

ИЗВѢСТІЯ
Томскаго Технологическаго Института
Императора Николая II.
т. 11. 1908. № 3.

III.

В. Л. Некрасовъ.

АДХЕРЕНЦІИ И КОХЕРЕНЦІИ ЛИНЕЙНОЙ ТОЧЕЧНОЙ ОБЛАСТИ.

1—9.

АДХЕРЕНЦИИ и КОХЕРЕНЦИИ

ЛИНЕЙНОЙ ТОЧЕЧНОЙ ОБЛАСТИ.

1. Въ книгѣ „Строеніе и мѣра линейной точечной области“¹⁾, излагая ученіе *G. Cantor*'а объ адхеренціяхъ и кохеренціяхъ, я отмѣтилъ, что до сихъ поръ это ученіе не привлекало ничьего вниманія; въ то время въ моихъ рукахъ не было т. XXXV „Quarterly Journal of Mathematics“, гдѣ помѣщена статья *W. H. Young*'а, посвященная этому вопросу²⁾; въ ней авторъ сопоставляетъ ад- и кохеренціи съ производными областями и приводитъ рядъ примѣровъ, уясняющихъ эти довольно сложные понятія.

Въ своемъ изложеніи авторъ не пользуется *Cantor*'овыми обозначеніями, что значительно усложняетъ дѣло; что-же касается до примѣровъ, то примѣненіе понятія о *типахъ размѣщенія*, какъ оно изложено во II главѣ моей книги, дастъ съ одной стороны—большее уясненіе строенія приводимыхъ авторомъ областей, и съ другой—доставляетъ возможность привести примѣры, болѣе убѣдительные, чѣмъ тѣ, которые были даны самимъ авторомъ. То и другое я и предполагаю сдѣлать въ настоящей замѣткѣ, и это тѣмъ интереснѣе для меня, что здѣсь я имѣю случай показать, какую простоту въ довольно сложные вопросы вносить пользованіе типами размѣщенія.

2. Произвольная, вообще говоря, незамкнутая область можетъ быть разложена на двѣ части

$$E \equiv E_a + E_c,$$

изъ которыхъ *адхеренція* E_a состоитъ изъ ея уединенныхъ точекъ, и въ *кохеренцію* E_c входятъ всѣ предѣльные точки E , находящіяся въ составѣ E ; отсюда непосредственно слѣдуетъ, что E_c является частью E'

$$E_c \equiv D(E'). \quad (1)$$

Аналогично, если E_c — не сгущенная область,

$$E_c \equiv E_{c_1} + E_{c_2},$$

¹⁾ Извѣстія Томскаго Технологическаго Института, 1907 г., № 2—3, стр. 33, 22°.

²⁾ См. также прекрасную книгу *W. H. и G. Ch. Young*, которая печаталась одновременно съ моей работой и вышла немного раньше; вездѣ ниже я цитирую по этой книгѣ.

гдѣ E_{c^2} обнимаетъ тѣ предѣльныя точки E_c , которыя присутствуютъ въ E_c ; отсюда видно, что $E_{c^2} \equiv D(E'_c)$; но, въ силу (1), $E'_c \equiv D(E'')$; слѣдовательно

$$E_{c^2} \equiv D(E'').$$

Точно также и вообще, если

$$(2) \quad E_{c^n} \equiv E_{c^{n-1}} + E_{c^{n+1}}, \quad E_{c^n} \equiv D(E^{(n)}),$$

то

$$E_{c^{n+1}} \equiv D(E'_{c^n}), \quad E'_{c^n} \equiv D(E^{(n+1)}),$$

откуда вытекаетъ, что

$$(3) \quad E_{c^{n+1}} \equiv D(E^{(n+1)}).$$

Съ другой стороны, согласно опредѣленію и 2(2), получается

$$(4) \quad E_{c^{n-1}} \equiv D(E_{c^n}) \equiv D(E'^{(n)}).$$

Такимъ образомъ можно утверждать, что¹⁾

„каждая кохеренція конечнаго порядка области E входитъ въ составъ производной того-же порядка, и каждая адхеренція—въ составъ предыдущей производной“.

Изъ (4) слѣдуетъ, что любая адхеренція $E_{c^{n-1}}$ входитъ въ составъ соотвѣтствующей производной $E^{(n)}$, но это не исключаетъ для нея возможности имѣть общія точки съ $E^{(n+1)}$ или даже входить въ нее цѣликомъ, какъ это мы сейчасъ увидимъ.

3. Для поясненія предыдущаго *W. H. Young* беретъ²⁾ область интерваловъ типа ω^3 ; если обозначить³⁾

$$Q^{(0)} = \{x_0, x_0\}, \quad Q^{(1)} = \{x_i\}, \quad Q^{(2)} = \{x_{ij}\}, \quad Q^{(3)} = \{x_{ijk}\},$$

то три области, разсматриваемыя авторомъ, будутъ

$$(5) \quad G \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)} + Q^{(3)}, \quad F \equiv Q^{(0)} + Q^{(1)} + D_n(Q^{(2)}) + Q^{(3)}, \quad E \equiv Q^{(0)} + Q^{(2)} + Q^{(3)},$$

гдѣ $D_n(Q^{(2)})$ обозначена нѣкоторая часть $Q^{(2)}$, состоящая изъ конечнаго числа n точекъ.

Очевидно, что всѣ производныя для G , F и E будутъ одни и тѣ-же

$$G' \equiv F' \equiv E' \equiv \{x_0\} + Q^{(1)} + Q^{(2)}, \quad G'' \equiv F'' \equiv E'' \equiv \{x_0\} + Q^{(1)},$$

$$G''' \equiv F''' \equiv E''' \equiv \{x_0\}.$$

¹⁾ Ср.—*Young*, p. 58.

²⁾ *ib.*, p. 18 ex. 2.

³⁾ (р у меня—стр. 1.5-12^a, 81°-82°.

А. Для первой из областей (5) мы имеем

$$G_a \equiv \{x_0\} + Q^{(3)}, G_c \equiv \{x_0\} + Q^{(1)}; G_{ca} \equiv Q^{(1)}, G_{c^2} \equiv \{x_0\},$$

при чем из сопоставления G_{ca} и G'' слѣдуетъ, что

$$G_{ca} \equiv D(G'').$$

В. Для области F

$$F_a \equiv \{x_0\} + Q^{(3)}, \quad F_c \equiv \{x_0\} + Q^{(1)} + D_n(Q^{(2)});$$

$$F_{ca} \equiv Q^{(1)} + D_n(Q^{(2)}), F_{c^2} \equiv \{x_0\},$$

откуда ясно, что

$$D(F_{ca}) \equiv D(F'').$$

С. Наконецъ для E

$$E_a \equiv \{x_0\} + Q^{(3)}, E_c \equiv \{x_0\} + Q^{(2)}; E_{ca} \equiv Q^{(2)}, E_{c^2} \equiv \{x_0\},$$

и слѣдовательно ¹⁾

$$D\{E_{ca}, E''\} \equiv 0.$$

Д. Упоминаемая у *W. H. Young*'а область T_n есть область типа ω^n , и составъ получающихся изъ нея ад- и кохеренцій можетъ быть разобранъ аналогичнымъ образомъ.

Взявъ $n = 2m$ и обозначивъ снова $Q^{(i)}$ и $Q^{(i)}$, при $i = 1, 2, 3, \dots, 2m$, соответственно границы основного интервала и границы i 'аго дѣленія, возьмемъ напр. область E такого состава

$$E \equiv Q^{(1)} + Q^{(2)} + Q^{(4)} + \dots + Q^{(2m)},$$

т. е. исключимъ границы всѣхъ нечетныхъ дѣленій; тогда съ одной стороны

$$E' \equiv \{x_0\} + \sum_1^{2m-1} Q^{(i)}, \quad E'' \equiv \{x_0\} + \sum_2^{2m-2} Q^{(i)}, \dots,$$

$$E^{(m)} \equiv \{x_0\} + \sum_1^m Q^{(i)}, \quad E^{(m+1)} \equiv \{x_0\} + \sum_1^{m-1} Q^{(i)}, \dots, \quad E^{(2m)} \equiv \{x_0\},$$

¹⁾ У *Young*'а, гдѣ основнымъ интерваломъ взять (0,1), сказано (р. 58, ex. 2): „ E_{ca} is itself the third derived set, consisting of the point 1 alone“; здѣсь очевидно должно стоять E_{c^2} вмѣсто E_{ca} .

и съ другой

$$E_a \equiv \{x_0\} + Q^{(2m)}, E_{ca} \equiv Q^{(2m-2)}, \dots, E_{c^{m-1}a} \equiv Q^{(2)}, E_{cm} \equiv \{x_0\},$$

$$E_c \equiv \{x_0\} + \sum_1^{m-1} Q^{(2k)}, E_{c^2} \equiv \{x_0\} + \sum_1^{m-2} Q^{(2k)}, \dots, E_{c^m} \equiv \{x_0\}, E_{c^{m+1}} \equiv 0;$$

отсюда ясно видно, какъ распредѣляются точки области E по адхеренціи и кохеренціямъ и производнымъ, и какова въ данномъ случаѣ взаимозависимость между тѣми и другими.

4. Пусть для E существуютъ кохеренціи E_{c^n} для всякаго конечнаго n ; тогда возможно одно изъ двухъ

$$\underset{1}{D} \{E_{c^n}\} \equiv 0, \quad \underset{1}{D} \{E_{c^n}\} \equiv E_{c^\omega};$$

въ первомъ случаѣ для *всѣхъ* E_{c^n} нѣтъ общихъ точекъ, и это мыслимо, такъ какъ E_{c^n} вообще не замкнуты¹⁾; во второмъ—общія точки всѣхъ кохеренцій образуютъ кохеренцію порядка ω .

Такъ какъ для каждого n имѣетъ мѣсто 2 (2), то

$$E_{c^\omega} \equiv \underset{1}{D} \{E_{c^n}\} \equiv \underset{1}{D} \{E^{(n)}\} \equiv D \{E^{(\omega)}\},$$

т. е. „кохеренція порядка ω является частью производной порядка ω “.

Имѣя возможность переходить отъ n къ $n+1$ и отъ ряда чиселъ къ ихъ предѣлу, мы для любого α , гдѣ α —число первого или второго класса, допускающее непосредственно большее число $\alpha+1$ или нѣтъ, въ правѣ утверждать, что

$$(6) \quad E_{c^\alpha} \equiv D \{E^{(\alpha)}\},$$

и наконецъ, что

$$E_{c^\Omega} \equiv D \{E^\Omega\},$$

гдѣ Ω —первое число третьяго класса.

Отсюда слѣдуетъ, что теорема 2° имѣетъ общее значеніе.

Изъ (4) и (6) непосредственно слѣдуетъ теорема 29 *W. H. Young*'а²⁾:

„точки каждой адхеренціи являются предѣльными для всѣхъ предыдущихъ адхеренцій“,

такъ что доказательство автора дѣлается излишнимъ.

¹⁾ ib., p. 58-59.

²⁾ ib., p. 62.

5. Процессъ нахожденія адхеренцій и кохеренцій оборвется въ тотъ моментъ, когда одна изъ кохеренцій $E_{c\alpha}$ окажется сгущенной или состоящей изъ уединенныхъ точекъ; въ первомъ случаѣ мы имѣемъ

$$E_{c\alpha} \equiv 0, E_{c\alpha+1} \equiv E_{c\alpha} \equiv E_{c\Omega}, \quad (7)$$

и во второмъ

$$E_{c\alpha} \equiv E_{c\alpha}, E_{c\alpha+1} \equiv 0. \quad (8)$$

Такъ какъ каждая кохеренція составляетъ часть соотвѣтственной производной, ясно, что, если оборвется рядъ производныхъ, вмѣстѣ съ нимъ прекратится и дальнѣйшее образованіе кохеренцій, но не обратно: производныя могутъ существовать, а кохеренцій не будетъ, какъ это мы видѣли въ D³° и увидимъ еще ниже; при этомъ возможно, что въ составъ области и ея адхеренцій будутъ входить точки, принадлежащія дальнѣйшимъ производнымъ и даже $E^{(\Omega)}$.

Въ случаѣ (8) область E распадается на счетный рядъ адхеренцій и должна поэтому сама быть счетной; въ случаѣ (7) къ этому ряду присоединяется еще сгущенная область $E_{c\alpha}$, являющаяся *последней кохеренціей*¹⁾ (ultimate coherenz).

Въ составѣ последней кохеренціи заключаются всѣ сгущенныя части области; если она несчетна, въ составѣ $E_{c\alpha}$ можно различать счетную часть U и несчетную V ; эту несчетную сгущенную часть области *W. H. Young* называетъ²⁾ ея *остовомъ* или *ядромъ* (nucleus).

6. Для поясненія предыдущаго *W. H. Young* беретъ³⁾ Cantor'ову

область типа $\omega \sum_{i=1}^{\omega} \omega^i,$

A . не включая въ ея составъ правой границы x_0 основного интервала.

Пользуясь моими обозначеніями и, въ видахъ единообразія, не включая въ составъ области также лѣвой границы интервала x_0^- и точекъ перваго дѣленія $\{x_i\}$, мы получимъ незамкнутую область вида

$$E \equiv \sum_{i=1}^{\omega} Q_i \equiv \sum_{i=1}^{\omega} \sum_{j=i}^{\omega} Q_i^{(j)};$$

для нея

$$E_{c\alpha} \equiv \sum_{i=1}^{\omega} Q_i^{(i)}, E_{c\alpha} \equiv \sum_{i=1}^{\omega} Q_{i+1}^{(i)}, \dots, E_{c^n \alpha} \equiv \sum_{i=1}^{\omega} Q_{i+n}^{(i)}, \dots;$$

¹⁾ *Young*, p. 61, Theorem 28; у Cantor'a -- „totale Inhärenz“, *A. M.* 7, p. 117.

²⁾ *ib.*, p. 54–56; ср. также стр. 33, 22°; стр. 92, 50°.

³⁾ *ib.*, p. 59, ex. 8; p. 24, ex. 4; ср. стр. 182–184, 130°.

$$\begin{aligned}
 E_c &\equiv \sum_{i=2}^{\omega} \sum_{j=1}^{i-1} Q_i^{(j)}, \quad E_{c^2} \equiv \sum_{i=3}^{\omega} \sum_{j=1}^{i-2} Q_i^{(j)}, \dots, \quad E_{c^{n+1}} \equiv \sum_{i=n+2}^{\omega} \sum_{j=1}^{i-n-1} Q_i^{(j)}, \dots; \\
 E' &\equiv \{x_0\} + \sum_1^{\omega} \{x_i\} + E_c, \quad E'' \equiv \{x_0\} + \sum_2^{\omega} \{x_i\} + E_{c^2}, \dots, \\
 (9) \quad E^{(n+1)} &\equiv \{x_0\} + \sum_{n+1}^{\omega} \{x_i\} + E_{c^{n+1}}, \dots, \quad E^{(\omega)} \equiv \{x_0\}.
 \end{aligned}$$

Мы видимъ отсюда, что при образованіи адхеренцій и кохеренцій послѣдовательно отпадаютъ ряды по діагонали въ первой таблицѣ¹⁾, что существуютъ адхеренціи и кохеренціи любого конечнаго порядка, но кохеренціи порядка ω не существуетъ, такъ какъ она могла бы быть только точкой $\{x_0\}$, что исключено предположеніемъ. Рядъ (9) показываетъ соотношенія между кохеренціями и производными одного и того-же порядка. Такимъ образомъ E можетъ быть представлена здѣсь въ видѣ суммы ея адхеренцій

$$E \equiv \sum_1^{\omega} E_{c^i a}.$$

В. Дальше *W. H. Young* беретъ²⁾ область

$$F \equiv \{x_0\} + \sum_1^{\omega} Q_i^{(i)},$$

для которой

$$F_a \equiv \sum Q_i^{(i)}, \quad F_c \equiv \{x_0\}; \quad F_{ca} \equiv \{x_0\}, \quad F_{c^2} \equiv 0,$$

тогда какъ производныя F совпадаютъ съ соответственными производными (9), и въ частности $F^{(\omega)} \equiv \{x_0\}$; такимъ образомъ мы имѣемъ здѣсь

$$F_{c^{\omega}} \equiv 0, \quad F_{c^a} \equiv F_c \equiv F^{(\omega)}.$$

7. Какъ примѣръ области, для которой существуетъ $Y_{c^{\omega}}$, что *W. H. Young* обозначаетъ Y_{c^*} , онъ, взявъ рядъ интерваловъ типа $\tilde{\omega}$, включаетъ³⁾ въ составъ области ихъ внѣшнія точки E и конечное число n границъ $D_n(Q)$

$$(10) \quad Y \equiv E + D_n(Q);$$

¹⁾ см. стр. 183, 130°.

²⁾ p. 59, ex. 4.

³⁾ ib., p. 60; ср. стр. 132—134, 78°.

тогда

$$Y_a \equiv 0, Y_c \equiv Y \equiv Y_{c\Omega}, Y' \equiv E + Q \equiv Y^{(\Omega)},$$

такъ что

$$Y \equiv Y_{c\Omega} \equiv D(Y^{(\Omega)}).$$

Что же касается областей $Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ примѣра 6 и области Y примѣра 7, то всѣ эти области, вопреки мнѣнію *W. H. Young*'а¹⁾, одного и того же типа и не даютъ ничего новаго, сравнительно съ областью (10). Области новыхъ типовъ получаются только въ томъ случаѣ, когда въ интервалахъ $\tilde{\omega}$ будутъ помѣщаться „ $T_1, T_2, \dots, T_n$ или еще болѣе сложные области“²⁾. Примѣры такихъ областей я сейчасъ приведу ниже.

8. Чтобы показать, что $E_{c\Omega}$ можетъ не существовать, и тѣмъ не менѣе E можетъ имѣть общія точки съ $E^{(\Omega)}$, *W. H. Young* приводитъ указаніе³⁾, которое можно осуществить,

А. пользуясь, напр.⁴⁾, областью интерваловъ типа

$$\tilde{\omega} \sum_1^{\omega} \omega^i$$

и взявъ

$$Y \equiv D_n(E) + \sum_1^{\omega} Q^{(i)},$$

гдѣ $D_n(E)$ —конечное число внѣшнихъ точекъ области $\tilde{\omega}$. Для области Y

$$Y_a \equiv \sum_1^{\omega} Q^{(i)}, Y_c \equiv D_n(E) \equiv Y_{ca}, Y_{c^2} \equiv 0,$$

между тѣмъ какъ

$$Y^{(\omega)} \equiv E + Q \equiv Y^{(\Omega)},$$

гдѣ Q —область границъ интерваловъ $\tilde{\omega}$, и слѣдовательно $E+Q$ совершенна.

Мы видимъ отсюда, что

$$Y_{ca} \equiv D\{Y, Y^{(\Omega)}\}.$$

В. Область

$$\bar{Q} \equiv \sum_1^{\omega} \{Q_n - Q_n^{(n)}\}$$

¹⁾ ib. p. 60; ср. стр. 132—134, 87°.

²⁾ ib. p. 60, ex. 7.

³⁾ ib. p. 60, ex. 8.

⁴⁾ см. стр. 193, 139°.

составляется изъ предѣльныхъ точекъ области

$$\tilde{\omega} \sum_1^{\omega} \omega^i,$$

лежащихъ *внутри* интерваловъ $\tilde{\omega}$; если мы возьмемъ

$$X \equiv D_m(E) + D_n(Q) + \sum_1^{\omega} Q_i^{(i)},$$

гдѣ D_m и D_n — конечныя части E и $\bar{Q}$, то

$$X_a \equiv \sum_1^{\omega} Q_i^{(i)}, \quad X_c \equiv D_m(E) + D_n(\bar{Q}) \equiv X_{ca}, \quad X_{c^2} \equiv 0,$$

между тѣмъ какъ

$$X^{(\omega)} \equiv E + Q \equiv X^{(\Omega)},$$

и слѣдовательно

$$D\{X_{ca}\} \equiv D\{X^{(\Omega)}\},$$

т. е. ¹⁾ „нѣкоторыя, но не всѣ точки послѣдней адхеренціи входятъ въ $X^{(\Omega)}$, тогда какъ $X_{c\Omega}$ не существуетъ“.

9. Сопоставляя послѣднюю кохеренцію и остовъ V области ²⁾, *W. H. Young* не далъ поясняющихъ примѣровъ; чтобы заполнить этотъ пробѣлъ,

А. назовемъ Q — область границъ интерваловъ ³⁾ типа $(*\omega + \omega)^{\omega}$; для нея

$$Q_a \equiv 0, \quad Q_c \equiv Q \equiv Q_{c\Omega}, \quad V \equiv 0,$$

т. е. послѣдняя кохеренція тождественна съ самой областью, а остовъ отсутствуетъ.

В. Возьмъ далѣе область типа

$$(11) \quad \tilde{\omega} \{ (*\omega + \omega)^{\omega} + \sum_1^{\omega} (*\omega + \omega)^i \},$$

перенумеруемъ интервалы $\tilde{\omega}$ въ порядкѣ ихъ величины $\{l_j\}$, и отнесемъ область $(*\omega + \omega)^{\omega}$ къ наибольшему интервалу l_1 , а области $(*\omega + \omega)^i$ размѣстимъ въ интервалахъ l_{i-1} ; опредѣливъ такимъ образомъ типъ (11), включимъ въ составъ области G внѣшнія точки E области $\tilde{\omega}$, всѣ границы Q интерваловъ $(*\omega + \omega)^i$ и границы R всѣхъ дѣленій области $(*\omega + \omega)^{\omega}$; тогда

¹⁾ р. 61, ex. 8.

²⁾ см. выше 5°; *Young*, р. 61.

³⁾ см. стр. 153—155, 105°; стр. 159—160, 107°.

$$G \equiv E + Q + R, \quad G^{(\omega)} \equiv E' + R' - \{x_1^-, x_1\} \equiv G^{(\Omega)},$$

$$G_{e\omega} \equiv E + R \equiv G_{e\Omega},$$

гдѣ x_1^-, x_1 — границы интервалы I_1 , входящія и въ E' , и въ R' , а $G^{(\omega)}$ — совершенная¹⁾ область.

Здѣсь $E + R$ — послѣдняя кохеренція, при чемъ несчетная ея часть E есть остовъ области G , тогда какъ R — счетная область.

С. Наконецъ, если мы возьмемъ замкнутую область H границъ и внѣшнихъ точекъ интерваловъ типа

$$\mathfrak{Z} \sum_1^{\omega} (*\omega + \omega)^i,$$

то для нея

$$H_{e\omega} \equiv H_{e\Omega} \equiv P \equiv H^{(\omega)} \equiv H^{(\Omega)},$$

гдѣ P — совершенная область границъ и внѣшнихъ точекъ $\mathfrak{Z}$; въ этомъ примѣрѣ послѣдняя кохеренція и остовъ области оказываются тождественными.

Предыдущее, мнѣ кажется, даетъ довольно убѣдительный образецъ того, какъ можно пользоваться понятіемъ о типахъ размѣщенія, и какъ просто и быстро оно ведетъ къ цѣли при уясненіи даже довольно сложныхъ опредѣленій.

¹⁾ въ силу стр. 160, 107°.