Проф. Г. В. Трапезников.

Графоаналитическое доказательство теорем Кастильяно и Бетти.

За основу доказательства теоремы Кастильяно мы примем два следующих положения:

1. Система, в своей упругой деформации, следует закону Гука, что аналитически может быть выражено так:

$$f = \alpha P$$

т. е. перемещение в какой-либо точке системы, по любому направлению, от действия нагрузки, приложенной также в произвольной точке, пропорционально величине этой нагрузки. При этом, под перемещением мы будем подразумевать вообще перемещение, как линейное, так и углсвое, а под нагрузкой—силу или момент, вызывающие такое перемещение.

2. К системе приложим принцип независимости действия сил, что для данного случая может быть сформулировано так:

Конечный вид и величина перемещения в какой-либо точке системы не зависят от последовательности, в которой следуют прилагаемые к системе нагрузки.

Пусть имеется система с рядом нагрузок: $P_0\ P_1\ P_2 \ldots P_n$. Обозначим через f_{ik} перемещение, производимое нагрузкою P_k, в точке приложения уже имеющейся или имеющей быть нагрузки P_i, по направлению последней. Это перемещение должно соответствовать виду нагрузки P_i; для сосредоточенной силы это будет линейное перемещение и для сосредоточенного момента—угловое.

Начнем деформировать систему, вводя одну нагрузку за другой, начиная с P_0. Для каждой из нагрузок будем строить график перемещений. (Черт. 1).

Для краткости письма, будем обозначать потенциальную энергию буквами ПЭ.

За счет работы, произведенной нагрузкой P_0, система приобретет запас ПЭ: (Черт. 1-а)

$$U = U_{00} = \frac{P_0 f_{00}}{2} = \alpha_0 \frac{P_0^2}{2}\ .$$

По приложении следующей нагрузки P_1, ПЭ получит приращение:

1. От работы, затраченной P_1, в ее собственном переносе: (Черт. 1-b)

$$U_{11} = \frac{P_1 f_{11}}{2} = \alpha_1 \frac{P_1^2}{2}\ ,$$

2. От работы, затраченной P_0, прошедшей путь f_{01} без изменения своей величины, за счет деформации системы нагрузкой P_1: (Черт. 1-а)

$$U_{01} = P_0 f_{01}$$

Полная ПЭ всей системы теперь будет:

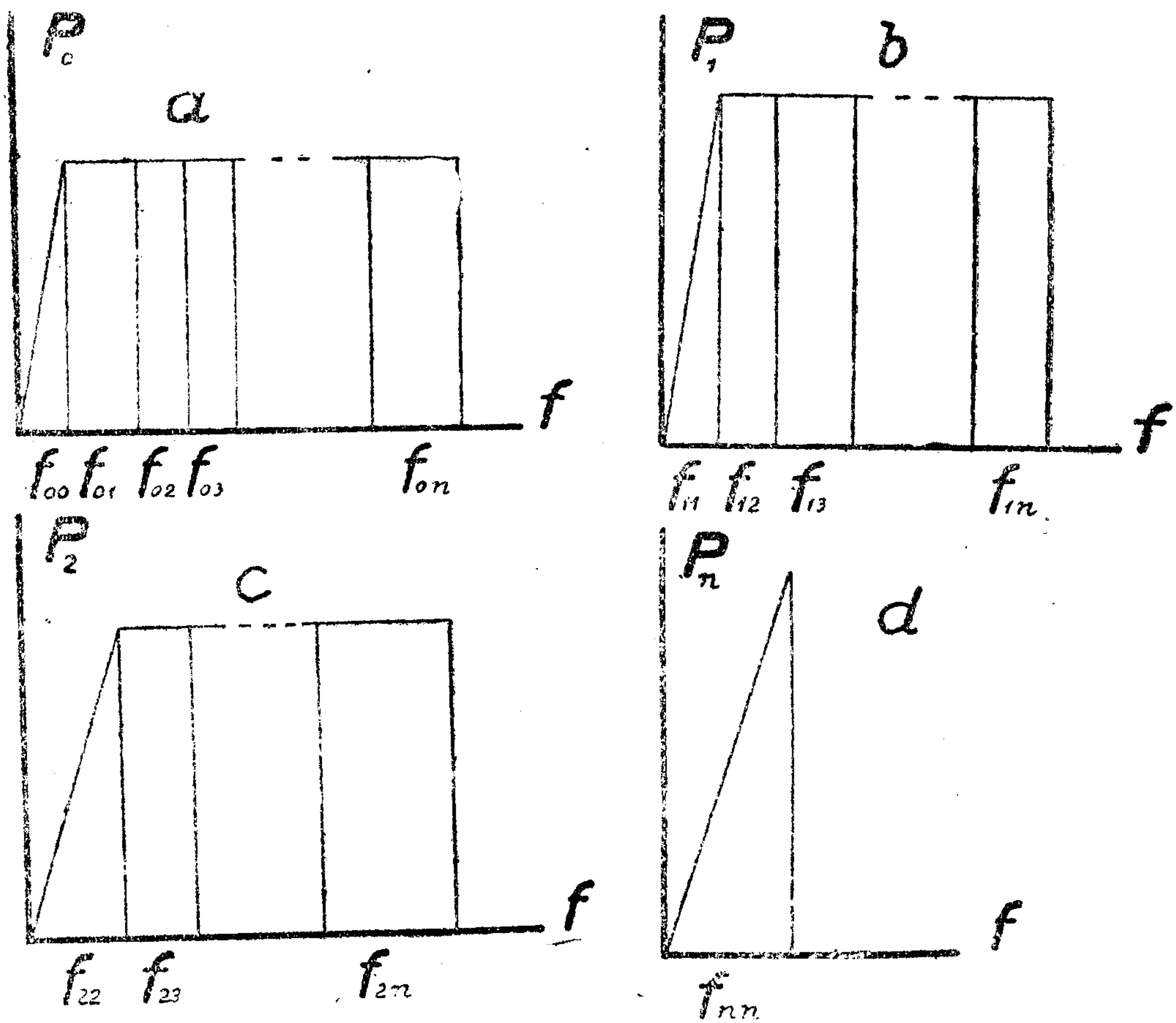
$$U = U_{00} + U_{01} + U_{11}$$

Прикладывая к системе остальные нагрузки, в порядке следования их нумерных индексов, мы получим в итоге, когда будет приложена последняя нагрузка P_n:

$$
\begin{aligned}
U = \alpha_0 \frac{P_0{}^2}{2} + \alpha_1 \frac{P_1{}^2}{2} + \alpha_2 \frac{F_2{}^2}{2} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{P_{n-1}{}^2}{2} + \alpha_n \frac{P_n{}^2}{2} + \\
+ P_0 f_{01} \quad + P_1 f_1{}^2 + P_2 f_{23} + \ldots + P_{n-1} f_{(n-1)n} + \\
+ P_0 f_{02} \quad + P_1 f_{13} + \ldots \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \\
+ P_{0(n-1)} f_0 + P_1 f_{1n} \\
+ P_0 f_{0n}
\end{aligned}
$$

Только что полученное выражение полной ПЭ системы состоит из двух различных частей:

1. Из членов первой колонки, сумма которых дает величину ПЭ, по-



Черт. 1.

лученной от перемещения P_0 действием всех нагрузок, включая и ее собственное действие.

2. ПЭ членов всех остальных колонок, каждый из которых дает ПЭ от перемещения какой-либо из нагрузок, действовавшей после приложения P_0.

Ввиду этого сумма членов всех колонок, кроме первой, не будет зависить от P_0. Обозначив сумму членов, независящих от P_0 через Φ, напишем:

$$U = \alpha_0 \frac{P_0^2}{2} + P_0 \sum_{i=1}^{i=n} f_{0i} + \Phi.$$

Беря частную производную от U по P_0, получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial P_0} = \alpha_0 P_0 + \sum_{i=1}^{i=n} f_{0i}.$$

Но мы имели:

$$\alpha_0 P_0 = f_{0c}$$

и поэтому:

$$\frac{\partial U}{\partial P_0} = \sum_{i=0}^{i=n} f_{0i} = f_{P0},$$

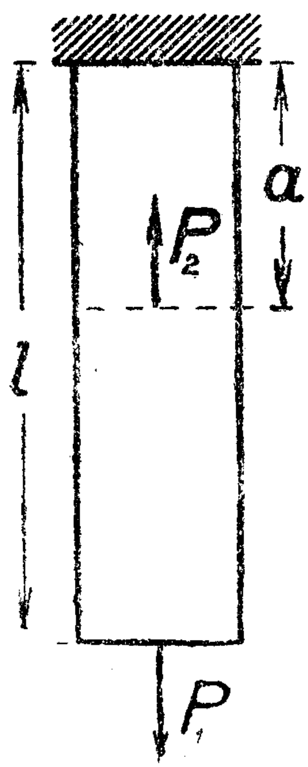
т. е. частная производная от полной потенциальной энергии всей системы по одной из внешних нагрузок равна перемещению этой нагрузки по ее собственному направлению.

Предлагаемое автором статьи доказательство с убедительностью подчеркивает следующие моменты, весьма необходимые при усвоении теоремы Кастильяно:

1. Теорема Кастильяно приложима только к таким системам, которые, при своей деформации, следуют закону Гука.

2. При применении теоремы Кастильяно координатные оси никакой роли не играют, так как сама нагрузка (на чертеже: прямая стрелка—сила или круговая стрелка—момент) играет роль положительной оси для определения направления перемещения.

Прекрасным и, вместе с тем, простым примером, иллюстрирующим последний вывод, служит приводимая ниже задача со стержнем, деформированным двумя, противоположно-направленными осевыми силами. (Четреж 2).



Черт. 2.

ПЭ нижней части стержня будет:

$$U_1 = \frac{P_1^2 (l-a)}{2EF},$$

ПЭ верхней части:

$$U_2 = \frac{(P_1 - P_2)^2 a}{2EF}.$$

Полная ПЭ выразится:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{P_1^2 (l-a) + (P_1 - P_2)^2 a}{2EF}.$$

Частные производные от U по P_1 и P_2 дают:

$$\frac{\partial U}{\partial P_1}=\frac{P_1 l}{EF}-\frac{P_2 a}{EF}=f_{P1} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_2}=-\frac{P_1 a}{EF}+\frac{P_2 a}{EF}=f_{P2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

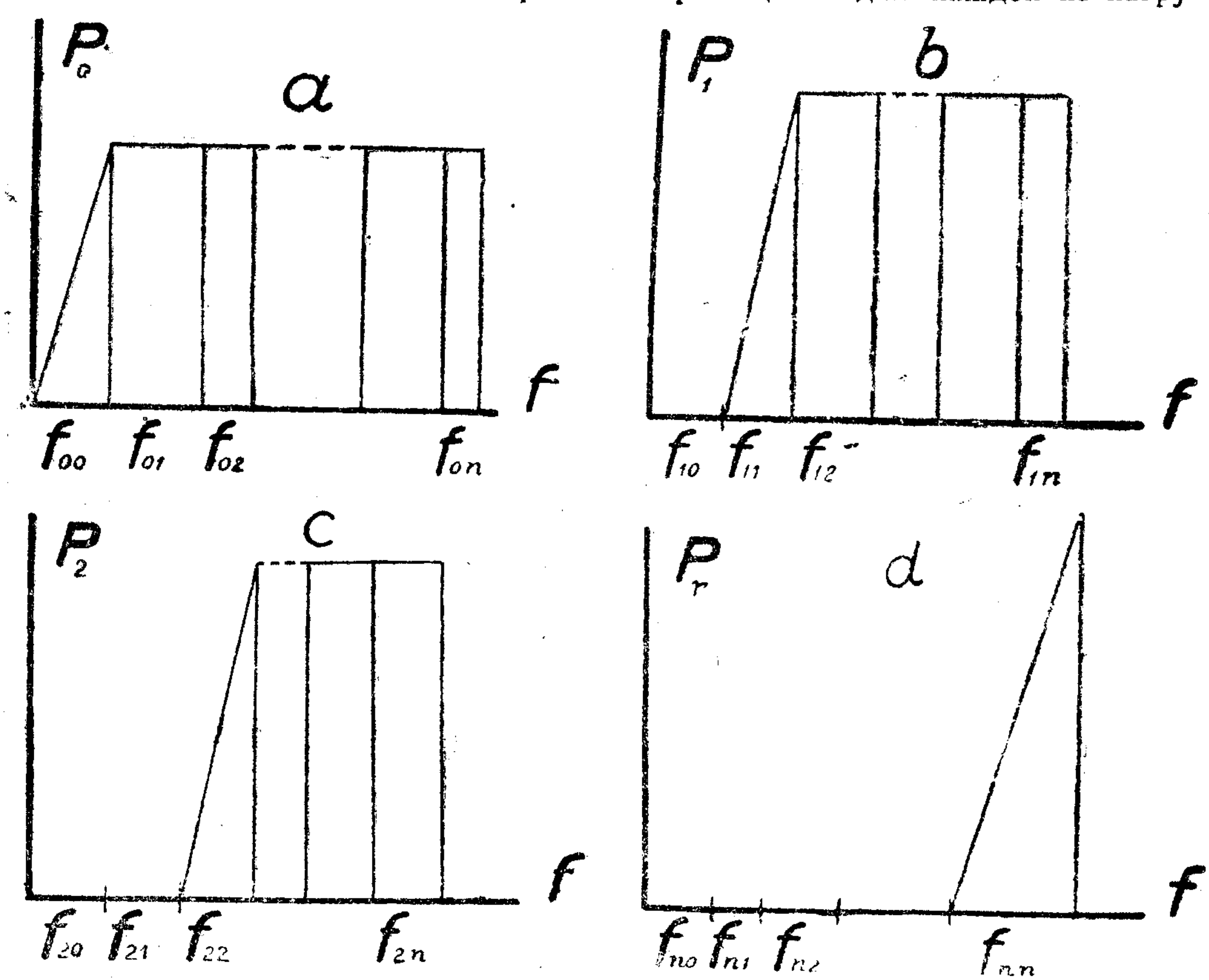
Рассматривая уравнение (1), мы видим, что величина $\frac{P_1 l}{EF}$ есть деформация растяжения стержня силою P_1 на длине l и, в то же самое время, она явится перемещением точки приложения P_1 по ее собственному направлению и от ее собственного действия. Величина $\frac{P_2 a}{EF}$ есть деформация сжатия силою P_2 на длине a и, в то же вреля, перемещение точки приложения P_1 от действия нагрузки P_2. Так как последняя имеет направление, обратное P_1, то это перемещение и получается со знаком минус.

Те же рассуждения легко применимы и к величинам, входящим в уравнение (2).

Приведем теперь второе доказательство теоремы Кастильяно, которое будет пригодным и для обратной теоремы, дающей, как известно:

$$\frac{\partial U}{\partial f_{P0}}=P.$$

На чертеже 1 имелись диаграммы перемещений для каждой из нагру-



Черт. 3.

зок, причем мы следили за перемещениями только тех точек, к которым уже были приложены нагрузки. Теперь мы также проследим за перемещением этих точек, но только независимо от того, имеются в них нагрузки или нет. Иначе говоря, мы будем рассматривать одновременно все точки при приложении каждой из нагрузок.

Чертеж 3. Производим загружение системы, начиная с нагрузки P_0. По приложении ее, мы получим:

1. На черт. 3-а треугольник с основанием f_{00} и высотой P_0.

2. На черт. 3-b—c—....—....—d зарегистрируются только перемещения соответствующих точек будущего приложения нагрузок:

$$f_{10}, f_{20}, \dots f_{n0}.$$

Прилагая далее нагрузку P_1, получаем:

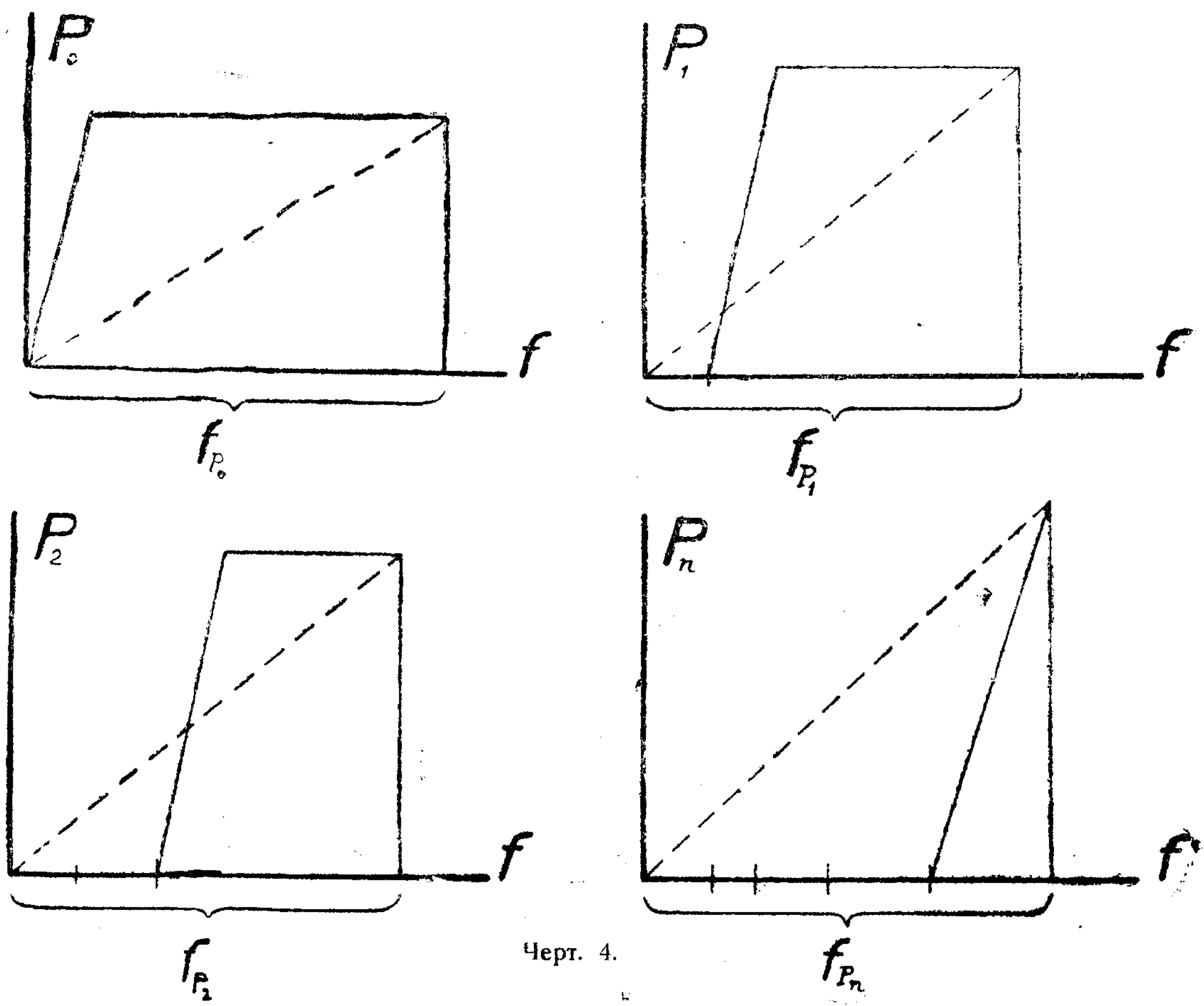
1. На черт. 3-b треугольник, с основанием f_{11} и высотою P_1. Его наклонная прямая пойдет теперь не из начала координат, а от конца отрезка f_{10}.

2. На черт. 3-а прямоугольник, с основанием f_{01} и высотою P_0.

3. На черт. 3-c—....—d зарегистрируются перемещения еще ненагруженных точек: 2, 3,....n, в виде отрезков:

$$f_{21}, f_{31}, \dots f_{n1}.$$

Когда, наконец, будет приложена последняя нагрузка P_n, мы получим диаграммы, приведенные ниже на чертеже 4 сплошными линиями.



Черт. 4.

На каждой из этих диаграмм высота трапеций (для последней диаграммы-треугольника) равна соответствующей нагрузке, а абсцисса крайней правой точки равна суммарному перемещению точки ее приложения.

Произведем теперь нагрузку системы иначе. Начнем прилагать все нагрузки одновременно и дадим возрастать им до своей предельной величины таким образом, чтобы это возрастание шло пропорционально их величинам. При таком способе загрузки системы мы получим диаграммы, устанавливающие связь между нагрузкой и перемещением, уже в ином виде. Все диаграммы представятся треугольниками, как то показано на чертеже 4 пунктиром. Высоты этих треугольников будут равны высотам соответствующих трапеций, а основания—суммарным перемещениям данных нагрузок.

Так как ПЭ должна, при новом способе загрузки системы, быть той же по величине, что и при прежнем способе, то, очевидно, мы должны иметь равновеликость суммы площадей новых треугольников и суммы площадей прежних трапеций. Сумма площадей треугольников напишется так: (Черт. 4)

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=n} P_i f_{Pi}.$$

Ранее мы имели:

$$f_{ii}=\alpha_i P_i,$$

где коэффициент α_i определял величину крутизны наклонной прямой у трапеций, т. е. жесткость системы в данной точке, при действии нагрузки в той же точке и, притом, нагрузки единичной. Теперь же мы имеем треугольники, с другими крутизнами наклонных прямых, а, значит, и с другими величинами коэффициентов α:

$$f_{Pi}=\alpha_{Pi} P_i$$

При деформировании системы нагрузками, одновременно прилагаемыми и возрастающими пропорционально своей величине, мы каждый раз будем иметь ту же картину для какого-либо P_i. Поэтому мы можем представить себе, что система деформируется только одной нагрузкой P_i, только с иной степенью возрастания деформации по сравнению с тем случаем, когда она в действительности деформируется одной P_i. Что же касается других нагрузок, то оне как бы не влияют непосредственно на перемещение P_i, а только изменяют коэффициент перемещения (жесткости для данной точки).

Раз это так, то имея:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=n} P_i f_{Pi}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=n} \alpha_{Pi} P_i^2, \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

мы всегда получим:

$$\frac{\partial U}{\partial P_k}=\alpha_{Pk} P_k=f_{Pk}.$$

Таким образом теорема Кастильяно доказана. Для вывода обратной теоремы воспользуемся равенством:

$$P_i=\frac{f_{Pi}}{\alpha_{Pi}}$$

Делая подстановку значения f_{Pi} в уравнение (3), получаем:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f_{Pi}^2}{\alpha_{Pi}}.$$

И, следовательно:

$$\frac{\partial U}{\partial f_{Pk}} = \frac{f_{Pk}}{\alpha_{Pk}} = P_k.$$

График второго варианта доказательства теоремы Кастильяно (черт. 4) приводит к легкому доказательству теоремы Бетти, в наиболее общем ее виде.

Условие равновеликости суммы площадей диаграмм перемещений, при загрузке системы по одному и по другому способу, аналитически выразится так:

$$\frac{1}{2}\sum_0^n P_i f_{ii} + P_0 \sum_1^n f_{0i} + P_1 \sum_2^n f_{1i} + P_2 \sum_3^n f_{2i} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2}\left[P_0 \sum_0^n f_{0i} + P_1 \sum_0^n f_{1i} + P_2 \sum_0^n f_{2i} + \dots\right]$$

Или, после упрощения, за счет взаимного уничтожения отдельных членов равенства:

$$P_0 \sum_1^n f_{0i} + P_1 \sum_2^n f_{1i} + P_2 \sum_3^n f_{2i} + \dots + P_{n-1} f_{(n-1)n} =$$

$$= P_n \sum_0^{n-1} f_{ni} + P_{n-1} \sum_0^{n-2} f_{(n-1)i} + P_{n-2} \sum_0^{n-3} f_{(n-2)2} + \dots + P_1 f_{10}.$$

Последнее равенство может быть записано уже в совсем компактной форме:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} P_k \sum_{i=k+1}^{i=n} f_{ki} = \sum_{k=1}^{k=n} P_k \sum_{i=0}^{i=k-1} f_{ki}.$$

Теорема Бетти, полученная в таком аналитическом оформлении, могла бы быть сформулирована следующим образом:

Если все нагрузки, деформирующие систему, расположить в произвольном нумерном ряду, то сумма произведений из нагрузок на перемещения их от действия всех нагрузок, лежащих от начала ряда до них, равна сумме произведений из нагрузок на перемещения их от действия всех нагрузок, лежащих от них до конца ряда.

Давая значение:

$$k = 0$$

получаем:

$$P_0 f_{01} = P_1 f_{10},$$

т. е. частный случай, впервые показанный, Мэксвеллом: **всякая пара нагрузок в упруго-деформированной системе связана так, что осуществляется равенство произведений из каждой нагрузки на перемещение ее от действия другой нагрузки.**