

Четырехзвенный пространственный механизм с цилиндрическими шарнирами, оси которых не параллельны и не пересекаются в одной точке, и его исследование.

(К статье 1 стр. чертежей).

Общей формой пространственного механизма с цилиндрическими шарнирами, как известно, является семизвенный механизм. Такой семизвенный механизм может обладать, как любым расположением осей шарниров друг относительно друга, так и любым соотношением длин звеньев.

Своеобразное доказательство этого можно найти в статье T. Rittershaus. Zur heutigen schule der Kinematik. Civiling 1875 г., а так же в статье проф. Малышева «Анализ и синтез механизмов с точки зрения их структуры». Известия Т. Т. И. за 1923 г. стр. 45.

Переходя к частным случаям пространственных механизмов с цилиндрическими шарнирами, можно указать в той же статье Rittershaus'a уже шести-звенный механизм, который будет действительно механизмом, т. е. системой с одной степенью свободы лишь при соблюдении некоторых частных условий.

Далее можно указать на давно известный четырехзвенный механизм, все оси которого параллельны между собой и так же четырехзвенный механизм, все оси которого пересекаются в одной точке. Если произвести подсчет условий связи для этих двух механизмов по системе проф. Малышева, (описанной в указанной выше статье), то в этих механизмах окажется по три лишних связи. Очевидно, что в этих механизмах в силу некоторых частных условий эти лишние связи обращаются в тождество, так как иначе эти механизмы не могли бы обладать подвижностью. В указанной статье этот вопрос подробно разбирается.

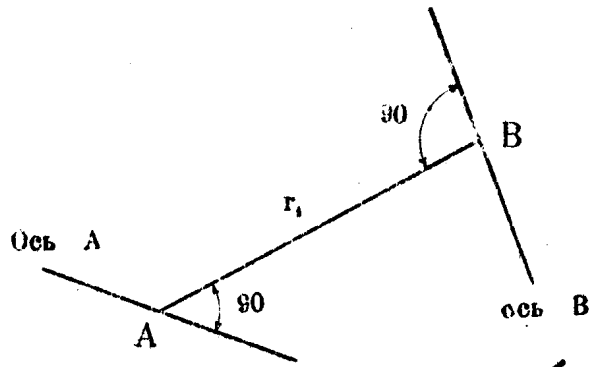
В бытность мою ассистентом, при кабинете Прикладной Механики Томского Технологического Института, мне было предложено проф. Малышевым рассмотреть вопрос, являются ли два выше приведенных четырехзвенных механизма единственно возможными или могут существовать еще и другие четырехзвенные пространственные механизмы с цилиндрическими шарнирами. Один из таких механизмов был мной сконструирован, при чем оси его шарниров получились не параллельными и не пересекающимися в одной точке.

Модель этого механизма можно видеть в Музее Прикладной Механики Т. Т. И.

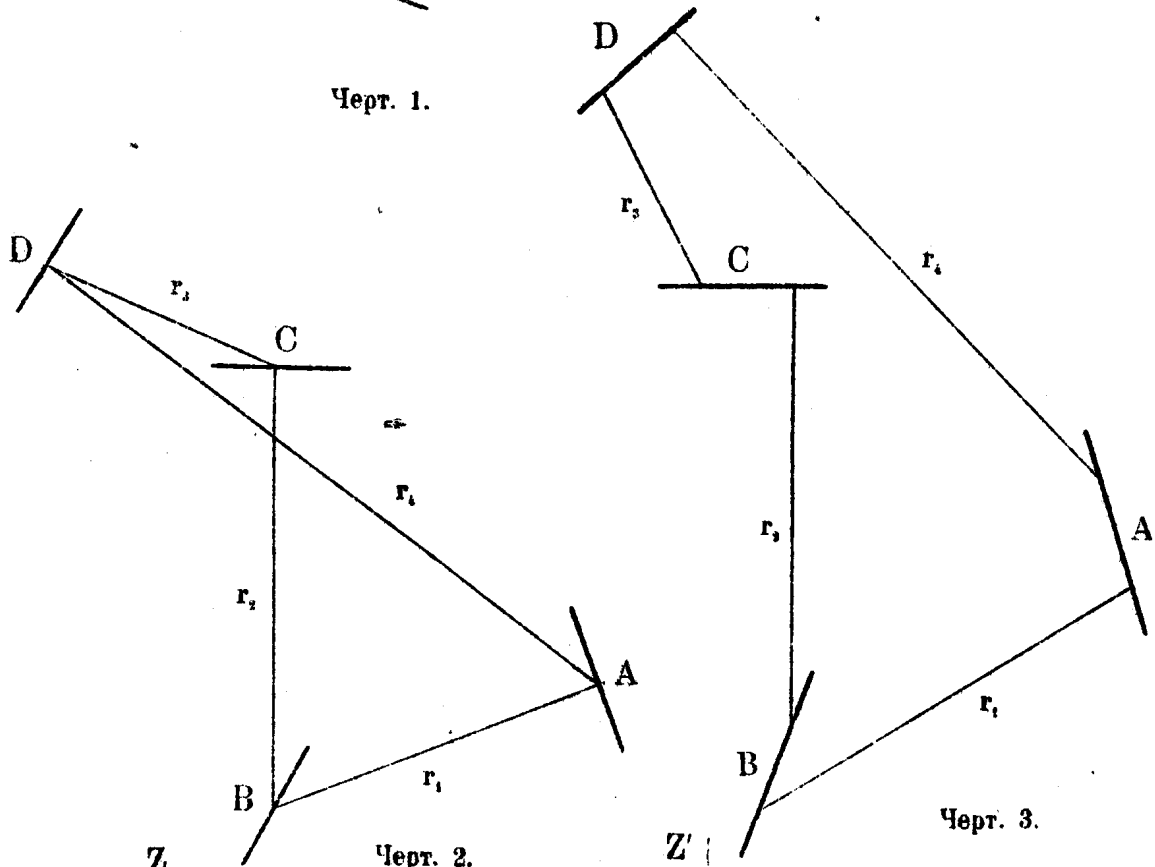
Судя по наружному виду механизма, частным условием для его подвижности являлось равенство противоположных звеньев и углов накрестлежущих осей шарниров в этих звеньях. Непосредственно не удавалось выяснить каким образом три лишних связи в этом механизме превращаются в тождество, в силу чего для объяснения подвижности этого механизма пришлось прибегнуть к особому приему, в виде нижеследующего математического анализа.

Для удобства изображения механизма заметим, что каждое отдельное звено механизма с цилиндрическими шарнирами можно схематически изобразить в виде некоторого отрезка, который должен быть взят равным наикратчайшему расстоянию между осями прилегающих к звену цилиндрических шарниров, и угла между этими осями. Так например, звено изображенное на

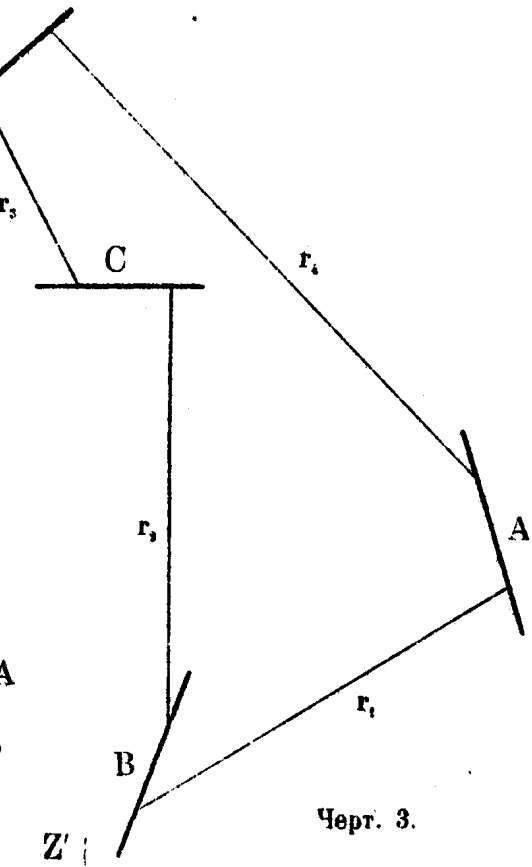
К статье А. В. Верховского: „Четырехзвенный пространственный механизм с цилиндрическими шарнирами.“



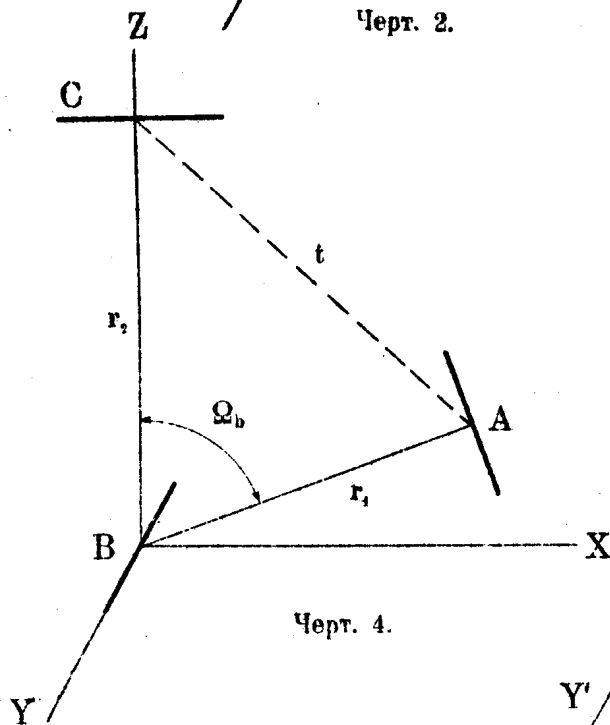
Черт. 1.



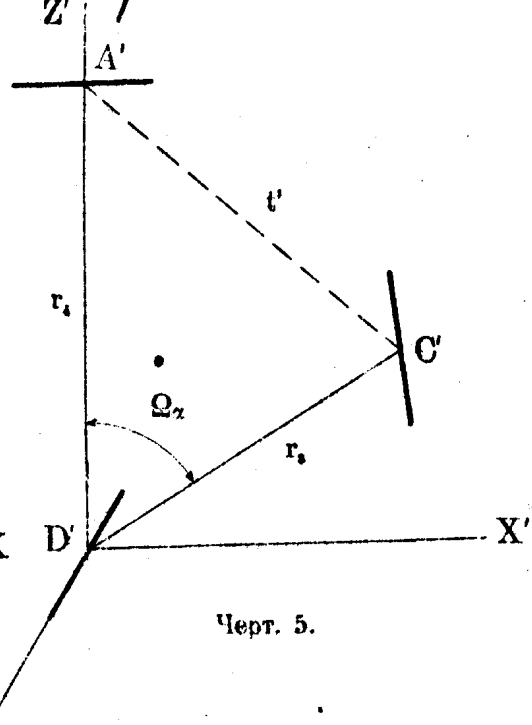
Черт. 2.



Черт. 3.



Черт. 4.



Черт. 5.

Главнейшие опечатки.

Страница.	Строка.	НА ПЕЧАТАНО.	ДОЛЖНО БЫТЬ.
25	1	«Г»	«Г ₁ »
25	35	ДЛИННЫМИ	ДЛИНАМИ
28	16	$\frac{r_3^2 r_4^2 + r_1^2 r_2^2}{2 r_1 r_2}$	$\frac{r_3^2 + r_4^2 - r_1^2 - r_2^2}{2 r_1 r_2}$
28	17	$\frac{r_1 r_4}{r_3 r_2}$	$\frac{r_1 r_4}{r_1 r_2}$

чертеже 1-м характеризуется длиной стержня «г», и углом между осью «А» и «В», который назовем буквою « α_1 », сохраняя в каждом звене одинаковые индексы у «г» и « α ».

Взяв четыре таких звена можно составить, путем совмещения осей соседних звеньев, механизм изображенный на чертеже 2-м.

Последний не будет еще общим видом четырехзвенного механизма, так как при составлении его соблюдено уже некоторое частное условие, — именно совпадение на осях механизма концов смежных звеньев.

При не соблюдении этого условия получается общий вид четырехзвенного механизма изображенного на черт. 3-м.

Задачей настоящей работы является исследование механизма изображенного на черт. 2.

Попытки исследовать механизм изображенный на черт. 3-м были неудачны так как при его анализе получаются не решимые уравнения высоких степеней

Для удобства исследования разобьем механизм показанный на черт. 2-м на две части так, чтобы в каждой части были бы по два смежных звена. Каждую из этих частей перенесем в прямоугольные системы координат, так чтобы ось оставшаяся между стержнями совместилась с осью Y, а сами стержни легли в плоскость XOZ при чем один из стержней совместился бы с осью Z.

Такое совмещение представлено на черт. 4-м и 5-м. Для того чтобы эти две части механизма снова можно было сложить в одно целое необходимо одновременное соблюдение следующих условий:

$$t = t' \dots \dots \dots (I)$$

$$\angle CA = \angle A' C' \dots \dots \dots (II)$$

$$\angle t C = \angle t' C' \dots \dots \dots (III)$$

$$\angle t A = \angle t' A' \dots \dots \dots (IV)$$

(В этих формулах «t» и «t'» расстояние между концами звеньев).

Кроме того чтобы полученная таким образом система была бы механизмом, т. е. обладала подвижностью, необходимо чтобы по крайней мере одно из написанных уравнений содержало величины, которые могли бы быть переменными.

Теперь задача сводится к нахождению зависимостей между неизвестными этих уравнений и постоянными элементами звеньев т. е. длинами стержней и углами между смежными осями звеньев, затем путем исключения некоторых неизвестных найти условия которым должны удовлетворять элементы звеньев.

Преобразуем ур-ние I.

Из чертежа 4 и 5 следует:

$$t^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \omega b; t'^2 = r_3^2 + r_4^2 - 2 r_3 r_4 \cos \omega d \text{ приравнивая «t» к «t'» получим}$$

$$r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \omega b = r_3^2 + r_4^2 - 2 r_3 r_4 \cos \omega d \dots \dots \dots (1-a)$$

В этом ур-нии вместо переменных «t» и «t'» введены новые переменные « ωb » и « ωd » (не обязательно равные между собой).

Для преобразования ур-ния II воспользуемся тремя тригонометрическими соотношениями.

$$\pm \text{Cos } C A = \text{Cos } A X \text{ Cos } C X \pm \text{Cos } A Y \text{ Cos } C Y \pm \text{Cos } A Z \text{ Cos } C Z \quad (1)$$

$$\text{Cos}^2 A X \pm \text{Cos}^2 A Y \pm \text{Cos}^2 A Z = 1 \quad (2)$$

и из условия перпендикулярности оси A к стержню r_1 получаем третье соотношение.

$$\pm \text{Cos } r_1 X \text{ Cos } A X \pm \text{Cos } \omega b \text{ Cos } A Z = 0 \quad (3)$$

В силу совмещения некоторых элементов звеньев с осями координат будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \text{Cos } C X &= \text{Sin } \alpha_2 \\ \text{Cos } A Y &= \text{Cos } \alpha_1 \\ \text{Cos } C Y &= \text{Cos } \alpha_2 \\ \text{Cos } C Z &= 0 \\ \text{Cos } r_1 X &= \text{Sin } \omega b \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставляя эти значения в ур-ния (1) (2) и (3) перепишем их так:

$$\text{Cos } C A = \pm A X \text{ Sin } \alpha_2 \pm \text{Cos } \alpha_1 \text{ Cos } \alpha_2 \quad (1-a)$$

$$\text{Cos}^2 A X \pm \text{Cos}^2 \alpha_1 \pm \text{Cos}^2 A Z = 1 \quad (2-a)$$

$$\pm \text{Sin } \omega b \text{ Cos } A X \pm \text{Cos } \omega b \text{ Cos } A Z = 0 \quad (3-a)$$

Из ур-ния (3-a) имеем:

$$\text{Cos } A X = \pm \frac{\text{Cos } \omega b \text{ Cos } A Z}{\text{Sin } \omega b}$$

или

$$\text{Cos } A X = \pm \frac{\text{Cos } A Z}{\text{tg } \omega b} \quad (5)$$

Из ур-ния (2-a) определим $\text{Cos } A Z$:

$$\text{Cos } A Z = \pm \sqrt{1 - \text{Cos}^2 \alpha_1 - \text{Cos}^2 A X} \quad (6)$$

Исключая из ур-ния (4) и (5) $\text{Cos } A Z$ получим:

$$\text{Cos } A X = \pm \text{Sin } \alpha_1 \text{ Cos } \omega b \quad (7)$$

Подставляя полученное значение $\text{Cos } A X$ в ур-ние (1-a) найдем:

$$\text{Cos } C A = \pm \text{Sin } \alpha_1 \text{ Cos } \omega b \text{ Sin } \alpha_2 \pm \text{Cos } \alpha_1 \text{ Cos } \alpha_2 \quad (8)$$

Аналогичным образом во второй части механизма для $\text{Cos } A' C'$ найдем

$$\text{Cos } A' C' = \pm \text{Sin } \alpha_4 \text{ Sin } \alpha_3 \text{ Cos } \omega d \pm \text{Cos } \alpha_3 \text{ Cos } \alpha_4 \quad (9)$$

Для удовлетворения условия II приравняем ур-ние (8) и (9):

$$\pm \text{Sin } \alpha_2 \text{ Sin } \alpha_1 \text{ Cos } \omega b \pm \text{Cos } \alpha_1 \text{ Cos } \alpha_2 = \pm \text{Sin } \alpha_4 \text{ Sin } \alpha_3 \text{ Cos } \omega d \pm \text{Cos } \alpha_3 \text{ Cos } \alpha_4 \quad (II-a)$$

Далее для преобразования условия III и IV имеем:

$$\text{Cos } t C = \pm \text{Cos } t X \text{ Cos } C X \quad (10)$$

два других члена пропадают потому что:

$$\text{Cos } t Y = 0 \quad \text{и} \quad \text{Cos } C Z = 0$$

Пользуясь равенствами (4) преобразуем ур-ние (10)

$$\text{Cos } t C = \pm \text{Cos } t X \text{ Sin } \alpha_2 \quad (10-a)$$

Затем аналогичным образом можем написать

$$\text{Cos } t' A' = \pm \text{Cos } t' X' \text{ Cos } A' X' \dots \dots \dots (11)$$

или

$$\text{Cos } t' A' = \pm \text{Cos } t' X' \text{ Sin } \alpha_1 \dots \dots \dots (11-a)$$

Точно так же будем иметь

$$\text{Cos } t A = \pm \text{Cos } t X \text{ Cos } A X \pm \text{Cos } t Z \text{ Cos } A Z \dots \dots \dots (12)$$

пользуясь ур-нием (7) а так же определяя из ур-ния (7) и (6) :

$$\text{Cos } A Z = \text{Sin } \alpha_1 \text{ Sin } \omega b$$

получим из ур-ния (12)

$$\text{Cos } t A = \pm \text{Cos } t X \text{ Sin } \alpha_1 \text{ Cos } \omega b \pm \text{Cos } t Z \text{ Sin } \alpha_1 \text{ Sin } \omega b \dots (12-a)$$

и аналогично:

$$\text{Cos } t' C' = \pm \text{Cos } t' X' \text{ Sin } \alpha_3 \text{ Cos } \omega d \pm \text{Cos } t' Z' \text{ Sin } \alpha_3 \text{ Sin } \omega d \dots (13-a)$$

Для удовлетворения условия III и IV приравниваем ур-ния (10-a) с (13-a) и ур-ния (11-a) с (12-a) :

$$\text{Cos } t X \text{ Sin } \alpha_2 = \pm \text{Cos } t' X' \text{ Sin } \alpha_3 \text{ Cos } \omega d \pm \text{Cos } t' Z' \text{ Sin } \alpha_3 \text{ Sin } \omega d \dots (III-a)$$

и

$$\text{Cos } t' X' \text{ Sin } \alpha_1 = \pm \text{Cos } t X \text{ Sin } \alpha_1 \text{ Cos } \omega b \pm \text{Cos } t Z \text{ Sin } \alpha_1 \text{ Sin } \omega b \dots (IV-a)$$

Из (III-a) имеем

$$\frac{\text{Sin } \alpha_2}{\text{Sin } \alpha_3} = \frac{\text{Cos } t' X' \text{ Cos } \omega d \pm \text{Cos } t' Z' \text{ Sin } \omega d}{\text{Cos } t X}$$

но так как $\text{Cos } t' Z' = \text{Sin } t' X'$ получим

$$\pm \frac{\text{Sin } \alpha_2}{\text{Sin } \alpha_3} = \frac{\text{Cos } t' X' \text{ Cos } \omega d \pm \text{Sin } t' X' \text{ Sin } \omega d}{\text{Cos } t X}$$

или

$$\frac{\text{Sin } \alpha_2}{\text{Sin } \alpha_3} = \frac{\text{Cos } (t' X' \pm \omega d)}{\text{Cos } t X} \dots \dots \dots (14)$$

Из (IV-a) аналогично получим замечая что $\text{Cos } t Z = \text{Sin } t X$

$$\frac{\text{Sin } \alpha_1}{\text{Sin } \alpha_1} = \frac{\text{Cos } (t X \pm \omega b)}{\text{Cos } t' X'} \dots \dots \dots (15)$$

перемножая (14) с (15) будем иметь

$$\frac{\text{Sin } \alpha_2 \text{ Sin } \alpha_1}{\text{Sin } \alpha_3 \text{ Sin } \alpha_1} = \frac{\text{Cos } (t' X' \pm \omega d)}{\text{Cos } t X} \cdot \frac{\text{Cos } (t X \pm \omega b)}{\text{Cos } t' X'} \dots \dots (16)$$

Далее из треугольников которые образуют отрезки $r_1 r_2$ и $r_3 r_4$ имеем

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\text{Sin } t r_1}{\text{Sin } t r_2} = \frac{\text{Sin } (90^\circ - \omega b \pm t X)}{\text{Sin } t Z} = \frac{\text{Cos } (t X - \omega b)}{\text{Cos } t X} \dots (17)$$

$$\frac{r_4}{r_3} = \frac{\text{Cos } (t' X' - \omega d)}{\text{Cos } t' X'} \dots \dots \dots (18)$$

перемножая (18) с (17) получим

$$\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} = \frac{\text{Cos } (t X - \omega b)}{\text{Cos } t X} \cdot \frac{\text{Cos } (t' X' - \omega d)}{\text{Cos } t' X'} \dots \dots (19)$$

Сравнивая ур-ние (16) с (19) при чем в ур-нии (16) возьмем значения Cos и углов разности, получим:

$$\frac{\text{Sin } \alpha_2 \text{ Sin } \alpha_4}{\text{Sin } \alpha_3 \text{ Sin } \alpha_1} = \frac{r_2 r_4}{r_3 r_1} \dots \dots \dots (20)$$

Получилось, первое ур-ние, которое связывает между собой постоянные элементы механизма.

Теперь исключая из ур-ния (I-a) и (II-a) $\text{Cos } \omega b$ и решая их относительно $\text{Cos } \omega d$ получим:

$$\text{Cos } \omega d = \frac{\text{Cos } \alpha_1 \text{ Cos } \alpha_2 \text{ Cos } \alpha_3 \text{ Cos } \alpha_4 \pm \text{Sin } \alpha_1 \text{ Sin } \alpha_2 \frac{r_3^2 + r_4^2 - r_1^2 - r_2^2}{2 r_1 r_2}}{\text{Sin } \alpha_3 \text{ Sin } \alpha_4 \pm \frac{r_3 r_4}{r_1 r_2} \text{Sin } \alpha_1 \text{ Sin } \alpha_2} \dots \dots \dots (21)$$

Так как правая часть полученного уравнения состоит исключительно из величин характеризующих неизменяемые элементы механизма, а левая должна быть величиной переменной, так как в нее входит изменяемый угол ωd , то для удовлетворения этого условия необходимо чтобы правая часть представляла из себя неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$.

Остаиваясь на последней неопределенности, так как первая не дает интересных результатов, приравняем числителя и знаменателя ур-ния (21) нулю:

$$\text{Cos } \alpha_1 \text{ Cos } \alpha_2 \text{ Cos } \alpha_3 \text{ Cos } \alpha_4 \pm \text{Sin } \alpha_1 \text{ Sin } \alpha_2 \frac{r_3^2 + r_4^2 - r_1^2 - r_2^2}{2 r_1 r_2} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\text{Sin } \alpha_3 \text{ Sin } \alpha_4}{\text{Sin } \alpha_1 \text{ Sin } \alpha_2} = \frac{r_1 r_4}{r_3 r_2} \dots \dots \dots (23)$$

И так имеем пока для решения поставленной задачи три ур-ния: (20), (22) и (23). Но это еще не все ур-ния, так как их не достаточно для соблюдения еще одного условия, — не расхождения концов смежных звеньев на осях А и С.

Такого расхождения на осях В и D произойти не может, так как концы звеньев на этих осях совмещены с началом координат. Для приведения в такое положение осей А и С разделим механизм по другим осям. Если разделить механизм не по осям А и С, а по осям В и D и проделать тот-же самый вывод, то получим еще три совершенно аналогичных ур-ния.

$$\frac{\text{Sin } \alpha_1 \text{ Sin } \alpha_3}{\text{Sin } \alpha_2 \text{ Sin } \alpha_4} = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \dots \dots \dots (24)$$

$$\text{Cos } \alpha_3 \text{ Cos } \alpha_1 \pm \text{Cos } \alpha_2 \text{ Cos } \alpha_4 \pm \text{Sin } \alpha_3 \text{ Sin } \alpha_1 \frac{r_2^2 + r_3^2 - r_4^2 - r_1^2}{2 r_4 r_1} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\text{Sin } \alpha_1 \text{ Sin } \alpha_3}{\text{Sin } \alpha_4 \text{ Sin } \alpha_2} = \frac{r_2 r_3}{r_4 r_1} \dots \dots \dots (26)$$

Таким образом получилось шесть уравнений связывающих восемь элементов механизма; так что в общем случае возможно задаться произвольно только двумя элементами, а значение остальных получаться из уравнений. Решение в общем виде этих уравнений приводит к уравнениям высоких степеней неподдающихся решению, и кроме того не входит в поставленную задачу.

Задача, как говорилось, заключается в том, чтобы математически доказать подвижность предлагаемого механизма.

Для этого видоизменим несколько полученные уравнения.

Перемножая и деля уравнения (20) и (23) получим:

$$\frac{\sin \alpha_4}{\sin \alpha_1} = \frac{r_1}{r_1} \dots \dots \dots (27)$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{r_2}{r_3} \dots \dots \dots (28)$$

Перемножая и деля уравнения (24) и (26) получим:

$$\frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_4} = \frac{r_3}{r_4} \dots \dots \dots (29)$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{r_1}{r_2} \dots \dots \dots (30)$$

Теперь вместо прежних шести уравнений имеет шесть: (22) (25) (27) (28) (29) (30).

Выше указывалось, что предлагаемый механизм обладает равенством противоположных стержней, т. е. $r_1 = r_3$, $r_2 = r_4$, а так же равенством углов между осями в противоположных звеньях, т. е. $\alpha_1 = \alpha_3$ и $\alpha_2 = \alpha_4$.

Не трудно видеть, что, при этих соотношениях между элементами механизма, все шесть уравнений удовлетворяются; чем математически доказывается подвижность рассматриваемого механизма.

Уравнение (27) (28) (29) (30) указывают, что длины стержней относятся как \sin углов между осями в тех же звеньях.

Пользуясь этим, не трудно из рассмотренного механизма получить, как частный случай, механизм с параллельными осями или иначе говоря плоский четырехзвенный механизм.

Для этого углы звеньев, чтобы они стали параллельны следует приравнять нулю, т. е.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Тогда по прежнему удовлетворяются уравнения (22) и (25), а из уравнений (27) (28) (29) (30) заключаем, что отношение стержней превращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$, следовательно они все могут быть выбраны произвольной длины. Все это как известно, действительно имеет место в плоских четырехзвенных механизмах.

Для получения механизма с осями, пересекающимися в одной точке необходимо, как не трудно заметить, приравнять длины стержней нулю, т. е.

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0.$$

Тогда уравнения (22) и (25) так же удовлетворяются, а из четырех других уравнений заключаем, что отношения \sin углов превращается в неопределенность, следовательно такой механизм возможен при любых углах что так же, как известно вполне справедливо.

Механизм изображенный на (черт. 2) имеет два вида: первый—открытый и второй—«перекрестный». Тот или иной вид обуславливается выбором знаков в шести приведенных уравнениях.

Механизмы этих двух видов могут передавать вращательное движение между двумя накрестлежущими осями.

Точно так же, как и в шарнире Гука, здесь будет отсутствовать равномерность перелачи, т. е. при равномерном вращении звена, служащим ведущим кривошипам, получается неравномерное вращение ведомого кривошипа. Вывод уравнений связывающих скорости не представляет трудностей, но ввиду большой длины здесь опускается.

Интересно еще отметить, что оба описанных вида механизма не имеют мертвых точек.

Обращаясь теперь к механизму, изображенному на (черт. 3), анализ которого не удалось произвести, следует заметить, что, как показали построенные модели, он при некоторых значениях элементов звеньев возможен. Для него должны быть соблюдены все требования предъявляемые к механизму рассмотренному ранее и кроме того должно быть выполнено равенство отрезков образуемых концами стержней на противоположных осях.

Эта статья не приводя полного анализа описанных механизмов, предлагает совершенно новый четырехзвенный механизм и указывает на его внутреннюю связь с прежде известными четырехзвенными механизмами.