

Теория бобины.

При шахтных подъемных сооружениях у нас в России чаще всего встречаются три типа барабанов: цилиндрический, бобина и конический. Более сложные типы барабанов у нас не встречаются совсем.

Некоторым вниманием пользуется затем система Кёппэ, в которой утилизируется для подъема сила трения каната о шкив. По своеобразности идеи эта система занимает особое положение, а потому говорить о ней не будем. Равным образом не будем говорить и о системе подъема цилиндрическим барабаном, когда применяется хвостовый уравнивающий канал, дающий возможность осуществить так называемый гармонический подъем.

В пределах таких ограничений цилиндрический барабан, как будто исключительно распространенный на сибирских рудниках, является самым несовершенным, в смысле расхода силовой энергии.

За ним идет бобина, а за ней конический барабан.

Таким образом, бобина занимает среднее место.

По существу говоря, цилиндрический барабан и бобина представляют только частные случаи конического барабана.

В самом деле, если взять за основные элементы радиусы основной усеченного конического барабана R и r и высоту конуса H , то, приравнявая $R = r$, получим цилиндрический барабан, а полагая $H = 0$, получим бобину.

Из конического же барабана можно получить и систему Кёппэ, если положить $R = r$ и $H = 0$. Простым примером цилиндрического барабана с намотанным или навитым на нем канатом является катушка ниток, шпулька в челноке швейной машины, барабан, на котором обычно навита телеграфная проволока перед навешиванием.

Таким же простым примером бобины с навитой на ней лентой плоского каната является: катушка с намотанной лентой у пишущей машины, круг телеграфной ленты, заведенная часовая пружина. Примером конического барабана является мотовило, на которое навивается проволока при прокатке и волочении.

Теория бобины представляет хороший пример, которым иллюстрируется могущество и жизненность математического анализа в приложении к технике.

Приступая к изложению этой теории, введем в наши рассуждения следующие обозначения:

N — полезный вес поднимаемого груза в килограммах,

L — мертвый груз (вес клетки и пустых вагонеток) в килограммах,

S — вес подъемного каната длиной $= H$ метров т. е. глубине шахты,

g — вес одного погонного метра каната равного сечения в килограммах.

Он равняется $0,0077 \pi \delta^2$, где π число проволок каната, а δ — диаметр проволоки в миллиметрах,

d — толщина ленты плоского каната в миллиметрах,

r — внутренний радиус бобины в миллиметрах,

R — наибольший радиус бобины, когда на нее навита часть каната, равная глубине шахты $= H$ плюс пять запасных витков,

H — глубина шахты в метрах,

Θ — угол навивки каната за весь период подъема.

При навивании каната на бобину, ось канатной ленты изгибается по спирали Архимеда, у которой радиус вектор увеличивается при каждом полном обороте бобины на толщину ленты каната $= d$.

Допустим, что рабочий ход бобины начинается с навивания ленты на бобину радиуса r .

Уравнение спирали Архимеда напишется тогда для всего рабочего хода в таком виде:

$$R = r + \frac{\theta}{2\pi} \cdot d$$

Какое-либо промежуточное переменное значение радиуса вектора можно выразить тогда так:

$$x = r + \frac{\varphi}{2\pi} \cdot d$$

Выразим длину элемента дуги Архимедовой спирали в полярных координатах, (черт.) для чего введем такие обозначения:

OB	r
$\angle BOE$	φ
$\angle AOB$	$d\varphi$
AD	dr
AB	ds

Безконечно-малый элемент дуги BD, нормальный к радиусу вектору OD, будет равен $r d\varphi$. Принимая AB за прямую, можно написать из прямоугольного треугольника ABD

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

Так как r и φ являются текущими координатами, то можно написать выражение для конечной дуги в таком виде

$$S = \int_0^\varphi \sqrt{dx^2 + x^2 d\varphi^2}$$

Практически первый член подкоренного выражения очень мал по сравнению со вторым членом. Действительно, выражение для радиуса вектора имело такой вид

$$x = r + \frac{\varphi \cdot d}{2\pi}$$

Так как начальный радиус в подъемных устройствах является величиной постоянной, $r = \text{const}$, то дифференцирование даст

$$dx = \frac{d}{2\pi} \cdot d\varphi$$

С другой стороны, умножая все члены выражения для переменного радиуса вектора на $d\varphi$, имеем

$$xd\varphi = rd\varphi + \frac{d}{2\pi} \varphi d\varphi$$

Отсюда найдем, что

$$\frac{dx}{xd\varphi} = \frac{\frac{d}{2\pi}}{r + \frac{\varphi d}{2\pi}}$$

Наибольшее значение левая часть приобретает в том случае, когда в правой части положить $\varphi = 0$, т. е. $\frac{d}{2\pi r}$.

Максимальное значение $d: 2r$, т. е. отношение диаметра каната к диаметру барабана, на который навивается канат, получается, когда имеется ручной ворот, а канат органический. В этом случае отношение $d: 2r$ доходит до

$\frac{1}{10} - \frac{1}{15}$. При приводных воротах и более толстом канате это отношение близко к значению $\frac{1}{25} - \frac{1}{30}$. Наконец, при барабанах подъемных машин это отношение никак не меньше $\frac{1}{40}$, а при металлических канатах, и в особенности стальных это отношение составляет $\frac{1}{50} - \frac{1}{60} - \frac{1}{100}$. Если взять $d:2r=0,1$, то получим.

$$d:2\pi r = \frac{10}{314} = \approx \frac{1}{31}$$

Чем меньше это отношение, тем в более благоприятных условиях проходит работа каната, так как меньше работы тратится на изгибание каната, а кроме того, и прочность каната не уменьшается в такой сильной степени.

Итак, длина каната, навиваемого на барабан, существенно зависит только от одного слагаемого в подкоренном выражении, а влияние другого слагаемого практически не значительно.

Этот вывод имеет существенное значение в дальнейших расчетах, так как позволяет ввести упрощения в вычисления и тем облегчить решение задачи. Это соображение проще всего выявить на примере.

Простейший вид y -ния спирали Архимеда изображается так:

$$r = a\varphi,$$

где r — переменный радиус вектор, a — постоянная величина, а φ переменный аргумент.

Выражение для элемента дуги напишется в этом случае так

$$ds = \sqrt{a^2 d\varphi^2 + a^2 \varphi^2 d\varphi^2} = a d\varphi \sqrt{1 + \varphi^2}$$

Величина конечной дуги найдется интегрированием

$$S = \int_0^\theta a d\varphi \sqrt{1 + \varphi^2}$$

Нахождение этого интеграла в общем виде можно произвести, пользуясь правилом интегрированием по частям.

Известно, что

$$\int x^{n-1} dx \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x^n}{n+1} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{n+1} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Полагая в этом уравнении $n=1$, получим

$$\int dx \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \text{Lg} \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C$$

Производя интегрирование в пределах от 0 до θ , получим

$$S = \frac{a}{2} \left[\theta \sqrt{1 + \theta^2} + \text{Lg} \left(\theta + \sqrt{1 + \theta^2} \right) \right]$$

Как видно, даже для простейшего случая интеграл имеет довольно сложную форму. Та же картина сложности остается и при нахождении радиуса кривизны спирали.

Действительно, общее выражение для радиуса кривизны в полярных координатах имеет такой вид

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}{r^2 + 2 \frac{dr^2}{d\varphi^2} - r \frac{d^2r}{d\varphi^2}}$$

Для спирали Архимеда $\frac{dr}{d\varphi} = a$, $\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0$.

Поэтому

$$\rho = \frac{(a^2 \varphi^2 + a^2)^{3/2}}{a^2 \varphi^2 + 2a^2} = \frac{a(1 + \varphi^2)^{3/2}}{2 + \varphi^2}$$

Если взять у-ные спирали Архимеда в виде

$$x = r + \frac{d}{2\pi} \cdot \varphi,$$

то решение задачи о нахождении длины дуги и величины радиуса кривизны значительно осложнится, что вызовет затруднение в пользовании формулами на практике. Поэтому и важно ввести упрощения в вычисления. Такого рода упрощение в нашем случае получится, если в выражении для элемента дуги положить $dx^2 = 0$.

Для этого упрощения будем иметь

$$dS = x d\varphi \text{ и } S = \int_0^\theta \left(r + \frac{d}{2\pi} \cdot \varphi \right) d\varphi = r\theta + \frac{d}{2\pi} \theta^2$$

Смысл этого упрощения сводится к тому, что вместо распрямленного витка спирали Архимеда берется длина окружности, у которой радиус представляет по величине среднее арифметическое между крайними радиусами векторами витка.

Если назовем через θ_1 угол, который описывает радиус вала при поднятии клетки со дна шахты на дневную поверхность, то конечный радиус вектор спирали бобины R и глубина шахты H выразятся через θ_1 и r так

$$R = r + \frac{\theta_1}{2\pi} d$$

$$H = r\theta_1 + \frac{d}{4\pi} \theta_1^2$$

В этих выражениях величина r является известной и заранее заданной, так как ее можно легко определить из у-ния

$$2r = D_{\min} = \frac{E \delta}{S - k_z},$$

где E модуль упругости материала, из которого изготовлен канат, δ — диаметр проволоки, k_z — допускаемое напряжение в проволоке на растяжение и S — полное напряжение проволоки (на растяжение и изгиб). Практически $D_{\min}$ имеет такие значения:

1. Проволока железная с сопротивлением разрыву
60 kg/mm². 1000 δ — 1200 δ
2. Проволока тигельной стали (120 kg/mm²) 1200 δ — 1400 δ
3. Патентованная стальная проволока (180 kg./mm.²) . . . 1400 δ — 1600 δ

Для этих сортов проволоки допускаемая нагрузка на растяжение берется в первом случае 7—8 kg./mm.²; во втором 15—16 kg./mm.² и в третьем 22—24 kg./mm.².

Что касается модуля упругости, то для тех же случаев он берется равным 18000 kg./mm.²; 19000 kg./mm.² и 21000 kg./mm.². Наконец, диаметр проволоки в миллиметрах вычисляется по формуле

$$\delta = \sqrt{\frac{1,27 Q}{n (k_z - 0,01 H)}},$$

где Q нагрузка на нижнем конце каната в килограммах, n — число проволок каната, k_z по прежнему допускаемая нагрузка каната на растяжение в килограммах, а H — вертикальная высота или глубина шахты в метрах. К этим соображениям необходимо добавить некоторые практические указания, даваемые заводами, занятыми изготовлением проволочных канатов. Заводы вынуж-

дены готовить проволоку определенных номеров, в зависимости оттого, какими эти заводы располагают станками. В канате отдельные проволоки свиваются в отдельные пряди или стренги, а уже пряди сплетаются между собою, замыкая внутри металлической или пеньковый сердечник. Не рекомендуется свивать каната из пяти прядей, так как такой канат выходит угловатым и скоро изнашивается.

Число проволок в канате ограничивается определенными пределами, разными для различных заводов.

Так, напр., заводы в Пшибраме готовят канаты с числом проволок

$n = 30 - 36 - 42 - 48 - 60 - 72 - 84 - 96 - 108 - 126 - 144 - 216$

Завод Фельтен—Гильом в Мюльгаузене изготавливает канаты на рынок с таким числом проволок

$n = 36 - 42 - 49 - 56 - 84 - 96 - 114 - 133 - 180$

Очень удобен для подбора подходящего диаметра проволоки следующий немецкий миллиметровый калибр.

№ проволоки.	Диаметр δ в миллиметрах.	№ проволоки.	Диаметр δ в миллиметрах.
4	0,4	18	1,8
4,5	0,45	20	2,
5	0,5	22	2,2
5,5	0,55	25	2,5
6	0,6	28	2,8
7	0,7		
8	0,8		
9	0,9		
10	1,	31	3,1
11	1,1	34	3,4
12	1,2	38	3,8
13	1,3	42	4,2
		46	4,6
14	1,4	50	5,
16	1,6	55	5,5
		60	6,

Толщина каната довольно хорошо находится по формуле $d = \alpha \delta$

Величина α определяется так:

$n = 36 - 42 - 48 - 60 - 72 - 84 - 96 - 108 - 126 - 144 - 216$

$\alpha = 9,5 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17,5 - 19 - 30$

Наиболее подходящими №№ проволок для рудничных канатов являются от 14 до 28.

Когда вычислен диаметр проволоки δ и заменен подходящим номером миллиметрового калибра, то без труда находится и минимальный диаметр барабана, или в нашем случае начальный диаметр сердечника бобины. (2г).

Полученный результат может быть проверен следующей таблицей.

№ проволоки.	$2r = D \text{ min}$ в миллиметрах.	№ проволоки.	$2r = D \text{ min}$ в миллиметрах.
4	300	14	1700 — 1800
5	400	16	2000 — 2200
6	500	18	2400 — 2600
7	600	20	2800 — 3000
8	700	22	3200 — 3400
9	800 — 900	25	3600 — 3800
10	1000 — 1100	28	4000
11	1100 — 1200	31	4500
12	1300 — 1400	34	5000
13	1500 — 1600		

Как видно, практика хорошо ограждает интересы техники, давая готовые результаты вычислений, сведенные в таблицы. Этими таблицами может без труда пользоваться и не техник.

И теперь невольно возникает вопрос, а к чему же нужна теория?

Вопрос этот имеет большой смысл и потому к нему нужно отнестись серьезно.

Ложный взгляд на технику, как на ремесло, до того укоренился, что его как песню, распевают и ученые и неучи с давних пор.

Разобщение техники с наукой, наблюдаемое с самых древних времен, произошло потому, что техники не были достаточно искусны в выполнении научных требований. Теперь это разобщение постепенно сглаживается, и техника дарит в руки науки такие перлы своего труда, о которых раньше нельзя было и мечтать. Техника облакает плотью самые изысканные мысли ученых. Без науки невозможно было бы осуществить воздухоплавание и воздухолетание, а с другой стороны, без техники научные изыскания остались бы просто мертвым капиталом. Только взаимодействия между наукой и техникой помогает просто, уверенно и экономично решать самые трудные задачи.

Практические сведения дают указания, как решалась задача в том или другом случае, но как решить новую задачу при иных условиях, этого ни одна практика не дает, это дает теория и творчество техника. Не даром Больцман пишет: «хорошая теория дает лучшую практику». Теория создается не для отдельных случаев, а для целого ряда, и искусство техники заключается в том, чтобы использовать теорию вполне для успешного выполнения дела.

Инженеру, как высшему представителю техники, просто не прилично по существу вещей и звания быть практиком в житейском смысле. Такой инженер будет ремесленником среди инженеров и такому ремесленнику нельзя поручить ответственного дела: он не сумеет справиться с ним. Иностранные слова «техник» и «инженер» по древне-русски звучат куда многозначительнее: «искусник» и «размысл». Хороший инженер должен уметь проектировать т. е. намечать свой наилучший путь к достижению цели, а не просто подражать т. е. жить чужим умом, не осмысливая в должной мере своей работы.

Проектирование же, как промежуточная стадия от замысла к осуществлению идеи в действительности, всегда требует основательного взвешивания всех условий, в которых приходится осуществлять идею.

Эта духовная работа напоминает ту литейную модель, по которой будет готовиться форма для отливки, а потом и самая отливка.

Чем нужно руководствоваться при такой работе? Тут часто выдвигается на первый план «правило». Но разве американцы не знали этих житейских правил, когда работали над установкой больших турбин на Ниагарском водопаде, и все же турбины сносило водой. А вот приехали европейцы и так установили свои турбины, что течение воды не в состоянии сорвать их с места. Дело не в правилах, а в хорошей теории, которую игнорировали практичные американцы.

Квебекский мост обрушивался несколько раз, не взирая ни на какие правила, а вот теория дала возможность обойтись без крушения.

Лучшее правило для инженера быть оригинальным, самостоятельным, и тогда работа его будет не обозначением шага на месте, а работой творческой, прогрессивной.

От древнейших времен до наших дней правила и практика дали человечеству только худое подражание оригиналу.

Пирамида Хуфу, Колизей, храм святой Софии в Константинополе, собор Петра в Ватикане, большая опера в Париже, Пантсон, Пагоды, башня Эйфеля, двигатель Дизеля, Титаник, танки, юнкерс (летательный аппарат) и

т. д., все это создано не по правилам, а по свежему замыслу, не признающему правил.

Конструктор или проектирующий должен решать задачу, принимая во внимание ряд условий и допущений, не роняющих достоинства науки и техники в данный момент не только в глазах специалистов, но и в глазах широкой массы несведущих людей.

Таким образом, должны быть учтены законы механики, строго взвешены выбранные коэффициенты, уяснена пригодность гипотез данной науки, выявлены успехи в решении подобных вопросов, если не в целом, то частично, все это должно служить материалом для конструктора, из коего он должен будет сложить образ своей оригинальной мысли в виде проекта.

Тогда в результате будет не шаблонная работа по правилам и практике, а произведение творчества «размысла».

Знаменитый конструктор нашего времени профессор Ридлер пишет по этому поводу следующее: «В техническом мире недостаточно одних математических вычислений. Трудная умственная работа заключается не в вычислении, а в установке данных для вычисления. Эта установка данных для вычислений должна соответствовать многосторонним условиям действительности».

Лучше всего выявляет эту многосторонность хорошая теория.

Теперь мы можем приступить к изложению теории бобины, не боясь того, что сложность теории может отпугнуть заинтересованное лицо от ее изучения.

Работа наматывания плоского каната на бобину происходит не самостоятельно, а под действием работы двигателя. Поэтому, выясняя условия работы бобины, нужно не упускать из вида и возможность легкого выполнения этой работы мотором, при целесообразном расходе энергии. К числу условий, облегчающих машине ее задачу, относится и условно возможно меньшего колебания в величине момента сопротивления на валу в течение всего рабочего хода.

Для бобины это условие выполняется лишь отчасти, когда достигают равенства моментов сопротивления в начале и конце подъема.

Аналитически это требование, при принятых нами обозначениях, приводится к такому уравнению.

$$r(N + L + gH) - RL = R(N + L) - r(L + gH)$$

Отсюда имеем

$$\frac{R}{r} = \frac{N + 2L + 2gH}{N + 2L} = 1 + \frac{2gH}{N + 2L} = 1 + \beta$$

Следовательно,

$$R = r + r\beta = r + \frac{2gHr}{N + 2L}$$

С другой стороны,

$$R = r + \frac{d}{2\pi} \cdot \theta_1$$

Сопоставляя правые части, получим,

$$\theta_1 = \frac{4\pi rgH}{(N + 2L)d}$$

При помощи этого угла θ_1 можно определить глубину шахты H .

$$H = r\theta_1 + \frac{d}{4\pi} \theta_1^2 = \frac{4\pi r^2 gH}{(N + 2L)d} + \frac{4\pi r^2 g^3 H^2}{(N + 2L)^2 d}$$

После незначительных преобразований алгебраического характера будем иметь

$$H = \frac{(N + 2L)^2 (1 - 4\pi r^2 g) d}{4\pi r^2 g^2}$$

В свою очередь для r и R получатся такие выражения

$$r = \frac{N + 2L}{2} \sqrt{\frac{d}{\pi g (N + 2L + gH)}}$$

$$R = \frac{N + 2L + 2gH}{2} \sqrt{\frac{d}{\pi g (N + 2L + gH)}}$$

Далее

$$\frac{\theta_1}{2\pi} = H \sqrt{\frac{g}{\pi d (N + 2L + gH)}}$$

Можно показать, что при выполнении условия равенства моментов сопротивления движению в начале и конце подъема клетки, мы одновременно достигаем такого же момента сопротивления и при встрече клеток, т. е.

$$M_H = M_B = M_K$$

Проще всего выполнить эту задачу можно, если проследить в течение подъема и опускания клеток за изменением суммы моментов сопротивлений, приложенной к валу бобин.

Несложная механика шахтного подъемного устройства сводится к тому, что, когда груженная клеть начинает подниматься с нижнего горизонта, верхняя пустая клеть (с пустыми вагонетками) начинает опускаться вниз и к концу подъема клетки поменяются местами.

И у той и у другой клетки момент сопротивления перемещению все время меняется, но когда клетки будут на одной высоте, то моменты сопротивления сравниваются, и это мгновение соответствует как раз половине числа оборотов, необходимых для подъема клетки со дна шахты на дневную поверхность, иными словами, когда угол поворота вала бобины будет равен $\frac{\theta_1}{2}$.

В самом деле, пусть до встречи клеток груженная клеть заставила повернуться бобину на n_1 оборотов; в это же время пустая клеть заставила повернуться свою бобину n_2 раз.

Переложим груз с одной клетки на другую и заставим машину работать в обратном направлении. Совершенно естественно, что первая клеть опустится на дно шахты через n_1 оборотов, а вторая клеть поднимется на дневную поверхность через n_2 оборотов.

Итак, первая бобина совершила всего $2n_1$ оборотов, а вторая $2n_2$.

Встретившиеся клетки в стволе шахты висят на канатах одной и той же длины и потому с механической точки зрения, совершенно безразлично на какой из них будет заканчиваться подъем груза.

Если бы груз не перекладывать с первой клетки на вторую, то для довершения подъема клетки рабочий вал бобины должен был бы совершить n_2 оборотов.

Таким образом, выходит, что для подъема груза со дна шахты на дневную поверхность в первой клетке нужно заставить вал бобины совершать число оборотов $n_1 + n_2$. Но тот же самый эффект достигается при перекладывании груза с первой клетки на вторую, при чем рабочий вал бобины совершит $2n_2$ оборотов. Отсюда ясно, что $n_1 + n_2 = 2n_2$ или $n_1 = n_2$.

Когда у бобин общий вал, то ясно, что $n_1 = n_2$.

Очень интересно подсчитать, где же именно произойдет встреча клеток в стволе шахты.

Чтобы решить эту задачу, будем рассуждать так.

При повороте вала бобины на какой-либо угол φ начальный радиус бобины превратится в r_1 , так что можно написать.

$$r_1 = r + \frac{d}{2\pi} \varphi$$

С другой бобины канат будет свиваться, так что начальный радиус R будет уменьшаться и превратится в R_1 , при этом

$$R_1 = R - \frac{d}{2\pi} \varphi$$

Складывая эти равенства, получим $r_1 + R_1 = R + r = \text{Const} = 2\rho$, где ρ представляет средний радиус навивки.

Напишем последнее у-ние в таком виде

$$R_1 - \rho = \rho - r_1 = x$$

Покажем, что в момент встречи клетей $R_1 = r_1 = \rho$.

Если посмотреть на канатную ленту, свернутую в спираль на бобине, то, при толщине ленты d и длине ее H площадь, покрытая ею, будет приблизительно равна Hd . С другой стороны, эта площадь будет приблизительно равна $\pi(R^2 - r^2)$.

Для каких-либо двух произвольных глубин H_1 и H_2 , или длин канатной ленты, можно написать аналогично

$$\begin{aligned} H_1 d &= \pi(R^2 - y_1^2), \\ H_2 d &= \pi(R^2 - y_2^2), \end{aligned}$$

где y_1 и y_2 будут переменные радиусы навивки.

В момент встречи клетей $H_1 = H_2$, а это условие ведет к тому, что $y_1 = y_2$ или $R_1 = r_1$. Но $R_1 + r_1 = 2\rho$. Следовательно,

$$R_1 = r_1 = \rho$$

Итак, в момент встречи наружный радиус свивания и навивания ленты на бобинах будет один и тот же, а именно

$$\frac{R + r}{2} = \rho$$

Теперь можно написать такое соотношение

$$\frac{x \cdot d}{H \cdot d} = \frac{\pi(R^2 - \rho^2)}{\pi(R^2 - r^2)}$$

Отсюда можно написать

$$X = H \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} = H \frac{R^2 - \rho^2}{(R + r)(R - r)}$$

$$\text{Но } R + r = 2\rho; R - r = R - (2\rho - R) = 2(R - \rho)$$

Подставляя найденные величины для суммы и разности радиусов, будем иметь

$$X = H \frac{R^2 - \rho^2}{4\rho \cdot (R - \rho)} = \frac{H}{4} \left(1 + \frac{R}{\rho}\right)$$

По этой формуле и определяется место встречи клетей. Так как $R > \rho$, то место встречи клетей будет ниже половины глубины шахты.

Проследим теперь за тем, как меняется величина момента сопротивления на валу бобин в течение всего рабочего хода.

Условие равенства моментов сопротивления в начале и конце подъема аналитически выражалось у-нием

$$(N + 2L)R = (N + 2L + 2gH)r$$

Разделяя правую и левую часть этого равенства на 2 получим

$$\left(\frac{N}{2} + L\right)R = \left(\frac{N}{2} + L + gH\right)r$$

Эти равенства не нарушатся, если прибавить к правой и левой части по

$$\frac{rN}{2} - LR$$

После приведения подобных членов и сокращения, получим

$$r(N + L + gH) - LR = \frac{N(R + r)}{2} = N\rho$$

Правая часть этого равенства выражает момент сопротивления при подъеме в месте встречи клетей. Таким образом, предполагая выполненным условие равенства моментов в начале и конце подъема, мы одновременно добиваемся того, что и в момент встречи клетей получается такой же момент сопротивления.

$$M_{\text{начало}} = M_{\text{встреча}} = M_{\text{конец}}$$

К этому же выводу можно подойти несколько иным путем.

Напишем уравнения моментов сопротивления в начале и конце подъема и сложим их

$$\begin{aligned} M_{\text{начало}} &= (N + L + gH)r - LR \\ M_{\text{конец}} &= (N + L)R - (L + gH)r \\ M_{\text{начало}} + M_{\text{конец}} &= N(R + r) = 2Nr \end{aligned}$$

Если $M_{\text{нач.}} = M_{\text{кон.}}$, то каждый из них равен $N\rho$ т. е. равен скручивающему моменту в момент встречи клетей.

Характер изменения величины скручивающего момента в течение всего подъема всего лучше может быть изучен либо аналитически, либо графически.

Остановимся на первом методе.

Напишем выражение для величины скручивающего момента в какое-либо мгновение, предполагая, что на одной бобине этому мгновению соответствует радиус навивки Y_1 , а на другой — радиус Y_2 . Концы канатов, на которых висят клетки, пусть будут весом gH_1 и gH_2 . В таком случае переменная величина скручивающего момента будет

$$M = (N + L + gH_1)Y_1 - (L + gH_2)Y_2$$

Во второй правой части этого равенства или вернее уравнения переменными являются Y_1 , Y_2 , H_1 и H_2 . Но мы их сейчас же выразим через одну величину и тогда M явится функцией одной независимой переменной.

Действительно, мы уже имели такие два у-ния

$$\begin{aligned} H_1 d &= \pi (R^2 - Y_1^2) \\ H_2 d &= \pi (R^2 - Y_2^2) \end{aligned}$$

Присоединим к этим уравнениям также равенство

$$Hd = \pi (R^2 - r^2)$$

Из этих соотношений без труда получим

$$\frac{H_1}{H} = \frac{R^2 - Y_1^2}{R^2 - r^2}; \quad \frac{H_2}{H} = \frac{R^2 - Y_2^2}{R^2 - r^2};$$

Или

$$gH_1 = gH \frac{R^2 - Y_1^2}{R^2 - r^2}; \quad gH_2 = gH \frac{R^2 - Y_2^2}{R^2 - r^2}.$$

Если подставить эти значения веса концов канатов в основное уравнение для скручивающего момента, то получим зависимость M только от двух величин Y_1 и Y_2 .

$$M = \left[N + L + gH \frac{(R^2 - Y_1^2)}{R^2 - r^2} \right] Y_1 - \left[L + gH \frac{(R^2 - Y_2^2)}{R^2 - r^2} \right] Y_2$$

Но $Y_1 + Y_2 = R + r = 2\rho$. Или иначе

$$Y_2 - \rho = \rho - Y_1 = X$$

Отсюда получаем

$$Y_2 = \rho + X \text{ и } Y_1 = \rho - X$$

Эти значения Y_2 и Y_1 подставляет в уравнение для величины скручивающего момента

$$M = \{ N + L + m [R^2 - (\rho - x)^2] \} (\rho - x) - \{ L + m [R^2 - (\rho + x)^2] \} (\rho + x)$$

$$\text{где } m = \frac{gH}{R^2 - r^2}.$$

Таким образом, величина скручивающего момента представляет функцию только одного переменного x и потому легко поддается исследованию в смысле своей величины. Раскрывая скобки и производя приведение подобных членов, получим

$$M = \frac{2gH}{R^2 - r^2} x^3 - (N + 2L + \frac{2gHR^2}{R^2 - r^2} - \frac{6gH}{R^2 - r^2} \rho^2) x + N\rho$$

Таким образом, закон изменения величины скручивающего момента выражаемый кривой третьего порядка, в уравнение которой не входит член с x^2 .

По общим правилам дифференциального исчисления мы сейчас же найдем условия для $\max$. и $\min$. функции.

$$\frac{dM}{dx} = \frac{6gH}{R^2 - r^2} x^2 - \left(N + 2L + \frac{2gHR^2}{R^2 - r^2} - \frac{6gH\rho^2}{R^2 - r^2} \right) = 0$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{12gHx}{R^2 - r^2}$$

Значения X , обращающие нашу функцию в $\max$ и $\min$, имеют так вид

$$x = \pm \sqrt{\frac{(N + 2L)(R^2 - r^2)}{6gH} + \frac{R^2}{3} - \rho^2}$$

Можно без труда построить кривую изменения величины скручивающего момента, принимая величины X за ординаты или абсциссы, а величины M за абсциссы или ординаты, при чем три точки определяются сразу из уравнения для величины момента, полагая в этом уравнении $X = 0$.

Действительно, производя эту операцию, получим $M = N\rho$, а $N\rho$ есть величины момента сопротивления при встрече клетей. Но мы уже видели, что этому моменту равняется момент в начале и в конце подъема.

Итак, три точки кривой определены и они расположены на горизонтали, параллельной оси X -ов, в расстоянии от оси X -ов равном $N\rho$.

Абсциссами у этих точек будут

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{H}{4} \left(1 + \frac{R}{\rho} \right) \quad \text{и} \quad x_3 = H$$

Если принять вертикаль, проходящую через конец абсциссы X_2 за раздельную линию, то ветви кривой будут неодинаковыми, и значит, средние скорости хода опускающиеся клети и поднимающиеся клети также будут различными. Поднимающаяся клеть будет двигаться с меньшей средней скоростью, чем опускающаяся.

Пример. $N = 600$ kg, $L = 700$ kg, $gH = 550$ kg, $H = 400$ метр., $r = 0,90$ метр., $R = 1,52$ метра, $\delta = 1,1$ миллиметра, $d = 10,5$ миллиметра и $n = 36$ проволок.

Подставляя эти числовые значения в уравнение для момента M , получим

$$M = 733,33 x^3 - 473,86 x + 726$$

Этот результат получается после таких подсчетов.

$$2gH = 1100; \quad R^2 - r^2 = 1,5; \quad 1100 : 1,5 = 733,33$$

$$N + 2L + \frac{2gN}{R^2 - r^2} \cdot R^2 = 600 + 1400 + 733,33 \cdot 2,31 = 2000 + 1693,99 =$$

$$= 3694; \quad \frac{6gH}{R^2 - r^2} \rho^2 = 2199,99 \cdot 1,464 = \approx 3220,8$$

По общему приему дифференциального исчисления находим $\max$ и $\min$ функции M , считая x за независимую переменную.

$$\frac{dM}{dx} = 2200 x^2 - 473,86 = 0$$

Отсюда получим для x два значения

$$x = \pm 0,464$$

Вторая производная напишется так

$$\frac{d^2 M}{d x^2} = 4400 x$$

Подставляя во вторую производную значение x -а из первой производной, получим для $\max$

$$\frac{d^2 M}{d x^2} = -2041,6$$

а для $\min$

$$\frac{d^2 M}{d x^2} = +2041,6$$

Самая величина M для того и другого случая получит такие значения

$$M_{\max} = \infty 871,7 \text{ kg} \cdot \text{mtr.}$$

$$M_{\min} = \infty 580,28 \text{ kg} \cdot \text{mtr.}$$

Колебания величины момента сопротивления от величины того же момента в начале и конце подъема составляют

$$+20\% \text{ и } -20\%$$

Место встречи клеток будет на глубине от поверхности земли

$$x_0 = \frac{H}{4} \left(1 + \frac{R}{\rho} \right) = 225,5 \text{ mtr.}$$

Поведем решение этой же задачи опять в общем виде несколько иным путем. Пусть Y_1 будет переменный радиус навивки на одной бобине в тот момент, когда поднимающаяся клеть находится на высоте H_1 от дна шахты. Для клетки опускающейся те же величины обозначим через Y_2 и H_2 .

Тогда можно написать

$$Y_1 = r + d \frac{\varphi}{2\pi} \text{ и } H_1 = r\varphi + \frac{d\varphi^2}{4\pi}$$

$$Y_2 = R - d \frac{\varphi}{2\pi} \text{ и } H_2 = R\varphi - \frac{d\varphi^2}{4\pi}$$

Отсюда следует, что $Y_1 + Y_2 = r + R$ и $H_1 + H_2 = (r + R)\varphi$.

Расстояние между клетями будет равно

$$H - (H_1 + H_2) = H - (r + R)\varphi$$

В момент встречи клеток это расстояние будет равно нулю, а потому

$$\varphi = \frac{H}{r + R}$$

Этот угол и будет соответствовать встрече клеток, когда $H_1 = H_2$. Но если так, и $r\varphi + d \frac{\varphi^2}{4\pi} = R\varphi - \frac{d\varphi^2}{4\pi}$ или $Y_1 = Y_2$. Из этого равенства

$$Y_1 = Y_2 \text{ следует, что } r + \frac{d\varphi}{2\pi} = R - \frac{d\varphi}{2\pi}; \varphi = \frac{\pi(R - r)}{d}$$

Сравнивая углы φ по одной и по другой формуле, получим

$$\frac{H}{r + R} = \frac{\pi(R - r)}{d} \text{ или } \frac{dH}{\pi} = R^2 - r^2$$

Обозначим радиус вектор спирали Архимеда в момент встречи через ρ

Тогда можно написать

$$\rho = \frac{r + R}{2}$$

Выразим теперь переменную величину радиусов векторов Y_1 и Y_2 через ρ .

В момент встречи клеток оба радиуса r и R обращаются в ρ , а потому можно написать

$$Y_1 = \rho + \frac{d}{2\pi} \omega \text{ и } Y_2 = \rho - \frac{d}{2\pi} \omega$$

Величина нового угла ω может колебаться в пределах от $-\frac{H}{2\rho}$ до $\frac{H}{2\rho}$

Полный угол Θ , на который поворачивается вал бобин в течение всего периода подъема, можно теперь выразить так

$$\Theta = \omega + \frac{H}{2\rho}$$

Длина навитой на бобину части каната может быть теперь выражена при помощи таких общих формул

$$H_1 = \rho \omega + \frac{d}{4\pi} \omega^2 + C_1$$

$$H_2 = \rho \omega - \frac{d}{4\pi} \omega^2 + C_2$$

Постоянные величины C_1 и C_2 определяются из того условия, что для $\omega = -\frac{H}{2\rho}$ величины H_1 и H_2 равны нулю

А тогда можно будет написать

$$H_1 = \rho \omega + \frac{d}{4\pi} \omega^2 + \frac{H}{2} - \frac{d H^2}{16 \pi \rho^2}$$

$$H_2 = \rho \omega - \frac{d}{4\pi} \omega^2 + \frac{H}{2} + \frac{d H^2}{16 \pi \rho^2}$$

В какое либо мгновение под'ема переменная величина скручивающего момента может быть выражена в общем виде так:

$$M = [N + L + g(H - H_1)] Y_1 - [L + g H_2] Y_2$$

Подставим в это уравнение значения H_1 и H_2 , Y_1 и Y_2 в зависимости от ρ . Тогда получим такое сложное выражение

$$M = \left[N + L + g \left(H - \rho \omega - \frac{d \omega^2}{4\pi} - \frac{H}{2} + \frac{d H^2}{16 \pi^2 \rho^2} \right) \right] \left(\rho + \frac{d \omega}{2\pi} \right) + \\ - \left[L + g \left(\rho \omega - \frac{d \omega^2}{4\pi} + \frac{H}{2} + \frac{d H^2}{16 \pi^2 \rho^2} \right) \right] \left(\rho - \frac{d \omega}{2\pi} \right)$$

Раскрывая скобки и производя приведение подобных членов, получим значительно упрощенное уравнение

$$M - \rho N = \omega \left[\left(N + 2L + gH \right) \frac{d}{2\pi} - 2g\rho^2 + \frac{g d^2 H^2}{16 \pi^2 \rho^2} - \frac{g d^2}{4 \pi^2} \omega^2 \right]$$

Правая часть этого уравнения обращается в нуль, с одной стороны, при $\omega = 0$, и с другой, при двух равных по величине по противоположенных по знаку значениях ω , что получается после приравнивания много члена, заключенного в прямые скобки, нулю.

Первое положение $\omega = 0$ дает нам величину момента при встрече клетей.

$$M = N \rho$$

Второе положение дает нам отклонения от среднего момента в сторону увеличения и в сторону уменьшения.

Обращаясь к выражению, стоящему в прямых скобках, не трудно заметить, что выбор числовых величин отдельных членов и их компонентов, если и допускает свободу, но в ограниченной степени. Практически можно считать достаточно стойкими по величине N , L , g , H и d , а тогда остаются в распоряжении две величины с более значительной в изменении амплитудой: ρ и ω .

Нужно выбирать ρ с таким образом расчетом, чтобы два значения ω , обращающие многочлен в прямых скобках, в нуль соответствовали реальным условиям. Таким образом, все мнимые решения отбрасываются. Второе еще бо-

нее важное значение имеет ограничение выбора ρ условием, заключающимся в том, что для всех значений ω в пределах

$$\text{от } -\frac{H}{2\rho} \text{ до } +\frac{H}{2\rho}$$

величина

$$M - N\rho$$

была возможна мала. Если желательно, чтобы $M - N\rho$ в начале и конце подъема была нулем, то нужно для ρ выбирать такое значение, которое обращало бы многочлен в прямых скобках в нуль при

$$\omega = +\frac{H}{2\rho} \text{ или } \omega^2 = \frac{H^2}{4\rho^2}$$

Пользуясь этим соображением, напишем

$$\left(N + 2L + gH\right) \frac{d}{2\pi} - 2g\rho^2 + \frac{gd^2}{4\pi^2} - \frac{gd^2}{4\pi^2} \cdot \frac{H^2}{4\rho^2} = 0$$

Отсюда и получим

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(N + 2L + gH)d}{\pi \cdot g}}$$

Значение левой части уравнения будет тогда такое

$$M - N\rho = \frac{gd^2}{4\pi^2} \left(\frac{H^2}{4\rho^2} - \omega^2 \right) \omega$$

В конечном итоге получилось тоже самое уравнение третьей степени с переменной величиной ω .

Разберем, когда значение $M - N\rho$ получит наибольшую и наименьшую величину в зависимости от ω .

Правила нахождения $\max$ и $\min$ нам дают право написать

$$\frac{d(M - N\rho)}{d\omega} = \frac{H^2}{4\rho^2} - 3\omega^2 = 0$$

Отсюда получим

$$\omega = \pm \frac{H}{2\rho} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

При этом условии значения $M - N\rho$ будут одинаковы по величине но противоположны по знаку

$$(M - N\rho)_{\max} = \frac{gd^2 \sqrt{3}}{144 \pi^2} \frac{H^3}{\rho^3}$$

$$(M - N\rho)_{\min} = -\frac{gd^2 \sqrt{3}}{144 \pi^2} \frac{H^3}{\rho^3}$$

Эти выражения представляют меру наивысшего отклонения момента сопротивления в сторону увеличения и в сторону уменьшения от $N\rho$.

Мы видели, что $M - N\rho$ обращается в нуль при

$$\omega = -\frac{H}{2\rho} \text{ или } \Theta = 0$$

и остается отрицательным при всех отрицательных значениях ω .

Эта же разность $M - N\rho$ достигает наибольшей величины при

$$\omega = -\frac{H}{2\rho} \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ или когда } \Theta = \frac{H}{2\rho} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \right).$$

Уменьшение разности $M - N\rho$ продолжается до того момента, соответствующего

$$\omega = 0 \text{ или } \Theta = \frac{H}{2\rho},$$

когда $M - N\rho$ становится опять нулем. Этот момент соответствует встрече клеток.

После этого ω приобретает положительное значение и M становится больше $N\rho$, продолжая расти до того значения, которое соответствует

$$\omega = \frac{H}{2\rho} \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ или } \Theta = \frac{H}{2\rho} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$$

Достигнув своей наибольшей величины, разность $M - N\rho$ начинает убывать и обращается в нуль, когда

$$\omega = \frac{H}{2\rho} \text{ или } \Theta = \frac{H}{\rho}$$

Ставя условие, что $M = N\rho$, можно показать, что значение ω укладывается между такими пределами

$$\omega_1 = -\frac{H}{2m\rho} \text{ и } \omega_2 = \frac{H}{2m\rho},$$

где m положительное число, большее единицы.

Напишем общее уравнение для момента сопротивления (он же является и скручивающим моментом главного вала)

$$\left[(N + 2L + gH) \frac{d}{2\pi} - 2g\rho^2 + \frac{g d^2 H^2}{16\pi^2 \rho^2} - \frac{g d^2}{4\pi^2} \omega^2 \right] \omega = M - N\rho$$

Помня условие, что $M - N\rho = 0$, подставим в левую часть общего уравнения значение

$$\omega^2 = \frac{H^2}{4m^2 \rho^2}$$

тогда получим

$$(N + 2L + gH) \frac{d}{2\pi} - 2g\rho^2 + \frac{g d^2 (m^2 - 1)}{4\pi^2} \cdot \frac{H^2}{\rho^2} = 0$$

Это уравнение является биквадратным относительно ρ . Разрешение этого уравнения дает четыре корня для ρ .

$$\rho = \pm \sqrt{\frac{(N + 2L + gH)d}{8\pi g}} \pm \sqrt{\frac{(N + 2L + gH)^2 d^2}{64\pi^2 g^2} + \frac{d^2 H^2 (m^2 - 1)}{32\pi^2 m^2}}$$

Так как $m > 1$, то два мнимых корня сразу же отпадают. Точно также отпадает и действительный корень с отрицательным знаком.

Таким образом, остается только один корень

$$\rho = \sqrt{\frac{(N + 2L + gH)d}{8\pi g}} + \sqrt{\frac{(N + 2L + gH)^2 d^2}{64\pi^2 g^2} + \frac{d^2 H^2 (m^2 - 1)}{32\pi^2 m^2}}$$

Этим выражением и надо пользоваться при определении среднего радиуса навитки каната на бобину.

Зная его величину, можно уже без труда определить R и r .

Действительно,

$$R + r = 2\rho; \text{ и } \pi(R^2 - r^2) = dH.$$

Отсюда и получим

$$R = \frac{4\pi\rho^2 + dH}{4\pi\rho} \text{ и } r = \frac{4\pi\rho^2 - dH}{4\pi\rho}$$

Чтобы облегчить нахождение ρ по сложной формуле, поступим так. Напишем биквадратное уравнение без знаменателя

$$128\pi^2 g \rho^4 - 32\pi d(N + 2L + gH)\rho^2 - g d^2 H^2 = 0$$

далее

$$R = \rho + \frac{dN}{4\pi\rho} \text{ и } r = \rho - \frac{dH}{4\pi\rho}$$

Введем новое неизвестное

$$x = \frac{4 \pi \rho^2}{d H} \text{ и } \rho = \sqrt{\frac{d H x}{4 \pi}}$$

Если подставить это значение ρ в биквадратное уравнение, то оно получит очень простой вид

$$x^2 - \frac{(N + 2L + gH)}{gH} x - \frac{1}{8} = 0$$

Значения наибольшего и наименьшего радиусов навивки будут

$$R = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \rho \text{ и } r = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \rho.$$

В упрощенном уравнении нет в явной форме толщины каната d , но эта толщина входит в выражение для определения ρ , в зависимости от величины которого значения R и r изменяются пропорционально квадратному корню из d .

Не трудно теперь усмотреть, что R и r будут выходить при расчетах большими для круглых канатов, которыми раньше заменяли плоские канаты, выбирая более узкие бобины. Этого рода замена плоского каната или ленты оправдывается и в наше время тем соображением, что круглые канаты воспринимают более равномерно напряжение и потому более долговечны в работе.

Эквивалентное круглое сечение каната, конечно, будет иметь больший диаметр, чем толщина ленты.

Из квадратного уравнения видно далее, что положительный корень для x возрастает в зависимости от величины коэффициента

$$\frac{N + 2L}{gH} + 1$$

Иначе говоря, он растет пропорционально полезному грузу плюс удвоенный мертвый груз и обратно пропорционально весу погонного метра каната g . Глубину шахты H пока не учитываем.

Проследим теперь аналитически ход изменения r в зависимости от x .

Малый радиус навивки r определяется так

$$r = \sqrt{\frac{dH}{4\pi}} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

Отсюда совершенно очевидно, что величина r растет вместе с ростом x .

Чтобы выявить влияние глубины шахты H на величине x , а, значит, и на радиусы R и r , напомним квадратное уравнение

$$x^2 - \frac{(N + 2L + gH)}{gH} x - \frac{1}{8} = 0$$

в таком виде

$$H = \frac{N + 2L}{g} \cdot \frac{x}{x^2 - x - \frac{1}{8}} = \frac{N + 2L}{g} \cdot \frac{1}{x - 1 - \frac{1}{8x}}$$

В таком случае можно написать, что

$$\rho = \sqrt{\frac{(N + 2L)d}{4\pi g}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - x - \frac{1}{8}}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(N + 2L)d}{4\pi g}} \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - x - \frac{1}{8}}}$$

Для того чтобы r было вещественным, необходимо, чтобы было соблюдено условие

$$x > \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \text{ т. е. } x > 1.1123$$

Из выражения для H видно, что при $x = \infty$, $H = 0$, а по мере уменьшения x величина H будет расти.

Путем дифференцирования r по x получаем

$$\frac{dr}{dx} = \sqrt{\frac{(N+2L)d}{4\pi g}} \cdot \frac{x - 5/4}{2 \left(x^2 - x - \frac{1}{8} \right)^{3/2}}$$

Отсюда выходит, что, до тех пор, пока x больше $5/4$, производная остается положительной. А это обстоятельство подсказывает вывод, что r изменяется так же, как и x , но обратно с изменением H .

Для значений x в интервале 1,25—1,11 заключение будет противоположным.

Если $x = \infty$, то $H = 0$ и

$$r = \sqrt{\frac{(N+2L)d}{4\pi g}}$$

А отсюда и обратное заключение: с уменьшением радиуса r будет увеличиваться глубина H .

Минимальной величины этот радиус r_{11} достигает при $x_{11} = 5/4$ для глубины

$$H_{11} = \frac{20}{3} \frac{(N+2L)}{g}; r_{11} = \sqrt{\frac{(N+2L)d}{12\pi g}}$$

Отношение

$$r_{11} : r = 1 : \sqrt{3} = 0,5773$$

С этого момента радиус r начинает расти вместе с глубиной x при $x_{111} = 1.11$ величина $H_{111} = \infty$ и $r_{111} = \infty$

Старинное французское правило, выражаемое формулой Кабани, дает для определения H_{11} , отвечающей минимальному радиусу r_{11} , такую зависимость

$$N + L + gH = gh$$

Отсюда получаем

$$g = \frac{N+L}{h-H} \text{ и } H_{11} = \frac{20}{3} \frac{N+2L}{N+L} (h-H)$$

Если желательно знать условие, когда r_{11} не достигает своего min, то нужно обратиться к неравенству

$$\frac{20}{3} \frac{N+2L}{N+L} (h-H) \geq H \text{ или } \frac{H}{h} \leq \frac{20}{3} + \frac{60}{989 + 529 \frac{N}{L}}$$

Правая часть достигает в этом неравенстве своего min при $L:N = 0$

В этом случае можно практически положить, что

$$\frac{H}{h} = \frac{20}{23}$$

Подставляя это отношение в формулу Кабани, получим

$$N + L = g(h-H) = \frac{3}{20} gH$$

Иначе говоря, вес каната gH будет в $\frac{20}{3}$ раза больше $N + L$, что не допускается.

Отсюда видно, что r_{11} не достигает на практике своего min и начальный радиус навивки r будет всегда уменьшаться с глубиной H , вернее с увеличением H .

При не больших глубинах величина изменения делается мало заметной даже при значительных величинах H_{11} .

Это ясно из следующей таблицы

$\frac{H}{H_{11}}$	$\frac{r}{r_{11}}$	x
0	1	∞
0,16	0,73	2
0,36	0,63	$3/2$
0,53	0,60	$11/8$
1,00	0,58	$5/4$

Проследим теперь за изменением R .

Для этого напишем значение R

$$R = \sqrt{\frac{dH}{4\pi}} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

Если начать изменение x с бесконечности, то значение R будет падать по своей величине, по мере того, как будет уменьшаться x значение R достигает минимума.

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} = 0 ; x = 1$$

Но x не может быть меньше 1,11. Следовательно, как бы мы ни изменяли R в сторону уменьшения, x никогда не должен дойти до единицы.

Отсюда получается, что R изменяется в одном направлении с x т. е. величина его будет пропорциональна N и обратно пропорциональна g .

Выясним теперь влияние глубины H на изменение величины R .

$$R = \sqrt{\frac{(N+2L)d}{4\pi g}} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-1/8}}$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{3\left(\frac{1}{4}-x\right)}{2\left(x^2-x-\frac{1}{8}\right)^{3/2}} \sqrt{\frac{(N+2L)d}{4\pi g}}$$

Так как минимальное значение $X=1,11$, то полученное значение производной будет величиной отрицательной.

И так, величина радиуса R изменяется обратно изменению X , но так же, как H .

Отсюда выходит, что величина глубины шахты сказывается на величинах радиусов r и R в противоположных направлениях.

Изследуем теперь природу компонента m , при помощи которого устанавливаются границы изменения для ω .

Напишем общее выражение для момента сопротивления

$$M - N\rho = \frac{gd^2}{4\pi^2} \left(\frac{H^2}{4\rho^2} - \omega^2 \right) \omega$$

В этом выраженной величина ω колеблется в пределах

$$-\frac{H}{2\rho} \text{ до } +\frac{H}{2\rho}$$

В новых условиях, когда величина ω колеблется в пределах

$$-\frac{H}{2m\rho} \text{ до } +\frac{H}{2m\rho},$$

выражение для момента сопротивления напишется так

$$M - N\rho = \frac{gd^2}{4\pi^2} \left(\frac{H^2}{4m^2\rho^2} - \omega^2 \right) \omega$$

Величина $M - N\rho$ получает max или min при условии

$$\omega = \pm \frac{H}{2m\rho} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Подставляя это значение ω в уравнение момента, получим

$$M - N\rho = \pm \frac{gd^2 \sqrt{3} H^3}{144 \pi^2 m^3 \rho^3}$$

Отсюда ясным становится, что значение ρ растет с увеличением m .

Что касается изменения самого момента M для значюний ω в пределах от $-\frac{H}{2m\rho}$ до $\frac{H}{2m\rho}$, то величина этого момента уменьшается по мере того, как растет m , но более быстро, чем куб дроби $\frac{1}{m}$.

Выясним теперь, как будет изменяться $M - N\rho$, когда ω изменяется в пределах

$$-\frac{H}{2\rho} \text{ до } -\frac{H}{2\rho m},$$

это с одной стороны, а с другой, когда ω изменяется в пределах

$$+\frac{H}{2\rho m} \text{ до } +\frac{H}{2\rho}$$

Проще всего для решения этой задачи обратиться к уравнению

$$M - N\rho = \pm \frac{dg^2}{4\pi^2} \left(\frac{1}{8m^2} - \frac{1}{8} \right) \frac{H^3}{\rho^3}$$

Определим m с таким расчетом, чтобы отклонение M от его среднего значения не превышало максимального отклонения M при значениях ω , заключающихся между

$$-\frac{H}{2\rho m} \text{ и } +\frac{H}{2\rho m}$$

Для этого достаточно выполнить условие

$$\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8m^2} \right) \geq \frac{\sqrt{3}}{18} \frac{1}{m^3}$$

Это неравенство дает возможность найти наибольшее значение m из уравнения

$$m^3 - m - 0,3849 = 0$$

С достаточной степенью точности можно положить $m = 1,155 \approx 1,16$ (См. С. К. Конюхов. Нахождение действительного корня уравнения любой степени графическим путем).

Тогда получим

$$(m - 1,155)(m^2 + 1,155m + 0,334) = 0$$

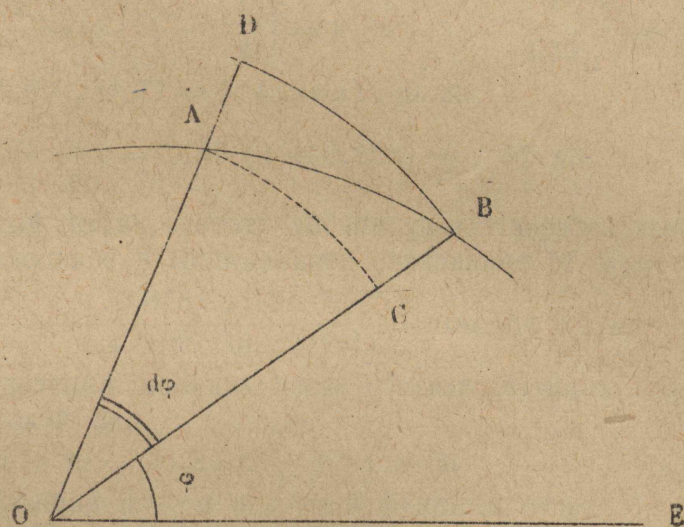
Два другие корня отбрасываются, как меньшие положительной единицы и потому, неудовлетворяющие условию задачи.

И так,

$$m_{\max} = 1,155$$

В разобранный теории умышленно не учтены вредные сопротивления, даже в той упрощенной форме, как это предложено Гауэром. Вид формул тогда получается несколько сложнее. Но еще более усложнится вопрос, если учитывать силы инерции, пользуясь началом Делямбера.

Это должно составить предмет следующей статьи на ту же тему.



Можно только добавить, что теория бобины очень просто прилагается к теории конического барабана.

В самом деле, если обозначить через β угол образующей усеченного конического барабана с осью барабана, то y -ные спирали Архимеда получим такой вид

$$x = r + \frac{d S_m \beta}{2 \pi} \cdot \varphi$$

вместо

$$x = r + \frac{d}{2 \pi} \varphi.$$

Пример. $H = 550$ mm, $N = 1600$, $L = 2670$, $S = 2200$, $g = 4$ kg; канатная лента $= 80 \times 18$ mm; $d = 18$ mm. Определим ρ .

$$x^2 - \frac{1600 + 5340 + 2200}{2200} x - 0.125 = 0$$

$$x^2 - 4.16 x - 0.125 = 0; x = 4.39$$

$$\rho = \sqrt{\frac{d H \cdot x}{4 \pi}} = \sqrt{\frac{550 \cdot 0.018 \cdot 4.39}{12.56}} = \infty 1.89$$

Определим r и R

$$r = \sqrt{\frac{d H \cdot x}{4 \pi}} = \rho \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 1.89 \left(1 - \frac{1}{4.39} \right) = 1.89 \cdot 0.77 = 1.455 \approx 1.46 \text{ mt.}$$

$$R = \rho \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1.89 \cdot (1 + 0.228) = 2.31 \text{ mt}$$

Этот результат вычислений можно считать вполне удовлетворительными.

В самом деле, максимальное и минимальное отклонение M будет

$$\frac{g d^2 \cdot \sqrt{3 \cdot H^3}}{4 \pi^2 \cdot 36 \cdot \rho^3} = \frac{4.0,018^2 \cdot 1.73 \cdot 550^3}{4.9,86 \cdot 36 \cdot 1.89^3} = \infty 464 \text{ kg.mt}$$

Уравнение для определения момента после соответствующих подстановок и сокращений получит такой вид

$$1375 x^3 - 31,25 x + 3024 = M$$

Величина x , определяющая $\max$ и $\min$ этой функции, будет

$$\frac{dM}{dx} = 4125 x^2 - 31,25 = 0$$

$$x = \pm 0,76$$

Подставляя это значение x в выражение для M , получим

$$M_{\max} = 3603,88 \text{ kg mt}$$

$$M_{\min} = 2444,75 \text{ kg mt}$$

Отклонение в первом случае составляет 13%, а во втором 19%.

Но результат этот можно еще улучшить, если ввести в расчет коэффициент $m = 1,16$.

Тогда отклонение в первом случае составит всего около 8,3%, а во втором 12,2%. Величина ρ для $m = 1.16$ будет равна

$$\rho = 2,19 \text{ mtr}; r = 1.69 \text{ и } R = 2,68 \text{ mm.}$$

Такова упрощенная статическая теория бобины.

При написании работы я старался использовать всю техническую литературу по данному вопросу, но главным образом я пользовался трудами Комба, Гатон де ля Гупильера, Кондратьева и т. д., введя исправления случайных погрешностей в труды этих талантливых людей.