Инж.-мех. Г. В. Трапезников.

Законы остаточных деформаций.

1. Сжатие.

(К тексту 4 стр. чертежей).

Производя работу с ударной пробой на сжатие, и обрабатывая результаты опытов, я, при выводе аналитической зависимости между отдельными элементами входящими в состав явления удара, был принужден остановиться на одной из const., появившейся в окончательной формуле связи. Самый характер этой постоянной указывал на то, что она является характеристикой металла. Это побудило меня произвести небольшую серию опытов на пластическое сжатие, тех же металлов, при статической нагрузке, дабы выяснить значение указанной постоянной. Результаты получились на столько удовлетворительные, что оказалось возможным найти не только значение этой const., но, кроме того, дать аналитическую связь между усилиями с одной стороны и и деформациями, вызванными ими—с другой. Последнее вызвало необходимость расширение работы, чтобы на возможно большем числе отдельных металлов проверить полученные зависимости. Эта работа, произведенная мною в механической лаборатории Томского Технологического Института, летом 1922 г., и составляет предмет настоящей статьи, которая является только, весьма кратким, отчетом о работе.

Полученные результаты опытов на пластическое сжатие заставили меня обратиться к литературе по этому вопросу, в надежде получить подтверждение в опытах которые могли быть произведены другими экспериментаторами. К сожалению, ни в отдельных трудах, ни в журнальной литературе не было найдено ничего, что бы могло осветить данный вопрос. В работах по сопротивлению материалов и в солидных курсах говорится, мимоходом, о зависимости между усилиями и деформациями, за пределом упругости. Большинство авторов говорят, что аналитическая зависимость при растяжении и сжатии, за пределом упругости, имеет вероятно, очень сложный характер, но кривую пластических деформаций можно, довольно точно, выразить в виде:

$$\lambda = A + BP + CP^2 + DP^3 + \ldots\ldots$$

где λ — абсолютная деформация, и P — усилие, ей соответствующее. Иначе говоря, многостепенной параболой, причем коэффициенты: A, B, C, D, etc, должны быть подобраны для каждого образца отдельно.

Некоторые авторы, для вычисления работы остаточных деформаций при растяжении какого-либо образца, предлагают замену кривой остаточных деформаций участком простой квадратичной параболы. Эта замена встречается у Tetmajer'a, Jonson'a, Morley'я, Madamet, Тимошенко и др.

Согласно чертежа 1, мы видим, что предполагается равновеликость площадей: диаграммы полученной на испытательной машине, с одной стороны и, с другой: суммы площадей—параболического сегмента, с высотой $CH - HH^1$ и основанием — $AH^1 = OH$ + прямоугольника OAH^1H. Таким образом, работа затрачиваемая на остаточную деформацию образца, при пренебрежении работой упругой деформации, будет пропорциональна площади:

$$S = OH.OA + \frac{2}{3} OH(CH - HH^1).$$

Называя усилие при пределе упругости—P_0, усилие разрывающее образец—P_1, наибольшее абсолютное удлинение—λ_1 будем иметь выражение для работы остаточных деформаций:

$$E = P_0 \lambda_1 + \frac{2}{3} \lambda_0 (P_1 - P_0) = \frac{\lambda_1}{3} (2 P_1 - P_0).$$

Что же касается работы остаточных деформаций при сжатии, то, даже подобной замены, я нигде не встретил. Правда у Unwin'а и Morley'я (Strength of Materials) имеется диаграмма пластического сжатия для некоторых металлов. Последняя приведена на чертеже 2 и представляет из себя точную выкопировку из труда Unwin'а. Здесь имеется указание на тенденцию кривых пластического сжатия приблизиться к некоторым гиперболам. Но как видно из довольно точной копии такой диаграммы эта тенденция весьма и весьма проблемматична. В указанном труде не дается никаких сведений или намеков на константы таких гипербол.

При изучении остаточных деформаций сжатия экспериментатор должен обратит свое внимание на три основных вопроса:

1) влияние изменения температуры;
2) влияние трения на торцевых плоскостях образцов;
3) влияние времени опыта (промежутка).

1. Влияние изменения температуры, при тех малых колебаниях ее, которые имели место в летние месяцы в механической лаборатории (14°—16°), непосредственно не освещаемой солнцем в полуденное время, конечно ничтожно. Известно, что для всех, химически-чистых металлов, Модуль Юнга, предел упругости и временное сопротивление падают с повышением температуры и растут с понижением ее. (Meyer. Phil. Mag. 1896, v 41, v 32 и Dewar. Proc. of. the R. J. of. 9,13 v 14) Но эти изменения, при указанных пределах колебания температуры во время опытов, конечно лежат внутри пределов ошибок наблюдений. Что же касается нагревания образца от всестороннего сжатия, которое имеет место при долевом сжатии и от трения отдельных частиц металла друг о друга при расплющивании образца, то нужно заметить, что хотя здесь изменение температуры самого образца и будет заметным, но принимать его в расчет так же нельзя; небольшие сравнительно образцы, которые берутся для опытов на пластическое сжатие весьма быстро, почти мгновенно, выравнивают свою температуру, с одной стороны—ввиду большого отношения поверхности к объему, а с другой—ввиду чрезвычайно тесному соприкосновению с опорными, очень массивными, плитками и солидным столом испытательной машины.

2. Влияние опорных поверхностей является самым значительным из указанных выше факторов, влияющих на ход пластических деформаций. Силы трения, возникающие на торцах образца, прижимающихся к стальным, хотя и весьма тщательно шлифованным плиткам, в значительной мере искажают ход пластических деформаций сжатия. При наличии поверхностных сил трения на торцах, деформация сжатия уменьшается тем более, чем менее будет отношение высоты образца к его диаметру. Для учета этого обстоятельства необходимо было поставить опыты с образцами, имевшими различные отношения высот к диаметрам. Таким образом, если сила трения и не может быть определена, то возможно найти то отношение высоты образца к диаметру; при котором этой силой возможно принебречь или выявить, путем экстраполяции, ход деформации в его идеальном случае, т. е. при отсутствии сил трения на торцах образца.

3. Влияние времени на возрастание остаточных деформаций является весьма серезным вопросом, который нельзя обойти без рассмотрения при экспериментировании за пределом упругости. Функциональный состав зависимости роста остаточных деформаций от времени чрезвычайно сложен и,

кроме того, нельзя сказать, что здесь установлена надежная аналитическая связь. Профессор H. Bouasse, много лет поработавший над изучением пластических деформаций и желавший связать, в общей функции от времени, напряжение и деформацию, пришел к неутешительным результатам. Он говорит: «Когда начинают изучать некоторую группу явлений, велик соблазн найти общую теорию, общее объяснение. Лишь мало по малу замечаешь тщетность таких усилий и решаешься, на более или менее долгое время, разбить явление на подгруппы и давать им частичное объяснение». Поэтому он делит все металлы на две категории, которые, однако, являются лишь типами, допускающими промежуточных представителей, а именно: металлы с твердым трением (métaux àfrottement solide) и металлы вязкие (métaux visqueux). Безнадежность которая звучит в словах Буасса, понятна: явление остаточной деформации слишком сложно для изучения во всей полноте одновременно. Необходимо поставить сначала опыты таким образом, чтобы влияние времени, в смысле сравнения остаточных деформаций для различных металлов, было, по возможности ничтожно. Как известно, деформация отстает по времени от усилия, которое ее вызывает и закон такого отставания или запаздывания чрезвычайно трудно проследить, так как это запаздывание, равно как и сама деформация—функции скорости нарастания усилия во времени. Некоторой аналогией изменения во времени остаточной деформации и ее, так сказать, «сдвига» во времени по отношению к силе, может служить кривая возрастания и падения силы тока в зависимости от возрастания и падения потенциала. Указанная аналогия взята, равно как и кривая, из статьи профессора Б. П. Вейнберга: «Успехи физики твердого тела».

На чертеже 3 кривая «v» изображает изменение потенциала во времени кривая «i»—изменение силы тока.

Постановка опытов.

Ввиду того, что задача, в полном ее объеме, являлась слишком сложной и обширной при тех средствах и материалах, которые имелись в то время в распоряжении лаборатории, необходимо было исключить влияние времени на рост остаточных деформаций. Для этого была произведена отдельная серия опытов на сжатие. Было испытано девять различных металлов: мягкая, не закаливающаяся сталь, мягкое железо, бронза, латунь, красная медь, алюминий, цинк, олово и свинец. Образцы, приготовленные из этих металлов, имели все одинаковый размер и представляли из себя цилиндрики длиною $l_0 = 15.00$ mm. и диаметром $\alpha = 10.00$ mm. Все материалы, до приготовления из них образцов, подвергались нагреванию, будучу замурованы в цементное тесто, чтобы, по возможности избежать наличие остаточных напряжений, которые появились в них при прокатке или отливке в холодные формы. Все опыты, как предворительные, так и основные, были проведены на двух машинах фирмы Amsler-Laffon. Для более крепких металлов, требующих большой нагрузки, применялась машина на 50 tn, на колонках, работающая, от коловратного маслянного насоса; для металлов более слабых—2-х tn. маятниковая машина. Образцы нагружались с одинаковой и, возможно равномерной для всех образцов скоростью, до требуемого усилия, а затем нагрузка снималась таким образом:

1) образцы серии А—разгружались немедленно по достижении, заранее назначенной нагрузки;

2) Образцы серии В—разгружались после того, как нагрузка достигнув назначенной величины, была выдержана постоянной в течении 0'.10;

3) Образцы серии С—разгружались после выдержки нагрузки в течении 0'.25 и

4) Образцы серии D—разгружались после выдержки нагрузки в течении 1'.00.

На нагрузку затрачивалось около 0'.25; разгрузка производилась почти мгновенно.

В каждую серию входили образцы всех металлов, в двойном комплекте, для получения более надежных цифр

Следующим элементом, который было необходимо учесть при опытах, было отношение начальной длины образца к начальному (до опыта) диаметру:

$$\alpha_0 = \frac{l_0}{d_0}.$$

Если бы при опытах на сжатие мы не были связаны жесткой необходимостью делать образцы с сравнительно небольшим α_0 (не более 3), из за невозможности, при более относительно-длинном образце, получить сжатие без искривления образца, нам было бы возможно, проводя опыты с все большим и большим значением α_0, почти совершенно погасить вредное влияние трения на торцах. Экспериментирование с образцами, у которых $\alpha_0 > 2$ становится уже весьма затруднительным, если мы желаем получить значительную деформацию сжатия, и, зачастую, приходится повторять не раз опыт, беря новый образец, ввиду того, что предидущий, хотя и тщательно установленный на машине, искривился. Что же касается образцов, у которых $\alpha_0 > 3$, то такие образцы, без особых приспособлений, почти совершенно не могут быть сжаты, без перекоса.

Влияние трения на торцах образцов учитывалось при ведении основных опытов, для которых было изготовлено, в двойной комплекте, по шесть образцов каждого, из указанных выше, металла.

Диаметр всех образцов: $d_0 = 10.00$ mm.

Длина: № 1 — $l_0 = 5.00$ mm. $\alpha_0 = 0.50$
» № 2 — $l_0 = 10.00$ » $\alpha_0 = 1.00$
» № 3 — $l_0 = 15.00$ » $\alpha_0 = 1.50$
» № 4 — $l_0 = 20.00$ » $\alpha_0 = 2.00$
» № 5 — $l_0 = 25.00$ » $\alpha_0 = 2.50$
» № 6 — $l_0 = 30.00$ » $\alpha_0 = 3.00$

Максимальная нагрузка, применявшаяся в опытах на сжатие не превосходила 40 tn., что составляет около 75% от полной мощности (53 tn) указанного выше пресса Amsler—Laffon'a. Это именно двойной raison d'être: во-первых всякая испытательная машина, при нагрузках, достигающих предельной для нея, дает показания менее точные, а потому и менее надежные, чем при средних нагрузках, а, во-вторых, высоты (длины) образцов из наиболее крепких металлов при деформировании нагрузкою в 40 tn. настолько малы, что дальнейшее уменьшение их поведет к меньшей точности их измерения.

Основной опыт, с каждым образцом, протекал следующим образом.

Образец, опертый торцевыми плоскостями на стальные шлифованные закаленные плитки, ставился под пресс; вращая масляный насос вручную, производили нагрузку, поднимая ее до первого периода течения материала, определяя последний по остановке ртутного столбика в манометрической трубке; если же такового резко не наблюдалось, как это имело место в мягких пластических металлах, то нагрузка просто поднималась до некоторого небольшого, заранее назначенного, предела. По разгрузке машины образец вынимался, его измененная длина измерялась, с точность до 0.01 mm. и он снова становился под нагрузку, которая повышалась с каждым отдельным последовательным наблюдением на назначенную величину; измерялась следовательно только остаточная деформация образца. По цифровым данным наблюдений (средним из двух параллельных серий) строились две диаграммы—одна в декартовой системе координат, другая в логарифмической (логарифмическая номограмма); за оси абсцисс принимались соответственно нагрузке—P и lg P; за ось ординат длина образца l и lg l. Последние диаграмы, находящие теперь все большее и большее распространение, применялись как более удобные для графического анализа кривых и сравнения отдельных кривых опыта между собою.

Влияние времени.

Нижеприведенные таблицы составлены следующим образом:

1 колонка — № наблюдения.

2 колонка — нагрузка на образец в tn.

3 колонка — имеет 4 столбца, соответственно для образцов серий A, B, C, D.

Рядом с буквами, обозначающими серийность образца, указано время t в минутах, в течении которого данная нагрузка выдерживалась постоянной по величине.

Каждый столбец разбит на два подстолбца; в первом указана длина деформированного образца в mm, а во втором его относительная деформация ввиде:

$$l - i = \frac{l}{l_0}$$

где l_0 — длина обрзаца до деформации, и l — длина деформированного образца

Влияние времени. Железо. 1-й комплект.

№	P. tn.	t = 0'.00 A		t = 0'.10 B		t = 0'.25 C		t = 1'.00 D	
		l	l — i	l	l — i	l	l — i	l	l — i
0	0.00	15.00	1.000	15.00	1.000	15.00	1.000	15.00	1.000
1	2.00	14.74	0.982	14.68	0.979	14.66	0.978	14.68	0.979
2	3.00	14.58	0.972	14.52	0.968	14.60	0.973	14.60	0.973
3	4.00	14.49	0.9 6	14.46	0.965	14.52	0.968	14.40	0.960
4	5.00	13.65	0.910	13.59	0.906	13.54	0.903	13.54	0.903
5	6.00	12.07	0.804	12.00	0.800	12.02	0.801	11.97	0.798
6	7.00	10.79	0.720	10.75	0.717	11.72	0.715	11.73	0.716
7	8.00	9.91	0.6 1	9.88	0.658	9.85	0.657	9.83	0.656
8	9.00	9.22	0.615	9.18	0.612	9.17	0.611	9.16	0.610
9	10.00	8.50	0.5 7	8.45	0.564	8.40	0.560	8.41	0.561
10	12.00	7.57	0.505	7.50	0.500	7.52	0.501	7.49	0.499
11	14.00	6.72	0.448	6.70	0.447	6.66	0.444	6.64	0.443
12	16.00	6.30	0.420	6.25	0.417	6.22	0.415	6.22	0.415
13	18.00	5.82	0.388	5.80	0.387	5.79	0.386	5.75	0.383
14	20.00	5.38	0.395	5.37	0.358	5.34	0.356	5.32	0.354
15	22.00	6.01	9.344	4.97	0.331	4.95	0.330	4.91	0.327
16	24.00	4.67	9.312	4.65	0.310	4.60	0.307	4.58	0.305
17	26.00	4.45	0.297	4.43	0.295	4.40	0.293	4.40	0.293
18	28.00	4.21	0.281	4.19	0.279	4.19	0.279	4.15	0.277
19	30.00	3.97	0.265	3.92	0.261	3.90	0.260	3.90	0.260
20	32.00	3.81	0.254	3.77	0.251	3.75	0.250	3.74	0.249
21	34.00	3.70	0.247	2.63	0.242	3.64	0.243	3.62	0.241
22	36.00	3.52	0.235	3.50	0.233	3.48	0.232	3.47	0.231
23	38.00	3.38	0.225	3.35	0.223	3.34	0.223	3.30	0.220
24	40.00	3.30	0. 20	3.28	0.219	3.24	0.216	3.23	0.215

Как видно из таблиц испытаний железных образцов, время выдержки деформирующей нагрузки, в пределах 1 минуты не оказывает заметного увеличения деформации. Так обстоит дело и с другими испытанными металлами, исключая свинец, олово и цинк, для которых, особенно при небольших нагрузках, разница в деформациях, при различных периодах выдержки нагрузки является уже заметной. За отсутствием места, я не могу превести таблиц и диаграмм для этих металлов. Рассмотрение логарифмических диаграмм для всех металлов, указывает на то, что наиболлее близкими по наклону прямыми являются те, для которых время выдержки нагрузки будет равно или близко к нулю. Иначе говоря, если после достижения заданной нагрузки, мы будем сразу же разгружать образцы, то тем поставим их, в смысле сравнения хода деформааий, в одинаковые условия. Поэтому во всех дальнейших опытах, как основных, так и подсобных время выдержки делалось равным 0, поскольку это можно было выполнить технически.

Основные опыты. Красная медь. 1-й комплект.

№	P. tn.	α_0											
		0.5		1.0		1.5		2.0		2.5		3.0	
		l	l — i	l	l — i	l	l — i	l	l — i	l	l — i	l	l — i
0	0.00	5.00	1.000	10.00	6.000	15.00	1.000	20 00	1.000	25 00	1.000	30.00	1.000
1	1 00	4 88	0.976	9.73	0.973	14.55	0.970	19.3·	0.9·8	24.20	0.968	28.95	0.9 5
2	2.00	4.65	0.930	9.15	0.915	13 62	0.908	18 05	0.903	22.26	0.891	36.50	0.883
3	3.00	4 18	0.836	8.13	0.813	11.85	0.790	15.51	0.775	19 02	0.761	22.50	0.750
4	4.00	3 72	0.744	7.03	0.703	9 90	0.660	12 94	0.647	15.73	0.·26	18.55	0.618
5	5.00	3.36	0.672	6 25	0.625	8.91	0.594	11 49	0.575	13.70	0.548	15 91	0.530
6	6 00	3.11	0.622	5.84	0.584	8.04	0.537	10.34	0.516	12.22	0.489	13 90	0.463
7	7 00	2.92	0.584	5.23	0.523	7.37	0.491	9 22	0.461	11 05	0.442	12 58	0.419
8	8.00	2.74	0.548	44.78	0.478	6 69	0.446	8 61	0.432	10.12	0.405	11.61	0.387
9	10 00	2.51	0.502	4.21	0.421	5.98	0.399	7.45	0.372	8.69	0.348	10 53	0.351
10	12.00	2.28	0.456	4.00	0.400	5 41	0.361	6.74	0.337	7.82	0.313	8 87	0.296
11	14 00	2.15	0.430	3.67	0.367	5.10	0 340	6 10	0.305	7 00	0.280	7.71	0 267
12	16 00	2 04	0.408	3 46	0.346	4.56	0.304	5 55	0.277	6 38	0 255	7.26	0.242
13	18.00	1.98	0.396	3.20	0 320	4.33	0.289	5 23	0.262	5.90	0.236	6 68	0.223
14	20.00	1.85	0.370	3.03	0.303	3 96	0.264	4 90	0.246	5 47	0.219	6.24	0.208
15	22.00	1 77	0.354	2.91	0.291	3 79	0.253	4.65	0.234	5 18	0.207	5.88	0.196
16	24.00	1.73	0.346	2 75	0.275	3 59	0 239	4.46	0.223	4.92	0.197	5.46	0.182
17	26.00	1.66	0.332	2.63	0.263	3 39	0.226	4.18	0.209	4.70	0.188	5 16	0.172
18	28 00	1.60	0.320	2.54	0.254	3.28	0.219	3.97	0.199	4 45	0.178	4.92	0.164
19	30 00	1.55	0.3·0	2.45	0.245	3.16	0.211	3.82	0.191	4.20	0.168	4 74	0.158
20	32 00	1.51	0.302	2.38	0.238	3.09	0.206	3.68	0.184	4.05	0.162	4 50	0.150
21	34.00	1.49	0.298	2.31	0.231	2 98	0.199	3 52	0.176	3.87	0.155	4.29	6 .143
22	36.00	1.44	0.2·8	2.25	0.225	2.87	0.192	3 37	0.169	3.77	0.151	4.14	0.138
23	38 09	1 39	0.278	2.18	0.218	2.76	0.1·4	3 28	0.164	3.63	0.145	3 96	0.132
24	40.00	1.37	0.274	2.12	0.212	2 68	0.179	3.20	0.160	3.50	0.140	3 81	0.127

На чертеже 4 дана диаграмма деформации медных образцов в декартовой системе координат, а на черт. 5 в логарифмической. Ввиду мелкости чертежа приведены только две кривые: для $\alpha_0 = 0.5$ и $\alpha_0 = 3.0$

Из диаграмм видно, что вместе с увеличением значения:

$$\alpha_0 = \frac{l_0}{a_0}$$

кривые деформаций становятся более крутыми, т. е. более быстро подходят к линии абсцисс, которая является их общей ассимптотой. Так обстоит дело с кривыми в декартовой системе координат, что же касается их логарифмических анаморфоз, то, как уже ранее было сказано, последние представляют из себя прямые линии; наклон этих прямых к линии абсцисс тем больший чем большее будет значение α_0.

Кривые остаточных деформаций для различных металлов и различных значений α_0 для каждого отдельного металла имеют один и тот же характер, а именно: за пределом упругости начинается кривая, имеющая вогнутость по отношению к линии абсцисс, которая после некоторого, короткого участка кравой, обращается в выпуклость, по отношению к той же оси, т. е. кривая имеет некоторую точку перегиба. В логарифмической сетке анаморфированная кривая еще резче разделяется на два участка. За пределом упругости мы имеем первый, короткий участок ввиде кривой, обращенной к линии абсцисс вогнутостью, а вместого второго участка, обращенного к оси абсцисс выпуклостью, будет прямая линия. Участок кривой остаточных деформаций, которому соответствует эта прямая подавляюще велик по сравнению с первым, очень коротким участком, непосредственно следующим за пределом упругости. Поэтому мы имеем право сьитать, что остаточные деформации, следуют закону, который графически выражается вторым участком указанной кривой. Что же касается первого участка, то, при первом приближении, его можно отнести к несовершенствам взятых металлов, на что, отчасти, указывает и то обстоятельство, что у некоторых металлов, как это видно из диаграмм, этот участок сводится почти к нулю.

Если мы рассмотрим уравнение прямой, в логарифмической сетке, при координатах $\lg P$ и $\lg l$, то будом иметь следующее:

$$\lg l = -n \lg P + \lg A$$

или

$$\lg P^n l = \lg A$$

или

$$P^n l = A = \text{const.}$$

Здесь n — абсолютная величина тангенса угла наклона прямой к линии абсцисс, и $A = \text{const}$ — характеризующая металл.

Таким образом, в самом общем виде, зависимость между нагрузкой и длиной деформированного образца, носит политропический характер, причем показатель политропы является величиной переменной, зависящей, прежде всего от отношения длины образца к его диаметру, измеренных до деформации. Оставляя пока в стороне вопрос зависимости между n и α_0, займемся рассмотрением общих свойств полученной диаграммы.

Прежде всего на каждой из логарифмических диаграмма резко бросается в глаза то обстоятельство, что все прямые, при различных значениях α_0, для одного и того же металла, пересекаются в одной точке, и что эта точка лежит на прямой, параллельной оси абсцисс, и находящейся от нея на расстоянии $= \lg l_0$; иными словами говоря, если не обращать внимания на первый, короткий участок кривой деформации, дело обстоит так, как будто бы предел упругости находится именно в этой, общей для всех прямых, точке. Называя через — P_c то усилие, которое соответствует координате этой точки, мы найдем значение постоянной политропы, а именно:

$$P^n l = P_c{}^n l_0 = A = \text{const.}$$

Назовем P_c — силой при теоретическом пределе упругости на сжатие; очевидно она будет больше той силы которая соответствует действительному или видимому пределу упругости данного металла. Если-б металл был совершенным, в механическом смысле, то остаточные деформации начались бы для образца, того же поперечного размера, только с нагрузкой, равной P_c.

Назовем через k — напряжение (среднее) в металле после деформации, которой соответств. длина $=$ l; через k_c — предел упругости (теоретический) на сжатие; через i — относительную деформацию, равную $\frac{l_0 - l}{l_0}$; через f_0 и f — соответственно площади поперечного сечения образца до и после деформации. Тогда будем иметь:

$$\frac{P^n}{f^n} \frac{l}{l_0} = \frac{P_c{}^n}{f^n} = \frac{P^n}{f^n}(1 - i).$$

На основании многочисленных и обстоятельных опытов, произведенных Kircaldy, мы имеем полное право допустить, для хорошо отлитых и прокатанных металлов, постоянство объема. Последнее может быть выражено так:

$$f\,l = f_0\,l_0.$$

Представляя в предидущее уравнение f определенное из этого, имеем:

$$\frac{P^n}{f^n}(1 - i) = k^n(1 - i) = \frac{P_c{}^n}{f^n} = \frac{P_c{}^n\,l^n}{f_0{}^n\,l_0{}^n};\ \text{или}$$

$$k^n(1 - i) = k_c{}^n(1 - i)^n.$$

Откуда

$$k = k_c(1 - i)^{\frac{n-1}{n}}.$$

При определении работы остаточных деформаций мы пренебрегаем работой упругих деформаций, как величиною малой, по сравнению с первой. Вычислим работу статочных деформаций идеального металла. Необходимо заметить, как это видно и из диаграмм, что эта работа весьма немногим будет больше, в особенности при больших деформациях, работы несовершенного металла.

$$T_c = \int_{l_0}^{l} P\,dl = P_c\,l_0{}^{\frac{1}{n}} \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l^{\frac{1}{n}}} = \int \frac{n}{n-1} P_c\,l_0{}^{\frac{1}{n}}\, l^{\frac{n-1}{n}} \Bigg|_{l_0}^{l} =$$

$$= \frac{n}{n-1} P_c\,l_0 \left| \frac{l^{\frac{n-1}{n}}}{l_0{}^{\frac{n-1}{n}}} \right|_{l_0}^{l} = \frac{n}{n-1} P_c\,l_0 \frac{l^{\frac{n-1}{n}} - l_0{}^{\frac{n-1}{n}}}{l_0{}^{\frac{n-1}{n}}}$$

вообще говоря $n < 1$, поэтому, хотя $l < l_0$, работа будет положительной.

Иначе, поэтому можно написать:

$$k = \frac{k_c}{(1 - i)^{\frac{1-n}{n}}}$$

$$T_c = \frac{n}{n-1} P_c\,l_0 \frac{l_0{}^{\frac{1-n}{n}} - l^{\frac{1-n}{n}}}{l^{\frac{1}{n}}} = \frac{n}{1-n} P_c\,l_0 \frac{1 - (1 - i)^{\frac{1-n}{n}}}{(1 - i)^{\frac{1-n}{n}}}$$

Или, если выразить работу через напряжение:

$$T_c = \frac{n}{1-n} P_c\,l_0 \frac{k - k_c}{k_c}.$$

Деля и умножая правую часть на f_0 и имея:

$$v_0 = f_0\,l_0 = f\,l,$$

получим:

$$T_c = \frac{n}{1 - n} v_0 (k - k_c).$$

Т. е. работа остаточных деформаций будет прямо пропорциональна объему деформирующегося образца, что вполне совпадает с законом Barba и Kick'a.

Определение теоретического предела упругости для различных металлов.

Логарифмическая диаграмма показывает, наглядно, правильное возрастание теоретического предела упругости вместе с возрастанием значения Модуля Юнга.

Уже простое определение, из графика, значение P_c, а по нему и нахождение k_c, как

$$k_c = \frac{P_c}{f_0}$$

дает линейную зависимость между Модулем Юнга и теоретическим пределом упругости для испытуемых металлов. Для более точного и надежного результата, я воспользовался способом наименьших квадратов для определения значений P_c, по которым были вычислены соответствующие k_c. Необходимым оставалось определение Модуля Юнга для тех же металлов. Последнее определение было сделано гораздо позже основных опытов. Ниже приводится таблица наблюдений по определению Модулей из растяжения. Образцы, взятые для этого имели все одинаковый размер:

$$d = 10.00 \text{ mm.}; \ l = 110 \text{ mm.}$$

Упругая деформация измерялась зеркальным прибором Мартенса, с длиною щечек (расчетной): $l_0 = 50.00$ mm расстояние, во всех случаях, от зеркала до шкалы, было: $L = 5000$ mm., диаганаль призмы: $\delta = 4$ mm.

Нижеприведенная таблица представляет из себя общую сводку по определению Модулей Юнга для различных металлов и вычисленных, способом наименьших квадратов значений соответствующих P_c и k_c.

Диаграмма (черт 6) показывает, что между k_c и E имеется прямая линейная зависимость, наибольшее расхождение с прямой дают точки, найденные для бронзы и латуни, но так как последние суть сплавы, а не чистые металлы, то, даже такое, выпадение точек из прямой, не является нарушением общей закономерности связи E и k_c.

№	Металл.	P_c kg.	k_c kg/mm.^{2}	E kg. mm.^{2}	$\beta_c = \frac{k_c}{E}$
1	Сталь	4680	59.7	22200	0.00269
2	Железо	4260	54.3	20500	0.00265
3	Бронза	2935	37.4	13300	0.00281
4	Латунь	2545	32.4	11700	0.00277
5	Красная медь	2025	25.8	9710	0.00266
6	Алюминий	1459	18.5	6860	0.00270
7	Цинк	1790	22.8	8680	0.00263
8	Олово	835	10.6	3970	0.00267
9	Свинец	105	1.34	500	0.00268

Коэффициент пропорцианальности в зависимости:

$$k_c = \beta_c E$$

является постоянным для всех пластических металлов и в среднем, если исключить его значение для бронзы и латуни, будет равен:

$$\beta_c = 0.00267 \cong \frac{L}{375}.$$

Таким образом, как и при деформации упругой, Модуль Юнга и здесь, при деформации остаточной будет равноправной характеристикой материала. Каков же физический смысл коэффициента β_c? Так как он дает связь между модулем упругости 1-го рода и напряжением металла при теоретическом пределе упругости, то, ясно, что мы можем найти его смысл, если будем рассматривать деформацию перед теоретическим пределом упругости, в близи последнего. Закон Гука пишется так:

$$k = E.\,i$$

где i — относительная деформация.

Здесь найдена зависимость:

$$k_c = E.\,\beta_c.$$

Значит β_c — будет той упругой относительной деформацией при сжатии идеального металла, при которой начнуться уже остаточные деформации; иначе говоря пластический металл нельзя сжать по длине более чем на 0.267% без того, чтобы не начались остаточные деформации. Все это относится, конечно, к металлу, который находится в своем «естественном» состоянии, т. е., не обладающему остаточными напряжениями.

Показатель политропы и относительные размеры образца.

Как уже было видно из предыдущего, показатель политропы увеличивается вместе с увеличением отношения длины образца к его диаметру. Это увеличение у различных металлов идет не одинаково быстро. У большинства металлов до значения:

$$\alpha_0 = 2.0$$

увеличение n идет очень быстро, а затем затухая, в пределах опыта, остается величиной близкой к

$$n = \frac{2}{3}.$$

Проведя свои основные опыты, я, при докладах указывал на значение показателя $= \frac{2}{3}$ как на то, к которому вероятно этот показатель стремится при безконечно большом α_0. Дальнейшие опыты по определению зависимости между α_0 и n показали, что при еще большем увеличении α_0, показатель, хотя очень медленно, но возрастает.

Для того, чтобы можно было сжать образцы, имеющие $\alpha_0 > 3$, мною был сделан простой приборчик, указанный на (черт. 7). Он представляет из себя точеный чугунный цилиндр, с железным днищем, на которое, в паз, ставится закаленная плитка.

В продольное отверстие, сверху, входит стальной закаленный стержень. Нижний торец стержня и верхний торец плитки были мною притерты друг к другу, на станке, с карборундумом № 00000. Таким образом, теперь при плотно ходящем, в отверстии цилиндра, стержне и пришлифованных друг к другу поверхностях, можно было ручаться, что хорошо приготовленный образец, будучи поставлен на плитку и нажат сверху стержнем, не будет так легко перекашиваться, как это имеет место при непосредственной установке его на стол испытательной машины. Опыт оправдал надежды, но, даже при приборе, тщательно выполненном образцы с $\alpha_0 > 4.2$ сжать без искривления не удавалось.

При обработке результатов опытов оказалось, что при крайнем высшем, значении $\alpha_0 = 4.2$ уже возможно уловить некоторую графо-аналитическую связь между n и α_0.

Все испытуемые образцы имели начальный (до деформации) диаметр: $\alpha_0 = 6.00$ mm. Переход к меньшим образцам вызван необходимостью помещения образца в приборе, при максимальной его деформации.

Длины образцов и, соответствующие им, α_0 были:

№ 1 $l_0 = 1.20$ mm. $\alpha_0 = 0.2$	№ 8 $l_0 = 9.60$ mm. $\alpha_0 = 1.6$	№ 15 $l_0 = 18.00$ mm. $\alpha_0 = 3.0$
№ 2 » $= 2.40$ » » $= 0.4$	№ 9 » $= 10.80$ » » $= 1.8$	№ 16 » $= 19.20$ » » $= 3.2$
№ 3 » $= 3.60$ » » $= 0.6$	№ 10 » $= 12.00$ » » $= 2.0$	№ 17 » $= 20.40$ » » $= 3.4$
№ 4 » $= 4.80$ » » $= 0.8$	№ 11 » $= 13.20$ » » $= 2.2$	№ 18 » $= 21.60$ » » $= 3.6$
№ 5 » $= 6.00$ » » $= 1.0$	№ 12 » $= 14.40$ » » $= 2.4$	№ 19 » $= 22.80$ » » $= 3.8$
№ 6 » $= 7.20$ » » $= 1.2$	№ 13 » $= 15.60$ » » $= 2.6$	№ 20 » $= 24.00$ » » $= 2.0$
№ 7 » $= 8.40$ » » $= 1.4$	№ 14 » $= 16.80$ » » $= 2.8$	№ 01 » $= 25.20$ » » $= 2.2$

Ниже приводятся графики только для железа, красной меди и алюминия.

Алюминий.

α_0	n	α_0	n
0.0	0.000	2.2	0.666
0.2	0.310	2.4	0.700
0.4	0.392	2.6	0.708
0.6	0.451	2.8	0.715
0.8	0.497	3.0	0.717
1.0	0.539	3.2	0.730
1.2	0.570	3.4	0.734
1.4	0.596	3.6	0.748
1.6	0.622	3.8	0.762
1.8	0.638	4.0	0.767
2.0	0.669	4.2	0.775

Диаграммы показывают, что прямой зависимости между E и n нет; так, кривая для алюминия, имеющего Модуль Юнга меньший нежели медь, лежит между кривой для железа и меди. Это обстоятельство можно объяснить различными коэффициентами трения для этих металлов, от наличия которого в большей или меньшей степени и зависит наклон логарифмических прямых деформации, а значит и величина показателя n, при различных α_0. На величину показателя n влияет еще одно обстоятельство—это величина интервала нагрузки, чем интервал, через который мы увеличиваем нагрузку будет меньше, тем больше будет величина показателя n. Это весьма понятно; чем меньший будет интервал нагрузки тем менее будет сказываться, искажающее основную деформацию сжатия, влияние силы трения на торцах образца, а значит на ту же величину нагрузки, мы будом иметь большую деформацию. Не смотря на все эти обстоятельства, мешающие, или даже не дающие возможности, получить надежной и постоянной зависимости:

$$n = f(\alpha_0)$$

где бы были вполне определенными все параметрические коэффициенты кривой, при рассмотрении ее, ясно видно, что кривая ассимптомическая.

Для проверки этого я применил графический метод, позволяющий приближенно найти ее ассимптому.

На диаграмме, через начало координат и каждую точку кривой проведены лучи до прямой:

$$n = 1.000$$

от точки пересечения луча с этой прямой отложен вниз, по лучу отрезок прямой, равный растению этой точки от центра лучей. Таким образом получены все точки, отмеченные маленькими кружками.

Совокупность их дает, примерно, прямую, проходящую через точку, с координатами:

$$n = 1.000\,;\ \alpha_0 = 0.0$$

Это и будет параметрическая прямая нашей кривой. Здесь на диаграмме показан окончательный результат графического подбора ассимптомы, которая имеет уравнение:

$$n = 1.000.$$

При нахождении же ее в действительности приходилось брать несколько прямых, параллельных полученной ассимптоме; во всех тех случаях точки полученные для параметрической прямой, на прямую не укладываются, а дают некоторые, зачастую сложны открытые и замкнутые кривые.

Для всех металлов, не смотря на различный наклон параметрических прямых, найдена общая ассимптома:

$$n = 1.000,$$

т. е. в пределе, когда образец будет иметь относительные геометрические размеры:

$$\alpha_0 = \frac{l_0}{d_0} = \infty.$$

Политропа сжатия за пределом упругости превращается в гиперболу, отнесенную к осям: P и l, как к ассимптомам. Конечно при $\alpha_0 = \infty$ мы можем считать, что трение на торцах никакого влияния на ход остаточной деформации оказывать не будет.

Вторая, приведенная здесь диаграмма построена при тех же нанесенных опытных точках уже по параметрическим прямым, наклон которых найден способом наименьших квадратов при применении формулы для этой кривой: (см. чертеж)

$$y(ax + by)a^2x$$

здесь

$$\left.\begin{array}{l} y = l;\ a = l_0;\ \text{в осях} \\ x = P;\ b = \text{параметр прямой} \end{array}\right\}\ \text{в осях}\ P, l;$$

$$\left.\begin{array}{l} y = (1 - i);\ a = 1.000;\ \text{в осях} \\ x = P;\ b = \text{параметр прямой} \end{array}\right\}\ \text{в осях}\ P, (1 - i).$$

Полное согласование кривых: $n = f(a_0)$ в смысле ассимптотического их приближения к общей прямой однако меня не удовлетворило. Желательным казалось сделать такой дополнительный опыт, который подтвердил бы стремление показателя политропы, при отсутствии трения на торцах образца, приблизиться к единице.

Было вначале сделано несколько опытов с образцами, у которых торцы были сказаны перед каждым приложением нагрузки смазывающим веществом.

Мною последовательно были перепробованы различной вязкости смазки: параффин, тавот, вазелин, касторовое масло, олеонафт и керосин. При применении смазки, показатель политропы повышался, по сравнению с таковым же для несмазанных образцов, и повышался тем более, чем гуще была смазка, (для парафина — max). Это было естественно: чем гуще и вязче смазка, тем менее выдавливается она из под образца. Применив, наконец, свинец ввиде смазки торцов для образцов из твердых металлов, я получил еще большее увеличение показателя кривой, но все таки он небыл равным единицы. Тогда я решил воспользоваться для смазки самим же испытуемым металлом. Из алюминия, красной меди и железа были выполнены образцы, указанные, в натуральную величину на чертеже 9.

Сам испытуемый образец представлял из себя цилиндрик с $d = 10.00$ mm. от которого шли конические головки, с диаметром конуса при основании $D = 30.00$ mm. Из каждого металла было изготовлено по 3 образца, с размером цилиндрической части:

$$l_0 = 10.00\ \text{mm.};\ l_0 = 20.00\ \text{mm. и}\ l_0 = 30.00\ \text{mm.}$$

Сделаны такие конические придатки были в том расчете, что, постепенно, за переходом через предел упругости, материала цилиндрической части, будут переходить, за предел упругости, части конусов ближайшие к цилиндрику и таким образом, радиональной поперечной силы не будет или, если она и будет, то незначительна по величине. Конусы сделаны относительно тупыми. Это крайне необходимо, как показала моя работа со смягчием металлов, чтобы напряжения в конусе, в той части, где он соприкасается с цилиндриком, не сильно отличалась от напряжений в самом цилиндрике. Измерение длины производилось при помощи катетометра Böhme, с точностью до 0.01 mm. Расчетной длиной считалось расстояние между конусами.

Металл.	a_0	n	n среднее для кажд. металла	n среднее из средних.
Железо	1.0	0.983		
	2.0	1.030	1.002	
	3.0	0.994		
Красная медь	1.0	0.997		
	2.0	0.989	1.002	1.004
	3.0	1.021		
Алюминий	1.0	0.995		
	2.0	1.004	1.007	
	3.0	1.012		

Как видно из последней таблицы, представляющей сводку всех опытов с цилиндриками, имеющими конические придатки, показательно политропы становится равным единицы, если обеспечено отсутствие силы трении на торцах. Итак, при отсутствии сил трения, зависимость между силой и остаточной деформацией сжатия, ей производимой, гиперболическая. Пишем:

$$P l = P_c l_6 \text{ или } P(1-i) = P_c.$$

Отсюда вытекает условие:

$$k = k_c,$$

т. е. постоянство напряжения при любой величине остаточной деформации.

Величина работы деформации будет:

$$T_c = P_c l_0 \lg = \frac{l_0}{l} = v_0 k_c \lg \frac{1}{1-i}.$$

Объемная удельная работа будет:

$$T'_c \gamma = (x) = \frac{T_c}{v_0} = k_c \lg \frac{1}{1-i}.$$

При деформации упругой объемная удельная работа зависит от напряжения, которое мы вызвали в материале:

$$T = \frac{k^2}{2E};$$

Здесь же при постоянстве напряжения, работа зависит от относительной деформации; вместе с возрастанием величины i — увеличивается и затраченная работа.

Такие пластические металлы, как алюминий, свинец, олово, красная медь, железо — дают возможность производить деформацию их в самых широких пределах. Даже возможно утверждать, что практически, разрушить их от сжатия нельзя. С другой стороны выражение для работы, по политропе или по гиперболе, все равно, дает для значений i, близких к единице, величину безконечно—большую. Очевидно металл, даже и весьма пластический возможно деформировать только до некоторого предела. Таким пределом будет очевидно тот момент, когда, хоть в одной, какой-либо малой части образца, будет находиться, на единицу объема, количество работы, которое дает переход для твердого тела в другую фазу, иными словами говоря эквивалентное полной теплоте плавания этого металла (опять таки из расчета на 1 единицу объема). Желая определить деформацию металла при которой получается работа, равная полной теплоте плавления его, я обратился к литературе по этому вопросу, но, к сожалению нашел только у Persona' (Ann. Chim. et Phis), предложенную им для металлов формулу:

$$\rho = A g \left(1 + \frac{2}{\sqrt{s}}\right).$$

Где A = const, q — коэффициент упругости и s — плотность металла, ρ — скрытая теплота плавления его.

Воспользовавшись капитальным трудом Joseph W. Richards «Metallurgische Berechnung» 1913 г., я путем подстановки соответствующих теплот, коэффициентов упругости и плотностей, попытался проверить ее, но пришел к неутешительным ре ультатам: формула не оправдывалась. На такое же несовпадение данных опыта при подстановке их в другую формулу Person'a, предложенную им для органических соединений, указывает О. Д. Хвольсон в своем курсе физики.

Ввиду обстоятельств такого рода я решил обработать те данные; которые приводятся у Richards'a. Я взял приведенные в его труде полные теплоты плавления металлов, отнесенные к 1 kg. Теплоты плавления были вычислены по таблицам, считая полную теплоту плавления металла от абсолютного нуля. Конечно, ввиду невозможности иметь точного закона изменения теплоемкостей при низких температурах, пришлось перечислять теплоты по тем зависимостям которые даны для температур выше нуля. Поэтому претендовать на точное вычисление теплот не приходится. С другой стороны теплота потребная для нагревания металлов, при сравнительно небольших теплоемкостях последних, относительно высоких температурах плавления и больших величинах скрытых теплот плавления, невелика. Для модулей Юнга мною были взяты средние округленные цифры, взятые у Хвольсона (Курс физики), Берлова (Курс деталей машин) и Morley'я (Strength of Materials).

Ниже приводятся таблица и диаграмма, дающие связь между Модулем Юнга, плотностью металла и его полной теплотой плавления, вычисленной от абсолютного нуля.

Таблица имеет колонки:
E — Модуль Юнга в kg./mm.^{2} 10^3;
δ — плотность металла в kg./dm.^{3};
r — полная удельная (весовая) теплота плавления в Cal./kg.;
q — полная удельная (объемная) теплота плавления в Cal./mm.;
B — коэффициент пропорциональности для полученной прямой в Cal./kgm.
Диаграмма имеет осью абсцисс E в kg./mm.^{2};
И осью ординат q в Cal./dm.^{3}.

Металл.	E 10^3	δ	r	q	B
Свинец	1.0	11.40	22.3	254	1.62
Олово	4.0	6.97	40.2	280	0.70
Алюминий .	6 0	2.60	315	818	1.36
Серебро....	7.0	10.53	104	1094	1.56
Медь	10.0	8.92	184	1636	1.64
Платина ...	15.0	21.50	111	2390	1.59
Железо	20.0	7.86	381	2990	1.49
Никкель ...	22.0	8.92	382	3300	1.53

Как видно из диаграммы, мы получаем линейную зависимость между q и E. Большое отступление от общей закономерности дает олово. Эта прямая будет выражаться так:

$$q = B E$$

Коэффициент пропорциональности B — вычислен для каждого металла и колебание его сравнительно не велики, если принять во внимание, что он получен не из непосредственного опыта, а вычислен по средним значениям теплот и Модулей Юнга.

Так как удельная объемная теплота плавления металла будет:

$$q = r \delta$$

то мы можем написать зависимость в другом виде:

$$r = \frac{q}{\delta} = B\,\frac{E}{\delta}\,.$$

Механическая работа эквивалентная полной теплоте плавления будет:

$$T_q = \frac{q}{A}\,.$$

где A — термический эквивалент механической энергии, или:

$$T_q = \frac{BE}{A}\,.$$

Коэффициент пропорциональности B имеет также размерность термического эквивалента механической энергии.

Если выключить значение B для олова, как резко отличающееся от значений B для всех остальных приведенных металлов, то получается для него среднее значение:

$$B = 1{.}_{55} \times 10^4 = 0{.}_{000115}\ \text{Cal./kgm.}$$

Взяв для A

$$A = \frac{1}{427} = 0{.}_{00234}\ \text{Cal./kgr.}$$

Имеем:

$$T_q = 0{.}_{0669}\,E = \frac{E}{15{.}_{07}} \backsim \frac{E}{15}\,\frac{\text{kgm.}}{\text{m}^3}\,.$$

Таким образом, мы видим, поскольку это дают нам такие приближенные подсчеты, Модуль Юнга является мерилом полной теплоты плавления, считая последнюю от абсолютного нуля. Модуль Юнга сам изменяется с температурой и поэтому коэффициент B — есть также функция температуры, если мы будем считать E = const при обычных условиях (температурных) его определения (15° — 20° C).

Таким образом, для получения жидкого металла необходимо чтобы он поглотил работу:

$$T_q = \frac{E}{15}\,\frac{\text{kgm.}}{\text{m}^3}\,.$$

Попробуем сравнить металл расплавляемый с металлом деформируемым пластически.

Для этого необходимо приравнять удельную объемную работу при деформации его — работе плавления (объемной удельной), за вычетом из последней работы эквивалентной теплоте, которой обладает металл при условиях опыта. Последняя работа, назовем ее T_0, составляет для всех металлов, приблизительно 25% от полной работы плавления, исчисленной от абсолютного нуля. Итак:

$$T_c = T_q - T_0 \backsim \frac{3}{4}\,T_q\,.$$

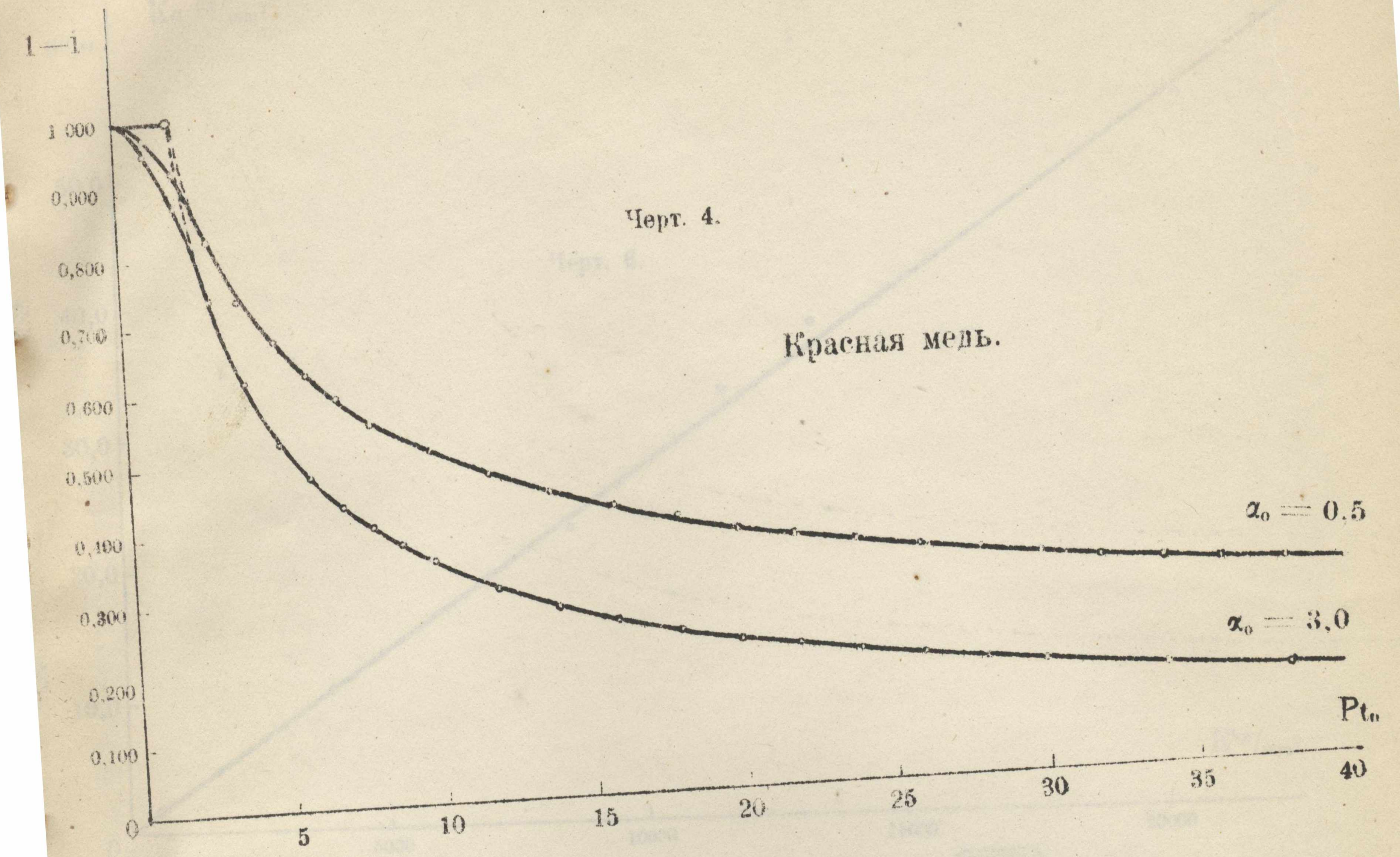
Возьмем работу T_c для образца, имеющего:

$$a_0 = \infty$$

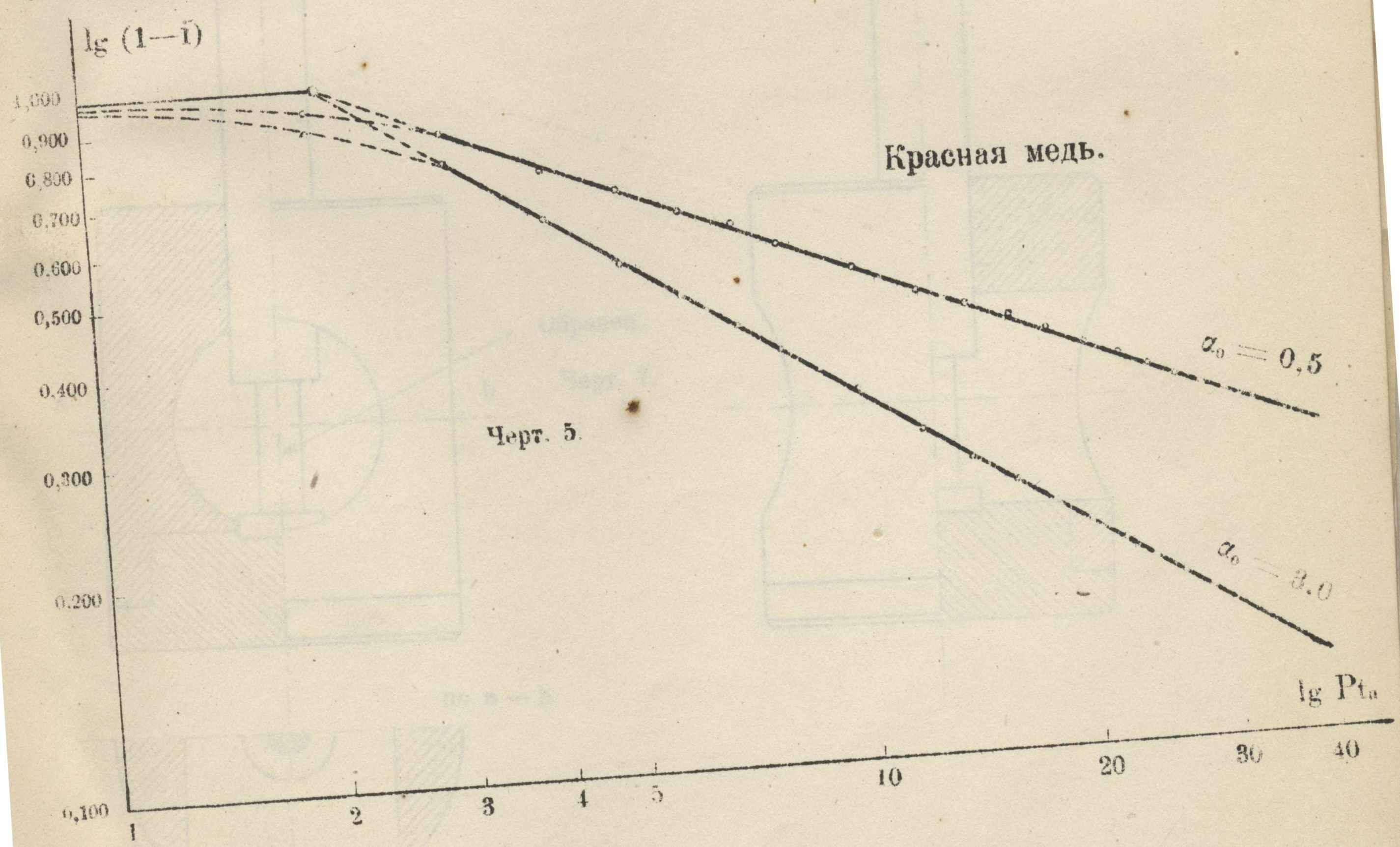
Который требует при деформации минимальной удельной работы,

$$T_c = k_c \lg \frac{1}{1 - i} = \frac{3}{4}\,T_q = \frac{3\,E}{4{.}_{15}} = \frac{E}{20}\,.$$

К статье Г. В. Трапезникова: „Законы остаточных деформаций (I—сжатие)."

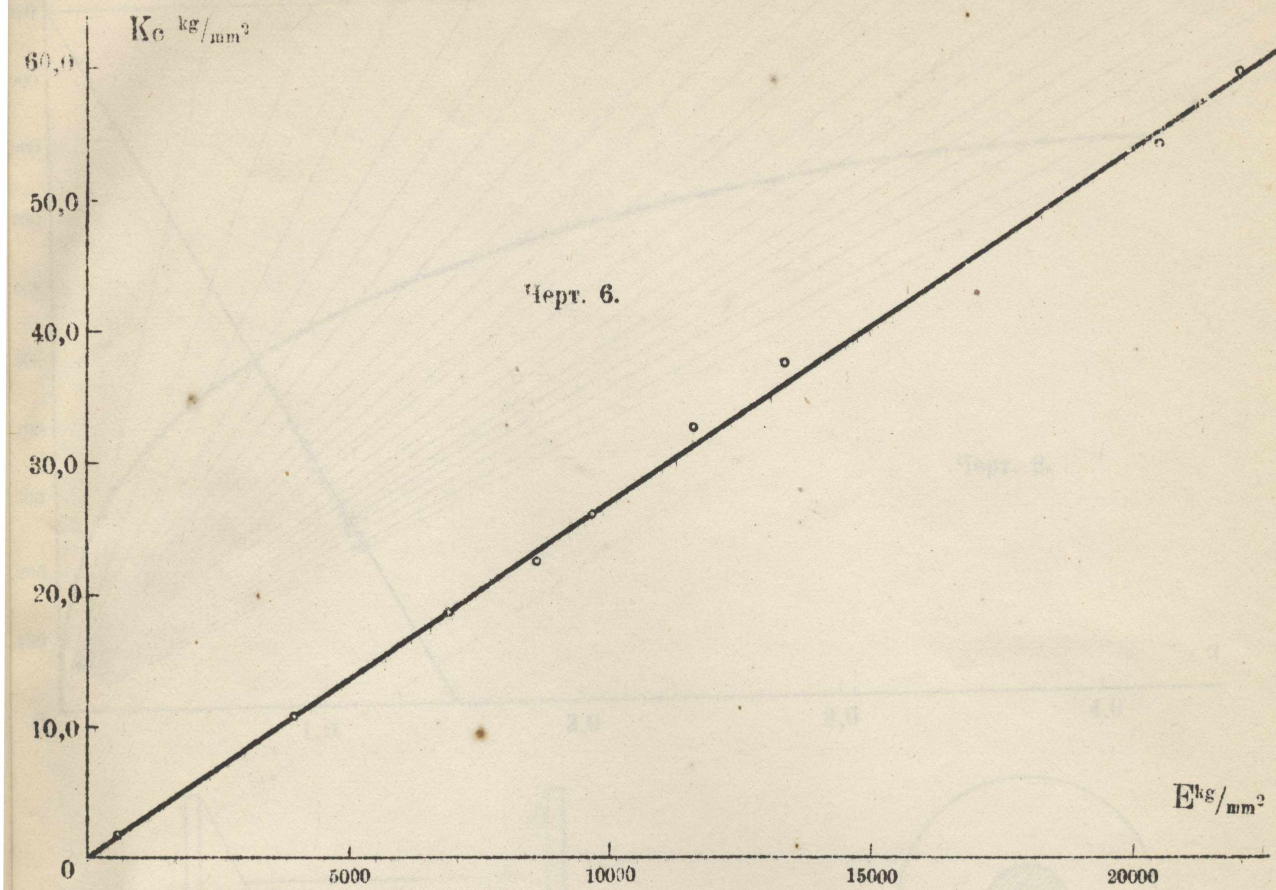


Черт. 4.

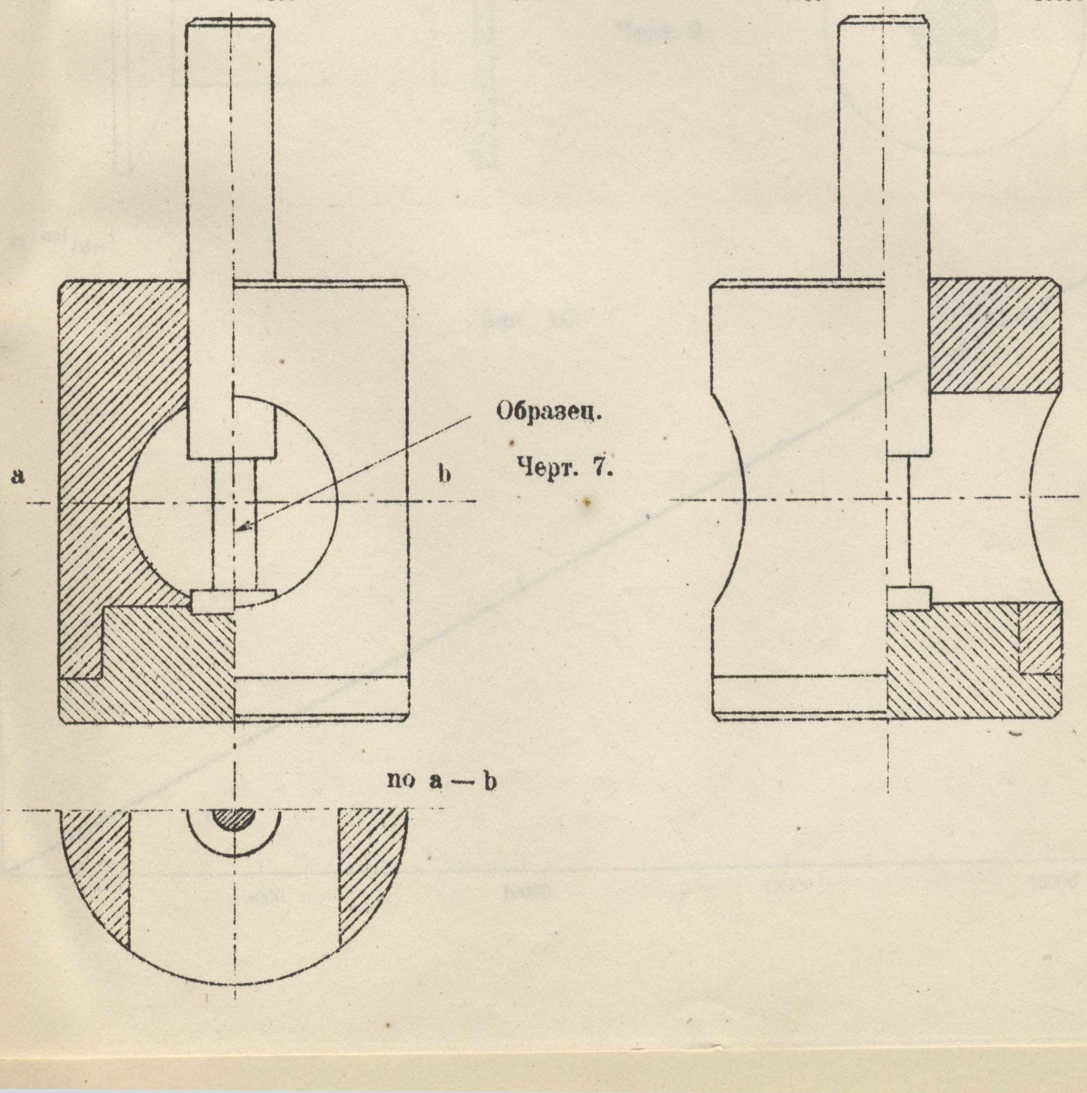


Черт. 5.

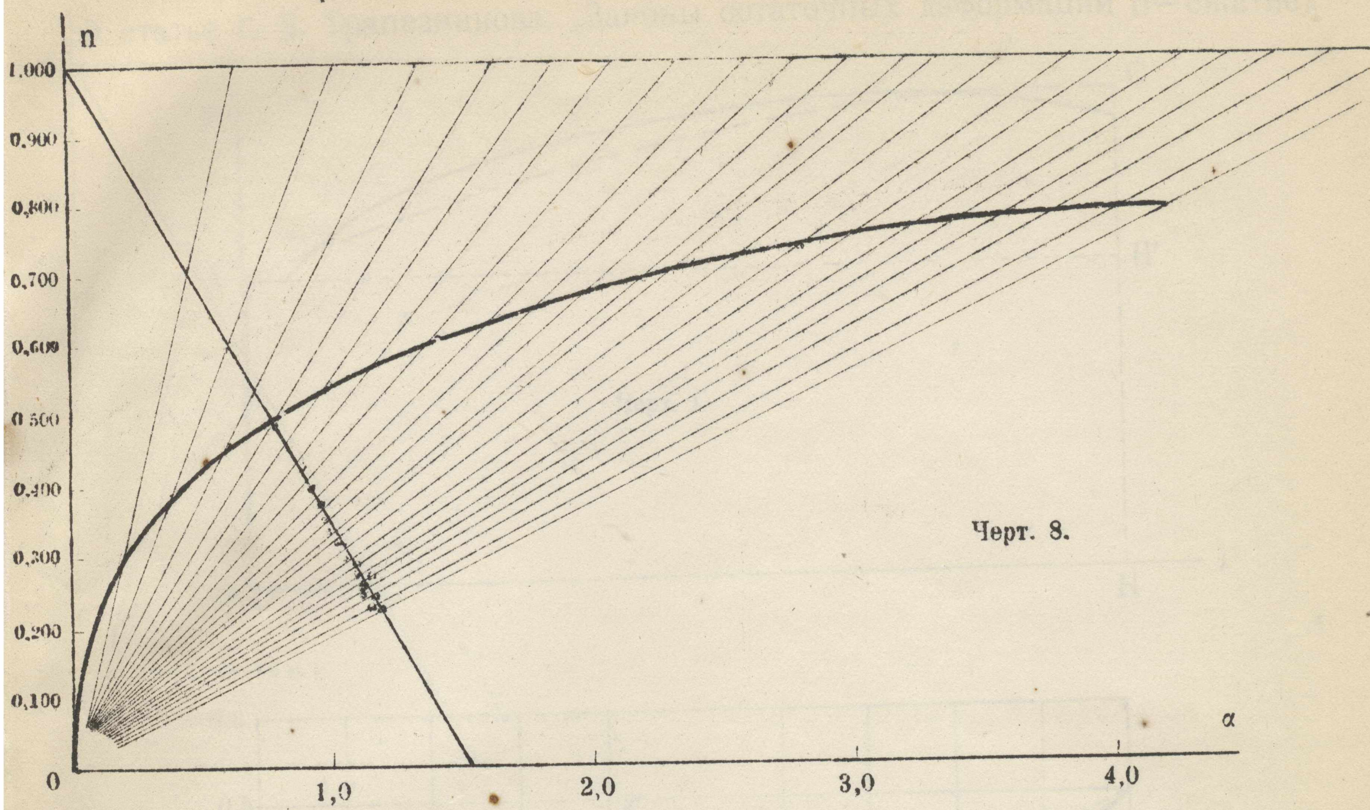
К статье Г. В. Трапезникова: „Законы остаточных деформаций (I—сжатие)."



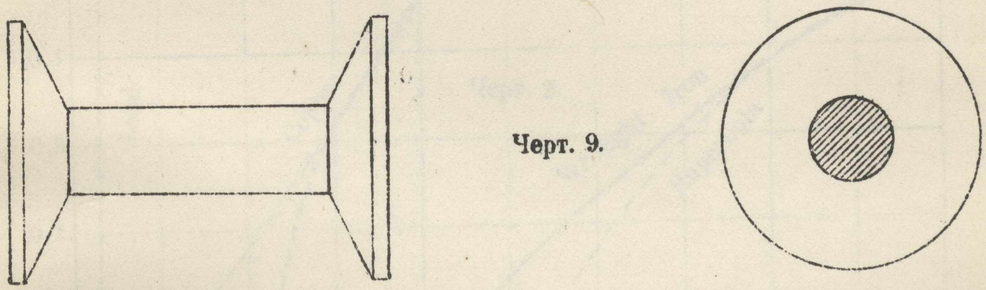
Черт. 6.



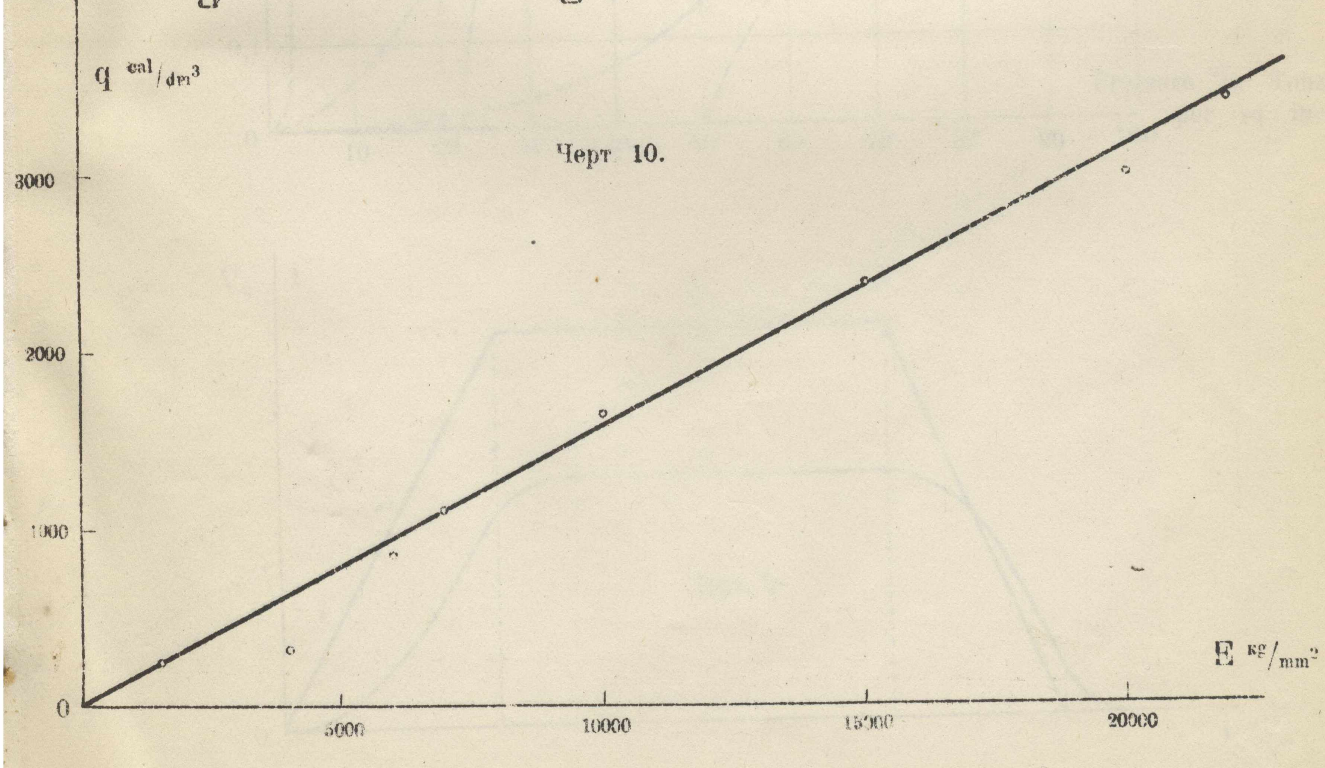
Черт. 7.



Черт. 8.

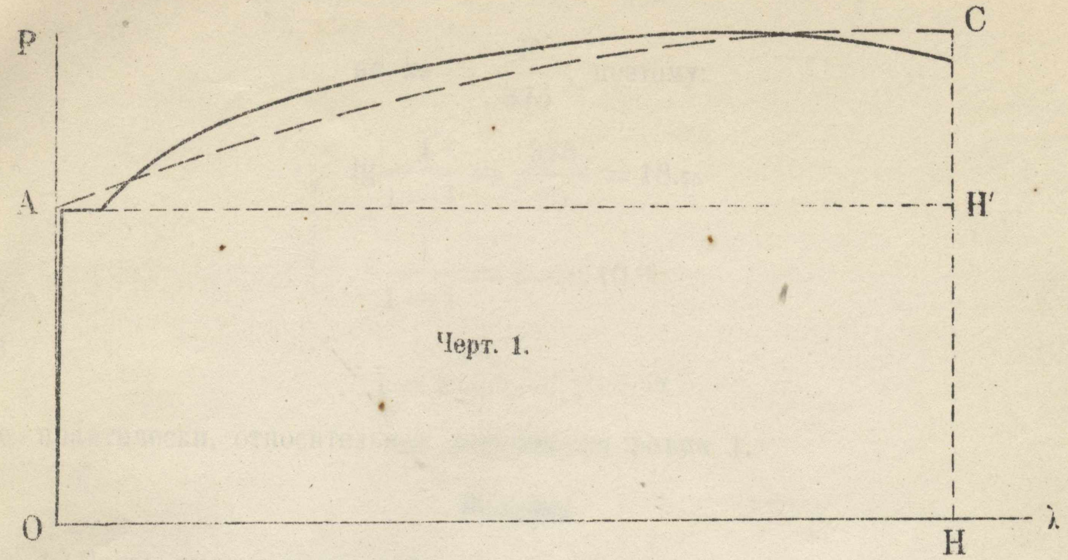


Черт. 9.

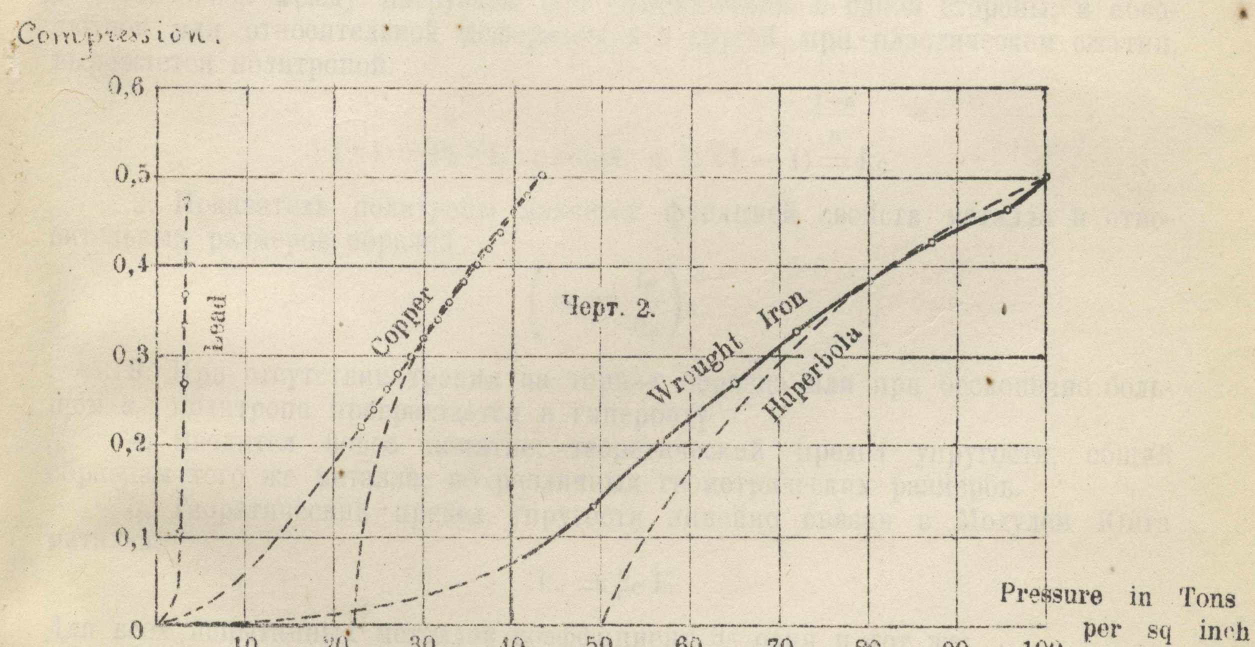


Черт. 10.

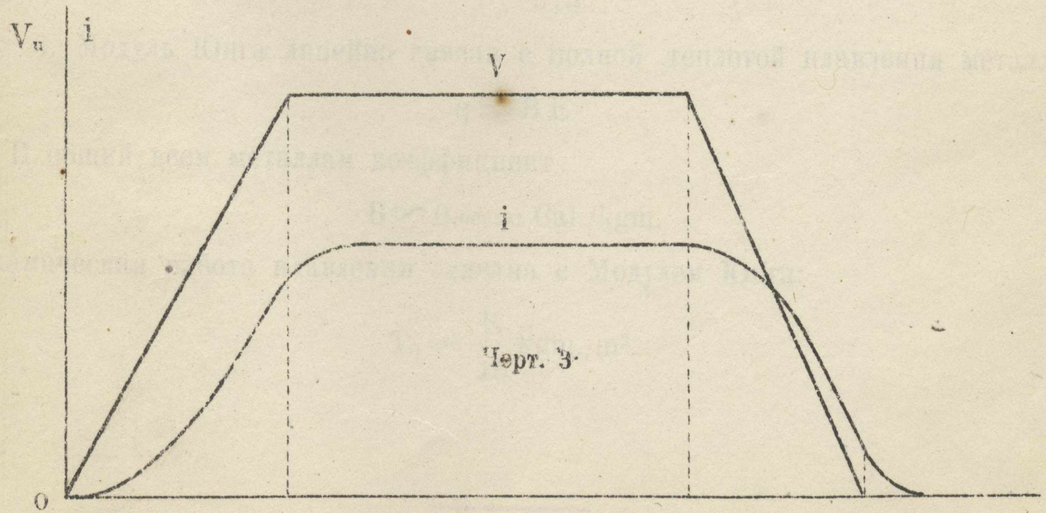
К статье Г. В. Трапезникова: „Законы остаточных деформаций (I—сжатие).“



Черт. 1.



Черт. 2.



Черт. 3.

$$\text{но } k_c = \frac{E}{375}, \text{ поэтому:}$$

$$\lg\frac{1}{1-i} = \frac{375}{20} = 18.75$$

$$\frac{1}{1-i} = 5.625 \cdot 10^{18}$$

или

$$i = 1 - 1.78 \cdot 10^{-19}$$

т. е. практически, относительная деформация равна 1.

Резюме.

1. Связь между нагрузкой или напряжением, с одной стороны, и абсолютной или относительной деформацией с другой, при пластическом сжатии, выражается политропой:

$$P^n l = P_c^{\,n} l_0 = \text{const. и } k\,(1-i)^{\frac{1-n}{n}} = k_c.$$

2. Показатель политропы является функцией свойств металла и относительных размеров образца

$$\left(\alpha_0 = \frac{l_0}{d_0}\right).$$

3. При отсутствии трения на торцах образца или при бесконечно большом α_0, политропа превращается в гиперболу.

4. Вводится новое понятие: теоретический предел упругости, общий образцам того же металла, но различных геометрических размеров.

5. Теоретический предел упругости линейно связан с Модулем Юнга металла:

$$k_c = \beta_c E.$$

Для всех испытанных металлов коэффициент β_c один и тот же:

$$\beta_c = \frac{1}{375}.$$

6. Модуль Юнга линейно связан с полной теплотой плавления металла,

$$q = B E$$

где B общий всем металлам коэффициент

$$B \cong 0.000155 \text{ Cal./kgm.}$$

Механическая работа плавления связана с Модулем Юнга:

$$T_q = \frac{E}{15} \text{ kgm./m}^3.$$