ИЗВѢСТІЯ
Томскаго Технологическаго Института
Императора Николая II.
т. 11. 1908. № 3.

III.

В. Л. Некрасовъ.

АДХЕРЕНЦІИ И КОХЕРЕНЦІИ ЛИНЕЙНОЙ ТОЧЕЧНОЙ ОБЛАСТИ.

1—9.

АДХЕРЕНЦІИ и КОХЕРЕНЦІИ

ЛИНЕЙНОЙ ТОЧЕЧНОЙ ОБЛАСТИ.

1. Въ книгѣ „Строеніе и мѣра линейной точечной области“ [1]), излагая ученіе *G. Cantor*'а объ адхеренціяхъ и кохеренціяхъ, я отмѣтилъ, что до сихъ поръ это ученіе не привлекало ничьего вниманія; въ то время въ моихъ рукахъ не было т. XXXV „Quaterly Journal of Mathematics“, гдѣ помѣщена статья *W. H. Young*'а, посвященная этому вопросу [2]); въ ней авторъ сопоставляетъ ад- и кохеренціи съ производными областями и приводитъ рядъ примѣровъ, уясняющихъ эти довольно сложныя понятія.

Въ своемъ изложеніи авторъ не пользуется *Cantor*'овыми обозначеніями, что значительно усложняетъ дѣло; что-же касается до примѣровъ, то примѣненіе понятія о *типахъ размѣщенія,* какъ оно изложено во II главѣ моей книги, дастъ съ одной стороны—большее уясненіе строенія приводимыхъ авторомъ областей, и съ другой—доставляетъ возможность привести примѣры, болѣе убѣдительные, чѣмъ тѣ, которые были даны самимъ авторомъ. То и другое я и предполагаю сдѣлать въ настоящей замѣткѣ, и это тѣмъ интереснѣе для меня, что здѣсь я имѣю случай показать, какую простоту въ довольно сложные вопросы вноситъ пользованіе типами размѣщенія.

2. Произвольная, вообще говоря, незамкнутая область можетъ быть разложена на двѣ части

$$E \equiv E_a + E_c\,,$$

изъ которыхъ *адхеренція* E_a состоитъ изъ ея уединенныхъ точекъ, и въ *кохеренцію* E_c входятъ всѣ предѣльныя точки E, находящіяся въ составѣ E; отсюда непосредственно слѣдуетъ, что E_c является частью E'

$$E_c \equiv D\,(E'). \qquad (1)$$

Аналогично, если E_c —не сгущенная область,

$$E_c \equiv E_{ca} + E_{c^2},$$

[1]) Извѣстія Томскаго Технологическаго Института, 1907 г., № 2—3, стр. 33, 22°.

[2]) См. также прекрасную книгу *W. H.* и *G. Ch. Young*, которая печаталась одновременно съ моей работой и вышла немного раньше; вездѣ ниже я цитирую по этой книгѣ.

гдѣ E_{c^2} обнимаетъ тѣ предѣльныя точки E_c, которыя присутствуютъ въ E_c; отсюда видно, что $E_{c^2} \equiv D(E_c')$; но, въ силу (1), $E_c' \equiv D(E'')$; слѣдовательно

$$E_{c^2} \equiv D(E'').$$

Точно также и вообще, если

$$E_{c^n} \equiv E_{c^n a} + E_{c^{n+1}}, \quad E_{c^n} \equiv D(E^{(n)}), \tag{2}$$

то

$$E_{c^{n+1}} \equiv D(E_{c^n}'), \quad E_{c^n}' \equiv D(E^{n+1)}),$$

откуда вытекаетъ, что

$$E_{c^{n+1}} \equiv D(E^{(n+1)}). \tag{3}$$

Съ другой стороны, согласно опредѣленію и 2(2), получается

$$E_{c^n a} \equiv D(E_{c^n}) \equiv D(E^{'n)}). \tag{4}$$

Такимъ образомъ можно утверждать, что [1])

„каждая кохеренція конечнаго порядка области E входитъ въ составъ производной того-же порядка, и каждая адхеренція—въ составъ предъидущей производной“.

Изъ (4) слѣдуетъ, что любая адхеренція $E_{c^n a}$ входитъ въ составъ соотвѣтствующей производной $E^{(n)}$, но это не исключаетъ для нея возможности имѣть общія точки съ $E^{(n+1)}$ или даже входить въ нее цѣликомъ, какъ это мы сейчасъ увидимъ.

3. Для поясненія предъидущаго *W. H. Young* беретъ [2]) область интерваловъ типа ω^3; если обозначить [3])

$$Q^{(0)} \equiv \{x_{0}, x_0\}, \quad Q^{(1)} \equiv \{x_i\}, \quad Q^{(2)} \equiv \{x_{ij}\}, \quad Q^{(3)} \equiv \{x_{ijk}\},$$

то три области, разсматриваемыя авторомъ, будутъ

$$G \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)} + Q^{(3)}, \; F \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)} + D_n(Q^{(2)}) + Q^{(3)}, \; E \equiv Q^{(0)} + Q^{(2)} + Q^{(3)}, \tag{5}$$

гдѣ $D_n(Q^{(2)})$ обозначена нѣкоторая часть $Q^{(2)}$, состоящая изъ конечнаго числа n точекъ.

Очевидно, что всѣ производныя для G, F и E будутъ однѣ и тѣ-же

$$G' \equiv F' \equiv E' \equiv \{x_0\} + Q^{(1)} + Q^{(2)}, \quad G'' \equiv F'' \equiv E'' \equiv \{x_0\} + Q^{(1)},$$

$$G''' \equiv F''' \equiv E''' \equiv \{x_0\}.$$

---

[1]) Ср.—**Y**oung, p. 58.

[2]) ib., p. 58 ex. 2.

[3]) Ср у меня—стр. 1.5-12^6, 81°-82°.

A. Для первой изъ областей (5) мы имѣемъ

$$G_a \equiv \{x_0\} + Q^{(3)},\ G_c \equiv \{x_0\} + Q^{(1)};\ G_{ca} \equiv Q^{(1)},\ G_{c^2} \equiv \{x_0\},$$

при чемъ изъ сопоставленія G_{ca} и G'' слѣдуетъ, что

$$G_{ca} \equiv D(G'').$$

B. Для области F

$$F_a \equiv \{x_{\overline{0}}\} + Q^{(3)}, \qquad F_c \equiv \{x_0\} + Q^{(1)} + D_n(Q^{(2)});$$

$$F_{ca} \equiv Q^{(1)} + D_n(Q^{(2)}),\ F_{c^2} \equiv \{x_0\},$$

откуда ясно, что

$$D(F_{ca}) \equiv D(F'').$$

C. Наконецъ для E

$$E_a \equiv \{x_{\overline{0}}\} + Q^{(3)},\ E_c \equiv \{x_0\} + Q^{(2)};\ E_{ca} \equiv Q^{(2)},\ E_{c^2} \equiv \{x_0\},$$

и слѣдовательно [1])

$$D\{E_{ca}, E''\} \equiv 0.$$

D. Упоминаемая у *W. H. Young*'а область T_n есть область типа ω^n, и составъ получающихся изъ нея ад- и кохеренцій можетъ быть разобранъ аналогичнымъ образомъ.

Взявъ $n = 2m$ и обозначивъ снова $Q^{(0)}$ и $Q^{(i)}$, при $i = 1, 2, 3, \ldots, 2m$, соотвѣтственно границы основного интервала и границы i'аго дѣленія, возьмемъ напр. область E такого состава

$$E \equiv Q^{(0)} + Q^{(2)} + Q^{(4)} + \ldots + Q^{(2m)},$$

т. е. исключимъ границы всѣхъ нечетныхъ дѣленій; тогда съ одной стороны

$$E' \equiv \{x_0\} + \sum_{1}^{2m-1} Q^{(i)}, \quad E'' \equiv \{x_0\} + \sum_{2}^{2m-2} Q^{(i)}, \ldots\ldots,$$

$$E^{(m)} \equiv \{x_0\} + \sum_{1}^{m} Q^{(i)},\ E^{(m+1)} \equiv \{x_0\} + \sum_{1}^{m-1} Q^{(i)}, \ldots\ldots, E^{(2m)} \equiv \{x_0\},$$

---

[1]) У *Young'a*, гдѣ основнымъ интерваломъ взятъ (0,1), сказано (p. 58, ex. 2): „E_{ca} is itself the third derived set, consisting of the point 1 alone"; здѣсь очевидно должно стоять E_{c^2} вмѣсто E_{ca}.

и съ другой

$$E_a \equiv \{x_0\} + Q^{(2m)},\ E_{\mathfrak{e}a} \equiv Q^{(2m-2)}, \ldots\ldots, E_{\mathfrak{e}^{m-1}a} \equiv Q^{(2)},\ E_{\mathfrak{e}^m a} \equiv \{x_0\},$$

$$E_{\mathfrak{e}} \equiv \{x_0\} + \sum_1^{m-1} Q^{(2k)},\ E_{\mathfrak{e}^2} \equiv \{x_0\} + \sum_1^{m-2} Q^{(2k)}, \ldots, E_{\mathfrak{e}^m} \equiv \{x_0\},\ E_{\mathfrak{e}^{m+1}} \equiv 0;$$

отсюда ясно видно, какъ распредѣляются точки области E по адхеренціи и кохеренціямъ и производнымъ, и какова въ данномъ случаѣ взаимозависимость между тѣми и другими.

4. Пусть для E существуютъ кохеренціи $E_{\mathfrak{e}^n}$ для всякаго конечнаго n; тогда возможно одно изъ двухъ

$$\overset{\omega}{\underset{1}{D}} \{E_{\mathfrak{e}^n}\} \equiv 0, \quad \overset{\omega}{\underset{1}{D}} \{E_{\mathfrak{e}^n}\} \equiv E_{\mathfrak{e}^\omega};$$

въ первомъ случаѣ для *всѣхъ* $E_{\mathfrak{e}^n}$ нѣтъ общихъ точекъ, и это мыслимо, такъ какъ $E_{\mathfrak{e}^n}$ вообще не замкнуты [1]); во второмъ—общія точки всѣхъ кохеренцій образуютъ *кохеренцію порядка* ω.

Такъ какъ для каждаго n имѣетъ мѣсто 2 (2), то

$$E_{\mathfrak{e}^\omega} \equiv \overset{\omega}{\underset{1}{D}} \{E_{\mathfrak{e}^n}\} \equiv \overset{\omega}{\underset{1}{D}} \{E^{(n)}\} \equiv D\{E^{(\omega)}\},$$

т. е. „кохеренція порядка ω является частью производной порядка ω“.

Имѣя возможность переходить отъ n къ $n+1$ и отъ ряда чиселъ къ ихъ предѣлу, мы для любого α, гдѣ α—число перваго или второго класса, допускающее непосредственно большее число $\alpha+1$ или нѣтъ, въ правѣ утверждать, что

$$E_{\mathfrak{e}^\alpha} \equiv D\{E^{(\alpha)}\}, \tag{6}$$

и наконецъ, что

$$E_{\mathfrak{e}^\Omega} \equiv D\{E^{\Omega}\},$$

гдѣ Ω—первое число третьяго класса.

Отсюда слѣдуетъ, что теорема 2° имѣетъ общее значеніе.

Изъ (4) и (6) непосредственно слѣдуетъ теорема 29 *W. H. Young*'a [2]):

„точки каждой адхеренціи являются предѣльными для всѣхъ предыдущихъ адхеренцій“,

такъ что доказательство автора дѣлается излишнимъ.

---

[1]) ib., p. 58-59.

[2]) ib., p. 62.

5. Процессъ нахожденія адхеренцій и кохеренцій оборвется въ тотъ моментъ, когда одна изъ кохеренцій E_{c^α} окажется сгущенной или состоящей изъ уединенныхъ точекъ; въ первомъ случаѣ мы имѣемъ

$$E_{c^\alpha a} = 0,\ E_{c^{\alpha+1}} = E_{c^\alpha} = E_{c^\Omega}, \tag{7}$$

и во второмъ

$$E_{c^\alpha a} = E_{c^\alpha},\ E_{c^{\alpha+1}} = 0. \tag{8}$$

Такъ какъ каждая кохеренція составляетъ часть соотвѣтственной производной, ясно, что, если оборвется рядъ производныхъ, вмѣстѣ съ нимъ прекратится и дальнѣйшее образованіе кохеренцій, но не обратно: производныя могутъ существовать, а кохеренцій не будетъ, какъ это мы видѣли въ D 3° и увидимъ еще ниже; при этомъ возможно, что въ составъ области и ея адхеренцій будутъ входить точки, принадлежащія дальнѣйшимъ производнымъ и даже $E^{(\Omega)}$.

Въ случаѣ (8) область E распадается на счетный рядъ адхеренцій и должна поэтому сама быть счетной; въ случаѣ (7) къ этому ряду присоединяется еще сгущенная область E_{c^α}, являющаяся *послѣдней кохеренціей* [1]) (ultimate coherenz).

Въ составѣ послѣдней кохеренціи заключаются всѣ сгущенныя части области; если она несчетна, въ составѣ E_{c^α} можно различать счетную часть U и несчетную V; эту несчетную сгущенную часть области *W. H. Young* называетъ [2]) ея *остовомъ* или *ядромъ* (nucleus).

6. Для поясненія предыдущаго *W. H. Young* беретъ [3]) *Cantor*'ову область типа $\omega \sum_1^\omega \omega^i$,

A. не включая въ ея составъ правой границы x_0 основного интервала.

Пользуясь моими обозначеніями и, въ видахъ единообразія, не включая въ составъ области также лѣвой границы интервала x_0 и точекъ перваго дѣленія $\{x_i\}$, мы получимъ незамкнутую область вида

$$E = \sum_1^\omega Q_i = \sum_{i=1}^{\omega} \sum_{j=1}^{j=i} Q_i^{(j)};$$

для нея

$$E_a = \sum_1^\omega Q_i^{(i)},\ E_{ca} = \sum_1^\omega Q_{i+1}^{(i)}, \ldots\ldots,\ E_{c^n a} = \sum_1^\omega Q_{i+n}^{(i)}, \ldots\ldots;$$

---

[1]) *Young*, p 61, Theorem 28; у Cantor'а — „totale Inhärenz", A M. 7, p. 117.
[2]) ib., p. 54–56; ср. также стр. 33, 22°; стр 92, 50°.
[3]) ib., p. 59, ex. 8; p 24, ex. 4; ср. стр. 182–184, 130°.

$$\mathrm{E}_c = \sum_{i=2}^{\omega} \sum_{j=1}^{i-1} Q_i^{(j)},\ \mathrm{E}_{c^2} = \sum_{i=3}^{\omega} \sum_{j=1}^{i-2} Q_i^{(j)}, \ldots,\ \mathrm{E}_{c^{n+1}} = \sum_{i=n+2}^{\omega} \sum_{j=1}^{i-n-1} Q_i^{(j)}, \ldots;$$

$$\mathrm{E}' = \{x_0\} + \{x_i\}_1^{\omega} + \mathrm{E}_c,\ \mathrm{E}'' = \{x_0\} + \{x_i\}_2^{\omega} + \mathrm{E}_{c^2}, \ldots,$$

(9)

$$\mathrm{E}^{(n+1)} = \{x_0\} + \{x_i\}_{n+1}^{\omega} + \mathrm{E}_{c^{n+1}}, \ldots, \mathrm{E}^{(\omega)} = \{x_0\}.$$

Мы видимъ отсюда, что при образованіи адхеренцій и кохеренцій послѣдовательно отпадаютъ ряды по діагонали въ первой таблицѣ[1]), что существуютъ адхеренціи и кохеренціи любого конечнаго порядка, но кохеренціи порядка ω не существуетъ, такъ какъ она могла бы быть только точкой $\{x_0\}$, что исключено предположеніемъ. Рядъ (9) показываетъ соотношенія между кохеренціями и производными одного и того-же порядка. Такимъ образомъ E можетъ быть представлена здѣсь въ видѣ суммы ея адхеренцій

$$\mathrm{E} = \sum_1^{\omega} \mathrm{E}_{c^i a}.$$

B. Дальше *W. H. Young* беретъ[2]) область

$$\mathrm{F} = \{x_0\} + \sum_1^{\omega} Q_i^{(i)},$$

для которой

$$\mathrm{F}_a = \sum Q_i^{(i)},\ \mathrm{F}_c = \{x_0\};\ \mathrm{F}_{ca} = \{x_0\},\ \mathrm{F}_{c^2} = 0,$$

тогда какъ производныя F совпадаютъ съ соотвѣтственными производными (9), и въ частности $\mathrm{F}^{(\omega)} = \{x_0\}$; такимъ образомъ мы имѣемъ здѣсь

$$\mathrm{F}_{c^\omega} = 0,\ \mathrm{F}_{ca} = \mathrm{F}_c = \mathrm{F}^{(\omega)}.$$

7. Какъ примѣръ области, для которой существуетъ Y_{c^Ω}, что *W. H. Young* обозначаетъ Y_{c^*}, онъ, взявъ рядъ интерваловъ типа $\tilde{\omega}$, включаетъ[3]) въ составъ области ихъ внѣшнія точки E и конечное число n границъ $\mathrm{D}_n(\mathrm{Q})$

(10) $$\mathrm{Y} = \mathrm{E} + \mathrm{D}_n(\mathrm{Q});$$

[1]) см. стр. 183, 130°.
[2]) p. 59, ex. 4.
[3]) ib., p. 60; ср. стр. 132—134, 78°.

тогда

$$Y_a = 0,\ Y_c = Y = Y_{c\Omega},\ Y' = E + Q = Y^{(\Omega)},$$

такъ что

$$Y = Y_{c\Omega} = D(Y^{(\Omega)}).$$

Что же касается областей $Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ примѣра 6 и области Y примѣра 7, то всѣ эти области, вопреки мнѣнію *W. H. Young*'а [1]), одного и того же типа и не даютъ ничего новаго, сравнительно съ областью (10). Области новыхъ типовъ получатся только въ томъ случаѣ, когда въ интервалахъ $\tilde{\omega}$ будутъ помѣщаться „$T_1, T_2, \ldots T_n$ или еще болѣе сложныя области" [2]). Примѣры такихъ областей я сейчасъ приведу ниже.

8. Чтобы показать, что $E_{c\Omega}$ можетъ не существовать, и тѣмъ не менѣе E можетъ имѣть общія точки съ $E^{(\Omega)}$, *W. H. Young* приводитъ указаніе [3]), которое можно осуществить,

A. пользуясь, напр. [4]), областью интерваловъ типа

$$\tilde{\omega} \sum_1^{\omega} \omega^i$$

и взявъ

$$Y = D_n(E) + \sum_1^{\omega} Q_i^{(i)},$$

гдѣ $D_n(E)$—конечное число внѣшнихъ точекъ области $\tilde{\omega}$. Для области Y

$$Y_a = \sum_1^{\omega} Q_i^{(i)},\ Y_c = D_n(E) = Y_{ca},\ Y_{c^2} = 0,$$

между тѣмъ какъ

$$Y^{(\omega)} = E + Q = Y^{(\Omega)},$$

гдѣ Q—область границъ интерваловъ $\tilde{\omega}$, и слѣдовательно E+Q совершенна.

Мы видимъ отсюда, что

$$Y_{ca} = D\{Y, Y^{(\Omega)}\}.$$

B. Область

$$\bar{Q} = \sum_1^{\omega} \{Q_n - Q_n^{(n)}\}$$

---

1) ib. p 60; ср. стр. 132—134, 87°.
2) ib. p. 60, ex. 7.
3) ib. p. 60, ex. 8.
4) см. стр. 193, 139°.

составляется изъ предѣльныхъ точекъ области

$$\tilde{\omega} \sum_1^{\omega} \omega^i ,$$

лежащихъ *внутри* интерваловъ $\tilde{\omega}$; если мы возьмемъ

$$X = D_m(E) + D_n(Q) + \sum_1^{\omega} Q_i^{(i)} ,$$

гдѣ D_m и D_n — конечныя части E и Q, то

$$X_a = \sum_1^{\omega} Q_i^{(i)} ,\ X_c = D_m(E) + D_n(Q) = X_{ca},\ X_{c^2} = 0,$$

между тѣмъ какъ

$$X^{(\omega)} = E + Q = X^{(\Omega)},$$

и слѣдовательно

$$D\{X_{ca}\} = D\{X^{(\Omega)}\} ,$$

т. е.[1]) „нѣкоторыя, но не всѣ точки послѣдней адхеренціи входятъ въ $X^{(\Omega)}$, тогда какъ X_{c^Ω} не существуетъ".

9. Сопоставляя послѣднюю кохеренцію и остовъ V области[2]), *W. H. Young* не далъ поясняющихъ примѣровъ; чтобы заполнить этотъ пробѣлъ,

A. назовемъ Q — область границъ интерваловъ[3]) типа $(^*\omega + \omega)^{\omega}$; для нея

$$Q_a = 0,\ Q_c = Q = Q_{c^\Omega},\ V = 0,$$

т. е. послѣдняя кохеренція тожественна съ самой областью, а остовъ отсутствуетъ.

B. Взявъ далѣе область типа

$$\tilde{\omega}\left\{(^*\omega + \omega)^{\omega} + \sum_1^{\omega} (^*\omega + \omega)^i\right\} , \tag{11}$$

перенумеруемъ интервалы $\tilde{\omega}$ въ порядкѣ ихъ величины $\{l_j\}$, и отнесемъ область $(^*\omega + \omega)^{\omega}$ къ наибольшему интервалу l_1, а области $(^*\omega + \omega)^i$ размѣстимъ въ интервалахъ l_{i-1}; опредѣливъ такимъ образомъ типъ (11), включимъ въ составъ области G внѣшнія точки E области $\tilde{\omega}$, всѣ границы Q интерваловъ $(^*\omega + \omega)^i$ и границы R всѣхъ дѣленій области $(^*\omega + \omega)^{\omega}$; тогда

---

[1]) p. 61, ex. 8.

[2]) см. выше 5°; *Young*, p. 61.

[3]) см. стр. 153—155, 105°; стр. 159—160, 107°.

$$G = E + Q + R, \; G^{(\omega)} = E' + R' - \{x_{\bar{1}}, x_1\} = G^{(\Omega)},$$
$$G_{c\omega} = E + R = G_{c\Omega},$$

гдѣ $x_{\bar{1}}, x_1$ —границы интервалы l_1, входящія и въ E', и въ R', а $G^{(\omega)}$ — совершенная [1]) область.

Здѣсь $E+R$—послѣдняя кохеренція, при чемъ несчетная ея часть E есть остовъ области G, тогда какъ R—счетная область.

C. Наконецъ, если мы возьмемъ замкнутую область H границъ и внѣшнихъ точекъ интерваловъ типа

$$\tilde{\omega} \sum_{1}^{\omega} ({}^*\omega + \omega)^i,$$

то для нея

$$H_{c\omega} = H_{c\Omega} = P = H^{(\omega)} = H^{(\Omega)},$$

гдѣ P—совершенная область границъ и внѣшнихъ точекъ $\tilde{\omega}$; въ этомъ примѣрѣ послѣдняя кохеренція и остовъ области оказываются тожественными.

Предыдущее, мнѣ кажется, даетъ довольно убѣдительный образецъ того, какъ можно пользоваться понятіемъ о типахъ размѣщенія, и какъ просто и быстро оно ведетъ къ цѣли при уясненіи даже довольно сложныхъ опредѣленій.

---

[1]) въ силу стр. 160, 107°.