

## Инфлюэнтный метод решения балок.

В настоящей статье автором предлагается новый метод решения балок, т. е. нахождения для них реакций, моментов в опорах с защемлением, углов поворота сечений и стрел прогиба в выбранных точках на оси балки.

Все методы и способы, предлагаемые для решения балок, вообще говоря, преследуют три основные цели:

1. Дать решению большую наглядность, так как это облегчает поверку решения.

2. Ускорить, зачастую весьма длительный, процесс определения лишних неизвестных в статически-неопределимых балках и деформаций во всяких балках, имеющих разнообразную и сложную нагрузку.

3. Получить искомые величины, минуя или сокращая до минимума определение промежуточных, не нужных для самого расчета балки, величин, как например, произвольных постоянных.

Наибольшей наглядностью решения, бесспорно, обладает, исторически самый первый, метод интегрирования дифференциального уравнения упругой линии, которую выполняет изогнутая ось балки. Но, в смысле скорости решения, этот метод почти всегда оставляет на последнем месте пользующегося им, по сравнению с применяющими другие методы. Эффект ускорения может быть достигнут только в том случае, если при составлении дифференциальных уравнений и последующем интегрировании их будут применены приемы, упрощающие решение. К таким приемам относятся:

1. Удачный выбор начала координат, одного или нескольких, с таким расчетом, чтобы одно или оба произвольных постоянных интегрирования, для одного или несколько участков, превратились в нули.

2. Взятие изгибающего момента слева или справа от произвольного сечения, исходя из соображений получения более простого выражения момента или из соображений, указанных в пункте 1.

3. Прием применения дополнительной нагрузки при распределенных грузах.

4. Применение правила Клэбша, где оно может быть приложено непосредственно.

5. Искусственное усложнение аргумента, с таким расчетом, чтобы правило Клэбша можно было применить там, где оно, непосредственно, применено быть не может.

6. Использование механической симметрии системы.

Но при большом числе участков с разнообразной нагрузкой или большим числе опор все эти приемы мало упрощают решение. Буквенное решение будет обладать необычайной громоздкостью, цифровое же, при операциях интегрирования и подстановок, даст все шансы наделать арифметических ошибок. Поверка решения может быть сделана путем повторного решения той же задачи.

Графоаналитический метод имеет меньшую наглядность, но простота аналогии при переходе от  $q_x$  к  $M_x$ , от  $Q_x$  к  $tg\varphi_x$  и от  $M_x$  к  $f_x$  позволяет легко принять апперцепцию стрелы прогиба, как условного (фиктив-

ного) изгибающего момента в балке, нагруженной распределенным грузом, в виде моментной площади, и угла поворота поперечного сечения балки, как условного изгибающего момента от нагрузки ее площадью срезающих сил.

Опять-таки, при разнообразии нагрузок и увеличении числа опор, появляются трудности, особенно заметные при загрузке отдельных участков балки распределенным грузом, закон изменения ординат которого выражается какой-либо аналитической кривой. Приемы в виде временного отбрасывания опор и включения и выключения временных распределенных нагрузок, конечно, облегчают решение задачи, но только для балок простейшего типа.

Метод Кастильяно, почти совершенно незаменимый при решении кривоосных балок и жестких рам, дает для прямых балок, зачастую, решение гораздо более сложное, нежели даваемое простым интегрированием.

Методы приближенного решения, очень простые и ясные для представления, в значительной мере суживают поле их применения благодаря тому, что при применении этих методов, мы должны заранее наметить примерную форму упругой линии и принять, для каждого конкретного случая, кривую, определенным образом параметризованную. Последнее требует большого навыка, не всегда дает возможность оценить величину ошибки и практически, эти методы не могут быть применены даже при умеренном числе опор.

Появившийся не так давно метод применения моментов высоких степеней и дающий довольно быстрое решение балок однако не завоевал еще право гражданства, ввиду значительной отвлеченности применяемых формул.

Наконец метод Клапейрона, не имея, правда, преимуществ наглядности, если говорить о формальном применении его уравнения, превосходит все другие методы по скорости определения расчетных величин: опорных моментов и реакций. Что же касается определения деформаций, то их, все равно, приходится находить каким-либо другим методом.

Перечислив только главнейшие методы решения балок, автор предлагает на рассмотрение его собственный метод, воздерживаясь, пока, от оценки последнего. Основа инфлюэнтного метода очень несложна: она заключается в том, что для простой консольной балки находят величину действия (стрелу прогиба, угол поворота поперечного сечения) в произвольной точке от двух сосредоточенных нагрузок (сил, изгибающих моментов), находящихся слева и справа от рассматриваемой точки.

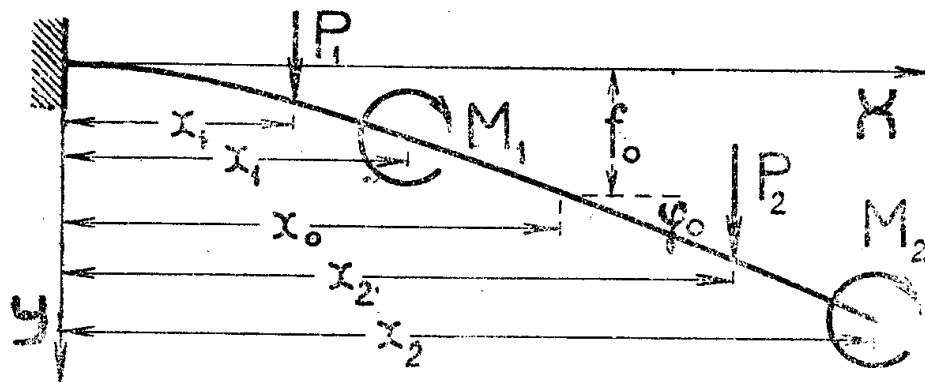
При наличии на балке нагрузки распределенной, каждый элемент этой нагрузки рассматривается, как элементарная сосредоточенная сила, что приводит к решению определенного интеграла. Развитие метода, в применении его к балкам всякого вида, заключается в превращении данной балки в условно-консольную и дает возможность применить основные формулы, полученные для простой консоли. Инфлюэнтный метод дает, одновременно, возможность найти и реакции в статистически-неопределимых балках и величины деформаций в произвольной точке любой балке.

Переходя к изложению метода, автор должен сказать, что в пределах журнальной статьи он не может исчерпать решения разного рода типовых балок и ограничивается минимумом материала, необходимого при решении разнородных балок. Также условия объема статьи заставляют его отказаться от подробного описания приближенного решения балок табличным путем, равно как и от приведения в тексте таблиц ускоренного решения. Лиц, интересующихся более подробным освещением приложений инфлюэнтного метода, автор отсылает к его книге, того же названия, что и настоящая статья.

### I. Деформации простой консоли.

Примем раз навсегда начало координат в защемлении и ось  $Y$  направленной вниз. Абсциссу той точки оси балки, где нам требуется определить действие нагрузки, назовем  $x_0$ , угол поворота сечения балки в этой точке  $\varphi_0$  и стрелу прогиба  $f_0$ .

Пусть (черт. 1) имеем правее и левее выбранной точки по сосредото-



Черт. 1.

ченной силе и, сосредоточенному же, изгибающему моменту. Угол поворота и стрела прогиба в выбранной точке упругой линии будут:

$$EJ\varphi_0 = \frac{P_1 x_1^2}{2} + M_1 x_1 + P_2 x_0 (x_2 - x_0) + \frac{P_2 x_0^2}{2} + M_2 x_0$$

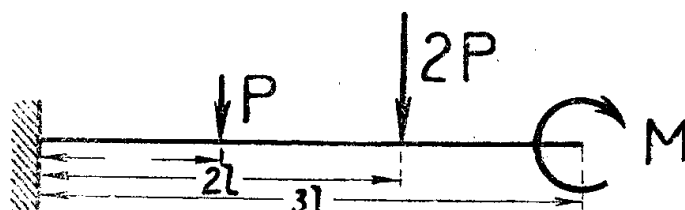
$$EJf_0 = \frac{P_1 x_1^3}{3} + \frac{P_1 x_1^2}{2} (x_0 - x_1) + \frac{M_2 x_1 (2x_0 - x_1)}{2} + \frac{P_2 (x_2 - x_0) x_0^2}{2} + \frac{M_2 x_0^2}{2}$$

При наличии ряда сил и моментов, полученные уравнения превращаются в следующие.

$$EJ\varphi_0 = \frac{1}{2} \sum P_1 x_1^2 + \frac{1}{2} x_0 \sum P_2 (2x_2 - x_0) + \sum M_1 x_1 + x_0 \sum M_2 \dots \dots \dots (1)$$

$$EJf_0 = \frac{1}{6} \sum P_1 x_1^2 (3x_0 - x_1) + \frac{1}{6} x_0^2 \sum P_2 (3x_2 - x_0) + \frac{1}{2} \sum M_1 x_1 (2x_0 - x_1) + \frac{1}{2} x_0^2 \sum M_2 \dots \dots \dots (2)$$

Пример 1. Определить (черт. 2) деформац. в точке прилож. силы  $2P$ .  $x_0 = 2l$

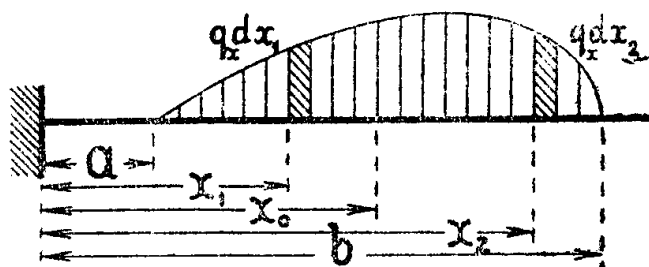


Черт. 2.

$$EI\varphi_0 = \frac{1}{2} Pl^2 + \frac{1}{2} 2P \cdot 2l \cdot (2 \cdot 2l - 2l) + 2l M = \frac{9}{2} Pl^2 + 2Ml$$

$$EJf_0 = \frac{1}{3} P \cdot l^2 (3 \cdot 2l - l) + \frac{1}{6} 2P \cdot 4l^2 (3 \cdot 2l - 2l) + \frac{1}{2} M \cdot 4l^2 = \frac{37}{6} Pl^3 + 2Ml^2$$

Имеем (черт. 3) распределенную нагрузку, закон распределения которой имеет аналитическое выражение. Найдем в точке, с абсциссой  $x_0$ , деформации. Здесь знак  $\Sigma$  превратится в  $\int$ .



Черт. 3.

$$EI\varphi_0 = \frac{1}{2} \left[ \int_a^{x_0} q_x x_1^2 dx_1 + x_0 \int_{x_0}^b q_x (2x_2 - x_0) dx_2 \right]$$

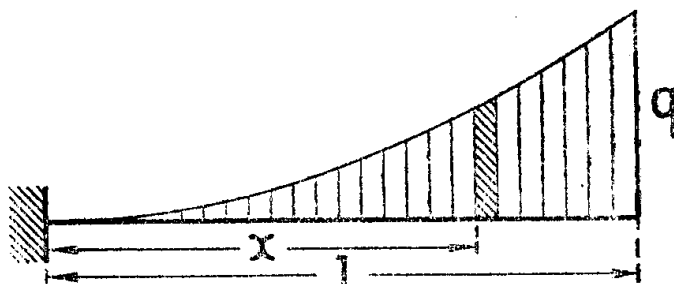
$$EI f_0 = \frac{1}{6} \left[ \int_a^{x_0} q_x x_1^2 (3x_0 - x_1) dx_1 + x_0^2 \int_{x_0}^b q_x (3x_2 - x_0) dx_2 \right]$$

Нет необходимости считать последние уравнения за особые, так как при составлении их мы исходим, все равно, из уравнений (1) и (2).

Пример 2. Черт. 4. Определить стрелу прогиба на конце консоли.

Уравнение кривой нагрузки:

$$q_x = \frac{q}{l^2} x^2$$

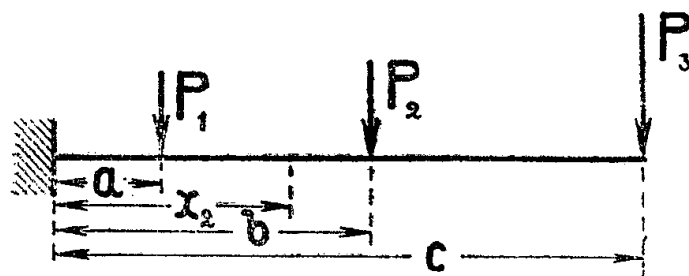


Черт. 4.

$$EJf_l = \frac{q}{6l^2} \int_0^l x^2 x^2 (3l - x) dx = \frac{q}{6l^2} \left[ \frac{3}{5} lx^5 - \frac{1}{6} x^6 \right]_0^l = \frac{13}{180} ql^4$$

Определяя деформации в произвольной точке какого-либо участка балки, мы, тем самым, пишем уравнение углов поворота оси или уравнение упругой линии в этом участке.

Пример 3. Чертеж 5. Написать уравнение упругой линии для второго участка.



Черт. 5.

$$(2) \quad 6EJy_2 = P_1 a^2 (3x_2 - a) + P_2 x_2^2 (3b - x_2) + P_3 x_2^2 (3c - x_2)$$

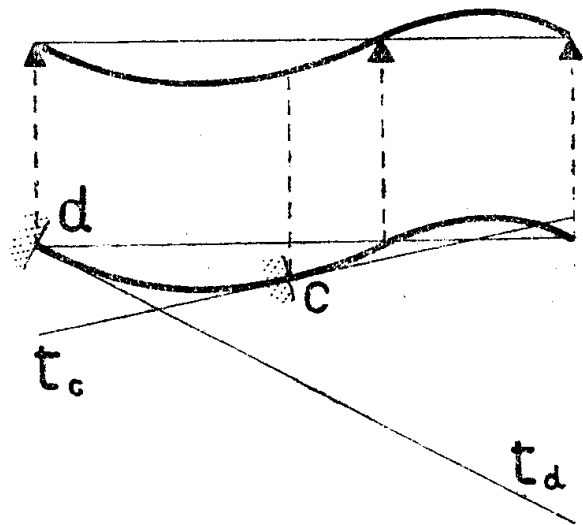
## II. Общие установки при решении балок.

Легкость получения уравнений для деформаций простой консольной балки, при применении инфлюэнтного метода, заставляет искать для балок всех видов и типов возможности рассматривать любую балку, как чисто-консольную. Если хотя одна из крайних опор балки имеет защемление, то трансформация балки в простую консоль будет заключаться в мысленном удалении всех ее опор, кроме одной—с защемлением. Эта последняя и будет опорой консольной балки, все же остальные будут просто местами приложения сосредоточенных нагрузок-реакций, добавочных к внешней заданной нагрузке. Отличие такой условно-консольной балки от действительной консоли (при той же внешней нагрузке) будет заключаться в том,

что у первой, до ее решения, уже будут известны некоторые деформации в точках приложения нагрузок-реакций. При опорах, лежащих на одной прямой, в опорных точках условная консоль будет иметь стрелы прогиба равными нулю; при опорах, находящихся на различных уровнях, условная консоль будет иметь в опорных точках стрелы прогиба равными ординатам этих опор в отсчете их от опоры с защемлением. Наконец, при наличии второй крайней опоры с защемлением, угол поворота поперечного сечения балки в точке, соответствующей указанной опоре, должен быть равен нулю.

Итак всякая балка, имеющая хотя бы одну крайнюю опору с защемлением, может быть рассматриваема, как консольная балка, у которой в определенных местах (в точках, где находятся опоры действительной балки) действуют неизвестные сосредоточенные нагрузки (реакции-силы, реакции-моменты), но зато в этих же точках известны некоторые деформации (стрелы прогиба, угол поворота поперечного сечения).

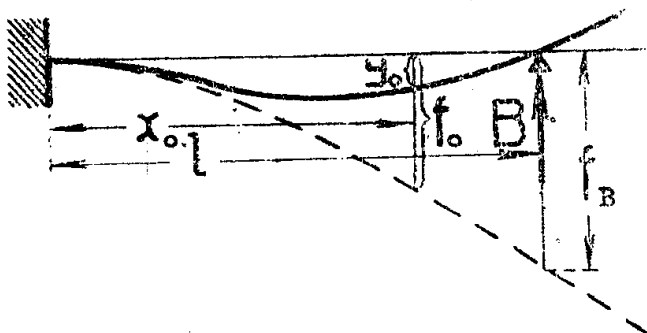
В балках, не имеющих опор с защемлением, мы можем считать условно-защемленным любое поперечное сечение. Чертеж 6 показывает, что, приняв условное защемление в каком-либо произвольном сечении  $c$ , мы разбиваем, тем самым, всю балку на две самостоятельные условные консоли, с общим местом защемления в  $c$ . Понятно, что отсчет деформаций теперь будет вестись не от оси  $X$ , совпадающей с начальной осью балки, а от линии  $t_c$ , касательной к упругой линии в месте условного защемления условных консолей. Касательная  $t_c$  будет начальной осью каждой из условных консолей. Точка условного защемления может быть взята где угодно и не исключена возможность помещения ее на одной из крайних опор, как то имеет место для точки  $d$ ; при этом начальной осью условной консоли будет касательная  $t_d$ .



Черт. 6.

### III. Двухопорная балка с одним защемлением.

Чертеж 7. Превращение такой балки в условно-консольную может быть сделано путем отбрасывания свободной опоры. При этом стрела прогиба условной консоли в точке  $B$  будет равна:



Черт. 7.

При восстановлении же опоры, реакция  $B$  даст равную ей стрелу прогиба:

$$\frac{Bl^3}{3EJ}$$

Из равенства этих стрел, мы получаем значение  $B$ :

$$B = \frac{3EJ}{l^3} f_B \dots (3)$$

Деформация в произвольной точке, с абсциссой  $x_0$  будет равна разности деформаций от внешней нагрузки и реакции  $B$ . Называя (черт. 7) деформации двухопорной балки, соответственно через  $y_0'$  и  $y_0$ , получим:

$$EJ y_0' = EJ \varphi_0 - \frac{1}{2} B x_0 (2l - x_0) \dots \dots \dots (4)$$

$$EJ y_0 = EJ f_0 - \frac{1}{6} B x_0^2 (3l - x_0) \dots \dots \dots (5)$$

$$y_0' = \varphi_0 - \frac{3f_B}{2l^3} x_0 (2l - x_0) \dots \dots \dots (4)$$

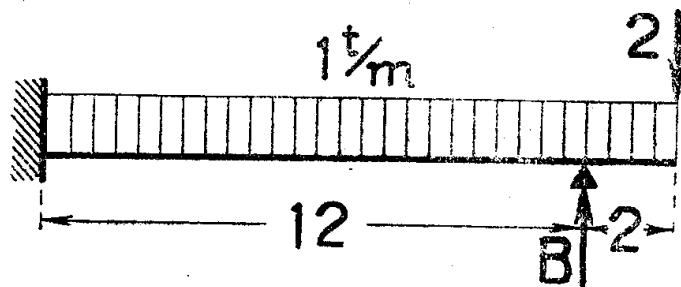
$$y_0 = f_0 - \frac{f_B}{2l^3} x_0^2 (3l - x_0) \dots \dots \dots (5)$$

Для нахождения максимальной стрелы прогиба необходимо решить уравнение:  $y_0' = 0$   
т. е.:

$$\varphi_0 - \frac{3f_B}{2l^3} x_0 (2l - x_0) = 0,$$

и полученное значение  $x_0$  подставить в уравнение (5).

Пример 4. Черт. 8. Определить реакцию  $B$  и положение максимальной стрелы прогиба.



Черт. 8.

$$EJ f_B = \frac{1}{6} \left[ 2 \cdot 12^2 (3 \cdot 14 - 12) + \int_0^{12} x^2 (3 \cdot 12 - x) dx + 12^2 \int_{12}^{14} (3x - 12) dx \right] =$$

$$= 5328 \text{ tm}^3.$$

$$B = \frac{3 \cdot 5328}{12} = 7,514 \text{ t.}$$

Применяем уравнение (4)'.  

$$0 = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{x_0} x^2 dx + x_0 \int_{x_0}^{12} (12x - x_0) dx + x_0 2 (2 \cdot 14 - x_0) \right] -$$

$$- \frac{7,514}{2} x_0 (2 \cdot 12 - x_0)$$

Откуда:  $x_0^2 - 44,243 x_0 + 215 = 0$

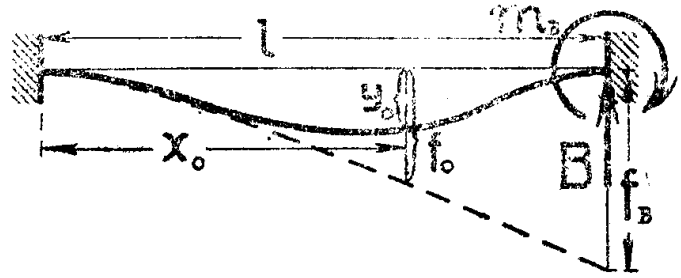
и  $x_0 = 5,57 \text{ m}$

#### IV. Двухопорная балка с двумя защемлениями.

Черт. 9. Так же, как и в предыдущем случае, временное удаление правой опоры превращает рассматриваемую балку в простую консоль со стрелой прогиба, равной  $f_B$  в точке  $B$ . Восстановление опоры связано с приложением силы  $B$  и момента  $m_B$ , которые должны превратить стрелу прогиба и угол поворота сечения в точке  $B$  в нуль. Эти условия напишутся:

$$EJ\varphi_B - \frac{Bl^2}{2} + m_B l = 0;$$

$$EJf_B - \frac{Bl^3}{3} + \frac{m_B l^2}{2} = 0.$$



Черт. 9.

Отсюда определяются реакции правой опоры:

$$B = \frac{6EJ}{l^3} [2f_B - l\varphi_B]; \dots \dots \dots (6')$$

$$m_B = \frac{2EJ}{l^2} [3f_B - 2l\varphi_B]; \dots \dots \dots (7')$$

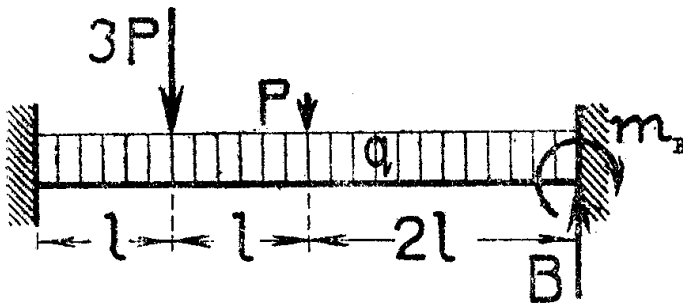
Для данной балки реакции могут быть выражены в общем виде через внешнюю нагрузку:

$$B = \frac{1}{l^3} [\Sigma Px^2(3l - 2x) + 6\Sigma Mx(l - x)]; \dots \dots \dots (6)$$

$$m_B = \frac{1}{l^2} [\Sigma Px^2(l - x) + \Sigma Mx(2l - 3x)]; \dots \dots \dots (7)$$

Пример 5. Черт. 10. Определить реакции правой опоры.

Применяем уравнения (6) и (7).



Черт. 10.

$$B = \frac{1}{64l^3} [3Pl^2(12l - 2l) + P \cdot 4l^2(12l - 4l) + q \int_0^{4l} x^2(12l - 2x) dx] = \frac{31}{32} P + 2ql;$$

$$m_B = \frac{1}{16l^2} [3P \cdot l^2(4l - l) + P \cdot 4l^2(4l - 2l) + q \int_0^{4l} x^2(4l - x) dx] = \frac{17}{16} Pl + \frac{64}{3} ql^2;$$

Деформация, в произвольной точке с абсциссой  $x_0$ , найдется, как разность деформаций от внешней нагрузки и от реакций правой опоры. (Черт. 9).

$$EJ y_0' = EJ \varphi_0 - \frac{B}{2} x_0 (2l - x_0) + m_B x_0 \dots \dots \dots (8)'$$

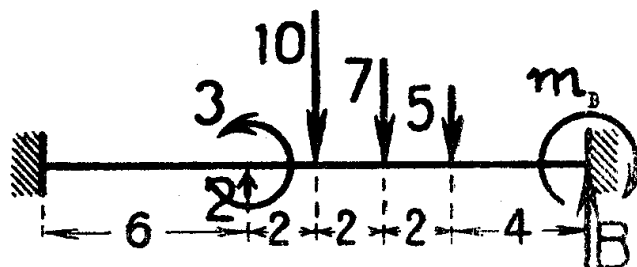
$$EJ y_0 = EJ f_0 - \frac{B}{6} x_0^2 (3l - x_0) + \frac{m_B}{2} x_0^2 \dots \dots \dots (9)'$$

Заменяя  $B$  и  $m_B$  их значениями (6) и (7), получаем:

$$EJ y_0' = EJ \varphi_0 - \frac{x_0}{2l^3} \left[ l(4l - 3x_0) (\Sigma Px^2 + 2\Sigma Mx) - \right. \\ \left. - 2(l - x_0) (\Sigma Px^3 + 3\Sigma Mx^2) \right] \dots \dots \dots (8)$$

$$EJ y_0 = EJ f_0 - \frac{x_0^2}{6l^3} \left[ 3l(2l - x_0) (\Sigma Px^2 + 2\Sigma Mx) - \right. \\ \left. - (3l - 2x_0) (\Sigma Px^3 + 3\Sigma Mx^2) \right] \dots \dots \dots (9)$$

Пример 6. Черт. 11. Найти стрелу прогиба в точке:  $x_0 = 12 \text{ м}$ .



Черт. 11.

Сначала найдем значение величины  $EJ f_{12}$

$$EJ f_{12} = \frac{1}{6} \left[ 10 \cdot 8^2 (36 - 8) + 7 \cdot 10^2 (36 - 10) + \right. \\ \left. + 5 \cdot 12^2 (36 - 12) - 2 \cdot 6^2 (36 - 6) \right] - \frac{3}{2} 6 (24 - 6) = 8378 \text{ tm}^3$$

$$EJ y_0 = 8378 - \frac{12^2}{6 \cdot 16^3} \left[ 3 \cdot 16 (32 - 12) (10 \cdot 8^2 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 12^2 - 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6) - \right. \\ \left. - (48 - 24) (10 \cdot 8^3 + 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 12^3 - 2 \cdot 6^3 - 3 \cdot 3 \cdot 6^2) \right] \cong 211 \text{ tm}^3$$

Для нахождения максимальной стрелы прогиба следует сначала найти ее абсциссу, решая уравнение:

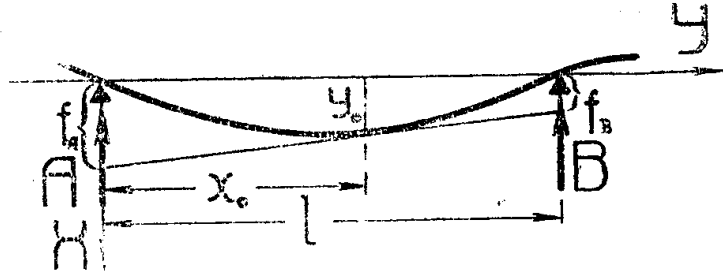
$$y_0' = 0$$

и полученное значение абсциссы подставить в уравнение (9).



### V. Двухопорные балки со сводными опорами.

Превращение балки со свободными опорами в условную консоль не представляет никаких затруднений. В самом деле, (Черт. 12) проводя касательную к упругой линии через точку с некоторой абсциссой  $x_0$ , мы можем считать поперечное сечение, совпадающее с точкой касания, условно-зашемленной. В таком случае, касательная явится начальной осью двух консольных балок: одной правее и другой левее зашемленного сечения. При этом реакции  $A$  и  $B$  должны конечно войти в число внешних нагрузок и отсчет стрел прогиба условных консолей должен вестись от касательной, как от начальной оси. Левая условная консоль будет иметь в точке опоры  $A$  стрелу прогиба  $f_A$  и правая консоль, в точке опоры  $B$ , стрелу  $f_B$ . Эти стрелы весьма легко определить, считая каждую часть отдельной балки за самостоятельную консоль.



Черт. 12.

Определяем деформации в точке с абсциссой  $x_0$ :

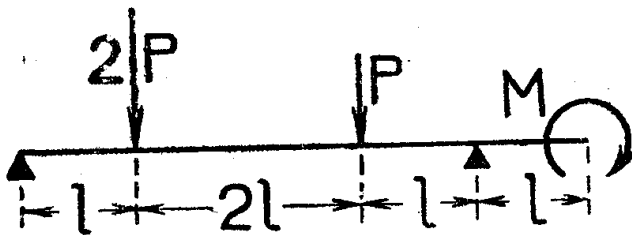
$$y_0 = \frac{f_B - f_A}{l} \dots \dots \dots (10)$$

$$y_0 = f_A + \frac{f_B - f_A}{l} x_0 = \frac{1}{l} [f_A(l - x_0) + f_B x_0] \dots \dots \dots (11)$$

Нет необходимости выражать в общем виде условные стрелы прогиба в опорах через внешнюю нагрузку.

Пример 7. Черт. 13. Определить стрелу прогиба в середине пролета, между опорами.

Реакции найдутся:



Черт. 13.

$$\sum M_A = 0 = 2Pl + P \cdot 3l + M - B \cdot 4l$$

$$A = \frac{7}{4}P - \frac{M}{4l}, \quad B = \frac{5}{4}P + \frac{M}{4l}$$

Стрелы прогиба условных консолей в  $A$  и  $B$ : (при  $x_0 = 2l$ )

$$EJf_A = \frac{A}{3} 8l^3 - \frac{2P}{6} l^2 (6l - l) = 3Pl^3 - \frac{2}{3} Ml^2,$$

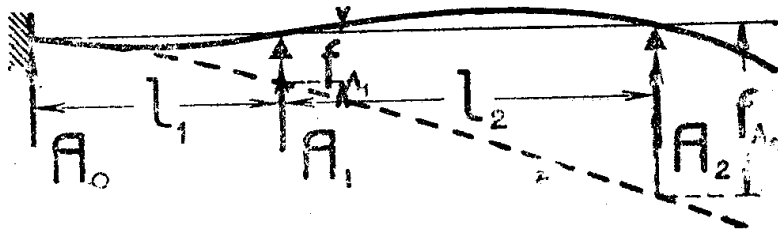
$$EJf_B = \frac{B}{3} 8l^3 - \frac{P}{6} l^2 (6l - l) - \frac{M}{2} 4l^2 = \frac{5}{2} Pl^3 - \frac{4}{3} Ml^2$$

Полученные величины подставляем в (11):

$$EJ y_{2l} = \frac{1}{4l} \left[ \left( 3Pl^3 - \frac{2}{3} Ml^2 \right) 2l + \left( \frac{5}{2} Pl^3 - \frac{4}{3} Ml^2 \right) 2l \right] = \frac{11}{4} Pl^3 - Ml^2.$$

## VI. Трехопорная балка с одним защемлением.

Черт. 14. Условимся в балках, имеющих более двух опор, называть все опоры и реакции в них буквою  $A$  с индексом, указывающим порядковый № опоры. Крайняя левая опора будет иметь реакцию  $A_0$ , следующие же соответственно:  $A_1$ ,  $A_2$  и т. д. Длины пролетов обозначим буквою  $l$  с нумерным индексом пролета:  $l_1$ ,  $l_2$ , и т. д.



Черт. 14.

Применение прежнего приема временного отбрасывания опор дает следующие условия для опорных точек оси балки:

$$EJ u_{A_1} = 0 = EJ f_{A_1} - \frac{A_1 l_1^3}{3} - \frac{A_2 l_1^2}{6} [3(l_1 + l_2) - l_1] =$$

$$= f_{A_1} - \frac{A_1 l_1^3}{3} - \frac{A_2 l_1^2}{6} (2l_1 + 3l_2)$$

$$AJ u_{A_2} = 0 = EJ f_{A_2} - \frac{A_1}{6} [3(l_1 + l_2) - l_1] - \frac{A_2}{3} (l_1 + l_2)^3 =$$

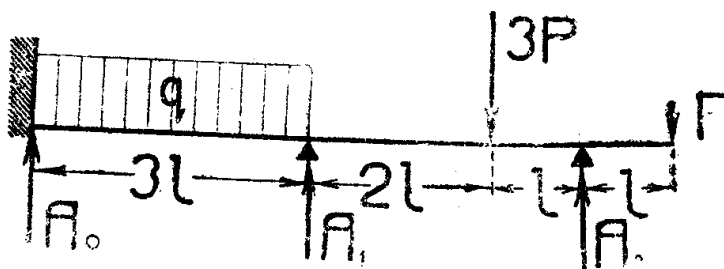
$$= f_{A_2} - \frac{A_1}{6} l_1^2 (l_1 + 3l_2) - \frac{A_2}{3} (l_1 + l_2)^3$$

Совместное решение последних уравнений дает для реакций  $A_1$  и  $A_2$  выражения:

$$A_1 = 6EJ \frac{2(l_1 + l_2)^3 f_{A_1} - l_1^2 (2l_1 + 3l_2) f_{A_2}}{l_1^3 l_2^2 (3l_1 + 4l_2)} \dots \dots \dots (12)$$

$$A_2 = 6EJ \frac{2l_1 f_{A_2} - (2l_1 + 3l_2) f_{A_1}}{l_1 l_2^2 (3l_1 + 4l_2)} \dots \dots \dots (13)$$

Пример 8. Черт. 15. Определить реакции свободных опор.  $q = \frac{4P}{l}$ .



Черт. 15.

$$6EJ f_{A_1} = \frac{4P}{l} \int_0^{3l} x^2 (9l - x) dx + 3P \cdot 9l^2 (15l - 3l) +$$

$$+ P \cdot 9l^2 (21l - 3l) = \frac{4P}{l} \left[ 3lx^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^{3l} + 486 Pl^3 = 729 Pl^3.$$

$$6EJf_{A_2} = \frac{4P}{l} \int_0^{3l} x^2 (18l - x) dx + 3P \cdot 25l^2 (18l - 5l) + P \cdot 36l^2 (21l - 6l) =$$

$$= \frac{4P}{l} \left[ 6lx^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^{3l} + 1515Pl^3 = 2182 Pl^3.$$

$$A_1 = \frac{2 \cdot 216l^3 \cdot 729 - 9l^2 \cdot 15l \cdot 2182}{27l^3 \cdot 9l^2 \cdot 21l} Pl^3 = 3,99 P.$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 3l \cdot 2182 - 15l \cdot 729}{3l \cdot 9l^2 \cdot 21l} Pl^3 = 3,80 P.$$

Уравнения деформаций для первого и второго пролетов напишутся так:

$$y_1' = \varphi_1 - \frac{x_1}{2EJ} \left[ A_1 (2l_1 - x_1) + A_2 \left\{ 2(l_1 + l_2) - x_1 \right\} \right] \dots (14)$$

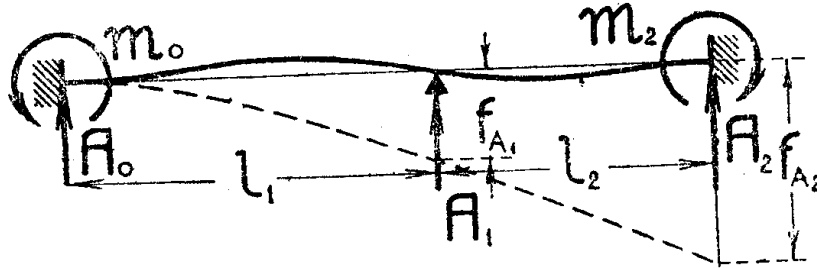
$$y_1 = f_1 - \frac{x_1^2}{6EJ} \left[ A_1 (3l_1 - x_1) + A_2 \left\{ 3(l_1 + l_2) - x_1 \right\} \right] \dots (15)$$

$$y_2' = \varphi_2 - \frac{1}{2EJ} \left[ A_1 x_2^2 + A_2 x_2 \left\{ 2(l_1 + l_2) - x_2 \right\} \right]; \dots (16)$$

$$y_2 = f_2 - \frac{1}{6EJ} \left[ A_1 l_1^2 (3x_2 - l_1) + A_2 x_2^2 \left\{ 3(l_1 + l_2) - x_2 \right\} \right]; \dots (17)$$

### VII. Трехопорная балка с двумя защемлениями.

Черт. 16. В этой балке должны быть выполнены следующие условия:



Черт. 16.

$$EJy_{A_1} = 0 = EJf_{A_1} - \frac{A_1 l_1^3}{3} - \frac{A_2 l_1^2 (2l_1 + 3l_2)}{6} + \frac{m_2 l_1^2}{2};$$

$$EJy_{A_2} = 0 = EJf_{A_2} - \frac{A_1 l_1^2 (2l_1 + 3l_2)}{6} - \frac{A_2 (l_1 + l_2)^3}{3} + \frac{m_2 (l_1 + l_2)}{2};$$

$$EJy'_{A_2} = 0 = EJ\varphi_{A_2} - \frac{A_1 l_1^2}{2} - \frac{A_2 (l_1 + l_2)^2}{2} + m_2 (l_1 + l_2);$$

Откуда получаются выражения для реакций средней и правой опоры:

$$A_1 = \frac{3EJ}{l_1 l_2^2} \left[ (l_1 + l_2)^3 f_{A_1} - l_1^2 (l_1 + 3l_2) f_{A_2} + l_1^2 l_2 (l_1 + l_2) \varphi_{A_2} \right] \dots (18)$$

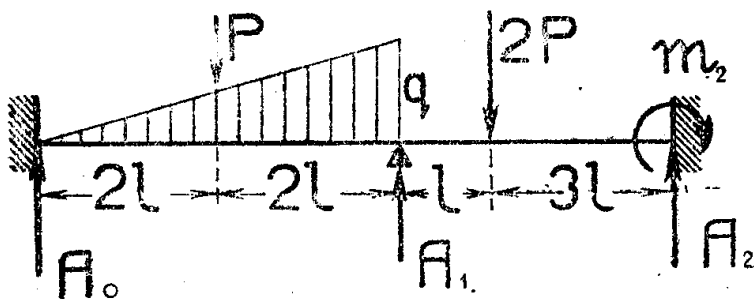
$$A_2 = \frac{3EJ}{l_1 l_2^3 (l_1 + l_2)} \left[ l_1 (l_1 + 4l_2) f_{A_2} - (l_1 + l_2) (l_1 + 3l_2) f_{A_1} - l_1 l_2 (l_1 + 2l_2) \varphi_{A_2} \right] \dots \dots \dots (19)$$

$$m_2 = \frac{EJ}{l_1 l_2^2 (l_1 + l_2)} \left[ 3l_1 (l_1 + 2l_2) f_{A_2} - 3(l_1 + l_2)^2 f_{A_1} - l_1 l_2 (3l_1 + 4l_2) \varphi_{A_2} \right] (20)$$

Нетрудно, в данной балке, выразить все реакции через внешнюю нагрузку, но полученные уравнения будут обладать большой громоздкостью и для пользования будут неудобными. Гораздо лучше вести расчет, определяя предварительно величины деформаций условной консоли на опорах и потом уже делать подстановку найденных величин в уравнения (18), (19)

и (20). При этом проверка решения может быть проведена по частям.

Пример 9. Чертеж 17. Определить зацемяющий момент в правой опоре:  $q = \frac{P}{l}$ .



Черт. 17.

Находим сначала деформации условной консоли в опорных точках.

$$6EJf_{A_1} = P \cdot 4l(12l - 2l) + 2P \cdot 16l^2(15l - 4l) + \frac{P}{4l^3} \int_0^{4l} x^3 (12l - x) dx =$$

$$= 392Pl^3 + \frac{P}{4l} \left[ 3lx^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^{4l} \cong 533Pl^3.$$

$$6EJf_{A_2} = P4l(21l - 2l) + 2P \cdot 25l^2(21l - 5l) + \frac{P}{4l^3} \int_0^{4l} x^3 (21l - x) dx =$$

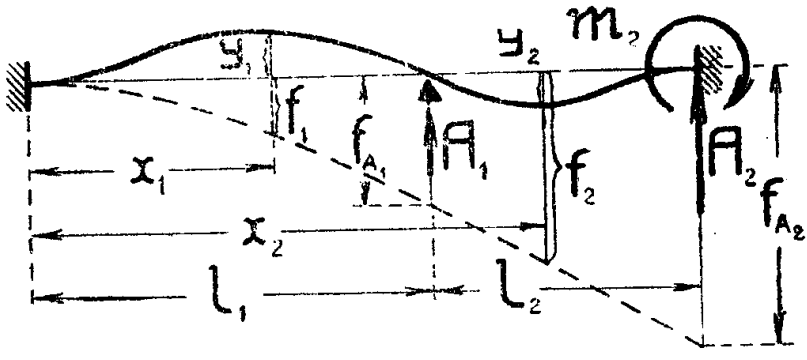
$$= 876Pl^3 + \frac{P}{4l} \left[ \frac{21}{4} x^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^{4l} \cong 1161Pl^3.$$

$$EJ\varphi_{A_2} = P \cdot 4l^2 + 2P \cdot 25l^2 + \frac{P}{4l^2} \int_0^{4l} x^3 dx = 70Pl^2.$$

Применяя уравнение (20), найдем:

$$m_2 = \frac{3}{4l \cdot 9l^2 \cdot 7l} \left[ 12l \cdot 10l \cdot \frac{1161Pl^3}{6} - 3 \cdot 49l^2 \cdot \frac{533Pl^3}{6} - 4l \cdot 3l \cdot 10l \cdot \frac{70Pl^2}{2} \right] \cong 71Pl.$$

Для определения деформаций (чертеж 18) в каждом из пролетов, мы отбрасываем правую опору и превращаем тем балку в условно-консольную. По восстановлении опор, деформации в произвольных точках пролетов найдутся, как разность деформаций условной консоли: от действия внешних нагрузок и от действия реакций приложенных средней и крайней правой опор.



Черт. 18.

Для первого пролета получим:

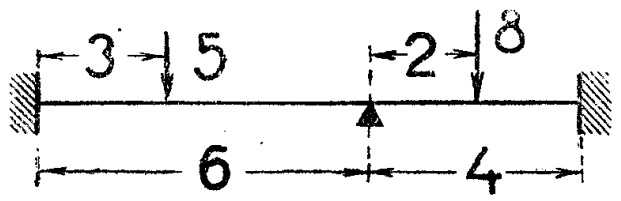
$$EJy_1' = EJ\varphi_1 - \frac{A_1}{2}x_1(2l_1 - x_1) - \frac{A_2}{2}x_1[2(l_1 + l_2) - x_1] + m_2x_1 \dots (21)$$

$$EJy_1 = EJf_1 - \frac{A_1}{6}x_1^2(3l_1 - x_1) - \frac{A_2}{6}x_1^2[3(l_1 + l_2) - x_1] + \frac{m_2}{2}x_1^2 \dots (22)$$

и для второго:

$$EJy_2' = EJ\varphi_2 - \frac{A_1}{2}l_1^2 - \frac{A_2}{2}x_2[2(l_1 + l_2) - x_2] + m_2x_2 \dots (23)$$

$$EJy_2 = EJf_2 - \frac{A_1}{6}l_1^2(3x_2 - l_1) - \frac{A_2}{6}x_2^2[3(l_1 + l_2) - x_2] + \frac{m_2}{2}x_2^2 \dots (24)$$



Черт. 19.

Пример 10. Чертеж 19. Определить угол поворота поперечного сечения балки в точке с абсциссой:  $x_2 = 8m$ .

Вычисляем подсобные величины:

$$EJf_{A_1} = \frac{1}{6} [5 \cdot 9(18 - 3) + 8 \cdot 36(24 - 6)] \cong 976 tm^3,$$

$$EJf_{A_2} = \frac{1}{6} [5 \cdot 9(30 - 3) + 8 \cdot 64(30 - 8)] \cong 2080 tm^3,$$

$$EJ\varphi_{A_2} = \frac{1}{2} [5 \cdot 9 + 8 \cdot 64] \cong 278 tm^2,$$

$$EJ\varphi_{8m} = EJ\varphi_{A_2} \cong 278 tm^2,$$

$$A_1 = \frac{3}{6 \cdot 4^3} [1000 \cdot 976 - 36 \cdot 18 \cdot 2080 + 36 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 278] = 6,30 t,$$

$$A_2 = \frac{3}{6 \cdot 4^3 \cdot 10} [6 \cdot 22 \cdot 2080 - 10 \cdot 18 \cdot 976 - 64 \cdot 14 \cdot 278] = 3,90 t,$$

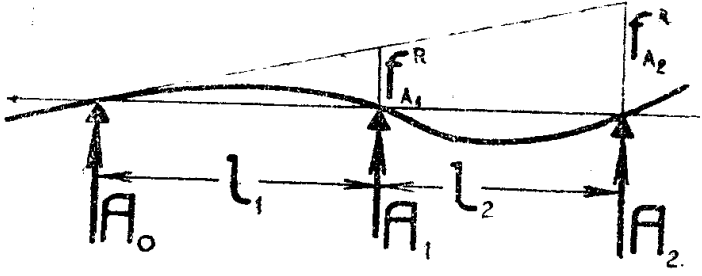
$$m_2 = \frac{1}{6 \cdot 16 \cdot 10} [3 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 2080 - 3 \cdot 100 \cdot 976 - 6 \cdot 4 \cdot 34 \cdot 278] = 4,58 tm.$$

Угол поворота выбранного сечения будет:

$$EJ y_{8m}^1 = 278 - \frac{6,30}{2} \cdot 36 - \frac{3,90}{2} \cdot 8(20 - 8) + 4,58 \cdot 8 = 14,14 \text{ tm}^2.$$

**VIII. Трехопорная балка со свободными опорами.**

Чертеж 20. Примем в балке за лишнюю неизвестную реакцию  $A_2$ . Подвергнем изогнутую балку условному защемлению над опорой  $A_0$ . Проведя из точки защемления касательную к изогнутой оси балки, мы будем вести отсчет деформаций от этой прямой. Из чертежа видно, что в данном случае имеет место следующее геометрическое соотношение:



Черт. 20.

$$\frac{[f_{A_2}^R]}{[f_{A_1}^R]} = \frac{l_1 + l_2}{l_1} \dots (a)$$

где под  $[f_{A_1}^R]$  и  $[f_{A_2}^R]$  разумеются стрелы прогиба условной консоли в точках соответствующих опор. Верхние индексы (R) обозначают, что при вычислении этих стрел было принято в расчет и действие опорных реакций.

Абсолютные значения условных стрел будут:

$$EJ [f_{A_1}^R] = \frac{A_1}{3} l_1^3 + \frac{A_2}{6} l_1^2 (2l_1 + 3l_2) - EJ f_{A_1} \dots (b)$$

$$EJ [f_{A_2}^R] = \frac{A_1}{6} l_1^2 (2l_1 + 3l_2) + \frac{A_2}{3} (l_1 + l_2)^3 - EJ f_{A_2} \dots (c)$$

Для того, чтобы исключить ненужную нам реакцию  $A_1$ , пишем уравнение статики—сумму моментов относительно опоры  $A_0$ .

$$\Sigma M_0 - A_1 l_1 - A_2 (l_1 + l_2) = 0 \dots (d)$$

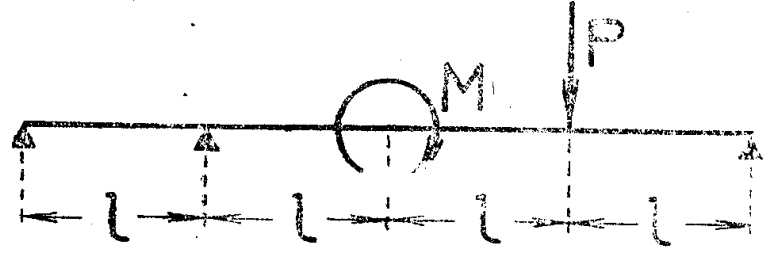
Совместное решение уравнений (a), (b), (c) и (d), приводит к нахождению величины  $A_2$

$$A_2 = \frac{3EI}{l_1 l^2 (l_1 + l_2)} [f_{A_2} l_1 - f_{A_1} (l_1 + l_2)] \frac{l_1 \Sigma M_0}{2l_2 (l_1 + l_2)} \dots (25)$$

Пример 11. Черт. 21. Определить реакцию  $A_2$

$$\Sigma M_0 = M + 3Pl$$

$$EJ f_{A_1} = \frac{M}{2} l^2 + \frac{P}{6} l^2 (9l - l) = \frac{1}{2} Ml^2 + \frac{4}{3} Pl^3,$$



Черт. 21.

$$EJf_{A_2} = \frac{M}{2} 2l(8l - 2l) + \frac{P}{6} 9l^2(12l - 3l) = 6Ml^2 + \frac{27}{2}Pl^3,$$

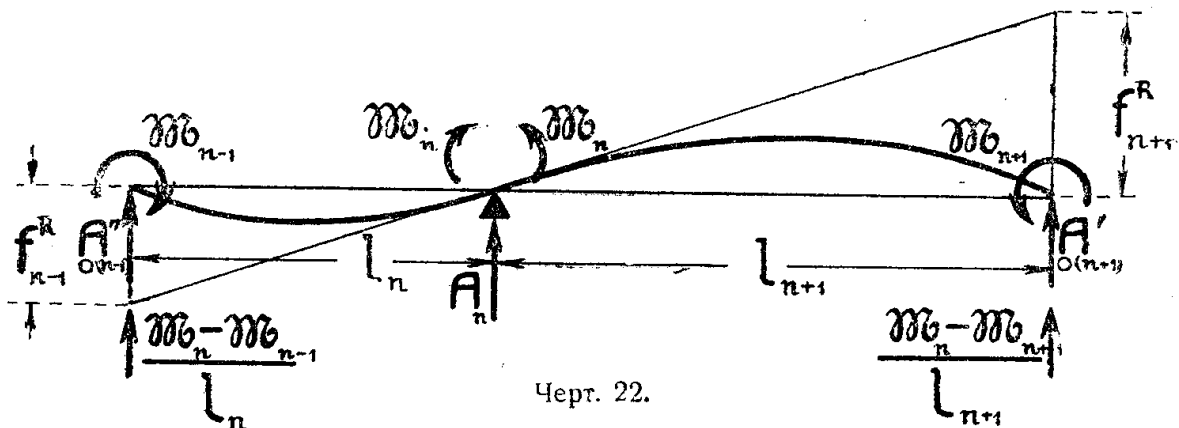
$$EJ[f_{A_2}l_1 - f_{A_1}(l_1 + l_2)] = \left(6Ml^2 + \frac{27}{2}Pl^3\right)l - \left(\frac{1}{2}Ml^2 + \frac{4}{3}Pl^3\right)4l + 4Ml^3 + \frac{49}{6}Pl^4.$$

$$A_2 = \frac{3}{L \cdot 9L^2 \cdot 4L} \left( \frac{49}{6}Pl^4 + 4Ml^3 \right) - \frac{l}{2 \cdot 3L \cdot 4L} (M + 3Pl) = \frac{5}{9}P + \frac{7}{24} \frac{M}{f}.$$

Что касается нахождения деформации в общем виде, то такое никаких затруднений не представит. Однако можно рекомендовать другой путь для их нахождения. По нахождении реакции, находят изгибающий момент над средней опорой. Затем рассматривают отдельные пролеты, как двухпорные балки, только имеющие нагрузку в виде изгибающего момента над одной из опор и являющуюся добавочной к внешней заданной нагрузке. При таком решении мы можем пользоваться более простыми и уже имеющимися у нас формулами: (10) и (11).

### XI. Многоопорные балки.

Решение балок с числом опор более трех, в том виде, как мы это делали до сих пор, принципиальных трудностей не представляет; однако громоздкость получаемых формул ставит предел применению их на практике. Поэтому решение таких балок лучше вести, пользуясь теоремой о трех моментах. Уравнение Клапейрона, в его каноническом виде, как то было указано в введении, имеет свои недостатки, из которых главный—трудность определения величин, входящих в правую часть этого уравнения,



при нагрузках сложных и разнообразных. Здесь инфлюэнтный метод снимает эту трудность, трансформируя правую часть уравнения так, что пользование им становится весьма простым.

Выведем уравнение Клапейрона, применяя инфлюэнтный метод.

Чертеж 22 представляет из себя два соседних, произвольно-взятых пролета многоопорной балки.

Здесь:

$A_n$  полная реакция средней опоры,

$A_n''$  и  $A_n'$  скалывающие силы около  $n-1$ -ой и  $n+1$ -ой опор, причем первая находится в поперечном сечении балки лежащее правее опоры  $n-1$ , вторая же в сечении, лежащем левее опоры  $n+1$ . Эти скалывающие силы получаются только за счет внешней заданной на балке нагрузки.

$\mathfrak{M}_{n-1}$  и  $\mathfrak{M}_{n+1}$  — опорные моменты, считающиеся положительными, когда они стремятся загрузить свой пролет (гнуть балку выпуклостью вниз).

$\frac{\mathfrak{M}_n - \mathfrak{M}_{n-2}}{l_n}$  и  $\frac{\mathfrak{M}_n - \mathfrak{M}_{n+1}}{l_{n+1}}$  — скалывающие силы от действия опорных моментов.

Опорные моменты мы обозначаем готиком для, того чтобы не смешивать их с изгибающими моментами, принадлежащими к заданной нагрузке, которые будут обозначаться латинским шрифтом, с индексами соответствующих пролетов.

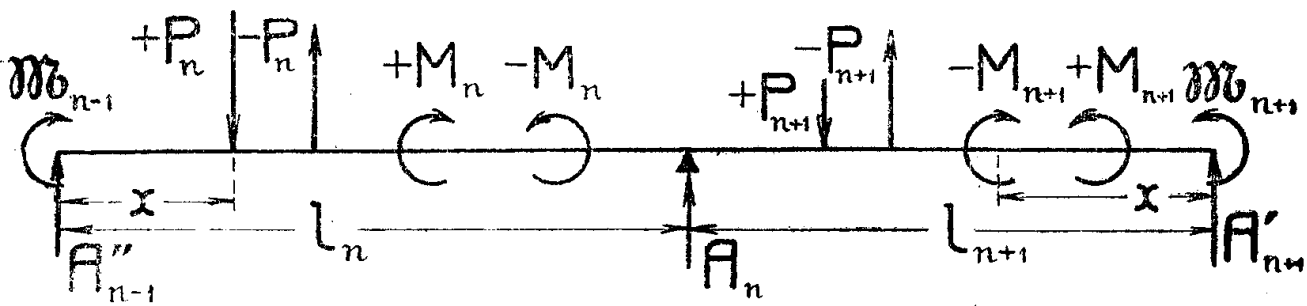
Приняв условное защемление над опорой  $A_n$ , (Черт. 22) мы получим следующее геометрическое соотношение между абсолютными значениями стрел прогиба условных консолей с вылетами  $l_n$  и  $l_{n+1}$ , на концах последних:

$$\frac{[f_{n-1}^R]}{[f_{n+1}^R]} = \frac{l_n}{l_{n+1}} \quad \text{или} \quad [f_{n-1}^R] l_{n+1} - [f_{n+1}^R] l_n = 0 \quad \dots (26)$$

Напишем выражения для  $[f_{n-1}^R]$  и  $[f_{n+1}^R]$  в развернутом виде, приняв следующие два правила:

1. Будем считать за начало отсчетов для абсцисс сосредоточенных нагрузок свободный конец данного пролет, т. е. для левого пролета—его левый конец для правого—правый.

2. Будем считать сосредоточенные моменты, принадлежащие к внешним нагрузкам, положительным в том случае, когда они находясь в левом про-



Черт. 23.

лете, направлены по часовой стрелке и в правом—против часовой. Черт. 23 поясняет последнее правило.

Найдем величины концевых стрел прогиба условных консолей. Черт. 22.

$$EJ [f_{n+1}^R] = \frac{A_{0(n+1)}}{3} l_n^3 + \frac{\mathfrak{M}_n - \mathfrak{M}_{n-1}}{3l_n} l_n^3 + \frac{1}{2} \Sigma M_n (l_n - x) [2l_n - (l_n - x)] -$$

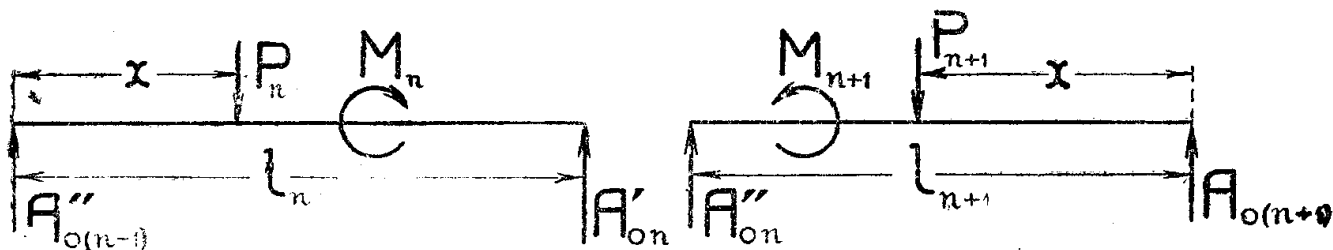
$$- \frac{1}{6} \Sigma P_n (l_n - x)^2 [3l_n - (l_n - x)] + \frac{\mathfrak{M}_{n-1}}{2} l_n^2 = \frac{1}{3} A_{0(n-1)} l_n^3 + \frac{1}{6} \mathfrak{M}_{n-1} l_n^2 +$$

$$+ \frac{1}{3} \mathfrak{M}_n l_n^2 + \frac{1}{2} \Sigma M_n (l_n^2 - x^2) - \frac{1}{6} \Sigma P_n (l_n - x)^2 (2l_n + x) \dots (27)$$



$$\begin{aligned}
 EJ \left[ f_{n+1}^R \right] &= -\frac{A'_{0(n+1)}}{3} l_{n+1}^3 - \frac{\mathfrak{M}_n - \mathfrak{M}_{n+1}}{3l_{n+1}} l_{n+1}^3 - \frac{1}{2} \Sigma M_{n+1} (l_{n+1} - x) \left[ 2l_{n+1} - \right. \\
 &\quad \left. - (l_{n+1} - x) \right] + \frac{1}{6} \Sigma P_{n+1} (l_{n+1} - x)^2 \left[ 3l_{n+1} - (l_{n+1} - x) \right] - \frac{\mathfrak{M}_{n+1}}{2} l_{n+1}^2 = \\
 &= -\frac{1}{3} A'_{0(n+1)} l_{n+1}^3 - \frac{1}{6} \mathfrak{M}_{n+1} l_{n+1}^2 - \frac{1}{3} \mathfrak{M}_n l_{n+1}^2 - \frac{1}{2} \Sigma M_{n+1} (l_{n+1}^2 - x^2) + \\
 &\quad + \frac{1}{6} \Sigma P_{n+1} (l_{n+1} - x)^2 (2l_{n+1} + x) \dots \dots \dots (28)
 \end{aligned}$$

Величины скалывающих сил  $A''_{0(n-1)}$  и  $A'_{0(n+1)}$  найдутся из рассмотрения каждого пролета в отдельности, как разрезной двухопорной балки, загру-



Черт. 24.

женной только заданной нагрузкой. Чертеж 24. Статический момент сил, действующих на левый пролет, берется относительно его правого конца.

Мы получаем:

$$\Sigma P_n (l_n - x) - \Sigma M_n - A''_{0(n-1)} l_n = 0,$$

откуда:

$$A''_{0(n+1)} = \frac{1}{l_n} \left[ \Sigma P_n (l_n - x) - \Sigma M_n \right].$$

Составляем такое же уравнение для моментов правого пролета, беря их относительно левого конца пролета:

$$\Sigma P_{n+1} (l_{n+1} - x) - \Sigma M_{n+1} - A'_{0(n+1)} l_{n+1} = 0,$$

откуда:

$$A'_{0(n+1)} = \frac{1}{l_{n+1}} \left[ \Sigma P_{n+1} (l_{n+1} - x) - \Sigma M_{n+1} \right]$$

Подстановка величин  $A''_{0(n-1)}$  и  $A'_{0(n+1)}$  в уравнения (27) и (28), а величин  $\left[ f_{n-1}^R \right]$  и  $\left[ f_{n+1}^R \right]$  в уравнение (26) дает:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{M}_{n-1} l_n + 2\mathfrak{M}_n (l_n + l_{n+1}) + \mathfrak{M}_{n+1} l_{n+1} &= -\frac{1}{l_n} \left[ \Sigma P_n x (l_n^2 - x^2) + \Sigma M_n (l_n^2 - 3x^2) \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{l_{n+1}} \left[ \Sigma P_{n+1} x (l_{n+1}^2 - x^2) + \Sigma M_{n+1} (l_{n+1}^2 - 3x^2) \right] \dots \dots (29)
 \end{aligned}$$

Полученное уравнение представляет из себя аналитическое выражение теоремы о трех моментах, где правая часть получила форму, весьма удобную для подсчета.

Необходимо помнить, что координаты сосредоточенных нагрузок каждого пролета ( $x$ ) берутся в отсчете (при рассмотрении пролетов попарно) от свободных концов каждого пролета: для левого—слева для правого—справа. Последнее правило в значительной мере упрощает правую часть уравнения Клапейрона, придавая ей симметричную форму.

Подобное уравнение, только в менее общем виде и несимметричной правой частью встречается в курсе Сопротивления материалов проф. Ривоша.

Реакции определяются следующим образом. Реакция средней опоры в какой-либо паре пролетов будет состоять из суммы скалывающих сил, находящихся в ближайших от опоры сечениях, справа и слева от нее.

Так:

$$A_n = A'_{0n} + A''_{0n} + \frac{\mathfrak{M}_n - \mathfrak{M}_{n-1}}{l_n} + \frac{\mathfrak{M}_n - \mathfrak{M}_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

Но:

$$A'_{0n} = \Sigma P_n - A'_{0(n-1)}$$

и

$$A''_{0n} = \Sigma P_{n+1} - A'_{0(n+1)}$$

Вторые члены правых частей уравнений найдены у нас уже выше (См. за ур. 28 и далее)

Отсюда получаем:

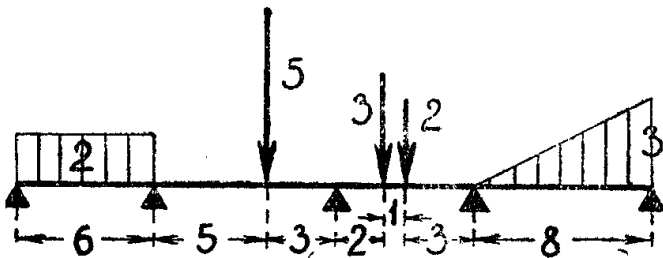
$$A'_{0n} = \frac{1}{l_n} (\Sigma P_n x + \Sigma M_n),$$

$$A''_{0n} = \frac{1}{l_{n+1}} (\Sigma P_{n+1} x + \Sigma M_{n+1})$$

Полная реакция  $n$ -ой опоры  $A_n$  представится по величине выражением

$$A_n = \frac{1}{l_n} (\Sigma P_n x + \Sigma M_n + \mathfrak{M}_{n-1} - \mathfrak{M}_n) + \frac{1}{l_{n+1}} (\Sigma P_{n+1} x + \Sigma M_{n+1} + \mathfrak{M}_{n+1} - \mathfrak{M}_n).$$

Определение деформаций особых затруднений не представляет. Определив опорные моменты и реакции, мы решаем задачу нахождения деформаций в выбранном пролете, как задачу с балкой с двумя свободными опорами, в которой, кроме заданной нагрузки, имеются еще две добавочные нагрузки в виде сосредоточенных моментов на концах (найденные опорные моменты).



Черт. 25.

Пример 12. Чертеж 25. Определить опорные моменты.

Пользуясь уравнением (29), составляем следующие уравнения:

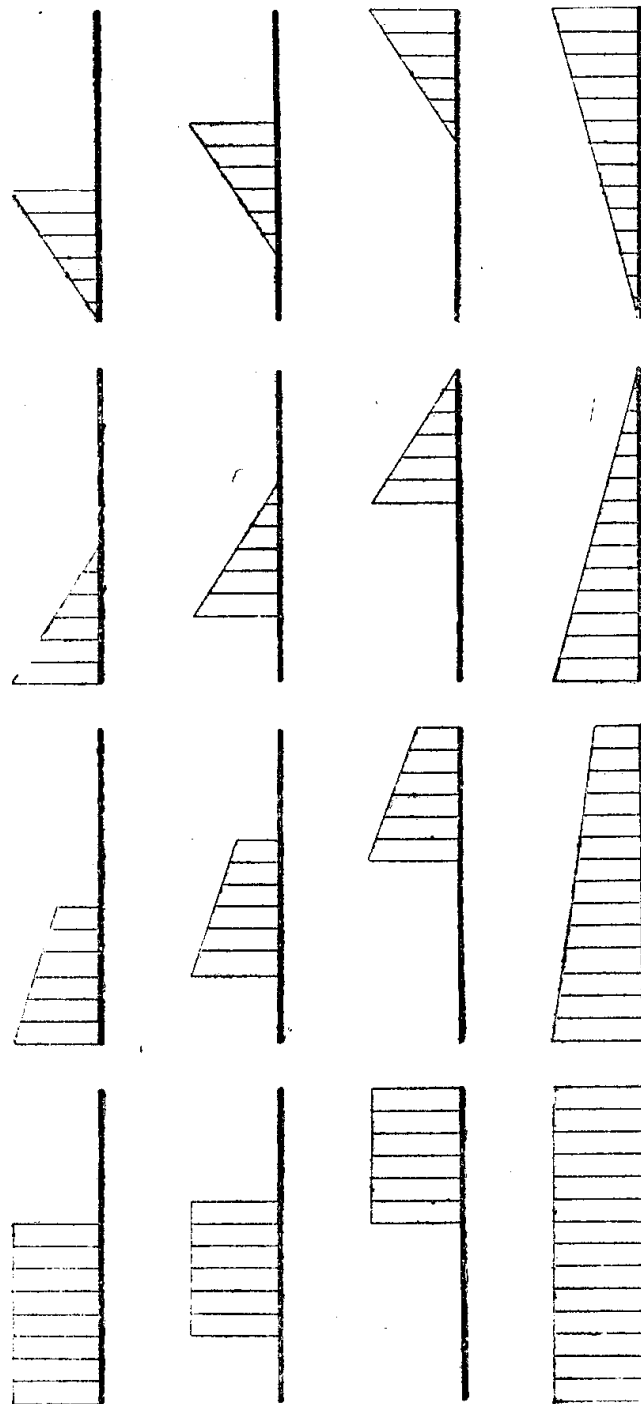
$$2\mathfrak{M}_1 \cdot 14 + \mathfrak{M}_2 \cdot 8 = -\frac{1}{6} \int_0^6 2x(36 - x^2) dx - \frac{1}{8} 5.3(64 - 9);$$

$$\mathfrak{M}_1 8 + 2 \mathfrak{M}_2 14 + \mathfrak{M}_3 6 = -\frac{1}{8} 5.5 (64 - 25) - [3.4 (36 - 16) + 2.3 (36 - 9)]$$

$$\mathfrak{M}_2 6 + 2 \mathfrak{M}_3 14 = -\frac{1}{6} [2.3 (36 - 9) + 3.2 (36 - 4)] -$$

$$-\frac{1}{8} \int_0^8 \frac{3}{8} (8 - x) x (64 - x^2) dx$$

Дальнейшее совместное решение полученных трех уравнений не представляет ни малейшего труда; поэтому остановимся в решении примера на этом.



Черт. 26.

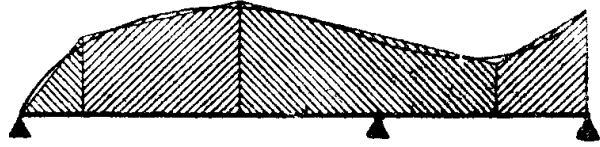
В моей книге, того же названия, что и настоящая статья, приводятся таблицы и табличный способ весьма быстрого решения балок, при помощи пользования инфлюэнтным методом. Суть решения заключается в том, что при помощи инфлюэнтного метода найдены и помещены в таблицы такие величины интегралов, как:

$$\int q_x x^2 (3l - x) dx,$$

$$\int q_x x (l^2 - x^2) dx$$

и так далее, вычисленные для нагрузок, распределенных по линейному закону, для различных степеней загрузки пролетов. На чертеже 26 приводятся некоторые случаи загрузки пролета и виды нагрузки.

Имея такие таблицы, легко рассчитать любую балку. Пользуясь ими, нетрудно с большой степенью точности рассчитать даже балку (черт. 27), закон нагрузки которой не имеет аналитического выражения, или же выражение его отличается большой сложностью. В таком случае можно, спрямляя на глаз дуги кривой нагрузки, решить балку таблично, считая, что отдельные участки ее пролетов несут нагрузку, распределенную по различным, но линейным законам.



Черт. 27