

## К теории вентилятора Веддинга.

Вентилятор Веддинга принадлежит к числу простейших машин по своему устройству.

Представим себе цилиндрическую коробку А (черт. 1), внутри которой проходит ось О, на которой насажен эксцентрично цилиндр В, так что эксцентриситет будет равен ОI. Шип I вращается в цилиндре В. Ось О наглухо соединена с цилиндром В, так что, когда заставить вращаться эту ось, то цилиндр В покатится внутри цилиндра А. Снаружи ось О выпущена и вращается в подшипниках. На эту ось насаживается шкив или приделывается ручка для вращения. Если продлить мысленно линию ОI, то в пересечении ее с окружностью А получится точка касания кругов А и В. К цилиндру В приделывается пластинка С, заходящая в капсюлю Д и все время, теоретически рассуждая, долженствующая прикасаться своим концом к внутренней стенке капсюли Д. Справа и слева, как показано на чертеже 1, устроены каналы для входа воздуха и выхода. Для прохода пластинки С в капсюлю Д устраивается в цилиндре А щель по образующей. Если вращать цилиндр В внутри цилиндра А, то сгущенный воздух будет подаваться в трубку Е.

Рассмотрим действие этой машины с кинематической точки зрения.

Пусть (чер. 2) ОВ будет радиус большого цилиндра  $= R$ , ОА радиус малого цилиндра  $= r$ , АВС какое-либо из положений пластинки, длина которой обычно берется равной  $R + r$ .

Если разделить окружность радиуса  $r$  на части (точки 1, 2, 3....), то без труда можно построить по точкам поперечное сечение капсюли, представляющее по контуру интересную кривую, имеющую 2 точки изгиба и выходящую точку В (иначе угловую точку).

Чтобы отыскать эти точки, нужно предварительно получить у-ние кривой.

Этим и займемся.

Так как в технической литературе нам не приходилось встречать вывода этого уравнения, то не безынтересно будет познакомиться с довольно простым способом получения этого уравнения. Чтобы облегчить по возможности этот вывод, докажем такую теорему, хорошо известную в английской литературе под названием «теоремы Стюарта». Пусть у нас имеется (чер. 3) треугольник АВС. Соединим его вершину А с какой-либо точкой Д на основании ВС. Затем опустим из точки А на ВС перпендикуляр АЕ.

Введем теперь такие обозначения:  $BC = a$ ,  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $AD = p$ ,  $AC = b_1$ ,  $BD = c_1$ .

Из косоугольного треугольника ADC и остроугольного треугольника ABD можно написать такие равенства (чер. 3)

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2 DC \cdot DE$$

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 BD \cdot DE$$

или

$$b^2 = p^2 + b_1^2 + 2 b_1 \cdot DE$$

$$c^2 = p^2 + c_1^2 - 2 c_1 \cdot DE$$

Умножим первое равенство на  $c_1$ , а второе на  $b_1$  и сложим. Тогда и получим теорему Стюарта

$$b^2 c_1 + c^2 b_1 = p^2 a + a b_1 c_1$$

Эту теорему и применим к нашему случаю.

Обращаясь к чертежу 2, возьмем треугольник ОСА, в котором АС посчитаем за основание  $= e$ . Обозначим далее АВ через  $Z$ , ВС  $= e - Z$  и ОС через  $U$ .

Тогда будем иметь

$$OA^2 \cdot BC + OC^2 \cdot AB = OB^2 \cdot AC + AC \cdot BC \cdot AB$$

или

$$r^2 (e - Z) + U^2 Z = R^2 e + e \cdot Z \cdot (e - Z) \dots (1)$$

Или же можно взять треугольники ВСЕ и АВГ и тоже найти зависимость между  $U$  и  $Z$ . Но первый способ решения задачи мне представляется изящнее.

Мы сейчас же перейдем от уравнения (1) к другому, вводя координаты Декарта вместо  $U$  и  $Z$ .

Из треугольника ВЕС имеем

$$BC^2 = BE^2 + EC^2$$

или

$$(e - Z)^2 = x^2 + (y - R)^2$$

Следовательно,

$$Z = e - \sqrt{x^2 + (y - R)^2}$$

С другой стороны, из треугольника ОDC мы имеем

$$OC^2 = CD^2 + OD^2 \text{ или } U^2 = x^2 + y^2$$

Подставим эти значения  $Z$  и  $U$  в уравнение (1). Тогда и получим уравнение нашей кривой «репки».

$$\begin{aligned} r^2 \sqrt{x^2 + (y - R)^2} + (x^2 + y^2) [e - \sqrt{x^2 + (y - R)^2}] = \\ = R^2 e + e \sqrt{x^2 + (y - R)^2} (e - \sqrt{x^2 + (y - R)^2}) \dots (2) \end{aligned}$$

Если перенести начало координат в точку В, то

$$x = x_1, \quad y = y_1 + R; \quad y_1 = y - R,$$

и уравнение получит еще более упрощенный вид

$$\begin{aligned} r^2 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + [x_1^2 + (y_1 + R)^2] (e - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}) = \\ = R^2 e + e \sqrt{x_1^2 + y_1^2} (e - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}) \dots (3) \end{aligned}$$

А в полярной системе координат уравнение упростится еще более.

В самом деле, полагая  $x_1 = \rho \cos \varphi$  и  $y_1 = \rho \sin \varphi$ , получим

$$r^2 \rho + (\rho^2 + 2 R \rho \sin \varphi + R^2) (e - \rho) = R^2 e + e \rho (e - \rho)$$

$$\text{или } \rho [\rho^2 + 2 \rho (R \sin \varphi - e) + e^2 + R^2 - r^2 - 2 R e \sin \varphi] = 0$$

и

$$\rho^2 + 2 \rho (R \sin \varphi - e) + e^2 + R^2 - r^2 - 2 R e \sin \varphi = 0$$

Разрешая это уравнение относительно  $\rho$ , получим

$$(\rho - e + R \sin \varphi - \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \varphi}) (\rho - e + R \sin \varphi + \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \varphi}) = 0$$

Таким образом, наша кривая разбивается на такие ветви

$$1) \rho = 0; \quad 2) \rho = e - R \sin \varphi + \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \varphi} \quad 3) \rho = e - R \sin \varphi - \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \varphi}$$

Первая ветвь представляет точку. Для второй ветви сейчас же найдет две точки. Положим  $\varphi = 90^\circ$ . Тогда.

$$\rho = e - R + r = 2r$$

Положим  $\rho = 0$ . Тогда

$$e - R \sin \varphi + \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \varphi} = 0$$

Или

$$(R + r)^2 - 2 (R + r) R \sin \varphi + R^2 \sin^2 \varphi = r^2 - R^2 \cos^2 \varphi$$

Раскрыв скобки и заменил  $\cos^2 \varphi$  через  $1 - \sin^2 \varphi$ , получим

$$R^2 + 2 R r + r^2 - 2 R^2 \sin \varphi - 2 r R \sin \varphi + R^2 \sin^2 \varphi = r^2 - R^2 \sin^2 \varphi$$

Это уравнение дает  $\sin \varphi = 1$  т. е.  $\varphi = 90^\circ$ . Первая точка соответствует наивысшей точке кривой, а вторая полюсу В.

Для третьей ветви, полагая  $\varphi = 90^\circ$ , получим

$$\rho = 0$$

А полагая  $\rho = 0$ , будет иметь  $\varphi = 90^\circ$ . Займемся нахождением точек перегиба у второй кривой.

По правилам дифференциального исчисления необходимо взять вторую производную от уравнения данной кривой, приравнять эту производную нулю.

$$\begin{aligned} \rho &= e - R \sin \varphi + \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \varphi} \\ \rho' &= -R \cos \varphi \left( 1 + \frac{R \sin \varphi}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \varphi}} \right) \\ \rho'' &= \frac{R \sin \varphi (\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \varphi} + R \sin \varphi) - R^2 \cos^2 \varphi (r^2 - R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \varphi}} = 0 \end{aligned}$$

В конце концов это уравнение приводится к уравнению 4-ой степени и его проще всего разрешить графическим путем по способу Лилля.

Зная первую и вторую производные, без труда найдем радиус кривизны кривой в любой точке.

$$\rho_{kr} = \frac{\left[ \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}{\rho^2 + 2 \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}$$

Для нахождения площади, ограниченной кривой, нужно было бы взять определенный интеграл

$$\frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho^2 d\varphi_1$$

$$\rho^2 = (e - R \sin \varphi + \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \varphi})^2.$$

Подаваемое количество воздуха в секунду очевидно вычислится по формуле

$$Q_{Sec} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) L \cdot n}{60} \eta,$$

где  $L$  в метрах размер, перпендикулярный к плоскости чертежа или ширина воздухоудвки,  $n$ —число оборотов в минуту и  $\eta$ —коэффициент полезного действия (объемным).

При небольшом сжатии можно положить, что процесс сжатия воздуха пойдет изотермически и тогда теоретическая работа сжатия, выраженная в лошадиных силах, будет такая

$$N = \frac{p_1 v_1 L g n \frac{p_2}{p_1}}{75} = 2,3026 \frac{p_1 v_1}{75} L g \frac{p_2}{p_1}$$



