

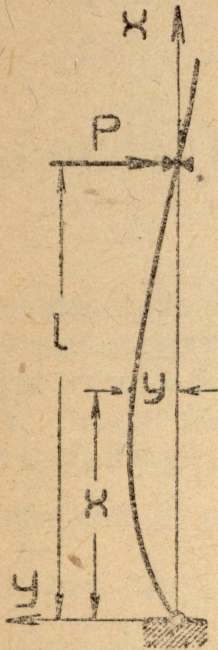
Проф. Г. В. ТРАПЕЗНИКОВ.

РАСЧЕТ ШАХТНОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО ВОДОПРОВОДА НА УСТОЙЧИВОСТЬ.

Вертикальная труба шахтного водопровода должна иметь, по своей длине, ряд креплений, соединяющих ее с стволовым каркасом; при отсутствии таких креплений, даже при строго-вертикальной установке трубы, неизбежен продольный изгиб. Ничтожная устойчивость на продольный изгиб объясняется большим отношением $\frac{L}{i}$ для трубы в целом. Скрепками вся длина трубы L разбивается на ряд участков, в каждом из которых указанное выше отношение $\frac{l}{i}$, где l —длина рассматриваемого участка, будет меньше $\frac{L}{i}$, благодаря чему повышается устойчивость вертикальной трубы. В нашей практике, расчет длины отдельного участка сводится к расчету самого нижнего из них. При этом считается, что он может быть рассматриваем, как свободная стойка, с шарнирными концами, нагруженная только сосредоточенной долевой силой, равной весу всей, вышележащей части трубы. Что же касается заграничной практики, то она довольно своеобразно отражена в каталогах фирм, поставляющих шахтные водопроводные трубы и арматуру к ним и не дающих указаний, расчетного характера, оправдывающих то или иное принятое расстояние от одного крепления до другого. Более того, две различных фирмы, поставляющие одинаковые, по размерам, материалу и установке, водопроводные трубы, дают расстояния между креплениями, отличающимися в 2—3 раза одно от другого. Но, так как длина отдельного участка входит в формулу Эйлера в квадрате, то такой разницей в цифрах, выражающих длины участков, ставит трубу, крепленную одним способом, по сравнению с трубой, крепленной другим способом, в условия в 4—9 раз более благоприятные, в смысле ее устойчивости.

В настоящей статье приводится приближенное решение задачи по нахождению минимального значения размеров участков, пользуясь методом отыскания равновесной формы изогнутого стержня при условии минимума потенциальной энергии его при деформации в заданных условиях.

Задача, в схеме, (черт. 1) представляется так: Имеется вертикальный прямоосный весомый стержень, длины L . На расстоянии l от нижнего, шарнирно-укрепленного конца, он закреплен таким образом, что, имея, в месте крепления, полную свободу по вертикали для поворота и передвижки поперечного сечения, в то же время не может перемещать последнее в горизонтальной плоскости. Нижний участок, имеющий длину l , находится в наилучших условиях в смысле возможности быть изогнутым от действия долевой нагрузки. С одной стороны он подвергается действию собственного веса, с другой же—действию сосредоточенной долевой нагрузки, равной весу той части стержня, который находится выше этого участка и имеет длину, равную $L-l$.



Чертеж № 1.

Кроме этих нагрузок, на стержень действует поперечная сила P , являющаяся реакцией крепления. При осадке верхнего конца нагруженного участка, последний перемещается перпендикулярно направлению силы P и, поэтому, работа силы P будет равна нулю.

Действие собственного веса на участке длины l выражается в том, что, при наличии продольного изгиба, эта часть стержня не будет деформироваться симметрично. Поэтому, для приближенного уравнения упругой линии, необходимо взять ассиметричную циклическую функцию:

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l} + b \sin \frac{2\pi x}{l} \dots \dots \dots (1)$$

где a и b —постоянные параметры кривой, изображающей изогнутую ось стержня.

Для простоты записи в выкладках, мы будем писать:

$$\frac{\pi x}{l} = \beta$$

и помнить, что:

$$dx = \frac{l}{\pi} d\beta$$

и в подстановках пределов будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{вместо } x=0 & \text{ — } \beta=0, \\ \text{вместо } x=l & \text{ — } \beta=\pi. \end{aligned}$$

Итак:

$$y = a \sin \beta + b \sin 2\beta \dots \dots \dots (2)$$

И производные функции по x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{l} (a \cos \beta + 2b \cos 2\beta) \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} (a \sin \beta + 4b \sin 2\beta) \dots \dots \dots (4)$$

Потенциальная энергия изогнутого участка выразится:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2EJ} \int_0^l M_x^2 dx = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{\pi^2 EJ}{2l^3} \int_0^\pi [a^2 \sin^2 \beta + 8ab \sin \beta \cos 2\beta + 16b^2 \sin^2 2\beta] d\beta = \\ &= \frac{\pi^2 EJ}{2l^3} \left[a^2 \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} \right) + 8ab \left(\frac{\sin \beta}{2} - \frac{\sin 3\beta}{6} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 8b^2 \left(\beta - \frac{\sin 4\beta}{4} \right) \right] \Big|_0^\pi = \frac{\pi^4 EJ}{4l^3} (a^2 + 16b^2) \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

Эта потенциальная энергия запасена рассматриваемым участком за счет работы, произведенной внешней нагрузкой, к которой относится, как вес стержня в части, находящейся выше данного участка, так и собственный вес участка. Определим работу названных нагрузок.

Если полный вес стержня G , то вес верхней части будет:

$$G_{\text{верхн.}} = \frac{L-l}{L} G.$$

Работа, затраченная сосредоточенной силой $\frac{L-l}{L} G$ выразится:

$$\begin{aligned} U_G &= \frac{L-l}{2L} G \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi(L-l)}{2Ll} G \int_0^\pi (a^2 \cos^2 \beta + 4ab \cos \beta \cos 2\beta + \\ &\quad + 4b^2 \cos^2 2\beta) d\beta = \frac{\pi(L-l)}{2Ll} G \left[a^2 \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4} \right) + 4ab \left(\frac{\sin \beta}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin 3\beta}{6} \right) + 2b^2 \left(\beta + \frac{\sin 4\beta}{4} \right) \right] \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2(L-l)G}{4Ll} (a^2 + 4b^2) \dots \dots (6) \end{aligned}$$

Работа, затраченная равномерно-распределенной нагрузкой будет:

$$\begin{aligned}
 U_q &= \frac{q}{2} \int_0^l (l-x) \left(\frac{d^2y}{dx} \right)^2 dx = \\
 &= \frac{q}{2} \int_0^\pi (\pi - \beta) (a^2 \cos^2 \beta + 4ab \cos \beta \cos 2\beta + 4b^2 \cos^2 2\beta) d\beta = \\
 &= \frac{q}{2} \left[\frac{\pi^2}{2} (a^2 + 4b^2) - \left\{ a^2 \left(\beta \frac{\beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4} \right) - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\cos 2\beta}{8} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + 4ab \left\{ \beta \left(\frac{\sin \beta}{2} + \frac{\sin 3\beta}{6} \right) + \frac{\cos \beta}{2} + \frac{\cos 3\beta}{18} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + b^2 \left\{ 2\beta \left(\beta + \frac{\sin 4\beta}{4} \right) - \beta^2 + \frac{\cos 4\beta}{8} \right\} \right]_0^\pi = \\
 &= \frac{\pi^2 q}{8} \left(a^2 + \frac{160}{9\pi^2} ab + 4b^2 \right).
 \end{aligned}$$

Так как:

$$\frac{160}{9\pi^2} = 1.806 \cong \frac{9}{5}$$

и

$$q = \frac{G}{L},$$

то

$$U_q = \frac{\pi^2 G}{40L} (5a^2 + 9ab + 20b^2).$$

Приравнивая потенциальную энергию изогнутого стержня затраченной внешними нагрузками работе:

$$U = U_G + U_q$$

получим:

$$\frac{\pi^4 EJ}{4l^3} (a^2 + 16b^2) = \frac{\pi^2 (L-l) G}{4Ll} (a^2 + 4b^2) + \frac{\pi^2 G}{40L} (5a^2 + 9ab + 20b^2).$$

Разделим обе части уравнения на a^2 . Так как данное уравнение однородно относительно a и b , то, в итоге, мы будем иметь дело только с отношением b к a , которое назовем:

$$\frac{b}{a} = \alpha.$$

После небольшого преобразования, наше конечное уравнение примет вид:

$$G_{\text{верхн.}} = q(L - l) = \frac{10\pi^2 EJ}{l^2} \cdot \frac{1 + 16\alpha^2}{10(1 + 4\alpha^2) + \frac{l}{L-l}(5 + 9\alpha + 20\alpha^2)} \quad (2)$$

Очевидно, что вес верхней части стержня должен иметь наименьшее, из всех возможных, значение.

Нахождение величины нижнего участка l осложняется, в нашей задаче, тем, что полученное уравнение неоднородно относительно l и L . При однородности уравнения, мы могли бы искать величину $\frac{l}{L}$, изменение которой было бы связано с изменением параметра α .

В данном же случае, всякому новому значению L будет соответствовать новая же длина участка l и, кроме того, новое же значение параметра α .

Поэтому мы, временно, видоизменим условие задачи, что даст возможность найти уравнение связи между l и L и определить функциональный состав параметра.

Новое условие задачи будет формулировано так:

Имеется стержень, постоянной длины l , с шарнирными концами, причем верхний конец имеет возможность свободного перемещения по вертикали. Нужно определить, какой длины будет стержень, того же материала и сечения, который будучи поставлен на первый, поставит его в условия продольного изгиба. Иначе говоря, вес второго стержня должен быть критической силой для первого, уже нагруженного равномерно собственным весом.

Назовем величину:

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \Phi_l.$$

Уравнение (2) переписется:

$$q(L - l) = \frac{10\Phi_l(1 + 16\alpha^2) - ql(5 + 9\alpha + 20\alpha^2)}{10(1 + 4\alpha^2)} \dots (3)$$

Для того чтобы, постоянный по длине, стержень l мог оказаться в условиях продольного изгиба, необходимо, чтобы величина $L - l$, или, что то же самое, $G_{\text{верхн.}}$ получила минимальное значение.

Выполняя это условие, мы должны решить уравнение:

$$\frac{dq(L - l)}{d\alpha} = 0,$$

откуда получаем равенство, где l будет уже критической длиной:

$$\Phi_l = ql_{кр} \frac{3(1-4\alpha^2)}{80\alpha} \dots \dots \dots (4)$$

Если бы функция α была более простого вида, то лучше бы было определить α через Φ_l и подставить полученное значение α в уравнение для $L-l$. Уравнение связи $L-l = \varphi(\Phi_p)$ получилось бы сразу. Выполнение такой подстановки приведет к уравнению, которым, ввиду его сложности и громоздкости, пользоваться будет почти нельзя. Для решения задачи мы выберем путь пользования полученными функциями в параметрическом виде, т. е. без исключения α .

Назовем отношение:

$$\frac{l_{кр}}{L} = \lambda_{кр}.$$

Подстановка значения Φ_l в уравнение (3) дает:

$$\lambda_{кр} = \frac{l_{кр}}{L} = \frac{8\alpha}{3 + 40\alpha - 48\alpha^2} \dots \dots \dots (5)$$

Это будет одно уравнение; другое же получим таким образом:

$$\frac{\Phi_l}{ql_{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{ql_{кр}^3} = \frac{\pi^2 EJ}{qL^3} \left(\frac{L}{l_{кр}}\right)^3 = \frac{\pi^2 EJ}{GL^2 \lambda_{кр}^3}.$$

Назовем:

$$\frac{\pi^2 EJ}{GL^3} = \Phi$$

тогда:

$$\Phi = \left(\frac{\Phi_l}{ql_{кр}}\right) \lambda_{кр}^3 = \frac{3(1-4\alpha^2)}{80\alpha} \lambda_{кр}^3 \dots \dots \dots (6)$$

Уравнения (5) и (6), данные в параметрической форме, позволяют определить $\lambda_{кр}$, при известном Φ и, обратно, если составлена таблица значений $\lambda_{кр}$ и Φ по изменяющемуся α . Ниже приложится такая таблица и, диаграмма, дающая картину изменения функции Φ , в зависимости от $\lambda_{кр}$. При пользовании таблицей промежуточные значения всех величин могут быть определены путем линейного интерполирования, так как разности в степенях невелики (исключение составляют первые строки таблицы, которые особого практического значения не имеют и приводятся здесь с целью дать представление о начальных ординатах графика. В таблице даны $\Delta\Phi$ и $\Delta\lambda_{кр}$ между рядовыми значениями функций, для облегчения интерполирования.

В том случае, когда длина всего стержня сравнительно невелика, она может оказаться равной или даже меньшей его критической длины. Определим величину критической длины, когда последняя равна длине всего стержня.

В данном случае, очевидно:

$$\lambda_{кр} = \frac{l_{кр}}{L} = 1 \quad \text{и} \quad \Phi_l = \frac{\pi^2 EJ}{L^2_{кр}}$$

и уравнения (3) и (6) превратятся в следующие;

$$0 = \frac{10\pi^2 EJ}{L^2_{кр}} (1 + 16\alpha^2) - qL_{кр} (5 + 9\alpha + 20\alpha^2)$$

и

$$\frac{\pi^2 EJ}{qL^3_{кр}} = \frac{3(1 - 4\alpha^2)}{80\alpha}$$

Совместное решение их относительно α дает уравнение:

$$192\alpha^4 + 160\alpha^3 + 24\alpha^2 + 40\alpha - 3 = 0.$$

Отсюда получаем корень, который удовлетворяет нашему условию:

$$\alpha = 0.0693.$$

Подстановка полученного значения α в уравнение (4) дает:

$$\Phi_{l_{кр}} = 0.5311 qL_{кр}$$

откуда:

$$(qL)_{кр} = G_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(0.729L)^2}$$

т. е. коэффициент длины, в данном случае:

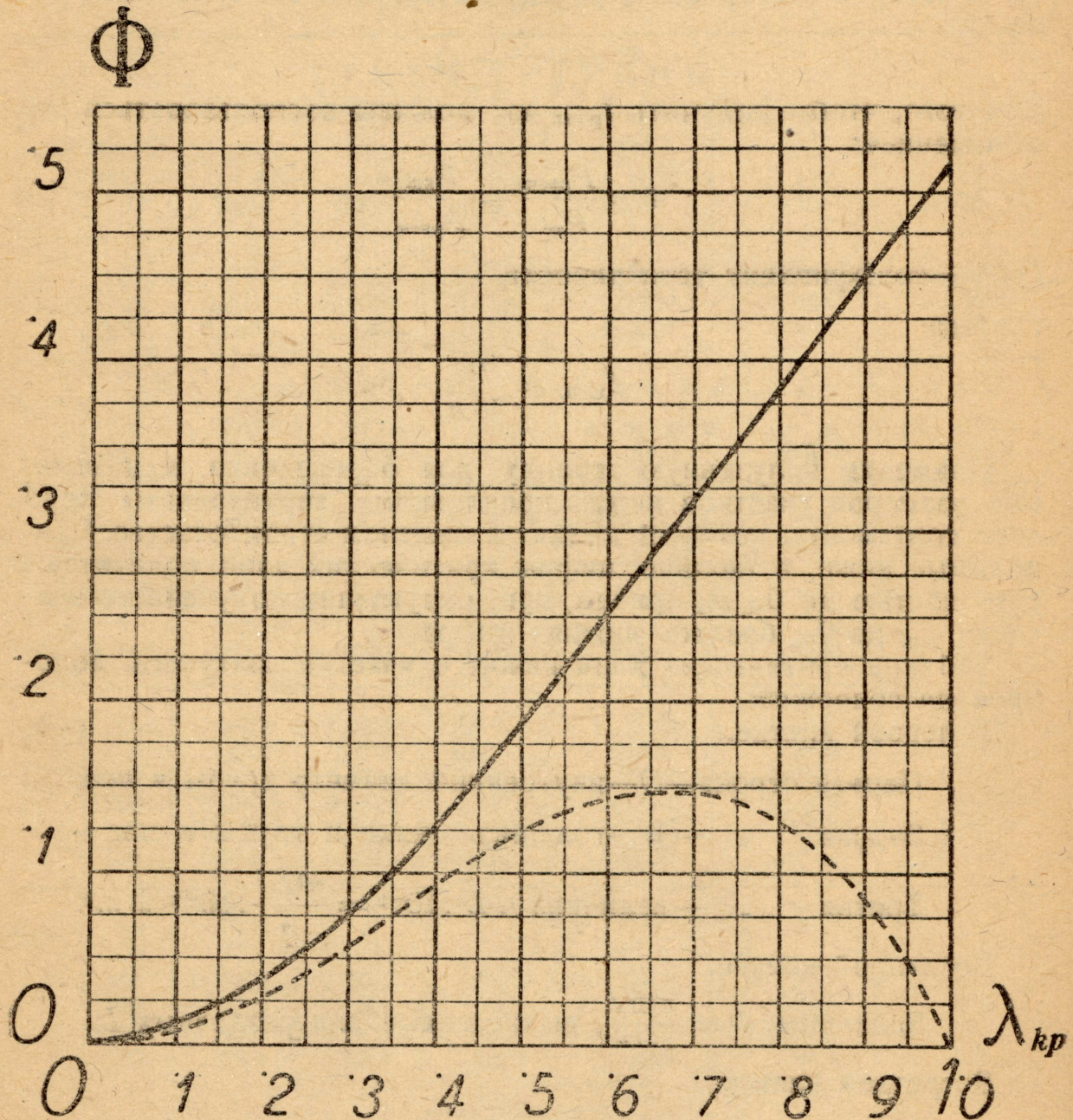
$$\mu = 0.729.$$

Таблица значений Φ и $\lambda_{кр}$.

α	$\lambda_{кр.}$	$\Delta\lambda_{кр.}$	Φ	$\Delta\Phi$	α	$\lambda_{кр.}$	$\Delta\lambda_{кр.}$	Φ	$\Delta\Phi$
0,001	0,0263		0,0007		9	0,2145		0,0411	
		0,0257		0,0019			0,0211		0,0070
2	0,0520		0,0026		0,010	0,2356		0,0490	
		0,0249		0,0031			0,0206		0,0083
3	0,0769		0,0057		11	0,2562		0,0573	
		0,0244		0,0041			0,0202		0,0087
4	0,1013		0,0097		12	0,2764		0,0660	
		0,0237		0,0050			0,0197		0,0089
5	0,1250		0,0147		13	0,2961		0,0749	
		0,0232		0,0056			0,0193		0,0091
6	0,1482		0,0203		14	0,3154		0,0840	
		0,0227		0,0064			0,0189		0,0093
7	0,1709		0,0267		15	0,3343		0,0934	
		0,0220		0,0070			0,0185		0,0095
8	0,1929		0,0337		16	0,3528		0,1029	
		0,0216		0,0074			0,0182		0,0096

α	$\lambda_{кр.}$	$\Delta\lambda_{кр.}$	Φ	$\Delta\Phi$	α	$\lambda_{кр.}$	$\Delta\lambda_{кр.}$	Φ	$\Delta\Phi$
17	0,3710		0,1125		44	0,7542		0,3628	
		0,0177		0,0097			0,0113		0,0080
18	0,3887		0,1222		45	0,7655		0,3708	
		0,0174		0,0098			0,0111		0,0078
19	0,4061		0,1320		46	0,7766		0,3786	
		0,0171		0,0099			0,0110		0,0078
0,020	0,4232		0,1419		47	0,7876		0,3864	
		0,0167		0,0099			0,0108		0,0076
21	0,4399		0,1518		48	0,7984		0,3940	
		0,0164		0,0099			0,0107		0,0075
22	0,4563		0,1617		49	0,8091		0,4015	
		0,0161		0,0099			0,0106		0,0074
23	0,4724		0,1716		0,050	0,8197		0,4089	
		0,0150		0,0099			0,0104		0,0073
24	0,4883		0,1815		51	0,8301		0,4162	
		0,0155		0,0098			0,0103		0,0072
25	0,5038		0,1913		52	0,8404		0,4234	
		0,0152		0,0098			0,0101		0,0070
26	0,5190		0,2011		53	0,8505		0,4304	
		0,0150		0,0098			0,0101		0,0070
27	0,5340		0,2109		54	0,8606		0,4374	
		0,0147		0,0097			0,0099		0,0069
28	0,5487		0,2206		55	0,8705		0,4443	
		0,0145		0,0096			0,0097		0,0067
29	0,5632		0,2302		56	0,8802		0,4510	
		0,0142		0,0095			0,0097		0,0066
0,030	0,5774		0,2397		57	0,8899		0,4576	
		0,0139		0,0095			0,0096		0,0066
31	0,5913		0,2492		58	0,8995		0,4642	
		0,0138		0,0093			0,0094		0,0064
32	0,6051		0,2585		59	0,9089		0,4706	
		0,0135		0,0093			0,0094		0,0064
33	0,6186		0,2678		0,060	0,9183		0,4770	
		0,0133		0,0092			0,0092		0,0062
34	0,6319		0,2770		61	0,9275		0,4832	
		0,0131		0,0091			0,0091		0,0062
35	0,6450		0,2861		62	0,9366		0,4894	
		0,0129		0,0089			0,0091		0,0060
36	0,6579		0,2950		63	0,9457		0,4954	
		0,0126		0,0089			0,0089		0,0060
37	0,6705		0,3039		64	0,9546		0,5014	
		0,0125		0,0088			0,0088		0,0058
38	0,6830		0,3127		65	0,9634		0,5072	
		0,0123		0,0086			0,0088		0,0058
39	0,6953		0,3213		66	0,9722		0,5130	
		0,0122		0,0085			0,0087		0,0057
0,040	0,7075		0,3298		67	0,9809		0,5187	
		0,0119		0,0085			0,0085		0,0056
41	0,7194		0,3383		68	0,9894		0,5243	
		0,0118		0,0083			0,0085		0,0056
42	0,7312		0,3466		69	0,9979		0,5298	
		0,0116		0,0081					
43	0,7428		0,3547		0,0693	1,0000		0,5311	
		0,0114		0,0081					

Диаграмма $\Phi - \lambda_{кр.}$



Черт. № 2.

На диаграмме $\Phi - \lambda_{кр.}$ сплошной линией дана кривая, выражающая зависимость, приводимую здесь, в параметрической форме:

$$\Phi = \frac{3(1 - 4\alpha^2)}{80\alpha} \lambda_{кр.}^3$$

$$\lambda_{кр.} = \frac{8\alpha}{3 + 40\alpha - 48\alpha^2}$$

Пунктирная кривая относится к грубо-приближенному расчету, о котором говорится в конце статьи. Она выражает зависимость:

$$\Phi = \lambda^2 (1 - \lambda).$$

Для того, чтобы получить $l_{\text{расч.}}$ мы должны воспользоваться соотношением:

$$n = \frac{P_{\text{расч.}}}{P_{\text{кр.}}} = \frac{l_{\text{кр.}}^2}{l_{\text{расч.}}^2}$$

где n —коэффициент устойчивости.

Отсюда:

$$l_{\text{расч.}} = \frac{l_{\text{кр.}}}{\sqrt{n}}$$

Применим полученную таблицу для определения минимальных размеров участков между креплениями вертикальных труб того сортамента, который принят в шахтном строительстве. Приводимые ниже, в таблице, цифры критических длин подсчитаны с точностью до 0.1 m , причем, при округлении полученного значения $l_{\text{кр.}}$ до 0.1, бралась нижняя цифра.

Таблица критических длин нижнего участка шахтного водопровода содержит:

В первой клетке.

Первая строка— D —внутренний диаметр трубы в mm .

Вторая „ — a —толщина стенки и трубы в mm .

Третья „ — величина $\Phi L^3 \cdot 10^{-2} = \frac{\pi^2 EJ}{q} \cdot 10^{-2}$ в m^3 .

Во второй клетке.

Величины $\Phi = \frac{\pi^2 EJ}{qL^3}$, вычисленные для различных L .

В третьей клетке.

Полученные величины $l_{\text{кр.}}$ в m , для различных L .

Из рассмотрения цифр $l_{\text{кр.}}$ для труб шахтного водопровода видно, что при коэффициенте устойчивости, даже равном 9, мы имеем возможность делать, для наиболее низкого участка трубы, на расстоянии:

$$l_{\text{расч.}} = \frac{l_{\text{кр.}}}{\sqrt{9}} = \frac{l_{\text{кр.}}}{3}$$

Таким образом, в самом худшем случае, при чугунных трубах, крепления должны становиться не ближе 13 m , и, при стальных трубах—не ближе 12 m , друг от друга.

Таблица критических длин нижнего участка шахтного вертикального водопровода.

ТРУБЫ ЧУГУННЫЕ

D mm	100	125	150	200	250	300	
a mm	8,5	9,0	9,5	10,0	11,5	12,5	
$\Phi L^3 \cdot 10^{-2} m^3$	2030	3066	4340	7550	11650	16625	
Φ	50	1,6240	2,4528	3,4720	6,0400	9,3200	13,3000
Lm	100	0,2030	0,3066	0,4340	0,7550	1,1650	1,6625
	150	0,0601	0,0908	0,1286	0,2237	0,3452	0,4926
$l_{крт}$	50	К р и т и ч е с к а я д л и н а б о л ь ш е д л и н ы					
Lm	100	51,2	67,4	85,6	83,0	109,4	141,2
	150	39,3	50,9	60,0			

ТРУБЫ СТАЛЬНЫЕ

D mm	100	125	150	200	250	300	
a mm	3,75	4,0	4,5	6,5	7,0	7,5	
$\Phi L^3 \cdot 10^{-2} m^3$	3747	5790	8300	14830	22980	32870	
Φ	50	2,9976	4,6320	6,6400	11,8640	18,3840	26,2960
Lm	100	0,3747	0,5790	0,8300	1,4830	2,2980	3,2870
	150	0,1110	0,1716	0,2459	0,4394	0,6809	0,9739
	200	0,0468	0,0724	0,1038	0,1854	0,2873	0,4109
	250	0,0240	0,0371	0,0531	0,0949	0,1471	0,2104
	300	0,0139	0,0214	0,0307	0,0549	0,0851	0,1217
$l_{крт}$	50	К р и т и ч е с к а я д л и н а					
Lm	100	77,1	б о л ь ш е д л и н ы			129,5	164,5
	150	54,9	70,1	85,0	98,9	129,5	164,5
	200	45,9	58,1	70,9	84,3	107,8	133,3
	250	40,3	50,6	61,5	73,6	95,3	116,3
	300	36,4	45,4	55,0			

В том случае, если верхний конец вертикальной трубы несет еще добавочную нагрузку, в виде веса различных деталей тяжелой арматуры и т. д., то расчет $l_{кр}$ должен вестись таким образом.

Пусть вертикальная труба имеет длину L при весе ее G . Если вес добавочного груза равен G_0 , то мы можем его представить как вес добавочной трубы, длины L_0 , того же поперечного сечения и материала.

В самом деле:

$$\frac{G}{L} = q = \frac{G_0}{L_0}$$

отсюда:

$$L_0 = L \frac{G_0}{G}.$$

Тогда можно считать, что мы имеем водопровод с трубой, длины:

$$L_1 = L + L_0 = L \left(1 + \frac{G_0}{G} \right)$$

и величина, характеризующая степень устойчивости трубы, представится:

$$\Phi = \frac{\pi^2 EJ}{q(L + L_0)^3} = \frac{\pi^2 EJ \cdot G^2}{L^2(G + G_0)^3}$$

Небезинтересным является сравнение расчета $l_{кр.}$ нижнего участка стержня, с учетом собственного веса последнего, с расчетом, при котором собственным весом участка пренебрегают и считают, что последний нагружен только весом вышележащей части стержня.

При пренебрежении собственным весом нижнего участка, мы должны применить формулу Эйлера. Считая, по прежнему, оба конца участка шарнирными, получим:

$$P_{кр.} = G_{верх} = q(L - l_{кр.}) = \frac{\pi^2 EJ}{l_{кр.}^2}.$$

Откуда, имея $\frac{l}{L} = \lambda$:

$$\Phi = \lambda^2(1 - \lambda) \dots \dots \dots (7)$$

Кривая (7) построена на, приведенном выше, графике пунктиром.

Максимальное значение Φ :

$$\Phi_{max} = 0.148.$$

Заметим, что при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$, $\Phi = 0$.

Из рассмотрения такого грубо-приближенного расчета и иллюстрации его графиком, можно сделать следующие выводы:

1) Если, постепенно, увеличивать λ для стержня, который имеет характеристику устойчивости:

$$\Phi < 0.148$$

то это увеличение может быть проведено, в пределах устойчивости, до λ , определяемого меньшим корнем уравнения:

$$\lambda^2(1 - \lambda) - \Phi = 0.$$

Дальнейшее увеличение λ невозможно, так как это повлечет за собой потерю устойчивости стержня.

2) Если было бы можно безопасно, в смысле сохранения устойчивости, перейти этот предел λ и увеличивать далее, то, по достижении λ величины, определяемой вторым, большим корнем, приведенного выше уравнения, стержень опять приобретет устойчивость. Таким образом, при приближенном расчете получаются две различные критические длины нижнего участка.

3) Объясняется это тем, что при исключении из рассмотрения действия собственного веса нижнего участка, мы можем иметь два случая на пределе устойчивости. В первом случае — короткий стержень, нагруженный большим весом вышележащей его части и, во втором — длинный, для которого вышележащая короткая часть дает достаточной величины вес, чтобы последний равнялся его критической силе.

4) Стержни, имеющие $\Phi > 0$.¹⁴⁸ дадут для λ фиктивные значения и, поэтому, рассчитаны этим способом, вообще, быть не могут.

Нет никакой необходимости давать более подробный анализ получаемой, при применении грубо-приближенного способа расчета, ошибки. Кривые графика $\Phi - \lambda_{кр.}$ настолько ясно рисуют количественное и качественное различие расчетов, что приведенные цифр становится излишним.