Проф. С. К. Конюхов.

К теории вентилятора Веддинга.

Вентилятор Веддинга принадлежит к числу простейших машин по своему устройству.

Представим себе цилиндрическую коробку A (черт. 1), внутри которой проходит ось O, на которой насажен эксцентрично цилиндр B, так что эксцентрицитет будет равен OI. Шип I вращается в цилиндре B. Ось O наглухо соединена с цилиндром B, так что, когда заставить вращаться эту ось, то цилиндр B покатится внутри цилиндра A. Снаружи ось O выпущена и вращается в подшипниках. На эту ось насаживается шкив или приделывается ручка для вращения. Если продлить мысленно линию OI, то в пересечении ее с окружностью A получится точка касания кругов A и B. К цилиндру B приделывается пластинка C, заходящая в капсюлю Д и все время, теоретически рассуждая, долженствующая прикасаться своим концом к внутренней стенке капсюли Д. Справа и слева, как показано на чертеже 1, устроены каналы для входа воздуха и выхода. Для прохода пластинки C в капсюлю Д устраивается в цилиндре A щель по образующей. Если вращать цилиндр B внутри цилиндра A, то сгущенный воздух будет подаваться в трубку F.

Рассмотрим действие этой машины с кинематической точки зрения.

Пусть (чер. 2) OB будет радиус большого цилиндра $= R$, OA радиус малого цилиндра $= r$, ABC какое-либо из положений пластинки, длина которой e обычно берется равной $R + r$.

Если разделить окружность радиуса r на части (точки 1, 2, 3....), то без труда можно построить по точкам поперечное сечение капсюли, представляющее по контуру интересную кривую, имеющую 2 точки изгиба и выходящую точку B (иначе угловую точку).

Чтобы отыскать эти точки, нужно предварительно получить у-ние кривой. Этим и займемся.

Так как в технической литературе нам не приходилось встречать вывода этого уравнения, то не безынтересно будет познакомиться с довольно простым способом получения этого уравнения. Чтобы облегчить по возможности этот вывод, докажем такую теорему, хорошо известную в английской литературе под названием «теоремы Стюарта». Пусть у нас имеется (чер. 3) треугольник ABC. Соединим его вершину A с какой-либо точкой Д на основании BC. Затем опустим из точки A на BC перпендикуляр AE.

Введем теперь такия обозначения: $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, $AD = p$, $DC = b_1$, $BD = c_1$.

Из косоугольного треугольника ADC и остроугольного треугольника ABD можно написать такие равенства (чер. 3)

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2\ DC\ .\ DE$$

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2\ BD\ .\ DE$$

или

$$b^2 = p^2 + b_1{}^2 + 2\ b_1\ .\ DE$$

$$c^2 = p^2 + c_1{}^2 - 2\ c_1\ .\ DE$$

Умножим первое равенство на c_1, а второе на b_1 и сложим. Тогда и получим теорему Стюарта

$$b^2 c_1 + c^2 b_1 = p^2 a + a\, b_1\, c_1.$$

Эту теорему и применим к нашему случаю.

Обращаясь к чертежу 2, возьмем треугольник OCA, в котором AC посчитаем за основание $= e$. Обозначим далее AB через Z, $BC = e - Z$ и OC через U.

Тогда будем иметь

$$OA^2 \,.\, BC + OC^2\, AB = OB^2 \,.\, AC + AC \,.\, BC \,.\, AB$$

или

$$r^2\,(e - Z) + U^2 Z = R^2 e + e \,.\, Z \,.\, (e - Z) \;\ldots\ldots\; (1)$$

Или же можно взять треугольники BCE и ABF и тоже найти зависимость между U и Z. Но первый способ решения задачи мне представляется изящнее.

Мы сейчас же перейдем от уравнения (1) к другому, вводя координаты Декарта вместо U и Z.

Из треугольника BEC имеем

$$BC^2 = BE^2 + EC^2$$

или

$$(e - Z)^2 = x^2 + (y - R)^2$$

Следовательно,

$$Z = e - \sqrt{x^2 + (y - R)^2}$$

С другой стороны, из треугольника ODC мы имеем

$$OC^2 = CD^2 + OD^2 \text{ или } U^2 = x^2 + y^2$$

Подставим эти значения Z и U в уравнение (1). Тогда и получим уравнение нашей кривой «репки».

$$r^2 \sqrt{x^2 + (y - R)^2} + (x^2 + y^2)\,[(e - \sqrt{x^2 + (y - R)^2}] =$$
$$= R^2 e + e\sqrt{x^2 + (y - R)^2}\;(e - \sqrt{x^2 + (y - R)^2} \;\ldots\ldots\; (2)$$

Если перенести начало координат в точку B, то

$$x = x_1,\; Y = Y_1 + R;\; Y_1 = Y - R,$$

и уравнение получит еще более упрощенный вид

$$r^2 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + [x_1^2 + (y_1 + R)^2]\,(e - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,) =$$
$$= R^2 e + e\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\;(e - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,) \;\ldots\ldots\; (3)$$

А в полярной системе координат уравнение упростится еще более.

В самом деле, полагая $x_1 = \rho \operatorname{Cos} \varphi$ и $Y_1 = \rho \operatorname{Sin} \varphi$, получим

$$r^2 \rho + (\rho^2 + 2 R \rho \operatorname{Sin} \varphi + R^2)\,(e - \rho) = R^2 e + e\,\rho\,(e - \rho)$$
$$\text{или } \rho\,[\rho^2 + 2\rho\,(R \operatorname{Sin} \varphi - e) + e^2 + R^2 - r^2 - 2 R e \operatorname{Sin} \varphi] = 0$$

и

$$\rho^2 + 2\rho\,(R \operatorname{Sin} \varphi - e) + e^2 + R^2 - r^2 - 2 R\, e \operatorname{Sin} \varphi = 0$$

Разрешая это уравнение относительно ρ, получим

$$(\rho - e + R \operatorname{Sin} \varphi - \sqrt{r^2 - R^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi}\,)\,(\rho - e + R \operatorname{Sin} \varphi + \sqrt{r^2 - R^2 \operatorname{Cos} \varphi}) = 0$$

Таким образом, наша кривая разбивается на такие ветви

1) $\rho = 0$; 2) $\rho = e - R \operatorname{Sin} \varphi + \sqrt{r^2 - R \operatorname{Cos}^2 \varphi}$ 3) $\rho = e - R \operatorname{Sin} \varphi - \sqrt{r^2 - R^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi}$

Первая ветвь представляет точку. Для второй ветви сейчас же найдет две точки. Положим $\varphi = 90^\circ$. Тогда.

$$\rho = e - R + r = 2r$$

Положим $\rho = 0$. Тогда

$$e - R \operatorname{Sin} \varphi + \sqrt{r^2 - R^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi} = 0$$

Или

$$(R + r)^2 - 2\,(R + r)\,R \operatorname{Sin} \varphi + R^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi = r^2 - R^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi$$

Раскрыл скобки и заменил $\mathrm{Cos}^2\varphi$ через $1-\mathrm{Sin}^2\varphi$, получим

$$R^2+2Rr+r^2-2R^2\mathrm{Sin}\,\varphi-2rR\,\mathrm{Sin}\,\varphi+R^2\mathrm{Sin}^2\varphi=r^2-R^2\mathrm{Sin}^2\varphi$$

Это уравнение дает $\mathrm{Sin}\ \varphi=1$ т. е. $\varphi=90^\circ$ Первая точка соответствует наивысшей точке кривой, а вторая полюсу В.

Для третьей ветви, полагая $\varphi=90^\circ$, получим

$$\rho=0$$

А полагая $\rho=0$, будет иметь $\varphi=90^\circ$. Займемся нахождением точек перегиба у второй кривой.

По правилам дифференциального исчисления необходимо взять вторую производную от уравнения данной кривой, приравнить эту производную нулю.

$$\rho=e-R\ \mathrm{Sin}\ \varphi+\sqrt{r^2-R^2\mathrm{Cos}^2\varphi}$$

$$\rho^1=-R\ \mathrm{Cos}\,\varphi\left(1+\frac{R\ \mathrm{Sin}\ \varphi}{\sqrt{r^2-R\,\mathrm{Cos}^2\varphi}}\right)$$

$$\rho''=\frac{R\mathrm{Sin}\varphi(\sqrt{r^2-R^2\mathrm{Cos}^2\varphi}+R\mathrm{Sin}\varphi)-R^2\mathrm{Cos}^2\varphi(r^2-R^2\mathrm{Cos}^2\varphi+R^2\mathrm{Sin}^2\varphi)}{\sqrt{r^2-R^2\mathrm{Cos}^2\varphi}}=0$$

В конце концов это уравнение приводится к уравнению $4=$ ^on^ степени и его проще всего разрешить графическим путем по способу Лилля.

Зная первую и вторую производные, без труда найдем радиус кривизны кривой в любой точке.

$$\rho_{kp}=\frac{\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{\rho^2+2\left(\frac{d\rho}{p\varphi}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}$$

Для нахождения площади, ограниченной кривой, нужно было бы взять определенный интеграл

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\rho^2\,d\varphi_1$$

$$\rho^2=(e-R\ \mathrm{Sin}\,\varphi+\sqrt{r^2-R\,\mathrm{Cos}^2\varphi})^2.$$

Подаваемое количество воздуха в секунду очевидно вычислится по формуле

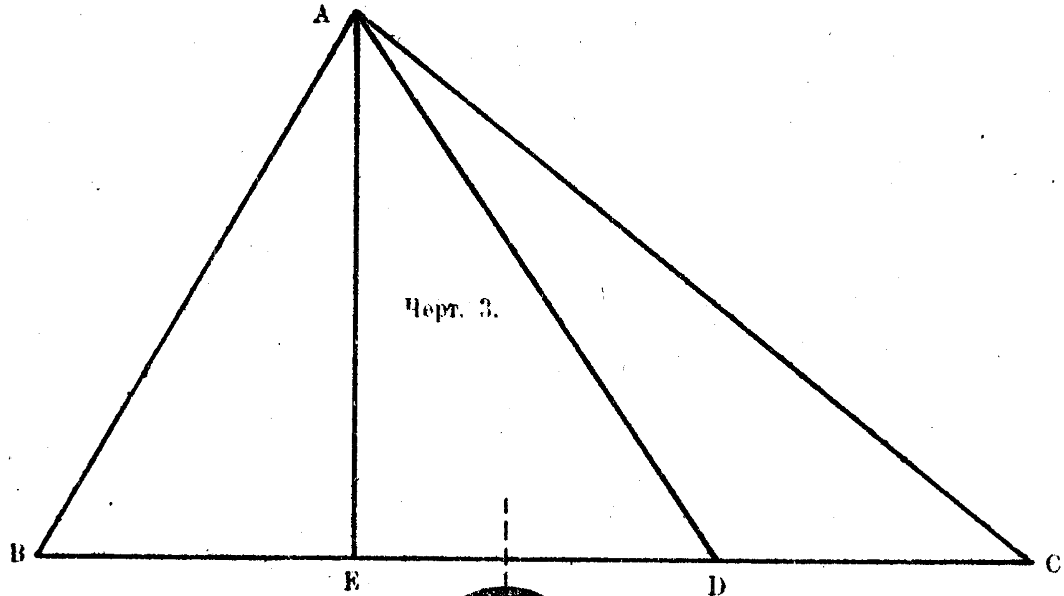
$$Q\,\mathrm{Sec}=\frac{\pi.(R^2-r^2)L.n}{60}\eta,$$

где L в метрах размер, перпендикулярный к плоскости чертежа или ширина воздуходувки, n—число оборотов в минуту и η—коэффициент полезного действия (объемным).

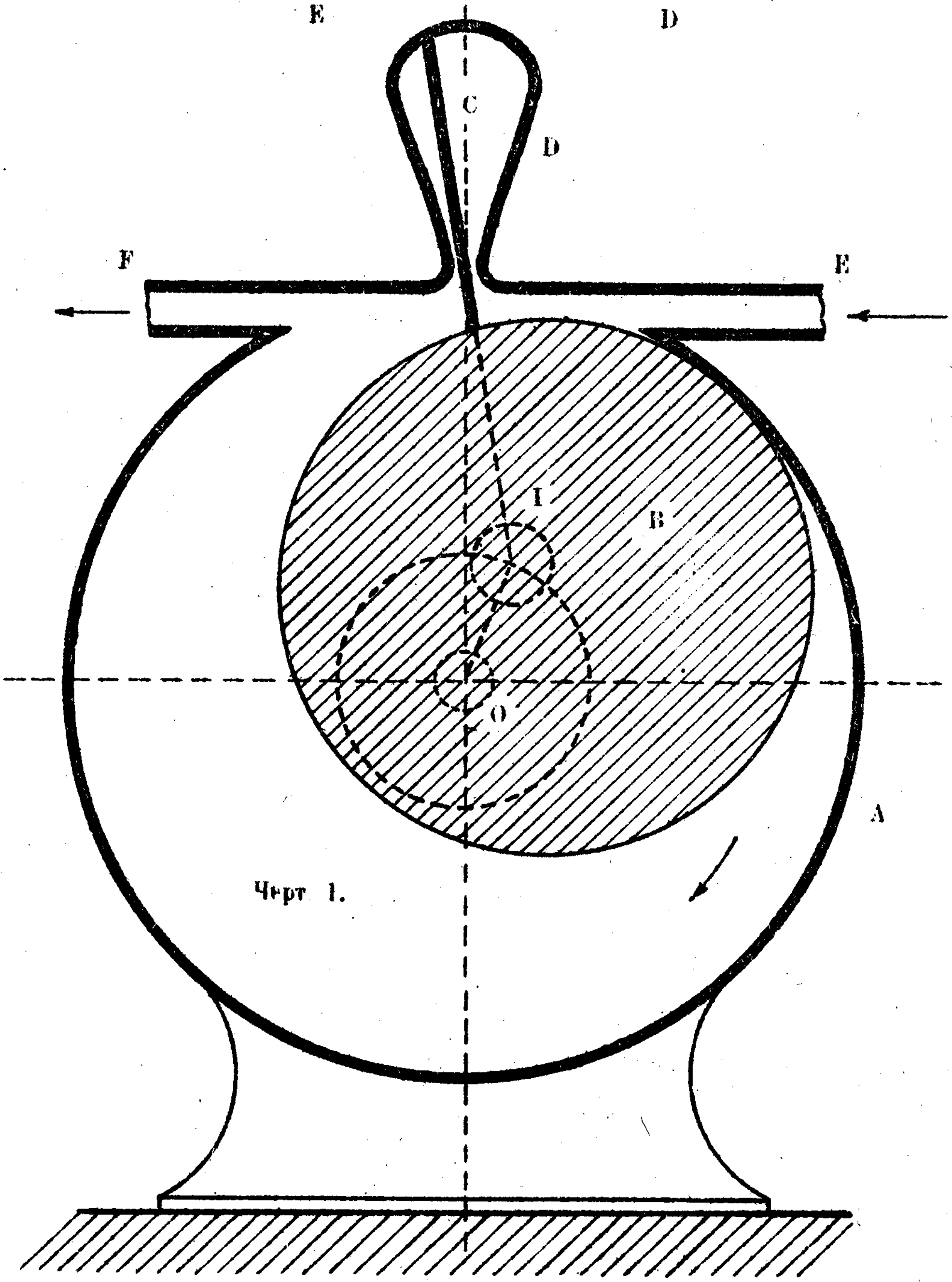
При небольшом сжатии можно положить, что процесс сжатия воздуха пойдет изотермически и тогда теоретическая работа сжатия выраженная в лошадиных силах, будет такая

$$N=\frac{p_1v_1\,\mathrm{Lg}n\,\frac{p_2}{p_1}}{75}=2{,}3026\ \frac{p_1v_1}{75}\,\mathrm{Lg}\frac{p_2}{p_1}$$

К статье С. К. Конюхова. «К теории вентилятора Веддинга».

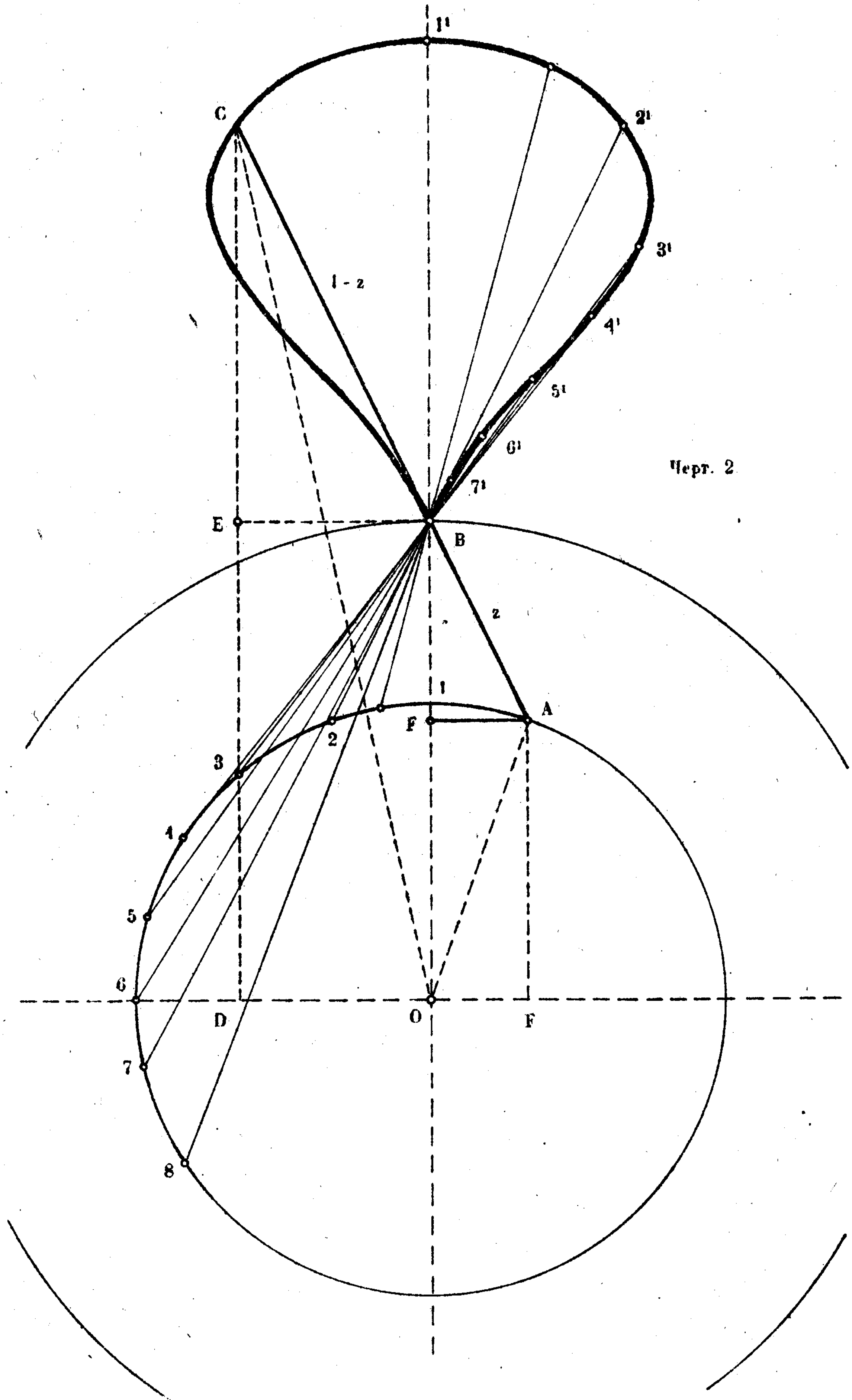


Черт. 3.



Черт 1.

К статье С. К. Конюхова. «К теории вентилятора Веддинга».



Черт. 2