

УДК 62–752+62–755

ВИД И СТРУКТУРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И ПРОЦЕССА УРАВНОВЕШИВАНИЯ РОТОРНОЙ МАШИНЫ С АВТОБАЛАНСИРАМИ

Гончаров Валерий Владимирович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики факультета проектирования и эксплуатации машин Кировоградского национального технического университета, Украина, 25006, г. Кировоград, пр. Университетский, 8. E-mail: matkora@yandex.ru.

Филимоных Геннадий Борисович,

доктор технических наук, профессор кафедры деталей машин и прикладной механики факультета проектирования и эксплуатации машин Кировоградского национального технического университета, Украина, 25006, г. Кировоград, пр. Университетский, 8. E-mail: filimonikhin@yandex.ua.

Актуальность работы обусловлена необходимостью исследования процесса уравновешивания автобалансирами роторных машин в оборудовании объектов добычи и транспортировки георесурсов, в частности в шахтных вентиляторах, в газотурбинных установках при транспортировке природного газа.

Цель работы. Установить структуру и конкретизировать вид дифференциальных уравнений, описывающих движение роторной машины с автобалансирами со многими корректирующими грузами и процесс уравновешивания ротора автобалансирами.

Методы исследования. Элементы теоретической механики, теории устойчивости движений механических систем по Ляпунову, теории роторных машин.

Результаты. В рамках упрощенной теории роторных машин с автобалансирами со многими корректирующими грузами установлена структура и конкретизирован вид систем дифференциальных уравнений, описывающих движение роторной машины и процесс уравновешивания ротора автобалансирами.

Установлено, что роторная машина условно состоит из нескольких взаимодействующих между собой частей – ротора (ротора в корпусе) и неуравновешенных автобалансиров. Неуравновешенные автобалансиры действуют на ротор с силами, приложенными в точках подвеса автобалансиров и равными вторым производным по времени от векторов суммарных дисбалансов. Ротор влияет на движение корректирующих грузов в автобалансире переносными силами инерции, пропорциональными ускорениям точек подвеса автобалансира.

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение роторной машины, составлена относительно обобщенных координат машины. Эта система состоит из двух и более связанных подсистем.

Первая – описывает движение ротора. Ее всегда можно записать относительно обобщенных координат, описывающих движение ротора и изменение суммарных дисбалансов ротора и автобалансира в каждой плоскости коррекции. При этом если ротор установлен с возможностью вращения вокруг своей продольной оси в корпус, удерживаемый податливыми опорами, то ротор и корпус образуют условный составной ротор (более массивный и вытянутый, чем сам ротор) и уравнения составляются для него.

Количество остальных подсистем равно числу автобалансиров, уравновешивающих ротор. При этом подсистема, соответствующая j -му автобалансиру, имеет стандартный вид и описывает движение корректирующих грузов в этом автобалансире. Она состоит из n_j дифференциальных уравнений, где n_j – количество корректирующих грузов в j -м автобалансире.

Система дифференциальных уравнений, описывающая процесс автобалансировки роторной машины, составлена относительно обобщенных координат ротора и проекций суммарных дисбалансов ротора и автобалансира в каждой плоскости коррекции. Она предназначена для исследования устойчивости семей основных движений и протекания переходных процессов при наступлении автобалансировки. Эта система также состоит из двух и более связанных подсистем. Первая – получается из подсистемы, описывающей движение ротора, если ее записать относительно обобщенных координат ротора и суммарных дисбалансов. Количество остальных подсистем также равно числу автобалансиров. Каждая из этих подсистем имеет стандартный вид и состоит из двух уравнений, получающихся путем комбинирования уравнений движения корректирующих грузов соответствующего автобалансира.

Сформулированы правила составления дифференциальных уравнений, описывающих движение роторной машины и процесс автобалансировки. Они применимы: при любой кинематике движения ротора или ротора, помещенного в корпус; любом количестве автобалансиров; любом количестве и разных типах корректирующих грузов в автобалансире. Вид дифференциальных уравнений первой подсистемы подтвержден с использованием основных теорем динамики.

Сформулированные правила применены для роторной машины, состоящей из ротора, помещенного с возможностью вращения в корпус, удерживаемый податливыми опорами, и двух автобалансиров.

Ключевые слова:

Роторная машина, ротор, дисбаланс, автобалансир, дифференциальные уравнения, автобалансировка, переходные процессы.

Введение

В роторах многих газотурбинных установок [1] (использующихся в нефтегазовой промышленности для энергообеспечения геолого-разведочных работ), турбокомпрессорных комплексов [2] (ис-

пользующихся при транспортировке природного газа и его закачке в подземные хранилища), шахтных вентиляторов [3] (использующихся для принудительной вентиляции шахт и рудников) могут возникать значительные меняющиеся в процессе

эксплуатации дисбалансы. Для уравнивания на ходу таких быстровращающихся роторов целесообразно использовать пассивные автобалансиры (АБ) [4, 5]. Со временем движение ротора и корригирующих грузов (КГ) в АБ устанавливается. На основных движениях КГ уравнивают ротор и вращаются с ним как одно целое вокруг оси, образованной опорами, а на побочных – нет.

Для аналитического исследования движения роторных машин с АБ со многими КГ и переходных процессов при наступлении автобалансировки актуально составление дифференциальных уравнений движения машины, а по ним – дифференциальных уравнений, описывающих процесс наступления автобалансировки.

В работах [6–18] получены уравнения движения некоторых конкретных роторных машин с АБ с использованием общих уравнений динамики или уравнений Лагранжа 2-го рода. Такой подход громоздкий, так как для каждой новой машины нужно заново выводить уравнения движения. Также в этих работах рассматриваются АБ с двумя КГ. В этом случае у машины существуют только изолированные основные движения, и дифференциальные уравнения движения машины одновременно описывают процесс наступления автобалансировки. Однако в реальных АБ используются более двух КГ.

В работах [19–21] применен метод составления дифференциальных уравнений, поддающихся аналитическому анализу: вначале, с учетом соотношений малости, составляются дифференциальные уравнения движения роторной машины с АБ со многими КГ; затем из этих уравнений получается замкнутая система относительно минимального количества переменных, описывающих процесс автобалансировки, – обобщенных координат, описывающих движение ротора и изменение суммарного дисбаланса вращающихся частей машины. Метод был реализован для роторов с неподвижной точкой и на податливых опорах с одним одно- или двухрядным АБ. Он позволил преодолеть проблемы, возникающие при переизбытке КГ, и исследовать устойчивость семьи установившихся движений. Однако в предложенном методе используются уравнения Лагранжа 2-го рода, поэтому он является достаточно громоздким.

В работах [22, 23] изучалась структура дифференциальных уравнений движения роторных машин с АБ со многими КГ. При этом рассмотрено только плоскопараллельное движение ротора. Уравнения движения выводились с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода, что делало этот процесс громоздким. Также не конкретизировалась структура уравнений движения.

В данной работе с использованием результатов работ [19–21] установлены структура и вид дифференциальных уравнений движения роторных машин с АБ со многими КГ и вид уравнений, описывающих процесс наступления автобалансировки. Сформулированы правила составления соответствующих дифференциальных уравнений. Приме-

нение правил проиллюстрировано на примере роторной машины, состоящей из ротора, помещенного с возможностью вращения в корпус, удерживаемый податливыми опорами, и двух АБ.

Общие сведения о роторной машине с АБ и упрощающие предположения

Рассматриваются шаровые, роликовые или маятниковые АБ.

Центры масс КГ в АБ движутся в одной плоскости по окружностям, имеющим общий центр. Плоскость называется плоскостью АБ, общий центр – центром АБ. Ось, перпендикулярная плоскости АБ и проходящая через его центр, называется продольной осью АБ.

Считается, что КГ не мешают двигаться друг другу и в случае шаров или роликов имеют радиусы, намного меньшие радиусов их беговых дорожек.

Ротор – статически или динамически неуравновешен. Его удерживают упруго-вязкие опоры или он помещен в корпус с возможностью вращения вокруг продольной оси, а уже корпус удерживают упруго-вязкие опоры. Во втором случае центры масс и направления главных центральных осей инерции ротора и корпуса совпадают.

Статически неуравновешенный ротор уравнивается в одной плоскости коррекции одним АБ, а динамически – в двух плоскостях коррекции двумя АБ. При этом плоскости АБ совмещаются с соответствующими плоскостями коррекции, а центры АБ располагаются на продольной оси ротора. Точку на продольной оси ротора, совпадающую с центром АБ, будем называть точкой подвеса АБ.

Статический дисбаланс ротора, лежащий в определенной плоскости коррекции, будем формально относить к соответствующему АБ. При этом ротор станет уравновешенным. В дальнейшем под понятием ротор будем иметь в виду уравновешенный ротор, а АБ со статическим дисбалансом ротора для краткости будем называть неуравновешенным АБ.

В процессе движения роторной машины малыми являются отклонения продольной оси ротора от ее равновесного положения и отношение массы КГ к массе ротора (ротора с корпусом).

Как это принято в теории роторных машин с АБ, при составлении дифференциальных уравнений движения системы действием сил тяжести пренебрегаем.

Уравнения, полученные с учетом указанных выше предположений и соотношений малости (линеаризованные по обобщенным координатам ротора и малому параметру), будем для краткости называть *упрощенными*.

Структура дифференциальных уравнений движения роторных машин с АБ

Анализ упрощенных дифференциальных уравнений движения роторных машин с АБ, полученных в работах [19–21], показывает, что они состоят из нескольких связанных подсистем дифференциальных уравнений.

Уравнения первой подсистемы описывают движение ротора (получены из уравнений Лагранжа 2-го рода, составленных для обобщенных координат ротора). Из их вида следует, что эти уравнения можно записать относительно только координат ротора и суммарных дисбалансов, создаваемых АБ. Силы от суммарных дисбалансов приложены в точках подвеса АБ и равны вторым производным по времени от суммарных дисбалансов.

Если ротор установлен в корпус, то они образуют условный уравновешенный составной ротор (далее – составной ротор), более массивный и вытянутый, чем сам ротор.

Число остальных подсистем равно l – числу АБ, уравновешивающих ротор. При этом j -я $/j=1, l/$ подсистема соответствует j -му АБ и описывает движение КГ в этом АБ. Данная подсистема получена из уравнений Лагранжа 2-го рода, составленных для обобщенных координат, описывающих движение КГ в АБ. Она состоит из n_j дифференциальных уравнений, где n_j – количество КГ в j -м АБ. Из вида этой подсистемы следует, что:

- статический дисбаланс и КГ совершают плоскопараллельные движения в плоскостях коррекции АБ;
- ротор влияет на дифференциальные уравнения движения КГ в неуравновешенном АБ только ускорением точки подвеса АБ (это ускорение зависит от положения точки на продольной оси ротора и обобщенных координат ротора);
- вид КГ учитывается коэффициентом, характеризующим кинетическую энергию вращательного движения КГ вокруг его центра масс.

Таким образом, динамически роторная машина разбивается на $1+l$ частей – ротор (составной ротор) и l неуравновешенных АБ. Эти части взаимодействуют друг с другом через точки подвеса АБ:

- ротор (составной ротор) влияет на движение неуравновешенных АБ ускорениями соответ-

ствующих точек подвеса, порождающими моменты от переносных сил инерции;

- неуравновешенные АБ влияют на движение ротора (составного ротора) силами от суммарных дисбалансов, приложенными в точках подвеса АБ.

Уравнения движения ротора на упруго-вязких опорах

Данная задача (движение самого ротора без АБ и корпуса) рассматривается как основа при дальнейших обобщениях.

На рис. 1 приведена модель движения осесимметричного ротора (составного ротора) с дисбалансом для случая податливых опор. Здесь G – центр масс ротора; $Oxyz$ – неподвижная система осей (в исходном положении точки G и O совпадают); $Gx_Gy_Gz_G$ – подвижная система осей, получаемая при поступательном движении осей $Oxyz$; $Guvw$ – подвижная система осей, получаемая при повороте осей $Gx_Gy_Gz_G$ на углы Резаля α, β ; $G\xi\eta\zeta$ – подвижная, жестко связанная с ротором система осей, получаемая при повороте осей $Guvw$ на угол ωt , где ω – скорость вращения ротора.

Уравнения, описывающие поступательное движение ротора, получаются из теоремы о движении центра масс механической системы:

$$m_r \ddot{\rho}_r = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (1)$$

где m_r – масса ротора; $\rho_r = (x, y, z)^T$ – радиус-вектор центра масс ротора; $\mathbf{R}^{(e)}$ – главный вектор внешних сил, действующих на систему.

Уравнения, описывающие вращательное движение ротора, получаются из теоремы об изменении момента количества движений механической системы:

$$\frac{d'}{dt} (\mathbf{L}_r)_{uvw} + \boldsymbol{\omega}_{uvw} \times (\mathbf{L}_r)_{uvw} = \mathbf{M}_G^{(e)}, \quad (2)$$

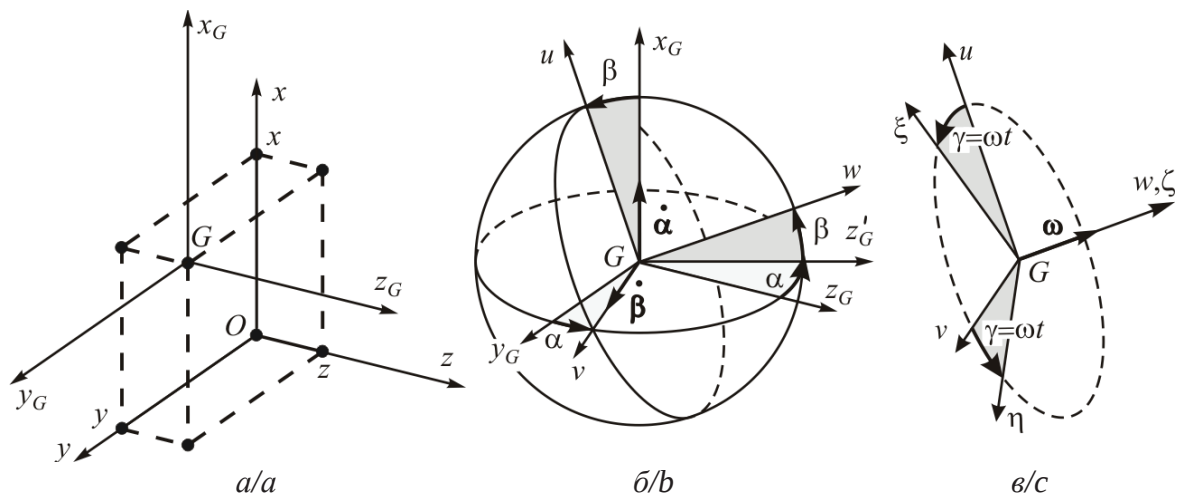


Рис. 1. Кинематика движения ротора на податливых опорах: а) поступательное движение ротора; б) поворот ротора на углы Резаля; в) поворот ротора вокруг продольной оси

Fig. 1. Kinematics of rotor compliant supports: а) forward movement of the rotor; б) rotation of the rotor by the Rezal angles; в) rotation of the rotor around the longitudinal axis

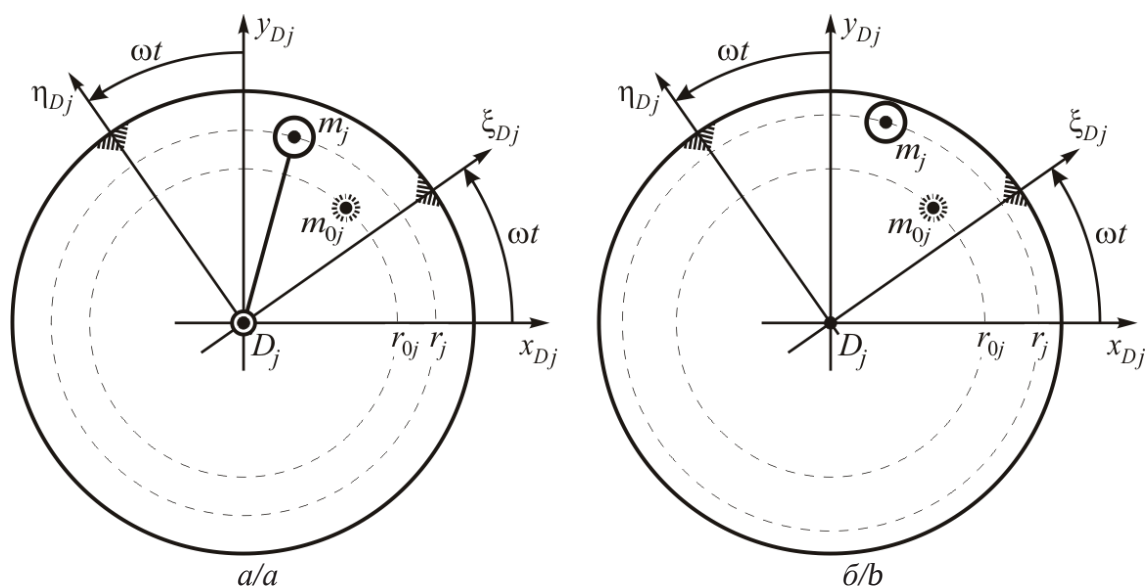


Рис. 2. Схема плоскопараллельного движения неуравновешенного АБ в плоскости коррекции: а) маятниковый АБ; б) шаровой или роликовый АБ

Fig. 2. Scheme of plane motion of unbalanced auto-balancer in the compensation plane: a) movement of the pendulum; b) movement of the ball or a cylindrical roller

где $(L_r)_{uvw} = J_r(\omega_r)_{uvw}$ – вектор момента количества движения ротора в проекциях на оси подвижной системы координат $Guvw$; $J_r = \text{Diag}(A_r, A_r, C_r)$ – тензор инерции ротора относительно его главных цен-

тральных осей инерции $Guvw$; $\frac{d'}{dt}(L_r)_{uvw}$ – относи-

тельная производная вектора $(L_r)_{\xi\eta\zeta}$, определяющая его изменение в подвижной системе координат $Guvw$; $(\omega_r)_{uvw} = (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega)^T$ – вектор угловой скорости вращения ротора в проекциях на оси подвижной системы координат $Guvw$; $\omega_{uvw} = (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, 0)^T$ – вектор угловой скорости вращения осей $Guvw$ в проекциях на эти же оси; $M_G^{(e)}$ – главный момент внешних сил, действующих на роторную машину, найденный относительно ее центра масс – точки G .

Уравнения, описывающие движение КГ

Описание АБ. Для уравнивания жестких роторов имеет смысл устанавливать один ($l=1$) или два ($l=2$) АБ.

Для статического уравнивания ротора устанавливается один АБ в плоскости статического дисбаланса (плоскости расположения точечной массы, создающей статический дисбаланс ротора) или как можно ближе к ней. Тогда при наступлении автобалансировки, если АБ установлен: в плоскости статического дисбаланса, динамические реакции опор ротора равны нулю; вблизи плоскости статического дисбаланса – не равны нулю (имеются остаточные динамические реакции опор).

Для динамического уравнивания ротора устанавливаются два АБ. При этом плоскости коррекции располагаются на некотором расстоянии друг от друга. Тогда при наступлении автобалансировки динамические реакции опор равны нулю.

j -й АБ $/j=\overline{1, l}/$ состоит из n_j КГ в виде маятников, шаров или цилиндрических роликов. В j -м маятниковом АБ на вал ротора насажено n_j математических маятников одинаковой массы m_j и длины r_j . В j -м шаровом или роликовом АБ n_j шаров или цилиндрических роликов одинаковой массы m_j катятся без скольжения по кольцевой дорожке, при этом расстояние от продольной оси ротора до центра шара или продольной оси ролика равно r_j .

j -й АБ движется плоскопараллельно в плоскости, перпендикулярной оси z и проходящей через точку подвеса АБ. Угловые движения АБ малы и не принимаются во внимание.

Обобщенные координаты, определяющие движения КГ относительно ротора. На рис. 2 показана схема плоскопараллельного движения j -го $/j=\overline{1, l}/$ неуравновешенного АБ в плоскости коррекции. Здесь D_j , $/j=\overline{1, l}/$ – точки подвеса j -го АБ; $D_j x_{Dj}, y_{Dj}, D_j \xi_{Dj}, \eta_{Dj}$ – системы осей, параллельные осям соответственно системы Oxy и $G\xi\eta$; m_{0j} – точечная масса, образующая (статический) дисбаланс s_{0j} ротора в соответствующей плоскости коррекции; m_j , $/j=\overline{1, l}/$ – центр масс и масса КГ (маятника – рис. 2, а; шара или ролика – рис. 2, б).

Положение массы дисбаланса или i -го $/i=\overline{1, n_j}; j=\overline{1, l}/$ КГ в j -м АБ определяется абсолютным $\varphi_{i,j}$ (рис. 3, а) или относительным углом $\psi_{i,j}$ (рис. 3, б), отсчитываемым, соответственно, между осью $D_j x_{Dj}$ или $D_j \xi_{Dj}$, и относительным радиус-вектором $r_{i,j}$, $/i=\overline{1, n_j}; j=\overline{1, l}/$ массы дисбаланса или центра масс КГ. Абсолютные и относительные углы связаны соотношениями:

$$\varphi_{i,j} = \omega t + \psi_{i,j}, \quad \psi_{0j} = \text{const}, \quad /i = \overline{0, n_j}, j = \overline{1, l} /. \quad (3)$$

Относительному движению шаров или роликов препятствуют ньютоновские силы вязкого сопро-

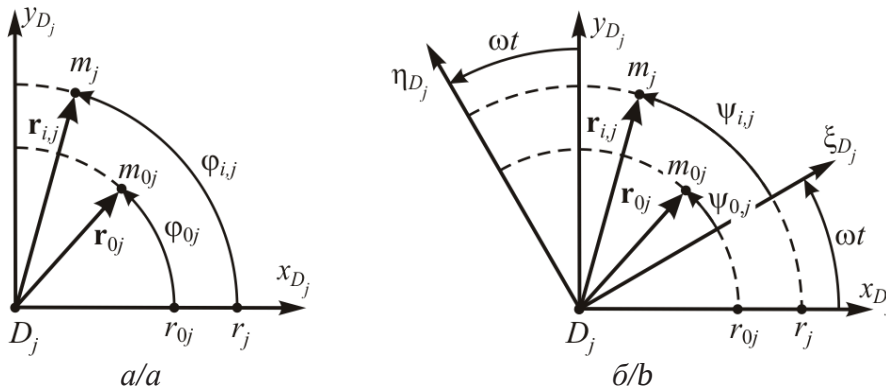


Рис. 3. Кинематика движения КГ и массы дисбаланса: а) абсолютные углы; б) относительные углы

Fig. 3. Kinematics of corrective weights and imbalance mass: a) absolute; b) relative angles

тивления, модули которых равны: $F_{i,j}^{(vis)} = b_j r_j |\dot{\psi}_{i,j}|$, $/i=\overline{1, n_j}; j=\overline{1, l}/$, где b_j – коэффициент сил вязкого сопротивления.

При повороте i -го маятника вокруг оси ротора на него действует момент сил вязкого сопротивления $M_{i,j}^{(vis)} = r_j^2 b_j |\dot{\psi}_{i,j}|$, $/i=\overline{1, n_j}; j=\overline{1, l}/$, где b_j – коэффициент момента сил вязкого сопротивления, приведенный к плечу r_j .

Правило составления упрощенных дифференциальных уравнений, описывающих движение КГ. В работах [20, 21] показано, что при установке АБ соосно продольной оси ротора, уравнения, описывающие движение КГ, имеют вид

$$\begin{aligned} \kappa_j m_j r_j \ddot{\varphi}_{i,j} + b_j r_j (\dot{\varphi}_{i,j} - \omega) - \\ - m_j (a_{D_j, x} \sin \varphi_{i,j} - a_{D_j, y} \cos \varphi_{i,j}) = 0, \\ /j = \overline{1, l}, i = \overline{1, n_j} / \end{aligned} \quad (4)$$

или в относительных углах

$$\begin{aligned} \kappa_j m_j r_j \ddot{\psi}_{i,j} + b_j r_j \dot{\psi}_{i,j} - \\ - m_j [a_{D_j, x} \sin(\omega t + \psi_{i,j}) - a_{D_j, y} \cos(\omega t + \psi_{i,j})] = 0, \\ /j = \overline{1, l}, i = \overline{1, n_j} / , \end{aligned}$$

где $i, j, /j=\overline{1, l}, i=\overline{1, n_j}/$ – соответственно, номер КГ и АБ; $a_{D_j, x}, a_{D_j, y}, /j=\overline{1, l}/$ – проекции ускорения точек подвеса АБ на оси системы $D_j x_{D_j} y_{D_j}$;

$$\kappa_j = 1 + \kappa_j^{(вр)},$$

$$\kappa_j^{(вр)} = \begin{cases} 2/5, & \text{для шара;} \\ 1/2, & \text{для цилиндрического ролика;} \\ 0, & \text{для маятника.} \end{cases} \quad /j = \overline{1, l} /$$

– коэффициент, характеризующий кинетическую энергию вращательного движения КГ.

Сформулируем правило составления дифференциальных уравнений, описывающих движение КГ:

1. Задаем положения точек подвеса $D_j, /j=\overline{1, l}/$ АБ на продольной оси ротора – их расстояние от центра масс ротора z_j .

2. Определяем проекции $a_{D_j, x}, a_{D_j, y}$ ускорений этих точек. Например, для роторной машины с неподвижной точкой они имеют вид $a_{D_j, x} \approx z_j \ddot{\beta}$, $a_{D_j, y} \approx -z_j \ddot{\alpha}$, $/j=\overline{1, l}/$ (см. [20]), а для роторной машины на податливых опорах – $a_{D_j, x} \approx \ddot{x} + z_j \ddot{\beta}$, $a_{D_j, y} \approx \ddot{y} - z_j \ddot{\alpha}$, $/j=\overline{1, l}/$ (см. [21]).
3. Помещаем найденные ускорения в систему уравнений (4).

Дифференциальные уравнения, описывающие изменение проекций суммарного дисбаланса. В работах [20, 21] устойчивость установившихся движений впервые предложено исследовать по обобщенным координатам, определяющим положение ротора и суммарный дисбаланс. Уравнения движения КГ (4) существенно нелинейные.

Покажем, что при выполнении некоторых условий из уравнений движения КГ (4) можно получить уравнения, описывающие изменение суммарных дисбалансов, т. е. можно замкнуть уравнения, описывающие движение ротора.

Преобразуем систему уравнений (4):

1. Предполагается, что существуют основные установившиеся движения роторной машины, при этом положения КГ определяются значениями относительных углов:

$$\tilde{\psi}_{i,j}, /i = \overline{1, n_j}; j = \overline{1, l} /. \quad (5)$$

2. Перейдем в уравнениях (4) от абсолютных углов $\varphi_{i,j}, /i=\overline{1, n_j}; j=\overline{1, l}/$, описывающих положение КГ, к проекциям их дисбаланса $s_{i,j, x}, s_{i,j, y}$:

$$\begin{aligned} s_{i,j, x} = m_j r_j \cos \varphi_{i,j}, \quad s_{i,j, y} = m_j r_j \sin \varphi_{i,j}, \\ /i = \overline{1, n_j}; j = \overline{1, l} /. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом

$$\begin{aligned} \dot{s}_{i,j, x} &= -\dot{\varphi}_{i,j} s_{i,j, y}, \quad \dot{s}_{i,j, y} = \dot{\varphi}_{i,j} s_{i,j, x}, \\ \ddot{s}_{i,j, x} &= -\ddot{\varphi}_{i,j} s_{i,j, y} - \dot{\varphi}_{i,j}^2 s_{i,j, x}, \\ \ddot{s}_{i,j, y} &= \ddot{\varphi}_{i,j} s_{i,j, x} - \dot{\varphi}_{i,j}^2 s_{i,j, y}, \quad /i = \overline{1, n_j}; j = \overline{1, l} /. \end{aligned} \quad (7)$$

Вместо i -го уравнения в (4) запишем два уравнения: первое – произведение i -го уравнения на $\sin \varphi_{i,j}$, а второе – на $\cos \varphi_{i,j}$. После преобразований с учетом (6), (7) эти уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} s_{i,j,y} \ddot{\varphi}_{i,j} + \frac{b_j}{\kappa_j m_j} (\dot{\varphi}_{i,j} s_{i,j,y} - \omega s_{j,y}) = \\ = \frac{m_j}{2\kappa_j} [a_{D_j,x} (1 - \cos 2\varphi_{i,j}) - a_{D_j,y} \sin 2\varphi_{i,j}], \\ s_{i,j,x} \ddot{\varphi}_{i,j} + \frac{b_j}{\kappa_j m_j} (\dot{\varphi}_{i,j} s_{i,j,x} - \omega s_{j,x}) = \\ = \frac{m_j}{2\kappa_j} [a_{D_j,x} \sin 2\varphi_{i,j} - a_{D_j,y} (1 + \cos 2\varphi_{i,j})]. \end{aligned}$$

Из (7) можно получить

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{i,j} s_{i,j,y} = -\dot{s}_{i,j,x}, \quad \dot{\varphi}_{i,j} s_{i,j,x} = \dot{s}_{i,j,y}, \\ \ddot{\varphi}_{i,j} s_{i,j,y} = -\ddot{s}_{i,j,x} - \dot{\varphi}_{i,j}^2 s_{i,j,x}, \\ \ddot{\varphi}_{i,j} s_{i,j,x} = \ddot{s}_{i,j,y} + \dot{\varphi}_{i,j}^2 s_{i,j,y}, \quad / i = \overline{1, n_j}; j = \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{i,j,x} + \dot{\varphi}_{i,j}^2 s_{i,j,x} + \frac{b_j}{m_j \kappa_j} (\dot{s}_{j,x} + \omega s_{j,y}) = \\ = -\frac{m_j}{2\kappa_j} [a_{D_j,x} (1 - \cos 2\varphi_{i,j}) - a_{D_j,y} \sin 2\varphi_{i,j}], \\ \ddot{s}_{i,j,y} + \dot{\varphi}_{i,j}^2 s_{i,j,y} + \frac{b_j}{m_j \kappa_j} (\dot{s}_{j,y} - \omega s_{j,x}) = \\ = \frac{m_j}{2\kappa_j} [a_{D_j,x} \sin 2\varphi_{i,j} - a_{D_j,y} (1 + \cos 2\varphi_{i,j})], \\ / i = \overline{1, n_j}; j = \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (9)$$

3. Линеаризуем уравнения (9) в окрестности одного из установившихся движений (5):

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} = \tilde{\psi}_{i,j} + \psi_{i,j}^{(e)}, \quad \dot{\psi}_{i,j} = \dot{\tilde{\psi}}_{i,j}^{(e)}, \\ |\psi_{i,j}^{(e)}| \ll 1, \quad |\dot{\psi}_{i,j}^{(e)}| \ll 1, \quad / i = \overline{1, n_j}; j = \overline{1, l}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\tilde{\psi}_{i,j}$, $/ i = \overline{1, n_j}; j = \overline{1, l} /$ – постоянные значения углов, определяющих определенное основное движение (из семьи основных движений, если такие движения образуют семью), $\psi_{i,j}^{(e)}$, $/ i = \overline{1, n_j}; j = \overline{1, l} /$ – отклонения от основного движения.

Из (3) и (10) следует, что

$$\dot{\varphi}_{i,j} = \omega + \dot{\psi}_{i,j}^{(e)}, \quad \dot{\psi}_{i,j}^{(e)} = \dot{\varphi}_{i,j} - \omega, \quad / i = \overline{1, n_j}; j = \overline{1, l},$$

поэтому с точностью до величин первого порядка малости включительно

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{i,j}^2 = \omega^2 + 2\omega \dot{\psi}_{i,j}^{(e)} + (\dot{\psi}_{i,j}^{(e)})^2 \approx \\ \approx \omega^2 + 2\omega \dot{\psi}_{i,j}^{(e)} = 2\omega \dot{\varphi}_{i,j} - \omega^2, \\ / i = \overline{1, n_j}; j = \overline{1, l} / \end{aligned}$$

и уравнения (9) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{i,j,x} + 2\omega \dot{s}_{i,j,y} - \omega^2 s_{i,j,x} + \frac{b_j}{m_j \kappa_j} (\dot{s}_{j,x} + \omega s_{j,y}) = \\ = -\frac{m_j}{2\kappa_j} \left\{ a_{D_j,x} [1 - \cos(2\omega t + 2\tilde{\psi}_{i,j})] - \right. \\ \left. - a_{D_j,y} \sin(2\omega t + 2\tilde{\psi}_{i,j}) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{i,j,y} - 2\omega \dot{s}_{i,j,x} - \omega^2 s_{i,j,y} + \frac{b_j}{m_j \kappa_j} (\dot{s}_{j,y} - \omega s_{j,x}) = \\ = \frac{m_j}{2\kappa_j} \left\{ a_{D_j,x} \sin(2\omega t + 2\tilde{\psi}_{i,j}) - \right. \\ \left. - a_{D_j,y} [1 + \cos(2\omega t + 2\tilde{\psi}_{i,j})] \right\}, \\ / i = \overline{1, n_j}; j = \overline{1, l} /. \end{aligned} \quad (11)$$

Кроме того, с (3) следует, что для проекций $s_{0,j,x}$, $s_{0,j,y}$ статических дисбалансов $s_{0,j}$, $/ j = \overline{1, l} /$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} s_{0,j,x} = m_0 r_0 \cos \varphi_{0,j} = m_0 r_0 \cos(\omega t + \psi_{0,j}), \\ s_{0,j,y} = m_0 r_0 \sin \varphi_{0,j} = m_0 r_0 \sin(\omega t + \psi_{0,j}), \\ \dot{s}_{0,j,x} = -\omega m_0 r_0 \sin(\omega t + \psi_{0,j}) = -\omega s_{0,j,y}, \\ \dot{s}_{0,j,y} = \omega m_0 r_0 \cos(\omega t + \psi_{0,j}) = \omega s_{0,j,x}, \\ \ddot{s}_{0,j,x} = -\omega \dot{s}_{0,j,y} = -\omega \omega s_{0,j,x} = -\omega^2 s_{0,j,x}, \\ \ddot{s}_{0,j,y} = \omega \dot{s}_{0,j,x} = \omega(-\omega s_{0,j,y}) = -\omega^2 s_{0,j,y} \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{0,j,x} + 2\omega \dot{s}_{0,j,y} - \omega^2 s_{0,j,x} + \frac{b_j}{m_j \kappa_j} (\dot{s}_{j,x} + \omega s_{j,y}) = 0, \\ \ddot{s}_{0,j,y} - 2\omega \dot{s}_{0,j,x} - \omega^2 s_{0,j,y} + \frac{b_j}{m_j \kappa_j} (\dot{s}_{j,y} - \omega s_{j,x}) = 0, \\ / j = \overline{1, l} /. \end{aligned} \quad (12)$$

4. Суммируем по i , $/ i = \overline{1, n_j}; j = \overline{1, l} /$ первое и второе уравнения системы (11) и прибавляем к ним соответствующее уравнение из (12):

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{j,x} + 2\omega \dot{s}_{j,y} - \omega^2 s_{j,x} + \frac{b_j}{m_j \kappa_j} (\dot{s}_{j,x} + \omega s_{j,y}) = \\ = -\frac{1}{2} \frac{m_j}{\kappa_j} \sum_{i=1}^{n_j} \left\{ a_{D_j,x} [1 - \cos(2\omega t + 2\tilde{\psi}_{i,j})] - \right. \\ \left. - a_{D_j,y} \sin(2\omega t + 2\tilde{\psi}_{i,j}) \right\}, \\ \ddot{s}_{j,y} - 2\omega \dot{s}_{j,x} - \omega^2 s_{j,y} + \frac{b_j}{m_j \kappa_j} (\dot{s}_{j,y} - \omega s_{j,x}) = \\ = \frac{1}{2} \frac{m_j}{\kappa_j} \sum_{i=1}^{n_j} \left\{ a_{D_j,x} \sin(2\omega t + 2\tilde{\psi}_{i,j}) - \right. \\ \left. - a_{D_j,y} [1 + \cos(2\omega t + 2\tilde{\psi}_{i,j})] \right\}, \\ / j = \overline{1, l} /, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} s_{j,x} = \sum_{i=0}^{n_j} s_{i,j,x} = \sum_{i=0}^{n_j} m_{i,j} r_{i,j} \cos \varphi_{i,j}, \\ s_{j,y} = \sum_{i=0}^{n_j} s_{i,j,y} = \sum_{i=0}^{n_j} m_{i,j} r_{i,j} \sin \varphi_{i,j}, \quad / j = \overline{1, l} / \end{aligned} \quad (14)$$

– проекции суммарного дисбаланса s_j в j -й плоско-сти коррекции.

Уравнения (13) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{j,x} + 2\omega \dot{s}_{j,y} - \omega^2 s_{j,x} + \frac{b_j}{m_j \kappa_j} (\dot{s}_{j,x} + \omega s_{j,y}) = \\ = -\frac{1}{2} \frac{m_j n_j}{\kappa_j} \left\{ a_{D_j,x} [1 - p_j \cos(2\omega t + 2\vartheta_j)] - \right. \\ \left. - a_{D_j,y} p_j \sin(2\omega t + 2\vartheta_j) \right\}, \end{aligned}$$

$$\ddot{s}_{j,y} - 2\omega\dot{s}_{j,x} - \omega^2 s_{j,y} + \frac{b_j}{m_j k_j} (\dot{s}_{j,y} - \omega s_{j,x}) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_j n_j}{k_j} \left\{ a_{D_j,x} p_j \sin(2\omega t + 2\vartheta_j) - \right.$$

$$\left. - a_{D_j,y} [1 + p_j \cos(2\omega t + 2\vartheta_j)] \right\},$$

$$/ j = \overline{1, l}, \quad (15)$$

где

$$\cos 2\vartheta_j = \frac{p_{1j}}{p_j}, \quad \sin 2\vartheta_j = \frac{p_{2j}}{p_j}, \quad p_j = \sqrt{p_{1j}^2 + p_{2j}^2},$$

$$p_{1j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} \cos 2\tilde{\varphi}_{i,j}, \quad p_{2j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} \sin 2\tilde{\varphi}_{i,j},$$

$$/ j = \overline{1, l}.$$

Дифференциальные уравнения (13) и (15) описывают изменение проекций суммарного дисбаланса в j -й плоскости коррекции.

Уравнения движения ротора с учетом АБ

Из работ [20, 21] следует:

- а) что уравнения, описывающие поступательное движение ротора с АБ, получаются прибавлением в левой части уравнения (1) вторых производных векторов суммарных дисбалансов – s_j , $/j=\overline{1, l}/$:

$$m_r \ddot{\rho}_r + \sum_{j=1}^l \ddot{s}_j = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (16)$$

где $s_j = \sum_{i=0}^{n_j} m_{i,j} \mathbf{r}_{i,j} = (s_{j,x}, s_{j,y}, 0)^T$, $/j=\overline{1, l}/$ – вектор суммарного дисбаланса в j -й плоскости коррекции;

- б) уравнения, описывающие вращательное движение ротора, получаются прибавлением в левой части уравнения (2) моментов от вторых производных векторов суммарных дисбалансов – s_j , $/j=\overline{1, l}/$, относительно центра масс ротора:

$$\frac{d'}{dt} (\mathbf{L}_r)_{uvw} + \boldsymbol{\omega}_{uvw} \times (\mathbf{L}_r)_{uvw} + \sum_{j=1}^l \mathbf{d}_j \times \ddot{s}_j = \mathbf{M}_G^{(e)}. \quad (17)$$

Уравнения движения ротора, помещенного в корпус с учетом АБ

Пусть ротор помещен с возможностью вращения в корпус. Масса корпуса и его тензор инерции относительно осей $Ouvw$ соответственно равны m_c и

$$\mathbf{J}_c = \begin{pmatrix} J_u^{(c)} & -J_{uv}^{(c)} & -J_{uw}^{(c)} \\ -J_{uv}^{(c)} & J_v^{(c)} & -J_{vw}^{(c)} \\ -J_{uw}^{(c)} & -J_{vw}^{(c)} & J_w^{(c)} \end{pmatrix}.$$

Из работ [20, 21] следует, что для ротора, помещенного в корпус с учетом АБ, уравнения поступательного движения можно получить из уравнения (16) путем замены массы ротора m_r массой условного составного ротора $M = m_r + m_c$:

$$M \ddot{\rho}_r + \sum_{j=1}^l \ddot{s}_j = \mathbf{R}^{(e)}; \quad (18)$$

уравнения вращательного движения можно получить из уравнения (17) путем замены вектора момента количества движения ротора $(\mathbf{L}_r)_{uvw} = \mathbf{J}_r(\boldsymbol{\omega}_r)_{uvw}$

вектором момента количества движения условного составного ротора $(\mathbf{L}_r^{(s)})_{uvw} = \mathbf{J}_r^{(s)}(\boldsymbol{\omega}_r)_{uvw}$:

$$\frac{d'}{dt} (\mathbf{L}_r^{(s)})_{uvw} + \boldsymbol{\omega}_{uvw} \times (\mathbf{L}_r^{(s)})_{uvw} + \sum_{j=1}^l \mathbf{d}_j \times \ddot{s}_j = \mathbf{M}_G^{(e)}, \quad (19)$$

$$\text{где } \mathbf{J}_r^{(s)} = \begin{pmatrix} A_r + J_v^{(c)} & -J_{uv}^{(c)} & 0 \\ -J_{uv}^{(c)} & A_r + J_u^{(c)} & 0 \\ 0 & 0 & C_r \end{pmatrix} - \text{тензор инерции условного составного ротора.}$$

Проверка вида дифференциальных уравнений движения ротора, помещенного в корпус, с АБ с использованием общих теорем динамики

Уравнение (18) также может быть получено из теоремы о движении центра масс механической системы, а уравнение (19) (с точностью до величин первого порядка малости включительно) – из теоремы об изменении момента количества движения механической системы.

Проиллюстрируем вывод уравнения (18). Теорема о движении центра масс в нашем случае имеет вид

$$m_\Sigma \ddot{\rho}_\Sigma = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (20)$$

где $m_\Sigma = M + \sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^{n_j} m_{i,j}$ – масса роторной машины;

$\rho_\Sigma = \frac{\rho_r M + \sum_{j=1}^l s_j + \sum_{j=1}^l d_j \sum_{i=0}^{n_j} m_{i,j}}{m_\Sigma}$ – радиус-вектор центра масс роторной машины; $d_j = (0, 0, z_j)^T$, $/j=\overline{1, l}/$ – радиус-векторы точек подвеса АБ.

Тогда

$$m_\Sigma \ddot{\rho}_\Sigma = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\rho_r M + \sum_{j=1}^l s_j + \sum_{j=1}^l d_j \sum_{i=0}^{n_j} m_{i,j}}{m_\Sigma} \right) =$$

$$= M \ddot{\rho}_r + \sum_{j=1}^l \ddot{s}_j + \sum_{j=1}^l \ddot{d}_j \sum_{i=0}^{n_j} m_{i,j}. \quad (21)$$

Так как

$$\ddot{d}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} d_j \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d'}{dt} d_j + \boldsymbol{\omega}_{uvw} \times d_j \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_{uvw} \times d_j) =$$

$$= \frac{d'}{dt} (\boldsymbol{\omega}_{uvw} \times d_j) + \boldsymbol{\omega}_{uvw} \times \boldsymbol{\omega}_{uvw} \times d_j =$$

$$= \frac{d'}{dt} (\boldsymbol{\omega}_{uvw} \times d_j) = \frac{d'}{dt} [z_j (\dot{\beta}; -\dot{\alpha}; 0)^T] =$$

$$= z_j (\ddot{\beta}, -\ddot{\alpha}, 0)^T, \quad / j = \overline{1, l},$$

то координаты векторов $\ddot{d}_j$ и $\sum_{j=1}^l \ddot{d}_j \sum_{i=0}^{n_j} m_{i,j}$, $/j=\overline{1, l}/$ являются величинами соответственно 1-го и 2-го порядка малости. Поэтому с точностью до величин первого порядка малости включительно уравнение (21) равносильно уравнению

$$m_\Sigma \ddot{\rho}_\Sigma \approx M \ddot{\rho}_r + \sum_{j=1}^l \ddot{s}_j. \quad (22)$$

Пример

Описание физико-математической модели. Осесимметричный ротор помещен в корпус с возможностью вращения вокруг своей продольной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 4). Корпус удерживают одна продольная упруго-вязкая опора и по четыре упругих и вязких поперечных опор. Свойства опор характеризуют коэффициенты жесткости ($k_{Lx}, k_{Ly}, k_{Lz}, k_{Rx}, k_{Ry}$) и вязкости ($b_{Lx}, b_{Ly}, b_{Lz}, b_{Rx}, b_{Ry}$).

В плоскостях P_j ($z=z_j, |z_j|=d_j$), $j=1,2$ находятся статические дисбалансы s_{0j} , образованные точечными массами m_{0j} , находящимися на расстоянии r_{0j} от продольной оси ротора. В этих же плоскостях установлены АБ. Ось направлена в сторону начального направления вектора статического дисбаланса s_{01} . В исходном положении роторной машины оси $Oxyz, G\xi\eta\zeta, Guvw$ совпадают.

Дифференциальные уравнения движения составного ротора при отсутствии АБ и дисбаланса. Уравнения движения (16), (17), описывающие движение уравновешенного составного ротора, для рассмотренной модели (при отсутствии АБ) имеют вид

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + b_x\dot{x} + k_x x + b_{x\beta}\dot{\beta} + k_{x\beta}\beta &= 0, \\ M\ddot{y} + b_y\dot{y} + k_y y - b_{y\alpha}\dot{\alpha} - k_{y\alpha}\alpha &= 0, \\ A\ddot{\alpha} + b_\alpha\dot{\alpha} + k_\alpha\alpha + J_{uv}^{(c)}\ddot{\beta} + C_r\omega\dot{\beta} - b_{y\alpha}\dot{y} - k_{y\alpha}y &= 0, \\ -J_{uv}^{(c)}\ddot{\alpha} - C_r\omega\dot{\alpha} + B\ddot{\beta} + b_\beta\dot{\beta} + k_\beta\beta + b_{x\beta}\dot{x} + k_{x\beta}x &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$M = m_r + m_c, \quad A = A_r + J_u^{(c)}, \quad B = A_r + J_v^{(c)};$$

$$k_x = k_{Lx} + k_{Rx}, \quad k_y = k_{Ly} + k_{Ry}, \quad k_z = k_{Lz},$$

$$k_\alpha = k_{Ly}z_{kL}^2 + k_{Ry}z_{kR}^2, \quad k_\beta = k_{Lx}z_{kL}^2 + k_{Rx}z_{kR}^2,$$

$$k_{x\beta} = k_{Lx}z_{kL} + k_{Rx}z_{kR}, \quad k_{y\alpha} = k_{Ly}z_{kL} + k_{Ry}z_{kR},$$

$$b_x = b_{Lx} + b_{Rx}, \quad b_y = b_{Ly} + b_{Ry}, \quad b_z = b_{Lz},$$

$$b_\alpha = b_{Ly}z_{bL}^2 + b_{Ry}z_{bR}^2, \quad b_\beta = b_{Lx}z_{bL}^2 + b_{Rx}z_{bR}^2,$$

$$b_{x\beta} = b_{Lx}z_{bL} + b_{Rx}z_{bR}, \quad b_{y\alpha} = b_{Ly}z_{bL} + b_{Ry}z_{bR}.$$

Дифференциальные уравнения, описывающие движение составного ротора при наличии динамического дисбаланса и АБ. Уравнения движения роторной машины при наличии АБ можно получить из уравнений движения (24) прибавлением в левых частях или вторых производных от суммарных дисбалансов ротора и АБ в каждой плоскости коррекции, или моментов относительно центра масс ротора этих производных:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + b_x\dot{x} + k_x x + b_{x\beta}\dot{\beta} + k_{x\beta}\beta + \ddot{s}_{1x} + \ddot{s}_{2x} &= 0, \\ M\ddot{y} + b_y\dot{y} + k_y y - b_{y\alpha}\dot{\alpha} - k_{y\alpha}\alpha + \ddot{s}_{1y} + \ddot{s}_{2y} &= 0, \\ A\ddot{\alpha} + b_\alpha\dot{\alpha} + k_\alpha\alpha + J_{uv}^{(c)}\ddot{\beta} + C_r\omega\dot{\beta} - & \\ - b_{y\alpha}\dot{y} - k_{y\alpha}y - z_1\ddot{s}_{1y} - z_2\ddot{s}_{2y} &= 0, \\ -J_{uv}^{(c)}\ddot{\alpha} - C_r\omega\dot{\alpha} + B\ddot{\beta} + b_\beta\dot{\beta} + k_\beta\beta + & \\ + b_{x\beta}\dot{x} + k_{x\beta}x + z_1\ddot{s}_{1x} + z_2\ddot{s}_{2x} &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где $s_{1,x}, s_{2,x}, s_{1,y}, s_{2,y}$ описаны в (14); z_1, z_2 – координаты точек подвеса.

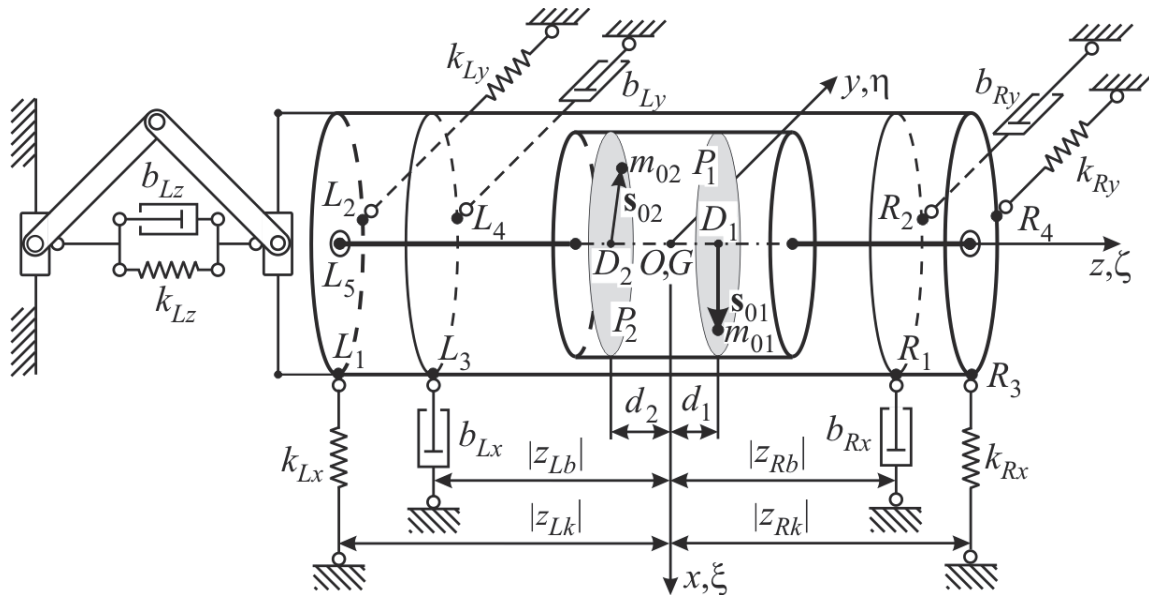


Рис. 4. Ротор с двумя АБ в корпусе, установленном на упруго-вязких опорах

Fig. 4. Rotor with two auto-balancers in a housing mounted on viscoelastic supports

Дифференциальные уравнения, описывающие изменение проекций суммарных дисбалансов АБ. Уравнения, замыкающие систему (25) относительно обобщенных координат $x, y, \alpha, \beta, s_{1,x}, s_{2,x}, s_{1,y}, s_{2,y}$, описывающих процесс автобалансировки, имеют вид (15), где $l=2$ и $a_{D,l,x} = \ddot{x} + z_l \ddot{\beta}$, $a_{D,l,y} = \ddot{y} + z_l \ddot{\alpha}$, $/j=\overline{1,l}/$.

Аналогично можно получать дифференциальные уравнения движения любой роторной машины с АБ, если для нее записаны уравнения движения без АБ.

Выводы

Для роторной машины с АБ со многими КГ в рамках приближенной теории, предназначенной для исследования переходных процессов при наступлении автобалансировки, установлено следующее:

1. Динамически роторная машина с АБ условно состоит из нескольких связанных частей – ротора (ротора с корпусом) и неуравновешенных АБ. Неуравновешенные АБ действуют на ротор силами, приложенными в точках подвеса АБ и равными вторым производным по времени от векторов суммарных дисбалансов. Ротор влияет на движение КГ в АБ силами, пропорциональными ускорениям точек подвеса АБ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поршаков Б.П., Апостолов А.А., Никишин В.И. Газотурбинные установки. – М.: Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2003. – 240 с.
2. Шайдак Б.П., Евдокимов В.Е., Степанов В.М., Архипов В.В., Даскал Ю.И. и др. Компрессорные машины и турбины АОТ «Невский завод». – М.: ЦНИИТЭИтяжмаш, 2000. – 159 с.
3. Ивановский И.Г. Шахтные вентиляторы. – Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2003. – 196 с.
4. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. – М.: Наука, 2002. – 119 с.
5. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
6. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1985. – 84 с.
7. Нестеренко В.П. Теория и практика устройств автоматической балансировки роторов: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Новосибирск, 1990. – 34 с.
8. Sperling L., Merten F., Duckstein H. Self-synchronization and automatic balancing in rotor dynamics // Int. J. Rotating Machinery. – 2000. – V. 6. – № 4. – P. 275–285.
9. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Two-plane automatic balancing // Machine Dynamics Problems. – 2001. – V. 25. – № 3/4. – P. 139–152.
10. Simulation of two-plane automatic balancing of a rigid rotor / L. Sperling, B. Ryzhik, Ch. Linz, H. Duckstein // Mathematics and Computers in Simulation. – 2002. – V. 58. – № 4–6. – P. 351–365.
11. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-plane auto-balancing of rigid rotors // Technische Mechanik. – 2004. – V. 24. – № 1. – P. 1–24.
12. Green K., Champneys A.R., Lieven N.J. Bifurcation analysis of an automatic dynamic balancing mechanism for eccentric ro-

2. Дифференциальные уравнения, описывающие движение роторной машины с АБ, можно получить из уравнений движения роторной машины без АБ и дисбаланса прибавлением в них слагаемых, зависящих от вторых производных суммарных дисбалансов АБ и ротора и от положений точек подвеса АБ.
3. Если ротор установлен с возможностью вращения вокруг своей продольной оси в корпусе на податливых опорах, то ротор с корпусом образуют условный составной ротор, более массивный и вытянутый, чем сам ротор. При этом сразу составляются уравнения движения для этого составного ротора.
4. Дифференциальные уравнения, описывающие движение КГ в АБ, имеют стандартный вид. Особенность движения АБ учитывается ускорением его точки подвеса.
5. Дифференциальные уравнения, описывающие изменение суммарных дисбалансов, также имеют стандартный вид и получаются путем комбинирования уравнений движения КГ соответствующего АБ.

Сформулированные выводы применимы при любой кинематике движения ротора (ротора, помещенного в корпусе), любом количестве АБ, любом количестве КГ в АБ, для шаровых, роликовых и маятниковых АБ.

- tors // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – V. 291. – Iss. 3–5. – P. 861–881.
13. Філімоніхін І.І. Застосування функції Гамільтона до визначення умов зрівноваження автобалансирами ротора, здійснюючого просторовий рух // Збірник наукових праць КНТУ «Техніка в с/г виробн., галузеве машинобудування, автоматизація». – Кіровоград, 2007. – Вип. 18. – С. 34–41.
14. Automatic two-plane balancing for rigid rotors / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2008. – V. 43. – Iss. 6. – P. 527–541.
15. Lu Chung-Jen, Wang Ming-Cheng, Huang Shih-Hsuan. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2009. – V. 23. – Iss. 3. – P. 884–896.
16. Bolton J.N. Single- and dual-plane automatic balancing of an elastically mounted cylindrical rotor with considerations of coulomb friction and gravity: diss. ... doct. of phil. in engin. mech. – Blacksburg, Virginia, 2010. – 317 p.
17. Two-plane automatic balancing: a symmetry breaking analysis / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – V. 46. – Iss. 9. – P. 1139–1154.
18. Rezaee M., Fathi R. Improving the working performance of automatic ball balancer by modifying its mechanism // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – V. 358. – P. 375–391. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X15006604> (дата обращения: 29.08.2015).
19. Філімоніхін Г.Б., Гончаров В.В. Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус – автобаланси́р // Збірник наукових праць КНТУ «Техніка в с/г виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація». – Кіровоград, 2009. – Вип. 22. – С. 357–363.
20. Филимонович Г.Б., Гончаров В.В. Уравновешивание автобаланси́ром ротора в упруго-вязко закреплённом корпусе с непо-

- движной точкой // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 324. – № 2. – С. 71–77.
21. Филимоныхин Г.Б., Гончаров В.В. Уравновешивание автобаланси́ром ротора в упруго-вязко закрепленном корпусе, совершающем пространственное движение // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 325. – № 2. – С. 41–49.
 22. Горбенко А.Н. Об уравнениях движения ротора с автобаланси́ром в форме уравнений Лагранжа с множителями // Механизация производственных процессов рыбного хозяйства, промышленности и аграрных предприятий: сб. науч. тр. КГМУ. – Керчь: КГМУ, 2009. – Вып.10. – С. 39–46.
 23. Горбенко А.Н. Общая структура уравнений движения роторных машин с автобаланси́ром пассивного типа // Авиационно-космическая техника и технология. Двигатели и энергоустановки аэрокосмических летательных аппаратов. – 2011. – № 8 (85). – С. 71–76.

Поступила 28.10.2015 г.

UDC 62–752+62–755

FORM AND STRUCTURE OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MOTION AND PROCESS OF AUTO-BALANCING IN THE ROTOR MACHINE WITH AUTO-BALANCERS

Valeriy V. Goncharov,

Kirovograd National Technical University, 8, Universitetskiy Avenue, Kirovograd, 25006, Ukraine. E-mail: matkora@yandex.ru

Gennadiy B. Filimonikhin,

Kirovograd National Technical University, 8, Universitetskiy Avenue, Kirovograd, 25006, Ukraine. E-mail: filimonikhin@yandex.ua

The relevance of work is conditioned by a need of investigation of the process of equilibration by auto-balancers of rotating machines in equipment of the extraction and transportation facilities of geo-resources, particularly, in mine ventilators, in gas turbines for natural gas transportation.

The main aim of the study is to ascertain the structure and to specify the form of differential equations that describe the motion of a rotary machine with auto-balancers with many corrective weights and differential equations that describe the auto-balancing of rotor.

The methods used in the study: elements of theoretical mechanics, Lyapunov stability theory, theories of rotary machines.

The results. In the framework of a simplified theory of rotary machines with auto-balancers with many corrective weights the authors ascertained the structure and specified the form of systems of differential equations that describe the movement of a rotary machine and the process of balancing of the rotor by auto-balancers.

It was determined that the rotary machine conditionally consists of several interacting parts – a rotor (rotor in corps) and unbalanced auto-balancers. Unbalanced auto-balancers act on the rotor with the forces that apply to the point of suspension of auto-balancers and are equal to the second derivative by time of the vectors of the total imbalances. The rotor affects the movement of the corrective weights in auto-balancers by forces of moving space that are proportional to the acceleration of points of suspension of auto-balancers. The system of differential equations describing the motion of a rotary machine was drawn up with respect to the generalized coordinates of the machine. It is composed of two or more of the associated subsystems.

The first – describes the motion of the rotor. It can always be written relatively to the generalized coordinates that describe the motion of the rotor and total imbalances of the rotor and auto-balancer in each correction plane. Thus, if the rotor is mounted with rotation around its longitudinal axis in the corps which is held by pliant supports then the rotor and the corps form a conditioned composite rotor (more elongated and massive than the rotor) and the equations are made for it.

The number of other subsystems equals to the number of auto-balancers which counterbalance the rotor. Thus, the subsystem, corresponding to j -th auto-balancer, has a standard form and describes the motion of the corrective weights in this auto-balancer. It consists of n_j differential equations, where n_j – the number of corrective weights in j -th auto-balancer.

The system of differential equations that describes the process of auto-balancing of the rotary machine is compiled relatively of generalized coordinates of the rotor and of projections of the total imbalances of the rotor and auto-balancer in each correction plane. It is designed to investigate the stability of families of basic movements and the behavior of transients at auto-balancing. This system also consists of two or more of the associated subsystems. The first is obtained from the subsystem, describing the motion of the rotor if we write it relatively to the generalized coordinates of the rotor and total imbalances. The number of other subsystems also equals to the number of auto-balancers. Each of these subsystems has a standard form and consists of two equations that are obtained by combination of the equations of motion of corrective weights of corresponding auto-balancer.

Rules of composition of differential equations describing the motion of the rotary machine and the process of auto-balancing are formulated. They are applicable for any kinematics of the rotor motion (the rotor, placed in the corps); for any number of auto-balancers; for any number and different types of corrective weights in auto-balancer. The type of differential equations of the first subsystem is confirmed using the basic theorems of dynamics.

The formulated rules were applied to the rotary machine consisting of the rotor placed in the corps with the possibility to be rotated, which is held by pliant supports, and of two auto-balancers.

Key words:

Rotor machine, rotor, unbalance, auto-balancer, differential equations, auto-balancing, transients.

REFERENCES

1. Porshakov B.P., Apostolov A.A., Nikishin V.I. *Gazoturbinnye ustanovki* [Gas turbines]. Moscow, Publishing House of the «Oil and Gas» RSU of Oil and Gas I.M. Gubkin, 2003. 240 p.
2. Shaydak B.P., Evdokimov V.E., Stepanov V.M., Arkhipov V.V., Daskal Yu.I. et al. *Kompressornye mashiny i tyrbiny AOOT «Nevskiy zavod»* [The compressor machines and turbine OJSC «Nevsky Zavod»]. Moscow, TsNITEItyazhmash Publ., 2000. 159 p.
3. Ivanovskiy I.G. *Shakhtnye ventilyatory* [Mine ventilators]. Vladivostok, FESTU Press, 2003. 196 p.
4. Gusarov A.A. *Avtobalansiruyushchie ustroystva pryamogo deystviya* [Auto-balancing devices of direct action]. Moscow, Nauka Publ., 2002. 119 p.
5. Filimonikhin G.B. *Zrивnovazhennyya i vibrozakhist rotoriv avtobalansiramy z tverdimi korigovalnimi vantazhami* [Balancing and vibration protection rotors auto-balancers solid corrective goods]. Kirovograd, KNTU Press, 2004. 352 p.
6. Nesterenko V.P. *Avtomaticheskaya balansirovka rotorov priborov i mashin so mnogimi stepenyami svobody* [Automatic rotor balancing devices and machines with many degrees of freedom]. Tomsk, Tomsk State Publ. house, 1985. 84 p.
7. Nesterenko V.P. *Teoriya i praktika ustroystv avtomaticheskoy balansirovki rotorov*. Avtoref. Dis. Dokt. nauk [Theory and practice of automatic balancing of rotors. Author's abstract Dr. Diss.]. Novosibirsk, 1990. 34 p.
8. Sperling L., Merten F., Duckstein H. Self-synchronization and automatic balancing in rotor dynamics. *Int. Rotating Machinery*, 2000, vol. 6, no. 4, pp. 275–285.
9. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Two-plane automatic balancing. *Machine Dynamics Problems*, 2001, vol. 25, no. 3/4, pp. 139–152.
10. Sperling L., Ryzhik B., Linz Ch., Duckstein H. Simulation of two-plane automatic balancing of a rigid rotor. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2002, vol. 58, no. 4–6, pp. 351–365.
11. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-plane auto-balancing of rigid rotors. *Technische Mechanik*, 2004, vol. 24, no. 1, pp. 1–24.
12. Green K., Champneys A.R., Lieven N.J. Bifurcation analysis of an automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol. 291, iss. 3–5, pp. 861–881.
13. Filimonikhina I.I. Zastosuvannya funktsii Gamiltona do viznachennya umov zrивnovazhennyya avtobalansiramy rotora, zdiysnyuyuchogo prostoroviy rukh [Application features of the Hamilton to determine the conditions of auto-balancing rotor weights, making spatial motion]. *Zbirnik naukovikh prats KNTU «Tekhnika v s/h vyrobnytstvi, haluseve mashynobudubannya, avtomatyzatsiya»*, Kirovograd, 2007, iss. 18, pp. 34–41.
14. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, vol. 43, iss. 6, pp. 527–541.
15. Lu Chung-Jen, Wang Ming-Cheng, Huang Shih-Hsuan. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, vol. 23, iss. 3, pp. 884–896.
16. Bolton J.N. *Single- and dual-plane automatic balancing of an elastically mounted cylindrical rotor with considerations of coulomb friction and gravity*. Dr. Diss. Blacksburg, Virginia, 2010. 317 p.
17. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Two-plane automatic balancing: a symmetry breaking analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, iss. 9, pp. 1139–1154.
18. Rezaee M., Fathi R. Improving the working performance of automatic ball balancer by modifying its mechanism. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, vol. 358, pp. 375–391. Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X15006604> (accessed 29 August 2015).
19. Filimonikhin G.B., Goncharov V.V. Metodika skladannya diferentsialnikh rivnyan'y rukhu rotornikh sistem z avtobalansirami i ii zastosuvannya do systemi rotor – masivniy korpus – avtobalansir [Method of differential equations of motion of rotor systems with auto-balance and its applications to the rotor system – a massive building – auto-balance]. *Zbirnik naukovikh prats KNTU «Tekhnika v s/h vyrobnytstvi, haluseve mashynobudubannya, avtomatyzatsiya»*, Kirovograd, 2009, no. 22, pp. 357–363.
20. Filimonikhin G.B., Goncharov V.V. Uravnovesivanie avtobalansirov rotora v uprugovyyazko zakreplennom korpusе s nepodvizhnoy tochkoй [Balancing auto balancer rotor in visco-elastic body fixed to a fixed point]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 324, no. 2, pp. 71–77.
21. Filimonikhin G.B., Goncharov V.V. Uravnovesivanie avtobalansirov rotora v uprugovyyazko zakreplennom korpusе, sovershayushchem prostranstvennoe dvizhenie [Balancing auto balancer rotor in viscoelastic body fixed, making spatial motion]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 325, no. 2, pp. 41–49.
22. Gorbenco A.N. Ob uravneniyakh dvizheniya rotora s avtobalansirov v forme uravneniy Lagranzha s mnozhitelyami [The equations of motion of the rotor with auto-balancer in the form of Lagrange equations with multipliers]. *Sbornik nauchnykh trudov KGMTU «Mekhanizatsiya proizvodstvennykh protsessov rybnogo khozyaystva, promyshlennykh i agrarnykh predpriyatiy»* [Proc. of KGMTU. Processes mechanization in fishing industry, production enterprises and agribusiness]. Kerch, KGMTU Press, 2009, iss. 10, pp. 39–46.
23. Gorbenco A.N. Obshchaya struktura uravneniy dvizheniya rotornykh mashin s avtobalansirov passivnoy tipa [The overall structure of the equations of motion of rotating machines with passive type auto-balancer]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya. Dvigateli i energoustanovki aerokosmicheskikh letatelnykh apparatov*, 2011, no. 8 (85), pp. 71–76.

Received: 28 October 2015.