,32	+ 18,26	+ 0,41	0	0	0	0	0	+ 137,45	+ 207,35
2	+ 16,32	+ 71,33	+ 0,54	+ 16,09	— 0,36	0	0	0	0	— 174,66	— 70,74
3	— 18,26	+ 0,54	+ 71,83	— 0,36	+ 16,09	0	+ 0,41	0		+ 39,02	+ 109,27
4	+ 0,41	+ 16,09	— 0,36	+ 67,74	+ 0,75	+ 14,73	— 0,29	+ 0,41	0	— 44,77	+ 54,71
5	0	— 0,36	+ 16,09	+ 0,75	+ 71,41	— 0,29	+ 16,16	0	0	— 182,54	— 78,78
6	0	0	0	+ 1,73	— 0,29	+ 65,61	+ 0,67	+ 14,73	— 0,29	— 244,28	— 149,12
7	0	0	+ 0,41	— 0,29	+ 16,16	+ 0,67	+ 65,08	— 0,29	+ 13,24	— 121,16	— 26,18
8	0	0	0	+ 0,41	0	+ 14,73	— 0,29	+ 32,40	+ 0,33	— 13,63	+ 33,95
9	0	0	0	0	0	— 0,29	+ 13,24	+ 0,33	+ 29,82	— 75,19	— 32,09

Н. В. НЕКРАСОВЪ.

Таблица LV.

№ узловъ.	Названія элементовъ.	$N' \frac{2I}{l}$ въ 10 cm ³ .	$\sum N$ въ 10 cm ³ .	ψE tn. въ 10 cm. ²	$N' \psi E$ въ tn.—cm.	$\sum N' \psi E$ tn.—cm.	$3 \sum N' \psi E$ tn.—cm.	Изгиб. мом. въ tn.—cm.
1	1—2	19,3	37,6	+ 47,73	+ 921,19	+ 1543,21	+ 4629,63	— 336,41
	1—3	18,3		+ 33,99	+ 622,02			+ 336,41
2	2—1	19,3	38,9	+ 47,73	+ 921,19	+ 1513,52	+ 4540,56	— 370,67
	2—3	0,3		+ 27,05	+ 8,12			+ 10,70
	2—4	19,3		+ 30,27	+ 584,21			+ 359,97
3	3—1	18,3	39,1	+ 33,99	+ 622,02	+ 1395,91	+ 4187,73	+ 205,02
	3—2	0,3		+ 27,05	+ 8,12			+ 9,07
	3—4	1,2		+ 28,74	+ 34,49			+ 14,92
	3—5	19,3		+ 37,89	+ 731,28			— 229,01
4	4—2	19,3	44,3	+ 30,27	+ 584,21	+ 1209,40	+ 3628,20	+ 113,91
	4—3	1,2		+ 28,74	+ 34,49			+ 6,11
	4—5	0,3		+ 19,50	+ 5,85			+ 8,59
	4—6	21,1		+ 25,79	+ 544,17			— 170,09
	4—7	2,4		+ 16,95	+ 40,68			+ 41,48
5	5—3	19,3	38,9	+ 37,89	+ 731,28	+ 1115,99	+ 3347,97	— 309,82
	5—4	0,3		+ 19,50	+ 5,85			+ 9,53
	5—7	19,3		+ 19,63	+ 378,86			+ 300,28
6	6—4	21,1	42,5	+ 25,79	+ 544,17	+ 575,82	+ 1727,46	— 479,32
	6—7	0,3		+ 9,83	+ 2,95			+ 2,80
	6—8	21,1		+ 1,36	+ 28,70			+ 476,52
7	7—4	2,4	47,6	+ 16,95	+ 40,68	+ 609,96	+ 1829,88	+ 3,51
	7—5	19,3		+ 19,63	+ 378,86			— 66,14
	7—6	0,3		+ 9,83	+ 2,95			+ 2,45
	7—8	2,4		+ 5,42	+ 13,01			+ 19,34
	7—9	23,2		+ 7,52	+ 174,46			+ 40,85
8	8—6	21,1	47,3	+ 1,36	+ 28,70	0	0	+ 195,24
	8—7	2,4		+ 5,42	+ 13,01			— 9,84
	8—9	0,3		0	0			0
	8—7'	2,4		— 5,42	— 13,01			+ 9,84
	8—6'	21,1		— 1,36	— 28,70			— 195,24
9	9—7	23,2	46,7	+ 7,52	+ 174,46	0	0	— 218,06
	9—8	0,3		0	0			0
	9—7'	23,2		— 7,52	— 174,46			+ 218,06

22. О способъ сравненія полученныхъ данныхъ.

Приступая къ сравнительной оцѣнкѣ результатовъ подсчетовъ, приведенныхъ въ предыдущей главѣ, мы должны прежде всего остановиться на вопросѣ о методѣ сравненія.

Дѣло въ томъ, что можно сравнить непосредственно вычисленныя величины моментовъ жесткости, напряженій жесткости, полныхъ напряженій, или же пользоваться какими-либо вспомогательными величинами вродѣ чаще всего примѣняемаго коэффициента $\frac{N}{n}$ (отношеніе полного наибольшаго напряженія въ элементѣ жесткой фермы къ соотвѣтствующему напряженію въ элементѣ шарнирной фермы).

По нашему мнѣнію, которое мы постараемся обосновать въ главѣ V, одинъ коэффициентъ $\frac{N}{n}$ вообще недостаточно рельефно опредѣляетъ отношеніе данной фермы къ напряженіямъ жесткости.

Поэтому въ помѣщаемыхъ ниже таблицахъ сопоставлены слѣдующія величины, вычисленныя выше по различнымъ методамъ:

- 1) моменты отъ жесткости узловъ и, для приближенныхъ способовъ, отношенія этихъ моментовъ, къ полученнымъ обобщеннымъ способомъ;
- 2) усилія въ элементахъ жесткой фермы;
- 3) напряженія отъ продольныхъ усилій (основныя) и отъ изгиба;
- 4) наибольшія полныя напряженія и коэффициенты $\frac{N}{n}$.

Относительно пункта 2 необходимо еще замѣтить слѣдующее: въ основаніе способа Мора и ему подобныхъ положено предположеніе, что продольныя усилія въ элементахъ фермы не зависятъ отъ жесткихъ скрѣпленій узловъ, другими словами, что усилія въ жесткой и шарнирной фермахъ одинаковы. Слѣдовательно, строго говоря, опредѣленіе усилій въ жесткой фермѣ при способѣ Мора не согласуется съ его основами. Однако, если не обращать на это вниманія и подсчитывать усилія въ жесткой фермѣ, пользуясь величинами моментовъ, найденными по способу Мора, то, какъ показываютъ приводимыя ниже данныя, получаемыя такимъ образомъ величины гораздо ближе подходятъ къ точнымъ, чѣмъ усилія въ шарнирной фермѣ. Для тѣхъ же случаевъ, когда самъ способъ Мора достаточно точенъ, названныя величины почти совпадаютъ съ точными, какъ этого и слѣдовало, конечно, ожидать. Поэтому соотвѣтствующія данныя включены нами въ прилагаемыя таблицы.

Далѣе, мы уже упоминали, что четвертый способъ подсчета (см. гл. II и III) въ самой основѣ своей содержитъ противорѣчіе; поэтому мы и не входимъ въ подробное разсмотрѣніе его и лишь приводимъ въ таблицахъ нѣкоторыя данныя, указывающія на крайнюю его неточность.

Примѣръ I. А.

Элементы.	Моменты отъ жестк. узл., вычисленн. по способамъ:				Отношенія къ дан- нымъ I способа:			Усилия въ элем. жестк. фермы, вычисл. по спо- собамъ:		
	I	II	III	IV	II	III	IV	I	II	III
0—2	+ 0,159	— 0,002	+ 0,189	+ 0,008	—	1,19	—	+ 39,08	+ 39,32	+ 38,99
2—0	+ 0,270	+ 0,347	+ 0,329	+ 0,396	1,28	1,22	1,47			
1—3	— 0,363	— 0,164	— 0,332	— 0,168	0,45	1,05	0,46	— 0,86	— 0,63	— 0,95
3—1	— 0,704	— 0,744	— 0,746	— 0,782	1,06	1,06	1,11			
2—4	— 0,566	— 0,347	— 0,652	— 0,396	0,53	1,15	0,70	+ 40,29	+ 40,22	+ 40,33
4—2	— 0,886	— 0,790	— 0,986	— 0,858	0,89	1,11	0,97			
3—5	+ 0,944	+ 0,744	+ 1,014	+ 0,782	0,79	1,07	0,83	— 39,61	— 39,69	— 39,57
5—3	+ 0,867	+ 0,778	+ 0,951	+ 0,835	0,90	1,10	0,96			
0—1	+ 0,039	+ 0,002	+ 0,032	— 0,008	—	0,82	—	— 1,19	— 0,98	— 1,31
1—0	+ 0,116	+ 0,164	+ 0,117	+ 0,168	1,41	1,01	1,45			
0—3	— 0,198		— 0,221			1,12		— 62,56	— 63,10	— 62,42
3—0	— 0,234		— 0,256			1,09				
1—2	+ 0,247		+ 0,265			1,07		+ 1,23	+ 0,96	+ 1,38
2—1	+ 0,197		+ 0,216			1,10				
2—5	+ 0,099		+ 0,107			1,08		— 0,59	— 0,49	— 0,65
5—2	+ 0,023		+ 0,028			1,22				
3—4	— 0,006		— 0,011			1,83		— 0,47	— 0,36	— 0,53
4—3	— 0,016		— 0,019			1,19				

Примѣръ I. В.

Элементы.	Напряжения отъ прод. ус.				Напряжения отъ жестк. узловъ, вычисл. по способ.			Полныя наибольш. напряж. и коэфф. $\frac{N}{n}$, выч. по способ.										
	въ шарнирной фермѣ.	въ жесткой фермѣ, вычисл. по способ.			I	II	III	I	II	III	III*)							
		I	II	III														
0—2	} + 500	+ 489	+ 492	+ 487	— 68	+	1	— 81	} + 604	+ 640	+ 628	+ 641						
2—0					+	31	0	+					37	1.21	1.28	1.26	1.28	
					+	115	+	148					+	141				
					— 52	—	67	— 64										
1—3	} 0	— 11	— 8	— 12	+	71	+	32	+	74	} + 290	+ 310	+ 306	+ 318				
3—1					— 155	—	70	— 163	} — 166	— 153					— 175	— 163		
					— 137	—	145	— 145										
					+	301	+	318	+	318								
2—4	} + 400	+ 403	+ 402	+ 403	+	238	+	145	+	271	} + 641	+ 547	+ 674	+ 671				
4—2					— 67	—	41	— 77	} 1.60	1.37					1.68	1.68		
					— 368	—	329	— 411										
					+	104	+	93	+	116								
3—5	} — 400	— 396	— 397	— 396	— 111	—	88	— 119	} — 757	— 721	— 792	— 796						
5—3					+	393	+	310					+	423	} 1.89	1.80	1.98	1.99
					+	102	+	92					+	112				
					— 361	—	324	— 396										
0—1	} 0	— 12	— 10	— 14	± 22	±	1	± 18	} — 78	— 104	— 81	± 67						
1—0					± 66	±	94	± 67					} —	—	—	—		
0—3	} — 604	— 590	— 595	— 589	± 95			± 106	} — 703		— 712	— 727						
3—0					± 113			± 123					} 1.16		1.18	1.20		
1—2	} 0	+ 34	+ 27	+ 38	± 154			± 165	} + 188		+ 203	± 165						
2—1					± 122			± 134					} —	—	—	—		
2—5	} 0	— 6	— 5	— 7	± 58			± 63	} — 64		— 70	± 58						
5—2					± 14			± 16					} —	—	—	—		
3—4	} 0	— 17	— 13	— 19	± 7			± 12	} — 35		— 40	± 21						
4—3					± 18			± 21					} —	—	—	—		

*) Продольныя усилія приняты для шарнирной фермы одинаковыми съ жесткой.

Примѣръ II А.

Элементы.	Моменты отъ жестк. узл., вычисленные по способ.:				Отношенія къ даннымъ I-го способа.			Усилія въ жестк. ф., вычисленные по способамъ:		
	I	II	III	IV	II	III	IV	I	II	III
0—2	— 1,445	— 1,438	— 1,594	— 1,602	1,00	1,10	1,11	+ 0,57	+ 0,58	+ 0,64
2—0	— 1,854	— 1,687	— 2,098	— 1,981	0,91	1,13	1,07			
1—3	— 1,743	— 1,479	— 2,012	— 1,706	0,85	1,15	0,98	— 56,39	— 56,49	— 56,76
3—1	— 2,904	— 2,772	— 3,593	— 3,473	0,95	1,24	1,19			
2—4	+ 1,481	+ 1,687	+ 1,820	+ 1,981	1,14	1,23	1,34	+ 36,51	+ 36,47	+ 35,76
4—2	+ 0,805	+ 0,903	+ 1,190	+ 1,271	1,12	1,48	1,58			
3—5	+ 2,787	+ 2,772	+ 3,566	+ 3,473	0,99	1,28	1,24	— 57,80	— 57,82	— 58,10
5—3	+ 1,566	+ 1,546	+ 2,855	+ 2,808	0,99	1,82	1,80			
0—1	+ 1,445	+ 1,438	+ 1,594	+ 1,602	1,00	1,10	1,11	— 59,18	— 59,22	— 59,08
1—0	+ 1,393	+ 1,479	+ 1,591	+ 1,706	1,06	1,14	1,22			
1—2	+ 0,302		+ 0,349			1,15		+ 59,39	+ 59,43	+ 58,05
2—1	+ 0,123		+ 0,086			0,70				
1—4	+ 0,048		+ 0,073			1,52		+ 15,73	+ 15,60	+ 14,42
4—1	— 0,032		— 0,016			0,50				
2—3	+ 0,196		+ 0,138			0,70		+ 1,43	+ 1,33	+ 2,19
3—2	+ 0,117		+ 0,038			0,33				
2—3'	+ 0,054		+ 0,055			1,02		+ 1,56	+ 1,53	+ 1,57
3—2'	0		+ 0,011			—				

Примѣръ II В.

Элементы.	Напряженія отъ продольн. усилій въ элем.				Напряженія отъ жестк. узловъ вычисл. по способ.: (kg./cm ² .)			Полныя наибольшія напряженія и коэффиц.			
	шарнирной фермы.	жесткой фермы вычисл. по способ.:			I	II	III	$\frac{N}{n}$			
		I	II	III				I	II	III	III*)
0—2	0	+ 7	+ 7	+ 8	+ 437	+ 434	+ 482	+ 444	+ 441	+ 490	+ 482
					— 175	— 174	— 193	— 553	— 503	— 627	— 635
2—0					— 560	— 510	— 635	—	—	—	—
					+ 224	+ 204	+ 254				
1—3	— 463	— 466	— 467	— 469	+ 72	+ 61	+ 83	— 795	— 746	— 849	— 843
					— 329	— 279	— 380				
3—1					— 120	— 115	— 148	1.71	1.61	1.83	1.82
					+ 548	+ 524	+ 678				
2—4	+ 484	+ 456	+ 456	+ 447	— 447	— 509	— 550	+ 699	+ 729	+ 807	+ 844
					+ 179	+ 204	+ 220				
4—2					+ 243	+ 273	+ 360	1.44	1.51	1.67	1.74
					— 97	— 109	— 144				
3—5	— 334	— 336	— 336	— 338	— 60	— 60	— 77	— 514	— 512	— 663	— 659
					+ 316	+ 315	+ 406				
5—3					+ 34	+ 33	+ 62	1.54	1.53	1.98	1.97
					— 178	— 176	— 325				
0—1	— 500	— 493	— 494	— 492	± 278	± 276	± 307	— 771	— 778	— 799	— 807
1—0					± 268	± 284	± 306	1.54	1.56	1.60	1.61
1—2					± 64		± 73	+ 797		+ 790	+ 863
2—1					± 26		± 18	1.01		1.00	1.08
1—4	+ 233	+ 194	+ 193	+ 178	± 33		± 50	+ 227		+ 228	+ 283
4—1					± 22		± 11	0.97		0.98	1.21
2—3					± 119		± 84	+ 139		+ 115	— 96
3—2					± 71		± 23	—		—	—
2—3'	+ 49	+ 48	+ 47	+ 48	± 57		± 59	+ 105		+ 107	+ 108
3'—2					0		± 12	2.14		2.18	2.20

*) См. примѣчаніе къ табл. прим. I. В.

Примѣръ III А.

Элементы.	Моменты отъ жестк. узл. вычислен. по способ.:				Отношенія къ даннымъ I-го слос.			Усилия къ жестк. ф. вычисленные по спос.:			
	I	II	III	V*)	II	III	V*)	I	II	III	V*)
0—2	—0,421	—0,430	—0,433	—0,328	1,02	1,03	0,80	+43,66	+43,67	+43,65	+43,67
2—0	—1,773	—1,733	—1,841	—1,787	0,98	1,04	1,01				
2—3	+1,644	+1,733	+1,718	+1,653	1,05	1,04	1,00	+43,70	+43,67	+43,69	+43,71
3—2	+1,094	+1,190	+1,215	+1,092	1,09	1,11	1,00				
1—4	—0,190	—0,098	—0,198	—0,232	0,52	1,04	1,22	—56,16	—56,17	—56,18	—56,16
4—1	—0,815	—0,769	—0,823	—0,812	0,94	1,01	1,00				
3—5	—1,159	—1,190	—1,293	—1,142	1,03	1,12	0,99	+67,41	+67,43	+67,37	+67,40
5—3	—2,107	—2,100	—2,277	—2,146	1,00	1,08	1,02				
0—1	+0,421	+0,430	+0,433	+0,328	1,02	1,03	0,80	—69,76	—69,78	—69,74	—69,77
1—0	+0,066	+0,098	+0,071	+0,121	1,49	1,18	1,84				
1—3	+0,041		+0,047	+0,039		1,15	0,95	+19,92	+19,84	+19,99	+19,92
3—1	+0,008		+0,018	+0,003		2,25	0,38				
3—4	+0,057		+0,061	+0,047		1,07	0,82	—17,99	—18,01	—17,89	—17,99
4—3	—0,048		—0,048	—0,037		1,00	0,77				
1—2	+0,083		+0,080	+0,071		1,07	0,86	+38,77	+38,73	+38,70	+38,78
2—1	+0,129		+0,123	+0,134		1,00	1,04				

*) Данные получены подсчетомъ, произведеннымъ въ § 20.

Примѣръ III В.

Элементы.	Напряженія отъ продольныхъ усилій				Напряженія отъ изгиба, вычисл. по способ.:			Полныя наибольш. напряж. и коэффиц. $\frac{N}{n}$ по способ.:			
	въ шарн. фермѣ.	въ жесткой фермѣ по способамъ:			I	II	III	I	II	III	III *)
		I	II	III							
0—2					+ 91	+ 93	+ 94	+ 521	+ 518	+ 525	+ 528
	+ 415	+ 412	+ 412	+ 412	— 26	— 26	— 27				
2—0					— 384	— 375	— 398	1,25	1,25	1,26	1,27
					+ 109	+ 106	+ 113				
2—3					— 356	— 376	— 372	+ 649	+ 670	+ 675	+ 678
	+ 415	+ 412	+ 412	+ 412	+ 101	+ 106	+ 105				
3—2					+ 237	+ 258	+ 263	1,56	1,61	1,63	1,64
					— 67	— 73	— 74				
1—4					+ 9	+ 4	+ 9	— 445	— 442	— 447	— 446
	— 406	— 407	— 407	— 407	— 38	— 20	— 40				
4—1					— 37	— 35	— 37	1,10	1,09	1,10	1,10
					+ 165	+ 155	+ 166				
3—5					+ 234	+ 240	+ 261	+ 722	+ 729	+ 749	+ 754
	+ 493	+ 488	+ 489	+ 488	— 52	— 54	— 58				
5—3					— 425	— 424	— 459	1,46	1,48	1,52	1,53
					+ 95	+ 95	+ 103				
0—1					± 217	± 222	± 223	— 698	— 703	— 704	— 709
	— 486	— 481	— 481	— 481							
1—0					± 34	± 51	± 37	1,44	1,45	1,45	1,46
1—3					± 17		± 20	+ 234		+ 237	+ 229
	+ 209	+ 217	+ 216	+ 217							
3—1					± 3		± 8	1,12		1,13	1,09
3—4					± 24		± 52	— 220		— 219	— 234
	— 209	— 196	— 196	— 194							
4—3					± 20		± 20	1,05		1,05	1,12
1—2					± 39		± 37	+ 545		+ 541	+ 557
	+ 500	+ 485	+ 484	+ 484							
2—1					± 60		± 57	1,09		1,08	1,12

*) См. примѣчаніе къ табл. В прим. I.

Примѣръ IV А.

Элементы.	Моменты отъ жесткости узловъ, вычисл. по способ.:			Отношенія къ данн. I спос.		Продольныя усилія въ жестк. фермѣ, вычисл. по способ.:		
	I	II	III	II	III	I	II	III
0—2	—0,355	—0,361	—0,360	1,02	1,01			
2—0	—0,965	—0,916	—0,983	0,95	1,02	+43,81	+43,83	+43,81
2—3	+0,842	+0,916	+0,863	1,09	1,01			
3—2	+0,566	+0,612	+0,598	1,08	1,06	+43,85	+43,83	+43,85
1—4	—0,120	—0,058	—0,124	0,48	1,03			
4—1	—0,421	—0,390	—0,424	0,93	1,01	—56,08	—56,09	—56,09
3—5	—0,626	—0,612	—0,664	0,98	1,06			
5—3	—1,101	—1,095	—1,147	0,99	1,04	+67,69	+67,70	+67,68
0—1	+0,355	+0,361	+0,360	1,02	1,01			
1—0	+0,019	+0,058	+0,021	3,05	1,10	—70,02	—70,05	—70,02
1—3	+0,032		+0,034		1,06			
3—1	+0,004		+0,008		2,00	+19,57	+19,62	+19,61
3—4	+0,056		+0,057		1,02			
4—3	—0,050		—0,050		1,00	—18,56	—18,58	—18,57
1—2	+0,070		+0,069		0,99			
2—1	+0,123		+0,120		0,98	+39,32	+39,30	+39,30