

## Сдвиг критических оборотов.

(К вопросу о крутильных колебаниях валов).

Каждая силовая установка с поршневыми двигателями имеет обычно целый ряд т. наз. критических скоростей, или критических чисел оборотов. Эти критические скорости могут быть причиной весьма серьезных нарушений в нормальной работе установки.

Работа двигателя на критических числах оборотов часто приводит к излому вала, поломке спиц у маховика или генератора, излому передаточного механизма и т. п. или, в лучшем случае, к усиленному износу частей машины, сильному шуму и сотрясениям при ее работе<sup>1)</sup>.

Критическими скоростями установки являются все те скорости, при которых одна из частот собственных колебаний валопровода совпадает с частотой одной из гармоник крутящего момента на валу двигателя. При этих скоростях соответствующая гармоника крутящего момента входит в резонанс с собственными крутильными колебаниями вала и вызывает сильные вынужденные колебания с большой амплитудой.

Как известно, гармонический анализ кривой крутящего момента на валу поршневого двигателя дает ряд элементарных гармонических моментов, с периодами, равными  $\frac{1}{1}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  и т. д. продолжительности одного полного цикла рабочего процесса в цилиндре. Напр., анализ диаграммы крутящего момента четырехтактного двигателя внутреннего сгорания дает элементарные гармонические моменты следующих частот (под частотой мы понимаем здесь число полных циклов изменения гармоник в минуту):

$$\frac{1}{2}n, n, 1\frac{1}{2}n, 2n, 2\frac{1}{2}n \text{ и т. д.}$$

где  $n$  — число оборотов вала двигателя в минуту. Первую из этих гармоник принято называть гармоникой  $\frac{1}{2}$ -го порядка, вторую гармоникой 1-го порядка, третью — гармоникой  $1\frac{1}{2}$  порядка и т. д. Вообще порядок данной гармоник крутящего момента определяет число полных циклов ее изменения за один оборот вала двигателя. Амплитуды элементарных гармонических моментов уменьшаются с увеличением их порядка.

Разложение кривой крутящего момента на целый ряд гармоник и наличие у каждой многомассовой системы нескольких частот собственных крутильных колебаний приводят к тому, что любая, даже не особо сложная установка имеет очень много критических скоростей.

Порядок каждой критической скорости (критического числа оборотов) именуется в соответствии с порядком той гармоник крутящего момента, которая при этих оборотах резонирует с собственными колебаниями системы. Таким образом, напр., для установки: четырехцилиндровый четырехтактный двигатель — маховик (система с пятью массами), имеющей четыре<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> См. напр. Zd V D I, 1929, s. 1383. Engineering, 1930, p. 551 и след.

<sup>2)</sup> Индекс при  $n$  означает число узлов колебания.

частоты собственных колебаний  $n_I, n_{II}, n_{III}, n_{IV}$ , существуют следующие значения критических оборотов:

$$\text{Одноузловые колебания} \dots n_{I \text{ кр}} = \frac{n_I}{i} \text{ об./мин.}$$

$$\text{Двухузловые} \dots n_{II \text{ кр}} = \frac{n_{II}}{i} \text{ об./мин.}$$

$$\text{Трехузловые} \dots n_{III \text{ кр}} = \frac{n_{III}}{i} \text{ об./мин.}$$

$$\text{Четырехузловые} \dots n_{IV \text{ кр}} = \frac{n_{IV}}{i} \text{ об./мин.}$$

где  $i$  — принимает каждое из следующих значений:

$$i = 1/2, 1, 1 1/2, 2, 2 1/2, 3 \text{ и т. д.}$$

Значение коэффициента  $i$  определяет собою порядок данных критических чисел оборотов<sup>3)</sup>. Для практики имеют значение только критические скорости, соответствующие одноузловым и двухузловым колебаниям. Критические скорости для колебаний с тремя и более узлами совершенно не существуют, т. к. они лежат далеко за пределами рабочих оборотов двигателей.

Все критические числа оборотов установки можно, согласно F. Lewis'у, разделить на два основных класса<sup>4)</sup>:

1) большие или главные критические обороты, порядок которых является кратным числу вспышек в двигателе за 1 оборот его вала, и

2) малые или второстепенные критические обороты — все остальные.

Амплитуды вынужденных колебаний при главных критических оборотах определяются величиной резонирующей гармоники крутящего момента, числом цилиндров, величиной и расположением масс и упругостей системы, величиной демпфирующих сил, и не могут быть изменены переменной порядка чередования вспышек в цилиндрах двигателя.

“Сила” малых (второстепенных) критических оборотов в значительной степени зависит от порядка чередования вспышек в двигателе.

Для указанной выше установки с четырехцилиндровым двигателем главными критическими числами оборотов будут, очевидно, следующие:

$$\frac{n_I}{2}; \frac{n_I}{4}; \frac{n_I}{6}; \frac{n_I}{8}; \dots \text{ об./мин. и т. д.}$$

$$\frac{n_{II}}{2}; \frac{n_{II}}{4}; \frac{n_{II}}{6}; \frac{n_{II}}{8}; \dots \text{ об./мин. и т. д.,}$$

так как в этом двигателе мы имеем две вспышки за один оборот его вала; все остальные критические числа оборотов для одноузловых и двухузловых колебаний будут второстепенными (критическими оборотами, соответствующими  $n_{III}$  и  $n_{IV}$ , согласно сказанному выше, пренебрегаем).

<sup>3)</sup> Очевидно, что в силовых установках с двухтактными двигателями могут быть только критические числа оборотов целых порядков.

<sup>4)</sup> F. Lewis, Torsional Vibrations in the Diesel Engines. Trans. Soc. Nav. Arch. 1925, см. также Н. Урванцев. Критические числа оборотов в дизельных установках, 1931.

Наиболее опасными для работы установки являются главные критические числа оборотов для одноузловых колебаний. Работа двигателя на этих, или близких к ним, оборотах ни в коем случае не может быть допущена, так как при этом вследствие сильных вынужденных колебаний возникают недопустимо высокие напряжения в валу. Эти напряжения возрастают с понижением порядка данных главных критических оборотов. Главные критические обороты могут исключить значительную часть зоны рабочих скоростей двигателя, намеченной ранее конструктором при проектировании судовой установки.

Равным образом не допустима работа двигателя и на критических (или близких к ним) числах оборотов низких порядков для двухузловых колебаний.

Длительная работа установки на скоростях, близких к главным критическим числам оборотов, сравнительно высоких порядков, для двухузловых колебаний или на второстепенных критических числах оборотов может быть допущена только после детального исследования величины амплитуд вынужденных колебаний и дополнительных напряжений, возникающих при этом в валу.

Определение частот собственных крутильных колебаний валопровода довольно часто приводит к выявлению полного, или достаточно близкого, совпадения заданного рабочего числа оборотов двигателя с теми или иными его критическими скоростями. Для устранения опасностей возникающего при этом резонанса, необходимо сделать некоторые определенные изменения в установке, с тем, чтобы сдвинуть данные критические обороты за область рабочих оборотов двигателя. Эти необходимые изменения иногда могут оказаться весьма значительными. Из этих соображений нецелесообразно приступать к расчету крутильных колебаний только после окончательного оформления проекта всей установки. Тем более недопустимо проверять установку на крутильные колебания лишь после сдачи всех рабочих чертежей в производство.

Вопрос о полном устранении критических оборотов из рабочей скоростной зоны двигателя решается очень просто только для установок с постоянной скоростью вращения (стационарные установки). В судовых установках, число оборотов которых меняется в широких пределах, не всегда представляется возможным полностью избежать работы на критических скоростях. Но и здесь, по крайней мере, необходимо поместить неизбежные (и только второстепенные) критические обороты в область наименее употребительных скоростей двигателя. Главные критические обороты должны лежать вне зоны рабочих оборотов установки.

Для устранения опасностей резонанса на тех или иных оборотах двигателя имеются следующие пути<sup>5)</sup>:

1. Изменение (сдвиг) рабочих чисел оборотов двигателя в сторону от близких к ним критических оборотов.
2. Изменение порядка чередования вспышек в цилиндрах двигателя.
3. Изменение величины масс или упругих свойств системы.
4. Введение демпфера.

Сдвиг рабочих оборотов двигателя является наиболее простым средством для устранения резонанса в стационарных установках. Но это изменение допустимо практически только в редких случаях, вследствие ряда эксплуатационных соображений.

Целесообразным применением порядка чередования вспышек можно значительно уменьшить эффект некоторых малых (второстепенных) критических оборотов. Подобным же образом влияет и соответствующий выбор располо-

<sup>5)</sup> См. напр. I. Geiger, Mechanische Schwingungen, Berlin, 1927.

жения колен вала. На эти возможности ослабления некоторых (и только второстепенных) критических оборотов впервые указал F. Lewis<sup>6)</sup>.

Изменение величины масс или упругих свойств системы меняет числа собственных ее колебаний и, таким образом, приводит к сдвигу всех критических оборотов установки в ту или другую сторону. Изменение величины масс системы гораздо менее эффективно, чем изменение упругих свойств валопровода. Маховик или генератор обычно находится около узла колебания на валу; амплитуда колебания его мала. Поэтому уже для сравнительно небольшого изменения числа собственных колебаний системы необходимо значительно менять массу маховика, что не всегда возможно по условиям, требуемой равномерности хода двигателя.

Изменение упругих свойств валопровода путем изменения длины вала, размеров его поперечного сечения, или включения упругой муфты следует считать наиболее пригодным приемом для сдвига критических оборотов установки в желательную сторону, по усмотрению конструктора.

Установка демпфера является последним мероприятием, целесообразным лишь при невозможности использовать указанные выше методы устранения резонанса. Заглушая сильные вынужденные крутильные колебания вала, демпфер допускает работу двигателя на критических (или близких к ним) оборотах. Установка демпфера требует места, увеличивает вес двигателя и несколько снижает его механический к. п. д.; имеющиеся конструкции демпферов пригодны лишь для быстроходных двигателей не особо большой мощности (авто, авио-двигатели).

Мы ограничимся здесь рассмотрением метода сдвига критических оборотов путем изменения величины масс и упругих свойств колеблющейся системы. Сдвиг же критических оборотов равнозначен изменению частот собственных колебаний валопровода в ту же сторону.

Повышение частот собственных колебаний системы может быть достигнуто:

а) увеличением жесткости валопровода путем утолщения отдельных его участков, или уменьшением их длины (особенно удобно увеличение диаметра или уменьшение длины соединительного вала между двигателем и маховиком или генератором);

б) уменьшением масс системы, напр., выбором маховика или генератора с меньшим маховым моментом.

Уменьшение жесткости валопровода (уменьшение диаметров и увеличение длин), а также увеличение маховых масс системы понижает частоту собственных колебаний.

Уменьшение диаметра вала не всегда влечет за собою увеличение возникающих в нем напряжений, т. к. получающееся при этом удаление зоны рабочих оборотов от резонанса часто полностью компенсирует уменьшение момента сопротивления его сечения.

Для определения величины необходимых изменений масс и упругих характеристик системы, обычно приходится пользоваться методом Tolle<sup>7)</sup>, наиболее детально разработавшим этот вопрос. Но подсчеты по этому методу довольно сложны и длительны, т. к. для каждого пробного расчета требуется производить ряд табличных вычислений (расчет Vorwärts-Rückwärts по Tolle).

Графический метод определения частот собственных колебаний, изложенный автором в предыдущей своей статье<sup>8)</sup>, позволяет решить задачу

<sup>6)</sup> См. вышеуказанную его работу; также см. I. Morris, Crankshaft, Vibration, Automobile Engineering, February, 1935.

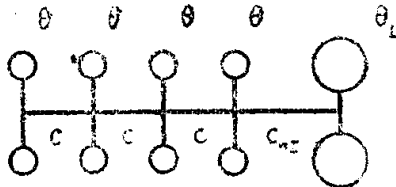
<sup>7)</sup> Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 1922, 2 Aufl.

<sup>8)</sup> В. К. Нечаев, Графический метод определения частот собственных колебаний Известия ТИИ, т. 54, вып. 6, 1935 г. а также Дизелестроение, № 4, 1934 г.

нахождения величины необходимых изменений в системе, требуемых для получения желательного числа собственных колебаний, сравнительно просто, без длительных вычислений.

Это определение необходимых изменений оказывается особо простым и наглядным для системы с одним маховиком, т. е. для случая наиболее частого в практике.

### I. Система с одним маховиком.



Фиг. 1.

В указанной статье автора было установлено, что частоты собственных колебаний системы двигатель-маховик (фиг. 1) определяются путем построения прямой  $L$ , определяемой уравнением:

$$L = \frac{A}{\beta_1} - \frac{1}{\alpha_1} - \dots \dots \dots (1)$$

на диаграмме  $D_n$ , вычерченной заранее для данного числа цилиндров двигателя. Здесь:

$$A = \frac{\Theta \omega^2}{c}, \dots \dots \dots (2)$$

$$\beta_1 = \frac{c_{n1}}{c} \dots \dots \dots (3)$$

$$\alpha_1 = \frac{\theta_1}{\Theta} \dots \dots \dots (4)$$

при чем:

$\Theta$  — момент инерции маховых масс каждого цилиндра двигателя,

$\theta_1$  — момент инерции маховика,

$c$  — жесткость участка коленчатого вала между осями соседних цилиндров,

$c_{n1}$  — жесткость вала между последним цилиндром двигателя и маховиком,

$\omega$  — угловая скорость колебания.

Величина  $D_n$  зависит от  $A$  и числа цилиндров двигателя.

Абсциссы точек пересечения прямой  $L$  с кривой  $D_n$  дают значения  $A_1, A_2, \dots$ , по которым угловые скорости собственных колебаний системы определяются из формул:<sup>9)</sup>

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A_1 c}{\Theta}}$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{A_2 c}{\Theta}} \text{ и т. д. } \dots \dots \dots (5)$$

Для сдвига полученных частот собственных колебаний валопровода в определенную сторону и на определенную величину необходимо надлежащим образом изменить жесткость  $c_{n1}$  вала между последним цилиндром двигателя и маховиком или момент инерции  $\theta_1$  маховика или то и другое одновременно. Конечно, не исключена также принципиальная возможность

<sup>9)</sup> См. указ. выше работу автора.

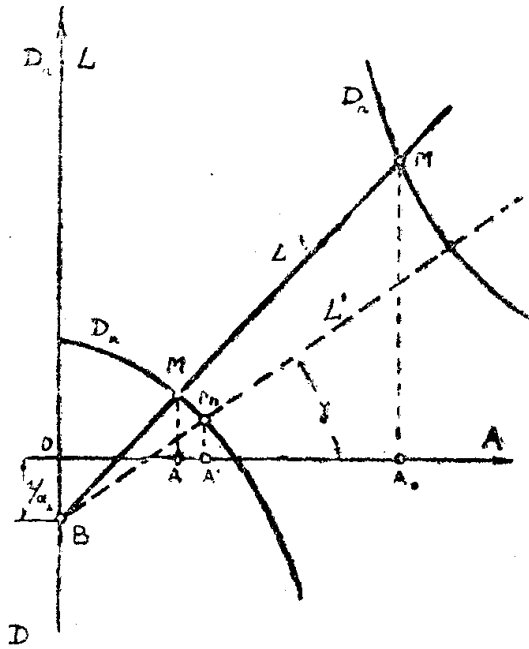
изменения жесткости коленчатого вала и маховых масс каждого цилиндра. Но практически это обычно не осуществимо. Поэтому такой случай мы исключаем из нашего рассмотрения.

Из формулы (1) следует, что величина угла наклона прямой  $L$  к оси абсцисс зависит от соотношения  $c_m$  и  $c$ .

Прямая  $L$  поднимается круче при уменьшении  $c_m$ ; при этом точки  $M$  пересечения ее с кривой  $D_n$  перемещаются влево (фиг. 2). Значение  $A$ , а следовательно и частоты собственных колебаний уменьшаются.

Величина отрезка  $OB = -1/\alpha_1$ , отсекаемого прямой  $L$  на оси ординат, целиком определяется отношением моментов инерции  $\Theta_1$  и  $\Theta$ . При уменьшении  $\Theta_1$  отрезок  $OB$  увеличивается и точки пересечения прямой  $L$  с кривой  $D_n$  перемещаются вправо, что соответствует увеличению частот собственных колебаний.

Из этих соображений вытекает следующий метод определения величины масс и упругих свойств валопровода, необходимых для получения заданных, требуемых, частот собственных колебаний системы.



Фиг. 2.

а) Изменение жесткости  $c_m$  вала между последним цилиндром двигателя и маховиком (при неизменных массах системы).

По заданной частоте собственных колебаний  $n_1$  или  $n_n$  подсчитываем соответствующую угловую скорость колебания  $\omega = \frac{\pi n}{30}$  и по ней, пользуясь формулой (2), вычисляем значение  $A$ , определяющее абсциссу требуемой точки пересечения прямой  $L$  с кривой  $D_n$ . По этой абсциссе находим соответствующую точку  $M_1$  на кривой  $D_n$  (фиг. 2). Через точку  $B$  на оси ординат, определяемую значением.

$$OB = -1/\alpha_1$$

и точку  $M_1$ , проводим прямую  $M_1B$ . Тангенс угла наклона  $\gamma$  этой прямой к оси абсцисс (взятый, в виду возможной разницы масштабов по обоим координатным осям, не по чертежу, транспортиром, а подсчитанный как отношение какой либо ординаты этой прямой к соответствующей абсциссе) дает величину  $1/\beta_1$ , откуда определяется  $\beta_1$ , а за ней и новое, требуемое значение жесткости  $c_m$ :

$$c_m = \beta_1 c$$

Это новое, необходимое значение  $c_m$  может быть непосредственно подсчитано по формуле. Из чертежа:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{\beta_1} = \frac{D_{M_1} + 1/\alpha_1}{A}$$

или

$$\beta_1 = \frac{A}{D_{M_1} + 1/\alpha_1},$$

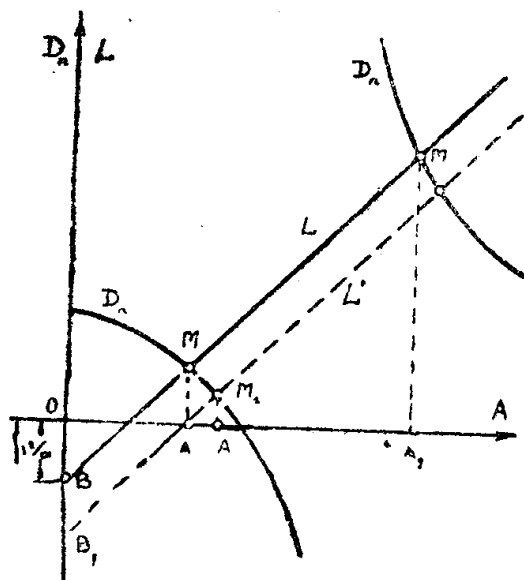
и

$$c_{m1} = c \frac{A}{D_{M_1} + 1/\alpha_1} \dots \dots \dots (6)$$

Здесь  $D_{M_1}$  — ордината точки  $M_1$ , лежащей на кривой  $D_n$  и соответствующей абсциссе  $A$ , подсчитанной по заданному  $\omega$ .

б) Изменение  $\Theta_1$  маховика (при неизменных упругих свойствах системы).

Через точку  $M_1$ , найденную на кривой  $D_n$  указанным выше образом, проводим прямую  $M_1 B_1$ , параллельную первоначальной прямой  $L$  (фиг. 3).



Фиг. 3.

Эта прямая отсекает на оси ординат отрезок  $OB_1$ . Теперь необходимая величина момента инерции  $\Theta_1$  маховика определится следующим образом:

$$\frac{\Theta_1}{\Theta} = \alpha_1 = - \frac{1}{OB_1},$$

или

$$\Theta_1 = \frac{\Theta}{OB_1}, \dots \dots \dots (7)$$

где  $\Theta$  — как и ранее, представляет момент инерции маховых масс каждого цилиндра двигателя.

Абсцисса точки  $M_2$  пересечения прямой  $M_1 B_1$  с второй ветвью кривой  $D_n$  определяет собою значение второй частоты собственных колебаний системы.

с) Одновременное изменение  $\Theta_1$  и  $c_{m1}$ .

Рассмотренное в п. а) и б) изменение  $c_{m1}$  или  $\Theta_1$ , позволяет получить заданное значение одной из частот собственных колебаний системы. Это заданное значение частоты определяется из условий достаточного сдвига опасных критических оборотов в сторону от зоны рабочих скоростей установки. Чаще всего при этом приходится иметь дело с критическими оборотами одноузловых колебаний. Но изменение масс или упругих свойств системы ведет к изменению всех частот собственных колебаний, а следовательно и к сдвигу всех критических оборотов. При сдвиге опасных критических оборотов одноузловых колебаний может выявиться новое наложение сильных критических оборотов двухузловых колебаний на рабочие скорости двигателя. Поэтому при определении необходимых изменений в установке, целесообразно выбрать желательные новые значения частот как одноузловых, так и двухузловых колебаний. Для осуществления этих частот необходимо одновременно изменить  $\Theta_1$  и  $c_{m1}$ . Излагаемый здесь метод позволяет легко определить величину этих изменений.

По выбранным  $\omega_1$  и  $\omega_n$  подсчитываем соответствующие значения  $A_1'$  и  $A_2'$ :

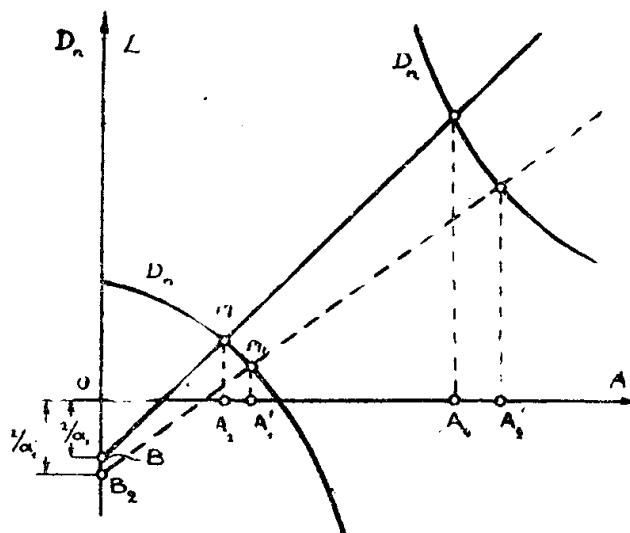
$$A_1' = \frac{\Theta \omega_1^2}{c}; \quad A_2' = \frac{\Theta \omega_n^2}{c},$$

представляющих абсциссы требуемых точек пересечения новой прямой  $L'$  с кривой  $D_n$ . По этим абсциссам находим искомые точки  $M_1$  и  $M_2$  кривой  $D$  (фиг. 4). Через  $M_1$  и  $M_2$  проводим прямую  $B_2 M_1 M_2$ . Она отсекает на оси ординат отрезок  $\overline{OB_2}$ . Теперь новое, необходимое значение  $\theta_1$  определится из выражения:

$$\theta_1 = \frac{\theta}{\overline{OB_2}}$$

Величина соответствующей необходимой жесткости  $c_{m1}$  между последним цилиндром двигателя и маховиком подсчитывается по формуле:

$$c_{m1} = \beta_1 c$$



Фиг. 4.

Входящий сюда коэффициент  $\beta_1$  определяется из очевидных соотношений:

$$\frac{1}{\beta_1} = \frac{D_{M_1} + \overline{OB_2}}{A_1}$$

или

$$\frac{1}{\beta_1} = \frac{D_{M_2} + \overline{OB_2}}{A_2} \dots \dots \dots (8)$$

Здесь  $D_{M_1}$  и  $D_{M_2}$  — соответственно ординаты точек  $M_1$  и  $M_2$ . Отрезок  $\overline{OB_2}$  — берется по абсолютной величине.

Из предыдущего ясно, что изменением  $\theta_1$  и  $c_{m1}$  не всегда возможно получить две любые заданные частоты собственных колебаний системы. Точка  $B_2$  (фиг. 4) пересечения прямой, проведенной через  $M_1$  и  $M_2$  с осью ординат не может, по существу, находиться выше начала координат  $O$ , так как положительному значению отрезка  $\overline{OB_2}$  соответствует отрицательная величина  $\theta_1$ , что невозможно. Это обстоятельство необходимо учитывать при выборе желательных значений частот собственных колебаний.

## II. Система с двумя маховиками $\theta_I$ и $\theta_{II}$ .

Для определения частот собственных колебаний системы по фиг. 6 необходимо на диаграмме  $D_n = f(A)$  для данного числа цилиндров двигателя построить кривую  $L$  по уравнению <sup>10)</sup>:

$$L = \frac{1 - \delta A + \varepsilon A^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma A - 1)} \dots \dots \dots (9)$$

Абсциссы точек пересечения этой кривой с кривой  $D_n$  дают значения  $A_1$ ,  $A_2$  и т. д. соответствующие угловым скоростям:

$$\omega_I = \sqrt{\frac{A_1 c}{\theta}} ; \omega_{II} = \sqrt{\frac{A_2 c}{\theta}} \text{ и т. д.}$$

<sup>10)</sup> См. указ. выше работу автора.



свободных колебаний. Теперь частоты собственных колебаний:

$$n_1 = \frac{30 \omega_1}{\pi} \text{ и т. п.}$$

В формуле (9) для  $L$ :

$$\gamma = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_2 (\alpha_1 + \alpha_2)},$$

$$\delta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2},$$

при чем:

$$\alpha_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta}; \quad \alpha_2 = \frac{\Theta_{II}}{\Theta}$$

$$\beta_1 = \frac{c_{II}}{c}; \quad \beta_2 = \frac{c_{I,II}}{c}.$$

Введем указанные значения для  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$  в формулу (9):

$$L = \frac{1 - \left( \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1} \right) A + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2} A^2}{(\alpha_1 + \alpha_2) \left[ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} A - 1 \right]}$$

Это уравнение кривой  $L$ , полученное автором в предыдущей статье, для удобства дальнейших исследований, может быть переписано в следующем виде:

$$L = \frac{1 - \frac{\alpha_2}{\beta_2} A}{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_2} - (\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{A}{\beta_1},$$

или

$$L = \frac{\beta_2 - A \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 A - \beta_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{A}{\beta_1} \dots \dots \dots (10)$$

Последнее выражение позволяет определить величину тех изменений масс и упругих характеристик валопровода, которые необходимы для получения заданных, желательных, частот собственных крутильных колебаний системы.

Для этого необходимо, как и ранее, по заданной угловой скорости собственных колебаний  $\omega_1$  или  $\omega_{II}$  подсчитать соответствующее значение  $A$ , пользуясь формулой (2) и по нему найти на кривой  $D_n$  точку  $M$  (фиг. 5). Кривая  $L$  для измененной системы обязана пройти через точку  $M$ , т. е. должно быть выполнено равенство:

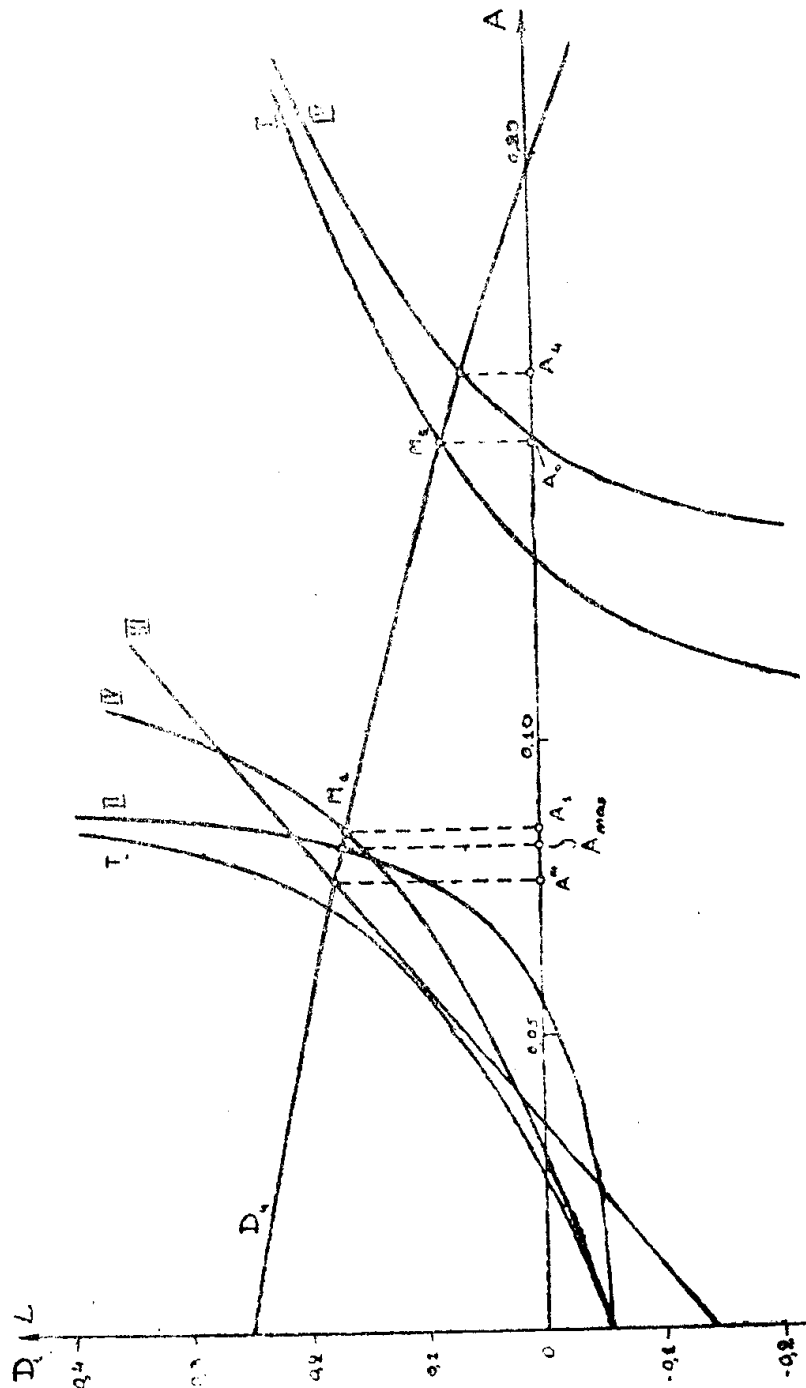
$$L = D_M,$$

или, согласно (10):

$$D_M = \frac{\beta_2 - \alpha_2 A}{\alpha_1 \alpha_2 A - \beta_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{A}{\beta_1} \dots \dots \dots (11)$$

где  $A$  — абсцисса необходимой (требуемой или желательной) точки  $M$  пересечения кривой  $L$  с кривой  $D_n$  отвечающая требуемой частоте собственных колебаний;  $D_M$  — ордината этой точки.

Последнему равенству (11) вообще удовлетворяет целый ряд комбинаций значений коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ , характеризующих относительные

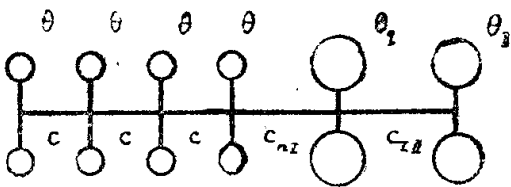


Фиг. 5.

величины масс и упругих характеристик системы. Считая известной величину трех из этих коэффициентов, отсюда можно определить значение четвертого коэффициента, по которому далее легко подсчитывается искомая величина соответствующей массы или жесткости участка вала.

Необходимо иметь в виду, что наиболее эффективным будет изменение жесткости вала на том участке, на котором при данной  $\omega$  будет находиться

узел колебания. В системе двумя маховиками (фиг. 6), наиболее целесообразно изменение жесткости вала на участке между обоими маховиками (при сдвиге критических оборотов, соответствующих одноузловым колебаниям).



Фиг. 6.

Для получения основных расчетных формул, разрешим уравнение (11), относительно каждого из четырех, входящих в него коэффициентов.

- а) Изменение жесткости  $c_{m1}$  вала, между последним цилиндром двигателя и маховиком.

Необходимая новая величина  $c_{m1}$  найдется из формулы:

$$c_{m1} = \beta_1 c$$

при чем  $\beta_1$  определится из основного уравня (11):

$$\beta_1 = \frac{A}{D_M - \frac{\beta_2 - \alpha_2 A}{\alpha_1 \alpha_2 A - (\alpha_1 + \alpha_2) \beta_2}} \dots \dots \dots (12)$$

- б) Изменение жесткости  $c_{m2}$  вала между маховиками I и II.

Необходимое новое значение жесткости:

$$c_{m2} = \beta_2 c.$$

Коэффициент  $\beta_2$  подсчитывается по формуле:

$$\beta_2 = \alpha_2 A \frac{\alpha_1 (A - \beta_1 D_M) - \beta_1}{(\alpha_1 + \alpha_2) (A - \beta_1 D_M) - \beta_1} \dots \dots \dots (13)$$

легко получающейся из равенства (11).

- с) Изменение момента инерции маховика I.

Новое значение  $\Theta_1$ , дающее заданную частоту собственных колебаний системы:

$$\Theta_1 = \alpha_1 \Theta$$

Коэффициент  $\alpha_1$  определяется из основного уравнения (11).

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_2 \beta_2}{A \alpha_2 - \beta_2} + \frac{\beta_1}{A - D_M \beta_1} \dots \dots \dots (14)$$

- д) Изменение момента инерции маховика II.

Необходимое новое значение момента инерции второго маховика:

$$\Theta_{II} = \alpha_2 \Theta$$

Коэффициент  $\alpha_2$  подсчитывается по формуле:

$$\alpha_2 = \beta_2 \frac{1 + \alpha_2 (D_M - A/\beta_1)}{A + (A \alpha_1 - \beta_2) (D_M - A/\beta_1)} \dots \dots \dots (15)$$

полученной из уравнения (11).

е) Одновременное изменение величин моментов инерции масс и упругих характеристик системы.

Расчет по пунктам а), б), с) или д) позволяет определить величину тех изменений одной из масс или жесткостей системы, которые необходимы для получения одной заданной частоты собственных колебаний.

Предложенный автором метод расчета дает возможность также удовлетворить требованию осуществления двух заданных частот (одноузловых и двухузловых) собственных крутильных колебаний валопровода.

По заданным (требуемым) значениям угловых скоростей  $\omega_I$  и  $\omega_{II}$  одноузловых и двухузловых собственных колебаний системы подсчитываем соответствующие величины  $A_1$  и  $A_2$  (абсциссы необходимых точек пересечения кривых  $L$  и  $D$ ) (фиг. 5). По этим абсциссам находим точки  $M_1$  и  $M_2$  на кривой  $D_n$  и измеряем их координаты  $D_{M_1}$  и  $D_{M_2}$ .

Теперь составляем выражения (11):

$$D_{M_1} = \frac{\beta_2 - \alpha_2 A_2}{\alpha_1 \alpha_2 A_1 - (\alpha_1 + \alpha_2) \beta_2} + \frac{A_1}{\beta_1} \dots \dots \dots (16)$$

$$D_{M_2} = \frac{\beta_2 - \alpha_2 A_2}{\alpha_1 \alpha_2 A_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) \beta_2} + \frac{A_2}{\beta_1} \dots \dots \dots (17)$$

Отсюда, например, совместным решением этих двух уравнений можно определить необходимые значения  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , если для всех остальных коэффициентов ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ) подставить их числовую величину.

Вообще, пользуясь этими уравнениями, можно определить необходимую величину двух из четырех коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , обеспечивающую получение двух заданных частот собственных крутильных колебаний валопровода.

Совместное решение уравнений (16) и (17) в общем виде нецелесообразно в виду громоздкости получающихся при этом выражений.

Покажем применение изложенного метода на частном примере.

В примере, приведенном в предыдущей статье автора, для силовой установки, состоящей из четырехцилиндрового двигателя, маховика и динамо, и имеющей:

$$\begin{aligned} \Theta &= 3,0 \text{ кгм. сек}^2, & c &= 5,0 \cdot 1,0^6 \text{ кгм/радиан} \\ \Theta_I &= 30,0 \text{ " " " " ,} & c_{II} &= 3,0 \cdot 1,0^6 \text{ " " " " } \\ \Theta_{II} &= 21,0 \text{ " " " " ,} & c_{III} &= 2,0 \cdot 1,0^6 \text{ " " " " } \\ & & \alpha_1 &= 10,0, \\ & & \alpha_2 &= 7,0 , \\ & & \beta_1 &= 0,60. \\ & & \beta_2 &= 0,40, \end{aligned}$$

были получены следующие значения частот собственных колебаний:

$$\begin{aligned} n_I &= 3305 \text{ колеб/мин} \\ n_{II} &= 4795 \text{ " " } \end{aligned}$$

и соответственно:

$$\begin{aligned} \omega_I &= 346,0 \text{ сек.}^{-1}, \\ \omega_{II} &= 502 \text{ сек.}^{-1} \end{aligned}$$

Кривые  $L$ , соответствующие этим характеристикам колеблющейся системы, обозначены на фиг. 5 через I.

Определим величину необходимых изменений масс и упругих свойств валопровода установки, обеспечивающих, например, повышение частоты собственных одноузловых колебаний системы до следующей величины:

$$n_1 = 3600 \text{ колеб./мин.}$$

В общем случае заданное повышение (или понижение) может быть достигнуто изменением одной из величин  $\Theta_I, \Theta_{II}, c_{nI}, c_{nII}$

1. Повышение  $n_1$  изменением  $\beta_1$  т. е. жесткости  $c_{nI}$  вала между последним цилиндром двигателя и маховиком.

Из уравнения (10):

$$L = \frac{\beta_2 - A\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 A - (\alpha_1 + \alpha_2)\beta_2} + \frac{A}{\beta_1}$$

следует, что с увеличением  $\beta_1$  кривая  $L$ , в первой своей ветви, идет все выше и выше, начинаясь с той-же точки на оси ординат, определяемой отрезком  $-\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$ . При этом точка пересечения кривой  $L$  с кривой  $D_n$  передвигается вправо; тем самым возрастает коэффициент  $A$  и увеличивается угловая скорость одноузловых колебаний  $\omega_1$ .

Заданному  $n_1 = 3600$  соответствует

$$\omega_1 = \frac{3,14 \cdot 3600}{30} = 377 \text{ сек.}^{-1},$$

$$A_1 = \frac{\Theta \omega^2}{c} = \frac{3,0 \cdot 377^2}{5 \cdot 10^6} = 0,0852$$

По-этому значению  $A$  из графика кривой  $D_4$  находим <sup>11)</sup>

$$D_{m1} = 0,164$$

Теперь по формуле (12) подсчитываем новую, необходимую величину  $\beta_1$ :

$$\beta_1 = \frac{A_1}{D_{m1} - \frac{\beta_2 - \alpha_2 A_1}{\alpha_1 \alpha_2 A_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)\beta_2}} = \frac{0,0852}{0,164 - \frac{0,4 - 7 \cdot 0,0852}{70 \cdot 0,0852 - 17 \cdot 0,4}} = -1,204$$

Полученное отрицательное значение  $\beta_1$  показывает, что никаким изменением  $c_{nI}$  нельзя в данной установке осуществить требуемое  $\omega_1$ .

Для выяснения предельной, наиболее высокой  $\omega_1$ , достижимой изменением  $c_{nI}$ , построим на диаграмме  $D_4$  (фиг. 5) кривую  $L$  при  $\beta_1 = \infty$ , пользуясь тем же уравнением (10):

$$L = \frac{\beta_2 - A\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 A - (\alpha_1 + \alpha_2)\beta_2} = \frac{0,4 - 7A}{70A - 17 \cdot 0,4}$$

Эта кривая на фиг. 5 обозначена II. Пересечение первой ее ветви с кривой  $D_4$  дает предельное значение  $A$ :

$$A_{max} = 0,0825$$

<sup>11)</sup> Это значение для  $D_4$  можно подсчитать так же непосредственно по формуле:

$$D_{m1} = \frac{1 - 6A_1 + 5A_1^2 - A_1^3}{4 - 10A_1 + 6A_1^2 - A_1^3}$$

Отсюда предельная угловая скорость:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A_{max} \cdot c}{\Theta}} = \sqrt{\frac{0,0825 \cdot 5 \cdot 10^6}{3,0}} = 371 \text{ сек.}^{-1},$$

и

$$n_{1max} = \frac{30}{3,14} \cdot 371 = 3545 \text{ колеб./мин.}$$

2. Повышение  $n_1$  изменением  $\beta_2$ , т. е. жесткости вала между маховиком и динамо.

Изменение  $c_{1II}$  более эффективно, так как при одноузловых колебаниях рассматриваемой системы узел колебания находится на этом участке.

По формуле (13) при  $D_{M1} = 0,164$ ,

$$A_1 = 0,0852,$$

имеем:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \alpha_2 A_1 \frac{\alpha_1 (A_1 - \beta_1 D_{M1}) - \beta_1}{(\alpha_1 + \alpha_2) (A_1 - \beta_1 D_{M1}) - \beta_1} = \\ &= 0,0852 \cdot 7 \cdot \frac{10 \cdot (0,0852 - 0,0984) - 0,6}{17 \cdot (0,0852 - 0,0984) - 0,6} = 0,530 \end{aligned}$$

Таким образом, для получения  $n_1 = 3600$  необходимо сделать

$$c_{1II} = \beta_2 \cdot c = 0,530 \cdot 5,0 \cdot 10^6 = 2,65 \cdot 10^6 \text{ кгм/радиан.}$$

На участке между маховиком и динамо необходимо увеличить диаметр вала против первоначального в отношении:

$$\sqrt[4]{\frac{2,65 \cdot 10^6}{2,0 \cdot 10^6}} = 1,072$$

(предполагая вал имеющим круглое сплошное поперечное сечение), или на 7,2%, что практически легко осуществимо.

3. Повышение  $n_1$  изменением  $\alpha_1$ , т. е. момента инерции  $\Theta_1$  маховика.

Из формулы (14) при  $A = 0,0852$  и  $D_{M1} = 0,164$ :

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_2 \beta_2}{A \alpha_2 - \beta_2} + \frac{\beta_1}{A - D_{M1} \beta_1} = \frac{7 \cdot 0,4}{0,0852 \cdot 7 - 0,4} + \frac{0,6}{0,0852 - 0,164 \cdot 0,6} = -44,0$$

Отрицательное значение  $\alpha_1$  показывает, что уменьшением  $\Theta_1$  нельзя достичь заданного  $n_1 = 3600$ .

Определим предельное  $n_1$ , получающееся при уменьшении маховика до  $\Theta_1 = 0$ . Из формулы (10) при  $\alpha_1 = 0$

$$L = \frac{A}{\beta_1} + \frac{A}{\beta_2} - \frac{1}{\alpha_2} = A \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right) - \frac{1}{\alpha_2},$$

т. е. кривая  $L$  переходит в прямую линию, отсекающую на оси ордин. отрезок

$$-\frac{1}{\alpha_2} = -\frac{1}{7} = -0,143.$$

Эта прямая, обозначенная на фиг. 5 через III, дает предельное значение:

$$A^{III} = 0,0765,$$

чему соответствует:

$$\omega_{1max} = \sqrt{\frac{A^{III} \cdot c}{\Theta}} = \sqrt{\frac{0,0765 \cdot 5 \cdot 10^6}{3}} = 356 \text{ сек}^{-1},$$

$$n_{1max} = \frac{30 \cdot 356}{3,14} \approx 3400 \text{ колеб/мин.}$$

4. Повышение  $n_1$  изменением  $\alpha_2$ , т. е. момента инерции  $\Theta_{II}$  ротора динамо.

Из формулы (15) при  $A = 0,0852$  и  $D_{M1} = 0,164$ :

$$\alpha_2 = \beta_2 \cdot \frac{1 + \alpha_1 (D_{M1} - A/\beta_1)}{A + (A \alpha_1 - \beta_2) (D_{M1} - A/\beta_1)} =$$

$$= 0,4 \cdot \left[ \frac{1 + 10 \left( 0,164 - \frac{0,0852}{0,6} \right)}{0,0852 + (10 \cdot 0,0852 - 0,4) \left( 0,164 - \frac{0,0852}{0,6} \right)} \right] = 5,13,$$

вместо первоначального  $\alpha_2 = 7,0$ , принятого в основном расчете. Подобное  $\Theta_{II}$  динамо иногда, при проектировании, может быть осуществлено путем выбора динамо с меньшим маховым моментом.

Из приведенных выше подсчетов следует, что требуемое повышение частот одноузловых колебаний до  $n_1 = 3400$ , осуществимо в данной установке только путем уменьшения момента инерции  $\Theta_{II}$  динамо, или увеличения жесткости  $c_{II}$  вала между динамо и маховиком.

Но изменение каждой из этих величин вообще ведет к изменению частоты не только одноузловых, но и двухузловых колебаний. Получающийся при этом сдвиг критических оборотов, соответствующих двухузловым колебаниям, может иногда оказаться нежелательным, так как новые значения указанных критических скоростей могут наложиться на рабочие обороты двигателя.

Выше было установлено, что для повышения частоты одноузловых колебаний рассматриваемой установки до  $n_1 = 3600$  колеб/мин., достаточно сделать жесткость вала между маховиком и динамо равной  $c_{II} = 2,65 \cdot 10^6$  кгм/радиан, сохраняя неизменными все остальные характеристики системы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, c, \Theta$ .

Новому значению  $c_{II}$  соответствует:

$$\beta_2 = 0,530.$$

При этих данных по формуле (10) получаем следующее уравнение кривой  $L$ :

$$L = \frac{\beta_2 - A \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 A - \beta_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{A}{\beta_1} = \frac{0,530 - 7A}{70A - 0,530 \cdot 17} + \frac{A}{0,6}.$$

Эта кривая на фиг. 5 обозначена через IV. Точка пересечения ее второй ветви с кривой  $D_4$  имеет абсциссу:

$$A^{IV} = 0,1628$$

чему соответствует:

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{A^{IV} \cdot c}{\Theta}} = \sqrt{\frac{0,1628 \cdot 5 \cdot 10^6}{3,0}} = 521 \text{ сек}^{-1},$$

и частота собственных двухузловых колебаний:

$$n_{II} = \frac{30}{3,14} 521 = 4970 \text{ колеб/мин.},$$

между тем, как первоначальная упругая система имела:

$$n_{II} = 4795 \text{ колеб/мин.}$$

Для сохранения прежнего значения  $n_{II} = 4795$  колеб/мин. при новом значении  $n_I = 3600$  колеб/мин. необходимо произвести определенные изменения, одновременно двух величин  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ . Величина этих изменений может быть найдена следующим образом.

Необходимые угловые скорости колебания:

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot 3600}{30} = 377 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_{II} = \frac{\pi \cdot 4795}{30} = 502 \text{ сек}^{-1},$$

чему соответствует:

$$A_1 = \frac{3 \cdot 377^2}{5 \cdot 10^6} = 0,0852,$$

$$A_2 = \frac{3 \cdot 502^2}{5 \cdot 10^6} = 0,1512,$$

$$D_{M1} = 0,164,$$

$$D_{M2} = \frac{1 - 6A_2 + 5A_2^2 - A_2^3}{4 - 10A_2 + 6A_2^2 - A_2^3} = 0,0777^{12)}$$

Теперь воспользуемся, например, уравнением (15) и подставим в него сначала значения  $A_1$  и  $D_{M1}$  и затем значения  $A_2$  и  $D_{M2}$ . Подставляем значения  $A_1$  и  $D_{M1}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \beta_2 \frac{1 + \alpha_1 (D_{M1} - A_2/\beta_1)}{A_1 + (A_1 \alpha_1 - \beta_2) (D_{M1} - \frac{A_1}{\beta_1})} = \\ &= \beta_2 \frac{1 + 10 \left( 0,164 - \frac{0,0852}{0,60} \right)}{0,0852 + (0,0852 \cdot 10 - \beta_2) \left( 0,164 - \frac{0,0582}{0,60} \right)} = \beta_2 \frac{1,22}{0,1039 - 0,022 \beta_2} \quad \text{(a)} \end{aligned}$$

Подставляем в (15) значения  $A_2$  и  $D_{M2}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \beta_2 \frac{1 + \alpha_1 (D_{M2} - A_2/\beta_1)}{A_2 + (A_2 \alpha_1 - \beta_2) (D_{M2} - A_2/\beta_1)} = \\ &= \beta_2 \frac{1 + 10 \left( 0,0777 - \frac{0,1512}{0,60} \right)}{0,1512 + (1,512 - \beta_2) \left( 0,0777 - \frac{0,1512}{0,60} \right)} = \beta_2 \frac{0,743}{0,113 - 0,174 \beta_2} \quad \text{(b)} \end{aligned}$$

<sup>12)</sup> Это значение  $D_{M2}$ , представляющее собою ординату второй требуемой точки пересечения кривой  $L$  с кривой  $D_4$ , можно взять и непосредственно из диаграммы для  $D_4$ , по известной абсциссе этой точки  $A_2 = 0,1512$ .



Приравниваем правые части выражений (а) и (b)

$$\frac{1,22}{0,1039 - 0,022 \beta_2} = \frac{0,743}{0,113 - 0,174 \beta_2}$$

Отсюда:

$$\beta_2 = 0,309,$$

и теперь, например, из (b)

$$\alpha_2 = 0,309 \frac{0,743}{0,113 - 0,74 \cdot 0,309} = 3,88.$$

Таким образом, для повышения частоты одноузловых колебаний системы до  $n_1 = 3600$  при сохранении прежней частоты двухузловых колебаний  $n_{11} = 4795$ , необходимо уменьшить момент инерции ротора динамо до:

$$\Theta_{11} = \alpha_2 \Theta = 5,13 \cdot 3,0 = 15,39 \text{ кгм сек}^2,$$

и уменьшить жесткость вала между динамо и маховиком до следующей величины:

$$c_{11} = \beta_2 c = 0,530 \cdot 5 \cdot 10^6 = 2,65 \cdot 10^6 \text{ кгм/рад.},$$

сохраняя прежними  $\Theta$ ,  $\Theta_1$ ,  $c_m$  и  $c$ .

При определении новых значений  $\beta_2$  и  $\alpha_2$  можно было вместо уравнения (15) воспользоваться с равным успехом уравнением (12).

Совершенно аналогичным путем можно было найти необходимые новые значения  $\beta_2$  и  $\alpha_2$  для какого либо иного (практически осуществимого) значения  $n_{11}$  при заданном также значении  $n_1$ .

Подобной возможности определения необходимых мероприятий для сдвига двух частот собственных колебаний в желательную сторону и на требуемую величину не дает ни один из известных автору методов расчета крутильных колебаний как в русской, так и иностранной литературе.