

## Движение тела на наклонной плоскости с вертикальными круговыми качаниями.

### Введение.

Наклонная плоскость с вертикальными круговыми качаниями применяется для транспортирования продуктов с одновременным их сортированием в машинах по уборке зерновых хлебов и по обогащению полезных ископаемых.

Характер движения тела по такой плоскости до настоящего времени еще не выяснен настолько, чтобы можно было сознательно конструировать рабочие органы машин, работающие по указанному признаку.

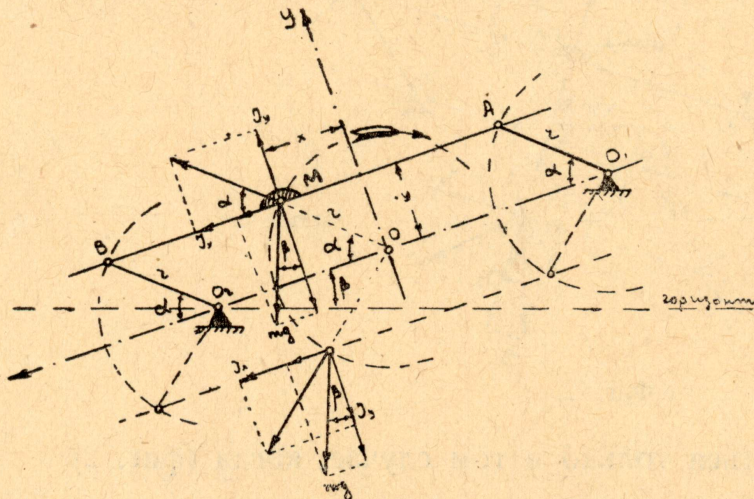
Настоящая работа имеет своей задачей выявить характер движения тела в общем случае при различных кинематических данных, причем для упрощения задачи коэффициент трения предполагается постоянным.

### 1. Возможность начала скольжения тела.

Если плоскость  $AB$  закреплена на двух, одинаковой длины, кривошипах  $O_1A$  и  $O_2B$ , то все точки этой плоскости будут описывать одинаковые траектории—окружности радиуса

$$r = O_1A = O_2B.$$

Будем считать начало координат расположенным в центре окружности, описываемой какой-либо точкой  $M$ , а ось  $x$ -ов направим (фиг. 1) параллельно плоскости вниз;



Фиг. 1.

лельно плоскости вниз; в таком случае движение точки  $M$  будет определяться уравнениями

$$x = r \cos \alpha; \quad y = r \sin \alpha \quad (1)$$

где:  $\alpha$ —угол поворота кривошипа. При равномерном вращательном движении кривошипа и заданной угловой скорости  $\omega$

$$\alpha = \omega t \dots (2)$$

При этом скорость точки будет определяться уравнениями

$$U_x = -\omega r \sin \alpha; \quad U_y = \omega r \cos \alpha \dots (3)$$

а ускорение уравнениями

$$J_x = -\omega^2 r \cos \alpha; \quad J_y = -\omega^2 r \sin \alpha \dots (4)$$

Если какое-либо тело лежит на плоскости в точке  $M$ , то его движение также будет определяться выражениями (1—4), а потому на него будет действовать центробежная сила инерции

$$I_x = m \omega^2 r \cos \alpha; \quad I_y = m \omega^2 r \sin \alpha \quad \dots \dots \dots (5)$$

В I и IV квадрантах эта сила инерции будет стремиться сдвинуть тело вниз; для того, чтобы сдвиг оказался возможным, необходимо, чтобы

$$m \omega^2 r \cos \alpha + m g \sin \beta > f(m g \cos \beta - m \omega^2 r \sin \alpha).$$

Это выражение после соответствующих преобразований даст условие, обеспечивающее возможность начала скольжения вниз, в виде

$$\omega^2 r \cos(\alpha - \varphi) > g \sin(\varphi - \beta) \quad \dots \dots \dots (6)$$

Левая часть этого неравенства имеет максимальное значение при  $\cos(\alpha - \varphi) = 1$  или  $\alpha = \varphi$ ; по этому, очевидно, что начало скольжения тела вниз вообще возможно только в том случае, когда

$$\omega^2 r > g \sin(\varphi - \beta) \quad \dots \dots \dots (6a)$$

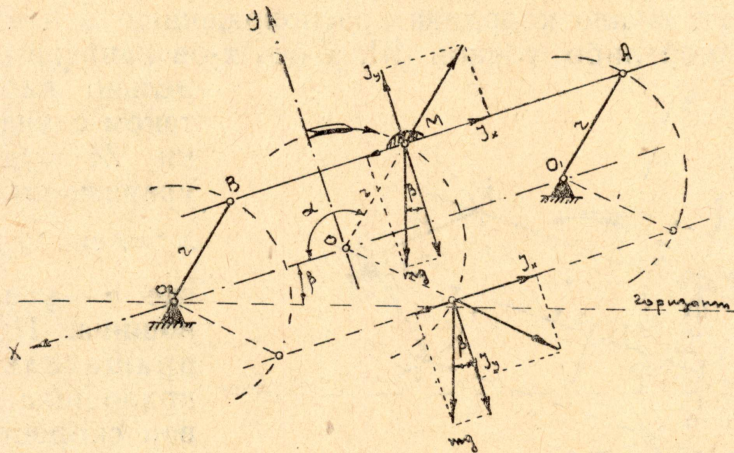
Если это условие выполнено, то скольжение вниз может начаться только в том случае, когда имеет место условие (6); иначе говоря, тело может начать скольжение вниз только в том случае, когда кривошип занимает положение между

$$\alpha_3 = 2\pi + \varphi - \arccos \left[ \frac{g}{\omega^2 r} \sin(\varphi - \beta) \right] \quad \dots \dots \dots (7)$$

и

$$\alpha_0 = \varphi + \arccos \left[ \frac{g}{\omega^2 r} \sin(\varphi - \beta) \right] \quad \dots \dots \dots (8)$$

Во II и III квадрантах сила инерции стремится сдвинуть тело вверх;



Фиг. 2.

этот сдвиг может осуществиться только в том случае, когда (фиг. 2)

$$-m \omega^2 r \cos \alpha - m g \sin \beta > f(m g \cos \beta - m \omega^2 r \sin \alpha)$$

или

$$-\omega^2 r \cos(\alpha + \varphi) > g \sin(\varphi + \beta) \quad \dots \dots \dots (9)$$

Рассуждая аналогично предыдущему, найдем, что начало скольжения вверх может иметь место только в том случае, когда

$$\omega^2 r > g \sin(\varphi + \beta) \quad \dots \dots \dots (9a)$$

и при наличии этого условия только тогда, когда кривошип занимает положение между

$$\alpha_1 = \pi - \varphi - \arccos \left[ \frac{g}{\omega^2 r} \sin(\varphi + \beta) \right] \dots \dots \dots (10)$$

и

$$\alpha_2 = \pi - \varphi + \arccos \left[ \frac{g}{\omega^2 r} \sin(\varphi + \beta) \right] \dots \dots \dots (11)$$

Кроме этого, на фиг. 1 и 2 видно, что сила инерции стремится оторвать тело от плоскости; очевидно, что отрыв может произойти только в том случае, когда

$$m \omega^2 r \sin \alpha > m g \cos \beta \dots \dots \dots (12)$$

и вообще может иметь место, если только

$$\omega^2 r > g \cos \beta \dots \dots \dots (12a)$$

Если это условие выполнено, то отрыв может произойти только при положениях кривошипа между

$$\alpha' = \arcsin \left[ \frac{g}{\omega^2 r} \cos \beta \right] \dots \dots \dots (13)$$

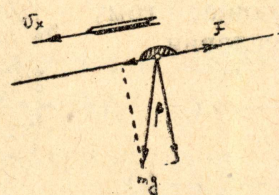
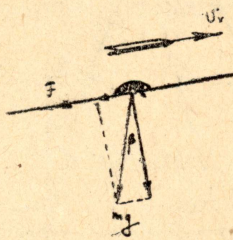
и

$$\alpha'' = \pi - \arcsin \left[ \frac{g}{\omega^2 r} \cos \beta \right] \dots \dots \dots (14)$$

Так, например, если  $\beta = 12^\circ$ ;  $f = 0,4$ ;  $\varphi = 21^\circ 50'$ ; то тело не сможет начать скольжения вообще, при  $\omega^2 r < 1,68$  м/сек<sup>2</sup>; может начать скольжение вниз, при  $1,68 < \omega^2 r < 5,47$  м/сек<sup>2</sup>; может начать скольжение и вверх, и вниз при  $\omega^2 r > 5,47$  м/сек<sup>2</sup> и, наконец, может оторваться от плоскости при  $\omega^2 r > 9,6$  м/сек<sup>2</sup>.

## 2. Движение тела при $g \sin(\varphi - \beta) < \omega^2 r < g \sin(\varphi + \beta)$ .

Если  $\omega^2 r$  имеет такое значение, при котором возможно начало скольжения только вниз, то, при бесконечно медленной скорости падения тела



Фиг. 3.

на плоскость, в момент падения абсолютная скорость тела будет равна нулю. В дальнейшем, благодаря наличию силы трения, тело будет увлекаться плоскостью и его абсолютная скорость станет возрастать по величине; направление же этой скорости

будет совпадать с направлением движения плоскости. Так как нормальное давление тела на плоскость будет складываться из слагающей от веса тела  $m g \cos \beta$  и из давления плоскости на тело —  $m \omega^2 r \sin \alpha$ , то сила трения будет, вообще говоря, переменной; величина же ее определится выражением (фиг. 3)

$$F = f(m g \cos \beta - m \omega^2 r \sin \alpha) \dots \dots \dots (15)$$

ление угла  $\alpha_e$  производится проведением линии наклонной к оси абсцисс под углом  $\gamma_e$ , при чем

$$T g \gamma_e = g \sin(\varphi + \beta) \frac{m_t}{m_v} \dots \dots \dots (22)$$

Кроме того, на движение тела будет оказывать влияние слагающая  $mg \sin \beta$  от силы тяжести; если плоскость движется вправо, то эта слагающая будет уменьшать действие силы трения, и наоборот, если плоскость движется влево, то  $mg \sin \beta$  будет прибавляться к силе трения. В связи с этим ускорение абсолютного движения будет равно

$$J_x = \frac{F \mp mg \sin \beta}{m} = g \frac{\sin(\varphi \mp \beta)}{\cos \varphi} - \omega^2 r f \sin \alpha \dots (16)$$

Здесь знак  $\mp$  относится к движению тела по плоскости вверх, а знак  $-$  к движению тела по плоскости вниз.

Абсолютная скорость тела, будучи направленной по направлению движения плоскости по абсолютному своему значению, станет увеличиваться и определится выражением

$$W_x = \int_{t_a}^t j dt = g \frac{\sin(\varphi \mp \beta)}{\cos \varphi} (t - t_a) \mp \omega r f (\cos \alpha - \cos \alpha_a) \dots (17)$$

Рассмотрим конкретный пример: пусть  $\omega^2 r = 5,13$  м/сек<sup>2</sup>,  $r = 50$  мм,  $\beta = 12^\circ$ ;  $f = 0,4$ ; в таком случае  $\omega = 10,42$  рад/сек,  $\omega r = 0,52$  м/сек,  $n = 100$  об/мин.  $\alpha_0 = 92^\circ 50'$ ,  $\alpha_3 = 311^\circ 50'$ .

Пусть в момент падения кривошип занимает положение, определяемое углом  $\alpha_a = 20^\circ$ . Учитывая вышеизложенное и, следовательно, имея в виду, что плоскость движется вправо, а абсолютная скорость имеет отрицательный знак, можем написать выражение для относительной скорости тела

$$\begin{aligned} V_x &= W_x - U_x = -g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos \varphi} (t - t_a) - \omega r f (\cos \alpha - \cos \alpha_a) \mp \omega r \sin \alpha = \\ &= -\frac{1}{\cos \varphi} \left[ -\omega r \sin \varphi \cos \omega t_a + g \sin(\varphi - \beta) (t - t_a) - \omega r \sin(\omega t - \varphi) \right] \end{aligned}$$

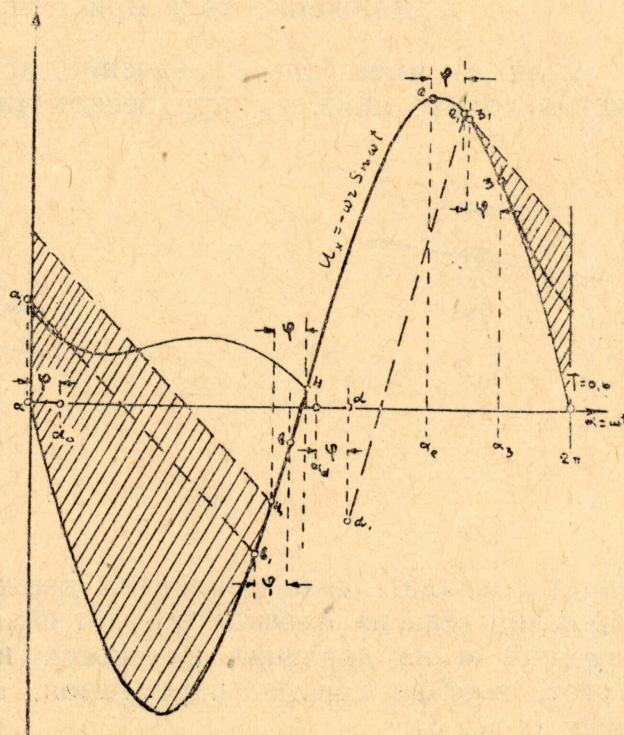
Первый член выражения в скобках есть величина постоянная, второй член постепенно растет, а третий изменяется по закону синуса; поэтому через некоторый промежуток времени относительная скорость станет равной нулю. Положение кривошипа, соответствующее этому моменту, найдется из условия

$$V_x = 0$$

или

$$\begin{aligned} \omega r \sin \varphi \cos \omega t_a - g \sin(\varphi - \beta)(t - t_a) = \\ = -\omega r \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Это выражение проще всего разрешить графически таким образом (фиг. 4): строим кривую  $U_x = -\omega r \sin \omega t$  и при  $\alpha = \omega t_a - \varphi$  откладываем по оси ординат отрезок  $aa_1$ , равный  $\omega r \sin \varphi \cos \omega t_a$ ; из



Фиг. 4.



Относительный путь, проходимый телом за каждый период скольжения (или, что тоже самое, за каждый оборот кривошипа) очевидно будет равен

$$S_H = \int_{t_3}^{t_4} V_H dt = -\frac{1}{\cos \varphi} \left\{ r \left[ \cos(\omega t_4 - \varphi) - \cos(\omega t_3 - \varphi) \right] + \right. \\ \left. + \omega r \sin(\omega t_3 - \varphi) (t_4 - t_3) + g \sin(\varphi - \beta) \frac{(t_4 - t_3)^2}{2} - r \right\} \dots (23)$$

В нашем случае  $\alpha_4 = 544^\circ$ ,  $t_4 = 0,910$  сек.

$$\alpha_3 = 311^\circ 50', t_3 = 0,520 \text{ сек.}, S_H = 140 \text{ мм.}$$

Можно определить  $S_H$  графическим путем. Для этого достаточно спланиметрировать площадь  $F$  на фиг. 3, заключенную между кривой  $U_x$  и прямой  $3_1-4_1$ , умножить ее на масштаб пути и разделить на  $\cos \varphi$ .

В нашем случае  $F = 1970 \text{ мм}^2$ ,  $m_v = 0,01 \text{ м/сек/мм}$ ,  $m_t = 0,00667 \text{ сек/мм}$ ,  $m_s = m_v, m_t = 0,0667 \text{ мм/мм}^2$ ,  $S_H = \frac{F \cdot m_s}{\cos \varphi} = 141 \text{ мм.}$

Разница, как видим, получается ничтожная и не выходит из пределов, определяемых точностью построений.

### 3. Движение тела при $g \sin(\varphi + \beta) < \omega^2 r < g \cos \beta$ .

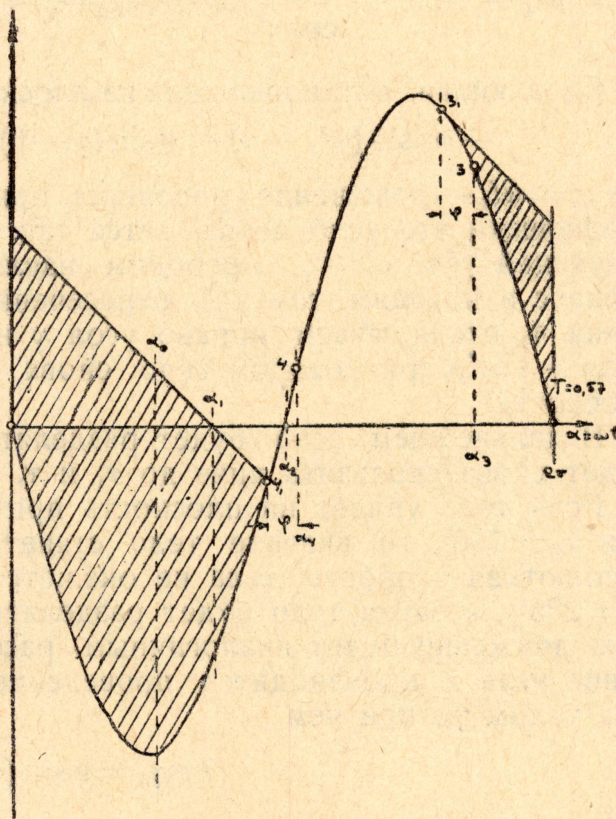
Характер движения тела в том случае, когда возможно начало скольжения и вверх и вниз, лучше всего разобрать на конкретном примере.

Пусть  $\omega^2 r = 6,0 \text{ м/сек}^2$ ,

$\varphi = 21^\circ 50'$ ,  $\beta = 12^\circ$ ,  $r = 50 \text{ мм.}$

В таком случае:  $\omega = 10,95$ ,  
 $\omega r = 0,548$ ,  $\alpha_0 = 95^\circ 30'$ ,  $\alpha_1 = 134^\circ 30'$ ,  
 $\alpha_2 = 183^\circ 10'$ ,  $\alpha_3 = 308^\circ$ .

Вначале, после падения тела на плоскость, характер движения тела будет такой же, как и при  $\omega^2 r < g \sin(\varphi + \beta)$ , т. е. в конце концов тело будет начинать движение вниз по плоскости при  $\alpha_3 = 308^\circ$ . Конец скольжения вниз найдется при  $\alpha_4 = 2\pi + 190^\circ$  (фиг. 5). Но т. к.  $\alpha_4 > \alpha_2$ , то в дальнейшем тело будет разделять движение плоскости до  $\alpha_3$ , а затем явление повторяется снова. Таким образом, выходит, что в данном случае, несмотря на возможность начала скольжения вверх при положениях кривошипа от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ , эта возможность оказывается неиспользованной только потому, что при



Фиг. 5.

этих положениях кривошипа тело находится в процессе скольжения вниз. Для того, чтобы возможность начала скольжения вверх могла быть использована, очевидно необходимо, чтобы  $\alpha_4 < \alpha_2$ , т. е. иначе говоря, необходимо, чтобы при положениях кривошипа от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$  тело оказалось неподвижно

лежащим на плоскости. Но такое положение может иметь место только в том случае, когда при  $t_4 < T + t_2$  будет иметь место соотношение (из выражения 21)

$$-\omega r \sin(\omega t_3 - \varphi) - g \sin(\varphi - \beta)(T + t_2 - t_3) < -\omega r \sin(\omega t_2 - \varphi).$$

Откуда, после соответствующих преобразований, найдем условие, обеспечивающее наличие скольжения вверх в виде

$$\omega_2 r < \frac{g \sin(\varphi - \beta)(2\pi + \alpha_2 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_2 - \varphi) - \sin(\alpha_3 - \varphi)} \dots \dots \dots (24)$$

Решая это неравенство путем подбора, нетрудно убедиться, что, например, при  $f = 0,4$  и  $\beta = 12^\circ$  скольжение вверх будет иметь место только при

$$7,0 < \omega_2 r < 14,0 \text{ м/сек}^2.$$

В действительности, однако, верхний предел будет определяться появлением явления отрыва при  $\omega_2 r = 9,6$ , и при наличии отрыва условия движения будут иные и ф-ла (24) не будет действительна.

Если провести соответствующие подсчеты, например, для  $\omega^2 r = 9,0 \text{ м/сек}^2$ , то найдем, что скольжение вниз будет начинаться при  $\alpha_3 = 302^\circ 30'$  и будет продолжаться до  $\alpha_4 = 2\pi + 208^\circ$ . Затем начнется скольжение вверх и будет продолжаться до  $\alpha_5 = 2\pi + 222^\circ$ ; после этого тело будет разделять движение плоскости до  $\alpha_3$ . При скольжении вниз будет пройден относительный путь  $S_n = 200 \text{ мм}$ , а при скольжении вверх путь  $S_o = 0,1 \text{ мм}$ .

Таким образом, выходит, что при  $\omega^2 r > g \sin(\varphi + \beta)$ , несмотря на наличие возможности начала скольжения и вверх и вниз, тело все же будет скользить только вниз, и только в том случае, когда выполнено условие (24), будет иметь место незначительное скольжение вверх.

#### 4. Движение тела при $\omega^2 r > g \cos \beta$ .

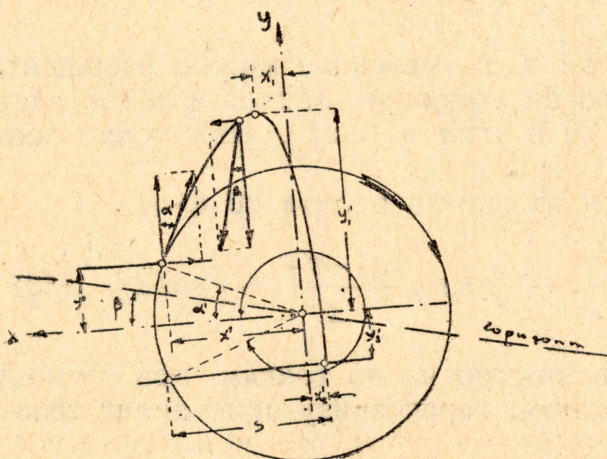
##### а) При отсутствии скольжения.

Для того, чтобы уяснить себе сущность процесса движения при наличии отрыва, разберем предварительно более простой случай, когда в момент отрыва тело неподвижно на плоскости. Такое положение, например, будет иметь место в тех случаях, когда поверхность плоскости делается не гладкой (клавиши соломотрясов).

Выше было доказано, что момент отрыва характеризуется положением кривошипа  $\alpha'$ , для которого из ф-лы (13) получим (фиг. 6)

$$\sin \alpha' = \frac{g \cos \beta}{\omega^2 r};$$

$$\cos \alpha' = \sqrt{1 - \left[ \frac{g \cos \beta}{\omega^2 r} \right]^2} \dots (25)$$



Фиг. 6.

До момента отрыва тело разделяло движение плоскости, поэтому в момент отрыва координаты тела

$$x' = r \cos \alpha' = r \sqrt{1 - \left[ \frac{g \cos \beta}{\omega^2 r} \right]^2}; \quad y' = r \sin \alpha' = \frac{g \cos \beta}{\omega^2} \quad \dots (26)$$

а слагающие начальной скорости

$$V'_x = -\omega r \sin \alpha' = -\frac{g \cos \beta}{\omega}; \quad V'_y = \omega r \cos \alpha' = \omega r \sqrt{1 - \left[ \frac{g \cos \beta}{\omega^2 r} \right]^2} \quad \dots (27)$$

С момента отрыва на тело будет действовать только одна сила тяжести; поэтому скорость тела при полете будет определяться выражениями

$$V_x = V'_x + g \sin \beta (t - t'); \quad V_y = V'_y - g \cos \beta (t - t') \quad \dots (28)$$

а траектория, описываемая телом — уравнениями движения

$$x = x' + V'_x(t - t') + g \sin \beta \frac{(t - t')^2}{2}; \quad y = y' + V'_y(t - t') - g \cos \beta \frac{(t - t')^2}{2} \quad \dots (29)$$

Так как скорость по оси  $y$ -ов равномерно уменьшается, то момент наибольшего подъема  $t'_1$  найдется из уравнения

$$V_y = V'_y - g \cos \beta (t'_1 - t) = 0$$

Откуда, время, затраченное на подъем, определится выражением

$$t_{\text{под}} = t'_1 - t = \sqrt{\left[ \frac{\omega r}{g \cos \beta} \right]^2 - \frac{1}{\omega^2}} \quad \dots (30)$$

Подставляя (30) в (29) найдем координаты тела в момент наибольшего подъема

$$x'_1 = \frac{g \sin \beta}{2 \omega^2} \left[ \left( \frac{\omega^2 r}{g \cos \beta} \right)^2 - 1 \right]; \quad y'_1 = \frac{g \cos \beta}{2 \omega^2} \left[ \left( \frac{\omega^2 r}{g \cos \beta} \right)^2 + 1 \right] \quad \dots (31)$$

После момента наибольшего подъема тело, опускаясь, начнет приближаться к плоскости и в некоторый момент  $t'_2$  упадет на нее; в этот момент ординаты тела и плоскости будут одинаковы, а потому положение кривошипа  $\alpha'_2 = \omega t_2$ , соответствующее моменту падения, найдется из условия

$$y' + V'_y(t'_2 - t) - g \cos \beta \frac{(t'_2 - t)^2}{2} = r \sin \omega t'_2 \quad \dots (32)$$

В обыкновенной координатной сетке это уравнение можно разрешить, если построить по точкам кривые, соответствующие правой и левой части и найти точку их пересечения (фиг. 7) и угол  $\alpha'_2 = \omega t'_2$ , этой точке соответствующий.

Зная  $\alpha'_2$  и  $t'_2$ , нетрудно определить дальность полета по ф-ле

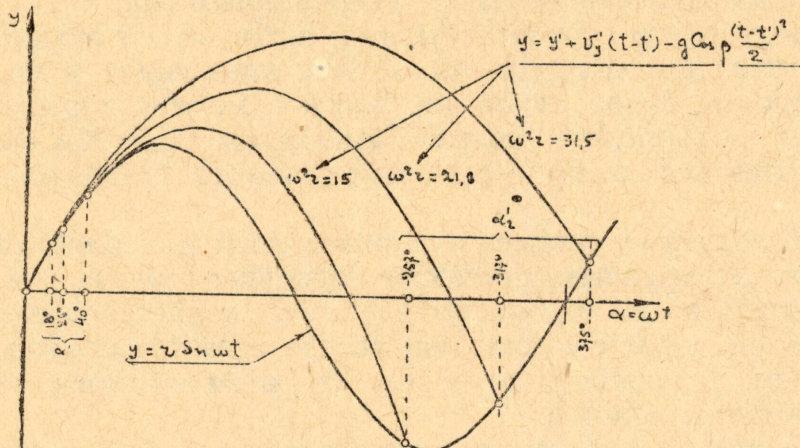
$$S = x_{\text{тела}} - x_{\text{плоск}} = x' + V'_x(t'_2 - t) + g \sin \beta \frac{(t'_2 - t)^2}{2} - r \cos \alpha'_2 \quad \dots (33)$$

Траектория полета тела может быть построена по точкам при помощи уравнения (29). Таким образом, все факторы, характеризующие полет тела в воздухе, могут быть определены.

Остановимся подробнее на некоторых особенностях получающегося движения.



Рассматривая на фиг. 8 траектории полета для различных значений  $\omega^2 r$ , нетрудно заметить, что дальность полета в зависимости от значения  $\omega^2 r$  будет различной по величине и по знаку.



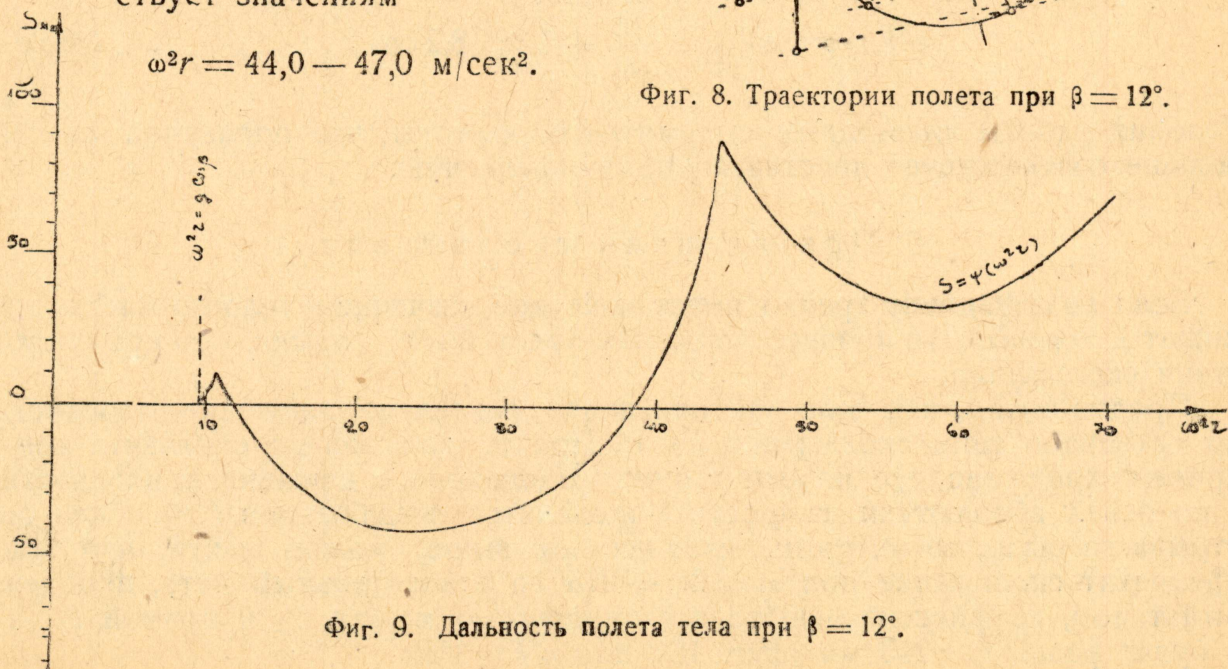
Фиг. 7. Определение момента падения тела.

Так, например, при  $\omega^2 r = 10,5 \text{ s} = +9 \text{ мм}$ ; при  $\omega^2 r = 15,0 \text{ s} = -23 \text{ мм}$ ; при  $\omega^2 r \geq 40 \text{ s}$  — положительна. Иначе говоря, если плоскость с круговыми качаниями применяется для перемещения тела вверх по наклону, как это бывает в клавишных соломотрясах, то это может быть осуществлено только при определенных значениях  $\omega^2 r$ . На фиг. 9

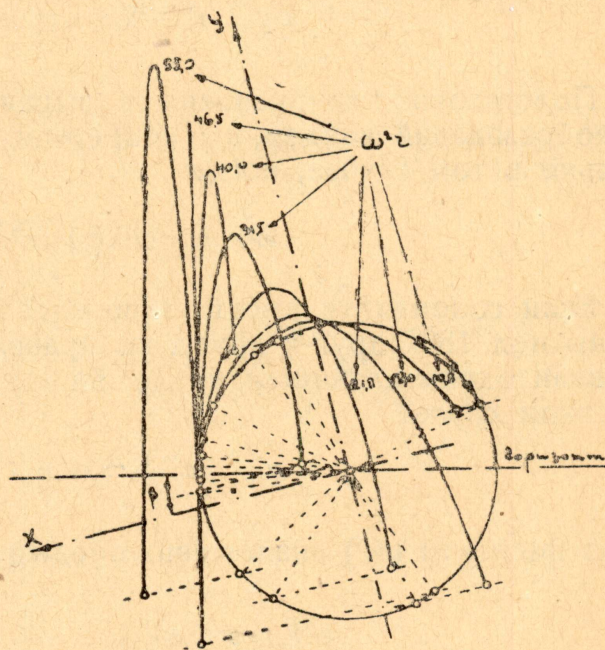
дальность полета изображена в виде функции  $S = f(\omega^2 r)$ . Из этого графика видно, что перемещение тела вверх по наклону будет иметь место только при  $\omega^2 r = 11,5 + 38,5 \text{ м/сек}^2$ , а максимальная скорость перемещения вверх соответствует значению  $\omega^2 r = 18 \times 30 \text{ м/сек}^2$ . Поскольку увеличение  $\omega^2 r$  связано с увеличением сил инерции, то для клавишных соломотрясов очевидно можно рекомендовать значения  $\omega^2 r = 18,0 - 24,0 \text{ м/сек}^2$ .

Если  $\omega^2 r \geq 38,5 \text{ м/сек}$ , то тело будет перемещаться вниз по наклону, при чем максимальная скорость перемещения соответствует значениям

$\omega^2 r = 44,0 - 47,0 \text{ м/сек}^2$ .



Фиг. 9. Дальность полета тела при  $\beta = 12^\circ$ .



Фиг. 8. Траектории полета при  $\beta = 12^\circ$ .

Если увеличивать  $\omega^2 r$  еще больше, то можно получить еще большую максимальную скорость при  $\omega^2 r \cong 80$  м/сек<sup>2</sup>, но эти значения использованы практически быть не могут из за очень больших инерционных сил.

Из вышеизложенного следует, что соответствующим выбором  $\omega^2 r$  можно получить такое движение тела, при котором положение кривошипа в момент падения тела на плоскость будет такое же, как и в момент отрыва, а потому тело снова будет подброшено вверх. При таком значении  $\omega^2 r$  тело, очевидно, будет находиться в процессе непрерывного подбрасывания.

В тех случаях, когда исследуемое движение применяется для очистки транспортируемого продукта от крупных примесей (основная задача клавишных соломотрясов), непрерывное подбрасывание тела является очень желательным, т. к. при этом поверхность клавиша всегда остается свободной, а зерно имеет возможность провалиться через отверстия клавиша, не встречая препятствий со стороны соломы.

Непрерывное подбрасывание будет иметь место в том случае, когда время пребывания тела в воздухе будет равно времени, необходимому на один оборот кривошипа, т. е. когда

$$\alpha'_2 = \alpha' + 2\pi \text{ или } t'_2 - t' = \frac{2\pi}{\omega} = T \dots \dots \dots (34)$$

Подставляя эти значения в выражение (32), после соответствующих преобразований найдем, что непрерывное подбрасывание будет иметь место только в том случае, когда

$$\omega^2 r = g \cos \beta \sqrt{\pi^2 + 1} = 32,5 \cos \beta \dots \dots \dots (35)$$

Если соломотряс имеет узкие клавиши, кривошипы которых расположены под  $180^\circ$  друг к другу, то правильнее полагать, что солома, подброшенная одним клавишем, упадет на другой, рядом с первым расположенный. В таком случае

$$\alpha'_2 = \alpha' + \pi \text{ или } t'_2 - t' = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2} \dots \dots \dots (34a)$$

а из формулы (32) аналогично предыдущему найдем

$$\omega^2 r = g \cos \beta \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 1} = 18,2 \cos \beta \dots \dots \dots (35a)$$

Условия работы клавишных соломотрясов таковы, что последний случай больше соответствует действительному положению.

#### б) При наличии скольжения.

Если коэффициент трения имеет конечное значение и тело по плоскости может скользить, то процесс движения будет более сложен, чем при отсутствии скольжения.

Предположим, что тело так или иначе разделяло движение плоскости до  $\alpha_3$  (начало зоны скольжения вниз). При  $\alpha_3$  тело начнет скользить вниз, причем движение его по оси  $y$  будет одинаково с движением плоскости, а по оси  $x$  абсолютная скорость определится выражением (19). Если бы отрыва не было, то методом, изложенным выше, можно найти, что тело прекратит скольжение при  $\alpha_4 = 2\pi + 215^\circ$ , а относительный путь, пройденный телом, графически изобразится площадью между  $U_x$  и прямой  $3_1-4_1$  и будет равен  $s = 215$  мм (фиг. 10), для  $\omega^2 r = 10,5$ .

Однако, благодаря возможности отрыва, тело будет скользить только до  $\alpha' = 2\pi + 66^\circ$  (по ф-ле 13), а затем оторвется и будет совершать свободный полет. При этом скорость по оси  $y$  будет определяться выражением (28), а по оси  $x$  уравнением

$$V_x = V'_x + g \sin \beta (t - t') \quad (36)$$

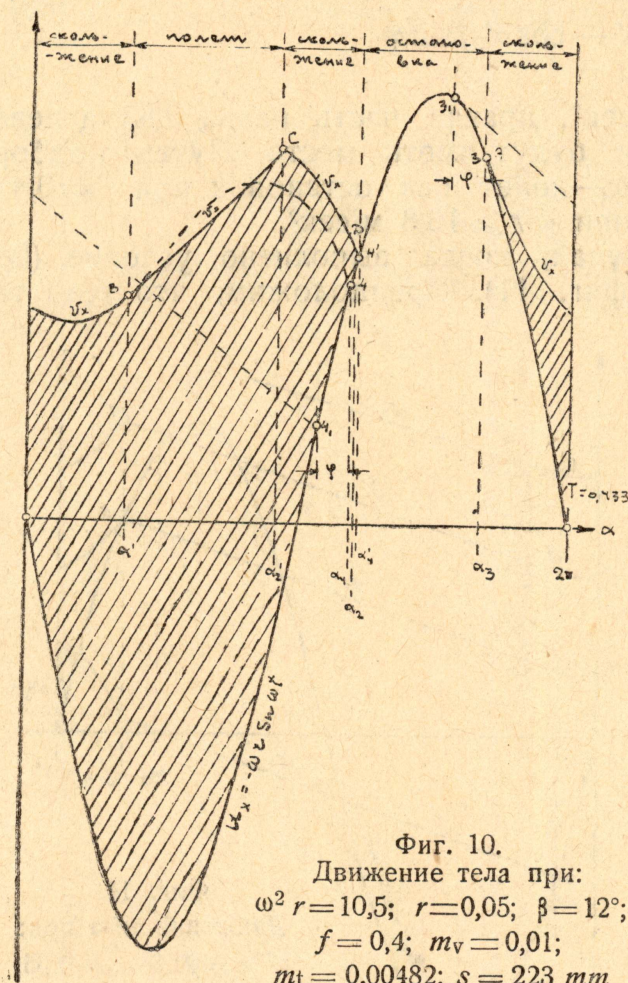
где  $V'_x$  найдется из (19) при  $t = t'$ .

Так как  $V'_x$  имеет положительный знак, то тело при полете будет удаляться от начала координат, а скорость его по оси  $x$  изобразится на графике № 10 отрезком прямой линии  $BC$ .

Из фиг. № 7 видно, что тело упадет на плоскость при  $\alpha'_2 = 2\pi + 167^\circ$ . Скорость  $V'_{2x}$  тела по оси  $x$  в этот момент найдется из (36) при  $t = t'_2$ .

Если предположить, что тело не обладает упругостью, то в дальнейшем опять будет иметь место скольжение тела вниз, при этом скорость его по оси  $x$  будет определяться уравнением

$$V_x = V'_{2x} - g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos \varphi} (t - t'_2) - \omega r f (\cos \omega t - \cos \omega t'_2) \quad (37)$$



Фиг. 10.

Движение тела при:  
 $\omega^2 r = 10,5$ ;  $r = 0,05$ ;  $\beta = 12^\circ$ ;  
 $f = 0,4$ ;  $m_v = 0,01$ ;  
 $mt = 0,00482$ ;  $s = 223 \text{ mm}$

Построив на фиг. 10 кривую  $CD$  по этой формуле, находим точку  $4'$  ее пересечения с кривой  $U_x$ . Положение кривошипа  $\alpha'_4 = \omega t'_4 = 2\pi + 219^\circ$ , соответствующее этой точке, определит собой момент, когда абсолютная скорость тела станет равна скорости плоскости и скольжение прекратится.

После этого (в силу того, что  $\alpha'_4 > \alpha_2$ ) тело будет разделять движение плоскости до  $\alpha_3$ , затем явление повторится снова и т. д.

Полный относительный путь, пройденный телом по плоскости за один оборот, графически изобразится площадью между линиями  $V_x$  и  $U_x$  и в нашем случае будет равен  $s = 223 \text{ mm}$ .

Таким образом, разница в пути по сравнению со скольжением без отрыва получается незначительной,

Рассматривая фиг. 10, можно прийти к выводу, что точки  $A$  и  $D$  при увеличении  $\omega^2 r$  будут сближаться и, следовательно, при достаточно большом значении  $\omega^2 r$  скольжение и полет будут следовать друг за другом и тело совсем не будет разделять движение плоскости.

Такое положение, очевидно, может иметь место только в том случае, когда кривая  $CD$  пройдет через точку  $A$  или же выше ее, а для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы имело место условие

$$V'_{2x} - g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos \varphi} (t_3 - t'_2) - \omega r f (\cos \omega t_3 - \cos \omega t'_2) \geq - \omega r \sin \omega t_3.$$

Подставляя сюда значение  $V'_{2x}$ , а затем  $V'_x$ , после соответствующих пре-

образований получим необходимое для движения тела без остановок условие в виде

$$\omega^2 r \leq g \frac{(\alpha'_2 - \alpha') \sin \varphi \cos \beta - 2\pi \sin(\varphi - \beta)}{(\cos \alpha' - \cos \alpha'_2) \sin \varphi} \dots (38)$$

Так, например, при  $\omega^2 r = 15,0$  м/сек<sup>2</sup>, правая часть равна 0,83, а левая 1,53, а поэтому, очевидно, остановки будут иметь место. Путем подбора нетрудно убедиться, что скольжение—полет без остановок при  $f = 0,4$  и  $\beta = 12^\circ$  может иметь место только при  $\omega^2 r \geq 16,8$  м/сек<sup>2</sup>.

Рассмотрим более подробно случай, когда выполнено условие (38). Пусть, например,  $\omega^2 r = 21,8$  м/сек<sup>2</sup> (фиг. 11). Предположим, что тело так

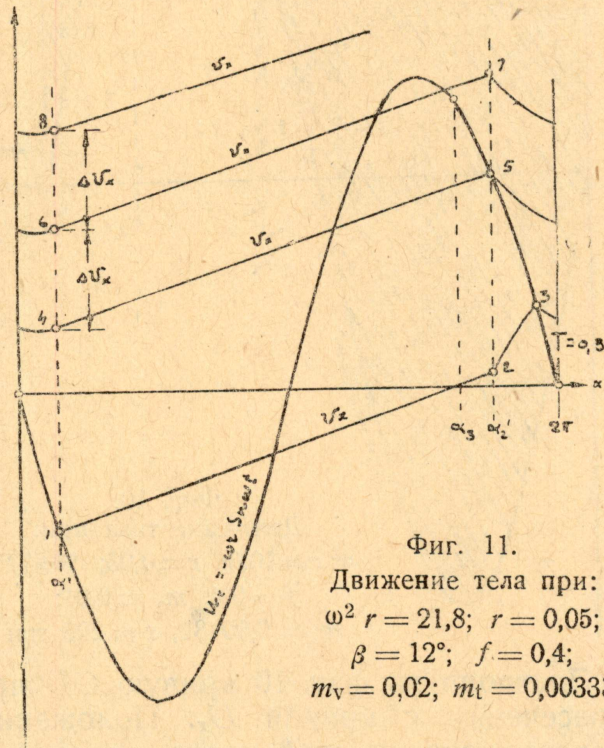
или иначе разделяло движение плоскости до  $\alpha' = 26^\circ$ . В этот момент тело оторвется от плоскости и полетит с начальной скоростью, направленной вправо; не останавливаясь на подробностях исследования и рассуждая аналогично предыдущему случаю, видим, что при полете абсолютная скорость тела  $V_x$  будет изменяться по прямой 1—2. В момент  $\alpha'_2 = 317^\circ$  тело упадет на плоскость и затем будет скользить вверх; при этом скорость  $V_x$  будет увеличиваться по кривой 2—3. В момент, определяемый точкой 3, тело остановится на плоскости и тотчас же начнет скользить вниз; при этом скорость  $V_x$  будет изменяться по кривой 3—4. В момент определяемый точкой 4 (при  $\alpha' = 2\pi + 26^\circ$ ), тело снова оторвется и полетит; скорость тела будет возрастать по прямой 4—5. В момент, определяемый точкой 5, тело упадет на плоскость и начнет скользить вниз; скорость  $V_x$  при этом будет изменяться по кривой 5—6. В дальнейшем процесс движения повторяется; скольжение и полет без остановок чередуются друг с другом, а скорость тела  $V_x$  в направлении, параллельном плоскости, с каждым оборотом увеличивается. Таким образом, если условие (38) выполнено, то тело будет по отношению к плоскости двигаться влево (вниз), постепенно увеличивая свою скорость.

Увеличение скорости тела  $\Delta V_x$  за каждый оборот тела будет величиной постоянной, а среднее (условное) ускорение будет определяться выражением

$$j_{усл} = \frac{\Delta V_x}{T} = g \left[ f \cos \beta \frac{\alpha'_2 - \alpha'}{2\pi} - \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos \varphi} \right] - \frac{\omega^2 r}{2\pi} f (\cos \alpha' - \cos \alpha'_2) \dots (39)$$

В виду того, что по мере увеличения  $\omega^2 r$  угол  $\alpha'$  уменьшается, а угол  $\alpha'_2$  увеличивается, точки 2, 5, 7... на фиг. 11 будут приближаться к точкам 4, 6, 8... В конце концов, когда  $\alpha'_2 - \alpha' = 2\pi$  и, как выше было указано,

$$\omega^2 r = g \cos \beta \sqrt{\pi^2 + 1}$$



Фиг. 11.

Движение тела при:  
 $\omega^2 r = 21,8$ ;  $r = 0,05$ ;  
 $\beta = 12^\circ$ ;  $f = 0,4$ ;  
 $m_v = 0,02$ ;  $m_t = 0,00333$

эти точки сольются, скольжение совсем исчезнет, и тело, непрерывно подбрасываемое плоскостью, будет перемещаться вниз с ускорением

$$j_{\text{усл}} = g \sin \beta \dots \dots \dots (39a)$$

**Б. Заключение.**

Подводя итоги вышеизложенному, приходим к следующим выводам:

1. Основным фактором, определяющим характер движения тела, является центростремительное ускорение  $\omega^2 r$ ; в зависимости от величины этого ускорения могут иметь место различные виды движения.

2. Если  $\omega^2 r < g \sin(\varphi - \beta)$ , то тело вообще не будет скользить, а, наоборот, будет разделять движение плоскости.

3. Если  $g \sin(\varphi - \beta) < \omega^2 r < g \sin(\varphi - \beta) \frac{2\pi + \alpha_2 - \alpha_3}{\sin(\alpha_2 - \varphi) - \sin(\alpha_3 - \varphi)}$ , то тело

в конце концов будет скользить по плоскости только вниз.

4. Если  $g \sin(\varphi - \beta) \frac{2\pi + \alpha_2 - \alpha_3}{\sin(\alpha_2 - \varphi) - \sin(\alpha_3 - \varphi)} < \omega^2 r < g \cos \beta$ , то тело мо-

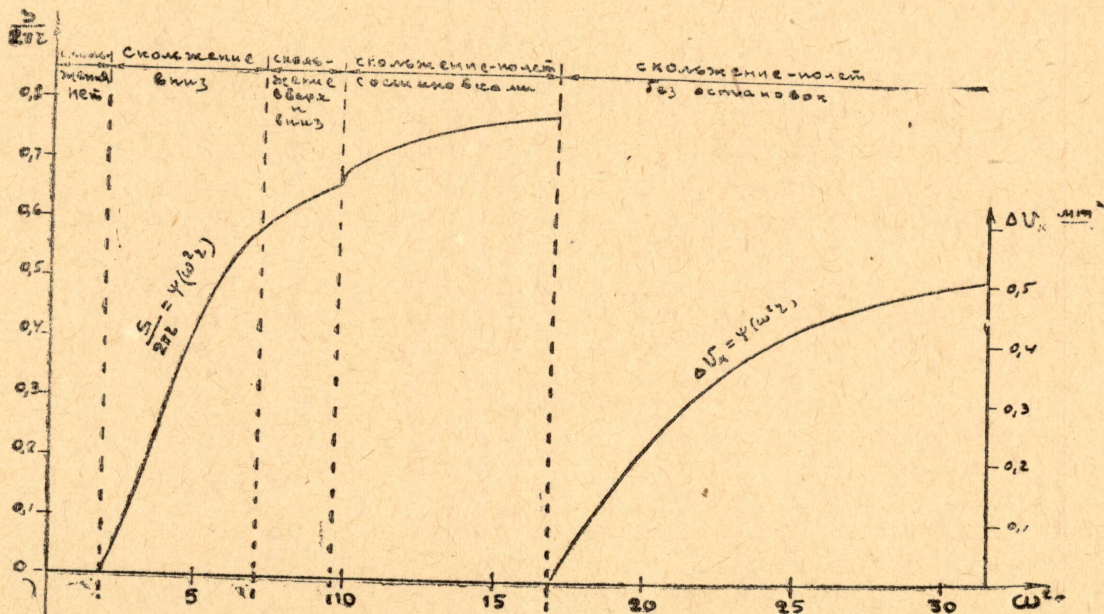
жет скользить по плоскости как вниз, так и вверх; при этом путь при скольжении вверх будет незначительный, а общее движение тела будет направлено вниз.

5. Если  $g \cos \beta < \omega^2 r < g \frac{(\alpha'_2 - \alpha') \sin \varphi \cos \beta - 2\pi \sin(\varphi - \beta)}{(\cos \alpha' - \cos \alpha'_2) \sin \varphi}$ , то за каж-

дый оборот кривошипа тело последовательно будет проходить этапы: скольжение—полет—скольжение—остановка, с результирующим движением вниз.

6. Если  $g \frac{(\alpha'_2 - \alpha') \sin \varphi \cos \beta - 2\pi \sin(\varphi - \beta)}{(\cos \alpha' - \cos \alpha'_2) \sin \varphi} < \omega^2 r < g \cos \beta \sqrt{\pi^2 + 1}$ , то

тело будет двигаться по схеме: скольжение—полет без остановок. Общее



Фиг. 12. Относительное движение при  $\beta = 12^\circ, f = 0,4$ .

движение вниз будет при этом равномерно ускоренное, а величина ускорения направленного вниз будет равна

$$j_{\text{усл}} = g \left[ f \cos \beta \frac{\alpha'_2 - \alpha'}{2\pi} - \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos \varphi} \right] - \frac{\omega^2 r}{2\pi} f (\cos \alpha' - \cos \alpha'_2).$$

7. Если  $\omega^2 r = g \cos \beta \sqrt{\pi^2 + 1}$ , то тело, непрерывно подсакивая, будет двигаться вниз с ускорением  $g \sin \beta$ .

8. Путь, проходимый телом по плоскости за каждый оборот кривошипа, будет увеличиваться по мере увеличения  $\omega^2 r$  (фиг. 12); при этом при движении с отрывом это увеличение крайне незначительно.

9. При движении по схеме скольжение—полет ускорение увеличивается по мере увеличения  $\omega^2 r$ .