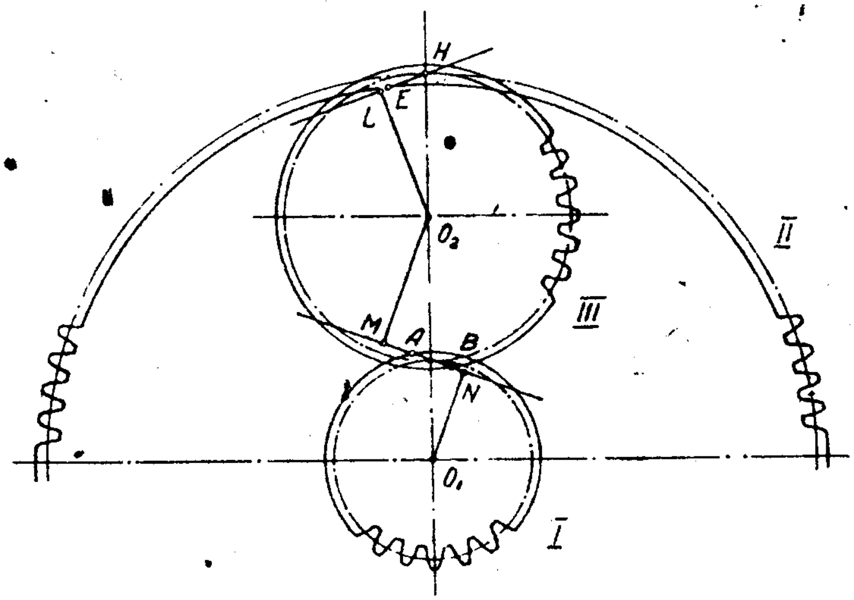
Н. П. Шубин.

Выбор наименьшего числа зубьев в передачах с промежуточным колесом.

При одновременном зацеплении трех колес (черт. 1) возможна подрезка зубьев колес в трех случаях:

1. Подрезка зубьев колес II и III, когда точка E,—пересечение окружности выступов колеса II с образующей прямой,—расположена вне участка HL.
2. Подрезка зубьев колес I и III, когда точка B,—пересечение окружности выступов колеса III с образующей прямой,—расположена вне участка MN.
3. Подрезка зубьев тех же колес при расположении точки A, пересечения окружности выступов колеса I с образующей прямой,—вне участка MN.



Черт. 1.

Для первого случая условия правильной передачи определяются положением точки E (черт. 2).

Проведем из центров колес O_1 и O_2 перпендикуляры O_1K и O_2L на образующую прямую.

При отсутствии подрезки точка E должна лежать вне отрезка KL

$$LE > O$$

Рассмотрим предельный случай, определяющий начало подрезки

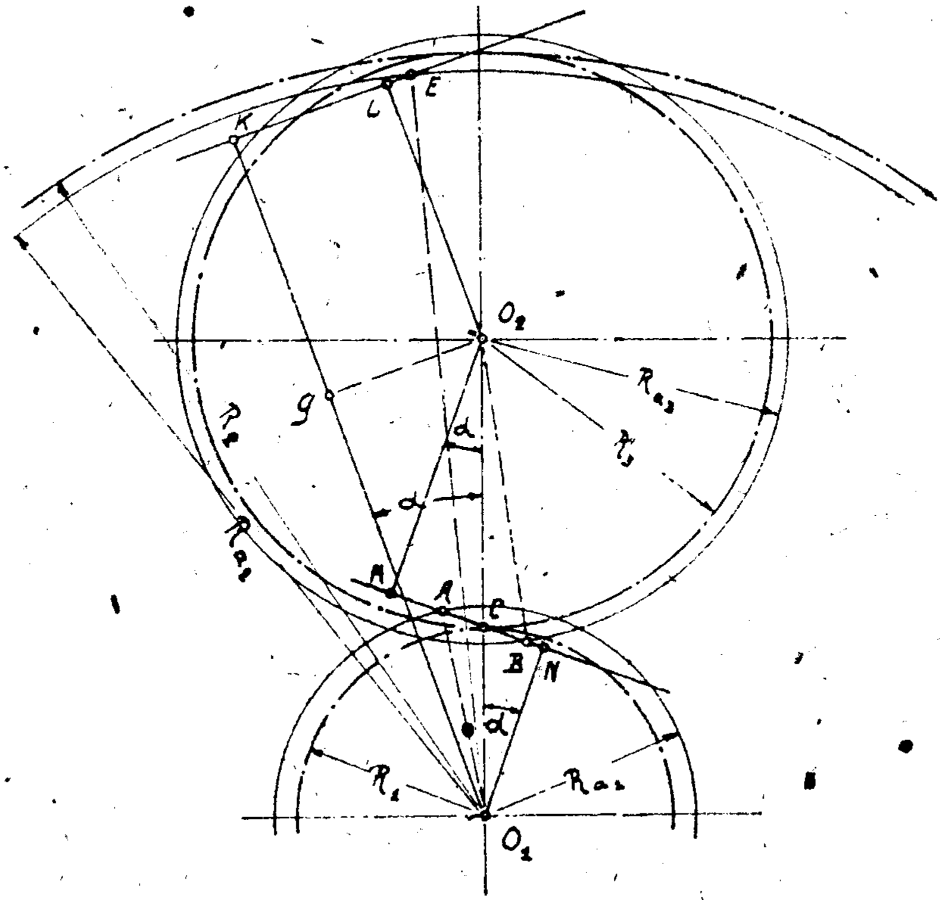
$$LE = O .$$

Из черт. 2

$$LE = KE - LK \tag{a}$$

Из треугольника KEO_1

$$KE = \sqrt{O_1E^2 - OK^2} = \sqrt{R_a{}^2 - R_2{}^2 \cos^2\alpha} \tag{b}$$



Черт. 2.

где:

R_{a_2} — радиус окружности выступов колеса II,

R_2 — радиус начальной окружности колеса II,

α — угол наклона образующей прямой.

$$LK = O_2 G = (R_2 - R_3) \sin \alpha$$

Заменяя радиус колеса III через радиусы колес I и II, получим

$$LK = \left(R_2 - \frac{R_2 - R_1}{2}\right) \sin \alpha = \frac{R_1 + R_2}{2} \sin \alpha \qquad \text{(c)}$$

Из уравнений (a), (b) и (c) следует при $LE = O$,

$$\frac{R_1 + R_2}{2} \sin \alpha = \sqrt{R_{a_2}{}^2 - R_2{}^2 \cos^2 \alpha}$$

или

$$\frac{(R_1 + R_2)^2}{4} \cdot \sin^2 \alpha = R_{a_2}{}^2 - R_2{}^2 \cos^2 \alpha.$$

Подставляя

$$R_1 = \frac{Z_1 m}{2}; \quad R_2 = i \frac{Z_1 m}{2}; \quad R_{a_2} = R_2 - h_2 = i \frac{Z_1 m}{2} - x_2 m,$$

где:

i — передаточное число, $i = \dfrac{Z_2}{Z_1}$,

x_2 — отношение высоты головки II колеса к модулю, получим:

$$\left(\frac{Z_1 m}{2} + i\frac{Z_1 m}{2}\right)^2 \sin^2\alpha = 4\left(i\frac{Z_1 m}{2} - x_2 m\right)^2 - 4\left(i\frac{Z_1 m}{2}\right)^2 \cdot \cos^2\alpha.$$

После сокращения на $\left(\frac{Z_1 m}{2}\right)^2$ определяем Z_1—минимальное число зубьев на колесе I, необходимое для того, чтобы избежать подрезки зубьев колес II и III, возможной при неправильном расположении точки E.

$$Z_{1(E)} = \frac{2x_2}{-\sqrt{\frac{1}{4}(1+i)^2\sin^2\alpha + i^2\cos^2\alpha} + i} \tag{1}$$

При отсутствии подрезки во втором случае должно быть соблюдено условие, чтобы точка B находилась внутри отрезка CN.

Для предельного случая, при котором имеет место начало подрезки,

$$BN = 0. \tag{d}$$

Из черт. 2

$$BN = MN - MB.$$

Из треугольников O_1CN, O_2CM, MO_2B и уравн. (d) следует:

$$(R_1 + R_3).\sin\alpha - \sqrt{R_{a_3}^2 - R_3^2\cos^2\alpha} = 0,$$

где:
R_3 — радиус начальной окружности колеса III,
R_{a_3}— радиус окружности выступов колеса III,
R_1 — радиус начальной окружности колеса I.

Заменим радиус промежуточного колеса через радиусы колес I и III.

$$R_3 = \frac{R_2 - R_1}{2}; \quad R_{a_3} = R_3 + h_3 = \frac{R_2 - R_1}{2} + x_3 m,$$

где x_3 — отношение высоты головки промежуточного колеса к модулю.

$$\left(R_1 + \frac{R_2 - R_1}{2}\right)\sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{R_2 - R_1}{2} + x_3 m\right)^2 - \left(\frac{R_2 - R_1}{2}\right)^2\cos^2\alpha}$$

или

$$\frac{(R_1 + R_2)^2}{4}\sin^2\alpha = \left(\frac{R_2 - R_1}{2} + x_3 m\right)^2 - \left(\frac{R_2 - R_1}{2}\right)^2\cos^2\alpha.$$

После подстановки

$$R_1 = \frac{Z_1 m}{2}; \qquad R_2 = i\frac{Z_1 m}{2}$$

и сокращения на $\frac{1}{4}\left(\frac{Z_1 m}{2}\right)^2$ получим:

$$(1+i)^2\sin^2\alpha = \left[(i-1) + \frac{4x_3}{Z_1}\right]^2 - (i-1)^2\cos^2\alpha.$$

Из этого уравнения определяем Z_1—минимальное число зубьев на колесе I, необходимое для того, чтобы избежать подрезки зубьев колес I и II, возможной при неправильном расположении точки B.

$$Z_{1(B)} = \frac{4x_3}{\sqrt{(1+i)^2\sin^2\alpha + (i-1)^2\cos^2\alpha} - (i-1)} \tag{2}$$

Наконец, для третьего случая условия правильной передачи определяются расположением точки A между основанием перпендикуляра, опущенного из центра O_3 на образующую прямую (точка M), и полюсом зацепления C.

Для предельного случая

$$AM = 0. \tag{e}$$

Из черт. 2

$$AM = MN - AN$$

Из треугольников O_1CN, O_2CM, O_1AN и уравнения (е) следует:

$$(R_1 + R_3) . \sin\alpha - \sqrt{R_{a_1}^2 - R_1^2 . \cos^2\alpha} = 0,$$

где R_{a_1} — радиус окружности выступов колеса I.

Заменяем, аналогично предыдущему, радиус промежуточного колеса через радиусы колес I и II

$$R_3 = \frac{R_2 - R_1}{2}; \quad R_{a_1} = R_1 + x_1 m,$$

где x_1 — отношение высоты головки колеса I к модулю,

$$\frac{R_1 + R_2}{2} . \sin\alpha = \sqrt{(R_1 + x_1 m)^2 - R_1^2 \cos^2\alpha}$$

Подставляя значения R_1 и R_2, получим значение наименьшего числа зубьев на колесе I при отсутствии подрезки зубьев колес I и II, возможной при неправильном расположении точки A

$$Z_{1(A)} = \frac{2x_1}{\sqrt{\frac{1}{4}(1+i)^2 . \sin^2\alpha + \cos^2\alpha} - 1} \tag{3}$$

Полученные уравнения (1, 2, 3) позволяют критически подойти к назначению числа зубьев на первом колесе и обеспечить минимальные размеры всей передачи при условии отсутствия подрезки зубьев всех трех колес.

Число зубьев на первом колесе при заданном передаточном числе и принятых значениях x_1, x_2, x_3 должно быть выбрано так, чтобы оно было не меньше наибольшего значения Z_1, полученного из приведенных трех уравнений.

Наиболее просто определяется Z_1 для случая, когда высоты головок зубьев всех трех колес одинаковы. Для такого частного случая составлена таблица, в которой значения Z_1, Z_2, Z_3 подсчитаны при:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1 \quad \text{и} \quad \alpha = 20^\circ.$$

Во втором, третьем и четвертом столбцах приведены значения чисел зубьев первого колеса при различных передаточных числах, подсчитанные по уравнениям (1), (2) и (3).

Для каждого передаточного числа даны три значения Z_1:

$Z_{1\,(E)}$ — минимальное число зубьев первого колеса, гарантирующее отсутствие подрезки головки зуба колеса II и ножки зуба колеса III.

$Z_{1\,(B)}$ — то же — головки зуба колеса III и ножки зуба колеса I.

$Z_{1\,(A)}$ — то же — головки зуба колеса I и ножки зуба колеса III.

Чтобы избежать подрезки во всех трех случаях, число зубьев на первом колесе должно быть выбрано так, чтобы оно было не менее наибольшего значения из $Z_{1\,(E)}$, $Z_{1\,(B)}$ и $Z_{1\,(A)}$.

Наименьшее число зубьев колес в передачах с промежуточным колесом при условии отсутствия подрезки.

Передаточное число i	Наименьшее число зубьев на первом колесе			Наименьшее число зубьев	
	По ур. (1) $Z_{1(E)}$	По ур. (2) $Z_{1(B)}$	По ур. (3) $Z_{1(A)}$	На втором колесе Z_2	На третьем колесе Z_3
1	2	3	4	5	6
1,0	∞	5,85	∞	∞	—
1,1	343,11	6,41	335,96	377,42	17,15
1,2	177,54	6,96	163,86	213,05	17,75
1,3	120,19	7,47	114,19	156,25	18,03
1,4	91,34	7,95	78,70	127,88	18,27
1,5	73,92	8,48	61,78	110,88	18,48
1,6	62,26	8,83	50,47	99,62	18,68
1,7	53,86	9,21	42,55	91,56	18,85
1,8	47,53	9,58	36,59	85,55	19,01
1,9	42,56	9,91	31,98	80,87	19,15
2,0	38,57	10,22	28,32	77,14	19,29
2,1	35,29	10,50	25,34	74,11	19,41
2,2	35,53	10,77	22,88	71,57	19,52
2,3	30,18	11,01	20,80	69,42	19,62
2,4	28,17	11,24	19,04	67,61	19,72
2,5	26,41	11,52	17,52	66,03	19,81
2,6	24,87	11,65	16,21	64,66	19,89
2,7	23,50	11,83	15,05	63,44	19,97
2,8	22,27	12,01	14,03	62,36	20,04
2,9	21,17	12,17	13,13	61,40	20,11
3,0	20,18	12,32	12,32	60,53	20,18
3,5	16,36	13,04	9,32	57,26	20,50
4,0	13,77	13,46	7,39	55,09	20,66
4,5	11,90	13,85	6,07	62,31	24,23
5,0	10,48	14,16	5,11	70,80	28,32
6,0	8,47	14,64	3,84	87,84	36,60
7,0	7,11	14,98	3,03	104,86	44,94
8,0	6,12	15,24	2,48	121,92	53,34
9,0	5,38	15,44	2,10	138,99	61,78
10,0	4,80	15,60	1,81	156,07	70,23
15,0	3,12	16,10	1,06	241,50	112,70
20,0	2,31	16,35	0,74	326,96	155,30
30,0	1,52	16,60	0,46	497,92	240,66
40,0	1,13	16,72	0,33	668,78	326,03

В таблице значения наименьшего числа зубьев на первом колесе при различных передаточных числах обведены чертой.

В столбцах пятом и шестом таблицы указаны числа зубьев колес II и III, подсчитанные при наименьшем значении Z_1

$$Z_2 = iZ_1;\ Z_3 = \frac{Z_2 - Z_2}{2}.$$

Все подсчеты в таблице сделаны без округления чисел зубьев до целого числа.

Данные таблицы, характеризующие изменение наименьшего числа зубьев на первом колесе (столбцы 2,3,4) в зависимости от передаточного числа графически представлены на черт. 3. По оси абсцисс отложены передаточные числа (в логарифмической шкале), а по оси ординат—числа зубьев первого колеса.

Кривая E дает зависимость наименьшего числа зубьев на первом колесе от передаточного числа при отсутствии подрезки головки зуба колеса II и ножки зуба колеса III.

Кривая B—то же, при отсутствии подрезки головки зуба колеса III и ножки зуба колеса I.

Кривая A—то же, при отсутствии подрезки головки зуба колеса I и ножки зуба колеса III.

Из диаграммы видно, что для передаточных чисел от 1 до 4 наиболее возможным местом подрезки являются головка зуба колеса II и ножка зуба колеса III. Для этих передаточных чисел наименьшее число зубьев на первом колесе должно быть выбрано по кривой E (участок DC).

При передаточных же числах, бо́льших 4-х, наименьшее число зубьев первого колеса обусловливается подрезкой головки зуба колеса III и ножки зуба колеса I и должно быть взято по кривой B (участок CF).

Таким образом число зубьев первого колеса, при условии отсутствия подрезки зубьев всех трех колес при различных передаточных числах, определяется областью диаграммы, расположенной выше кривой DCF.

Следует также отметить, что кривая А, обусловливающая подрезку головки зуба колеса I и ножки колеса III на выбор наименьшего числа зубьев первого колеса не оказывает влияния, так как она расположена внутри кривой DCF.

Характерной точкой по диаграмме является точка C пересечения кривых B и E. При передаточном числе, соответствующем этой точке (примерно 4), число зубьев на первом колесе будет наименьшим, по сравнению с числом зубьев при других передаточных числах.

При увеличении передаточного числа число зубьев первого колеса растет сравнительно незначительно и определяется кривой B (участок CF).

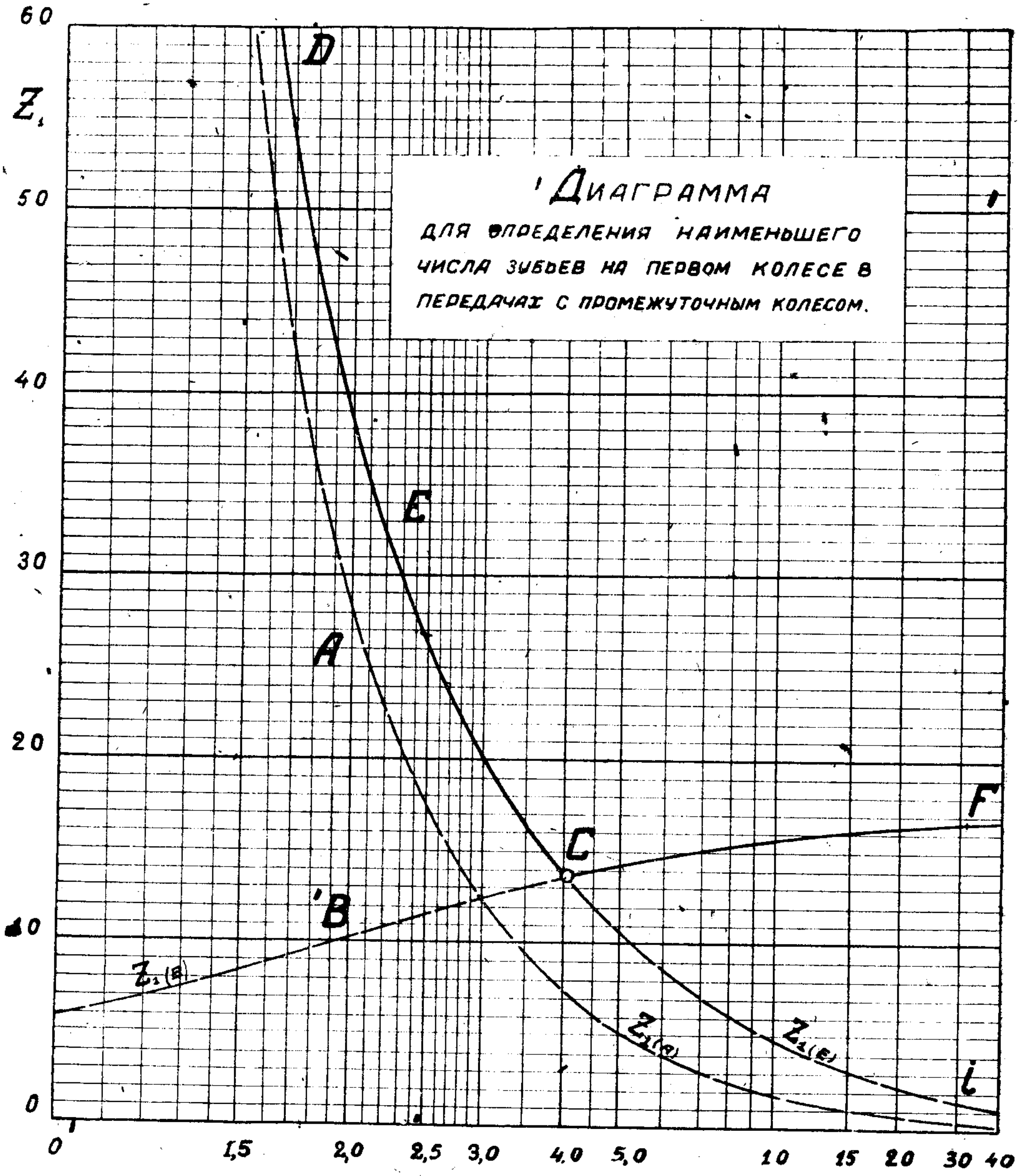
Наоборот, при уменьшении передаточного числа число зубьев на первом колесе сильно возрастает по кривой E (участок DC), приближаясь в пределе, при передаточном числе, равном единице, к бесконечности.

Влияние передаточного числа на размеры всей передачи показано на черт. 4, где по оси абсцисс отложены передаточные числа, а по оси ординат—числа зубьев.

Кривая DCF перенесена из черт. 3 и дает наименьшее число зубьев на первом колесе Z_1.

Кривая KLM построена по данным пятого столба таблицы и определяет собой границу наименьшего числа зубьев второго колеса Z_2.

Ординаты между этими кривыми дают удвоенные наименьшие числа зубьев на третьем колесе $2Z_3$ и соответствуют удвоенным числам зубьев шестого столбца таблицы.



Черт. 3.

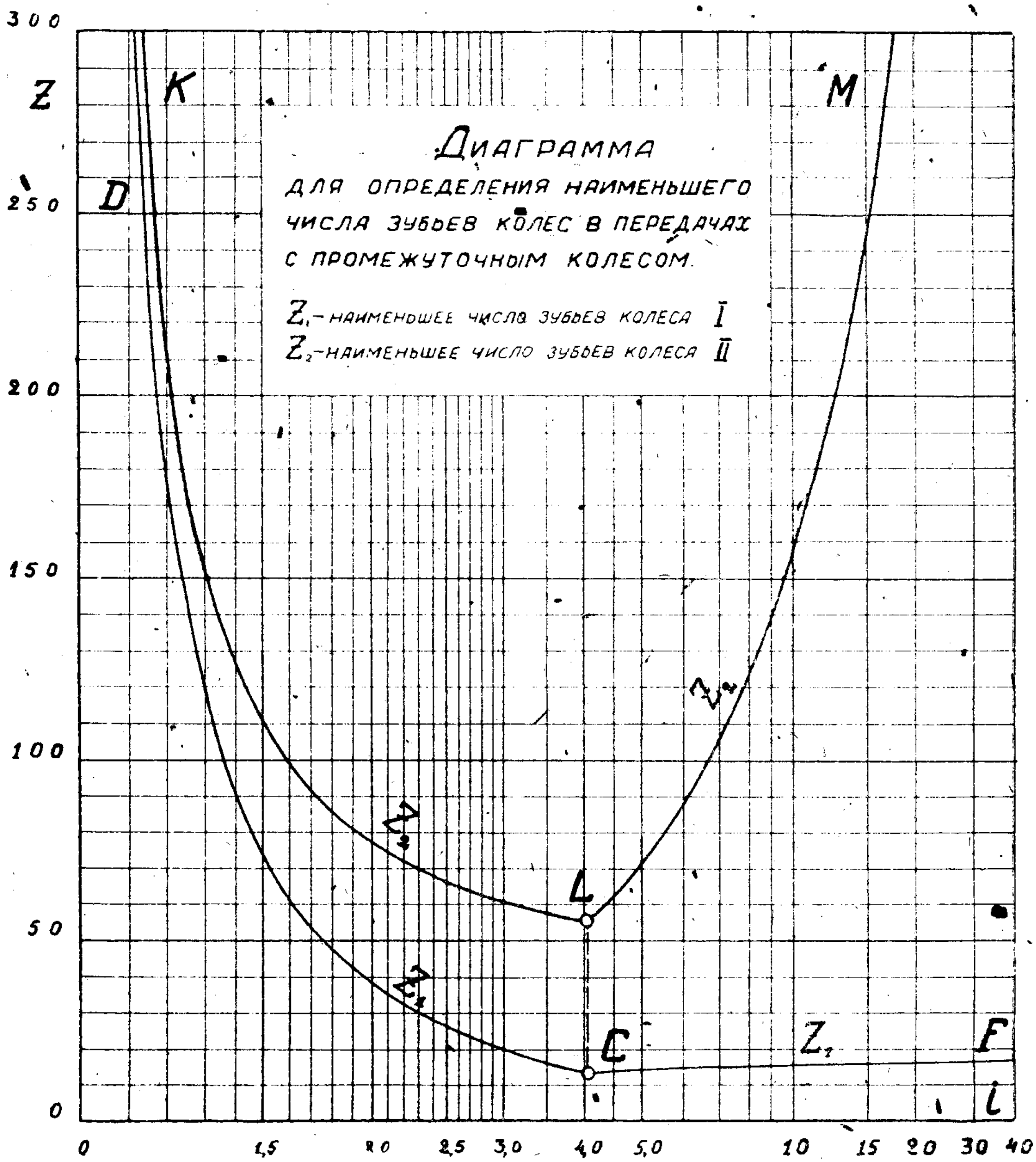
Из характера кривой *KLM* следует, что наименьшие размеры передача будет иметь при передаточном числе, равном четырем (точке *L*). При этом минимальные числа зубьев на колесах должны быть взяты не менее:

$$Z_1 = 14 \text{ (по таблице 13,77)}$$

$$Z_2 = 56 \text{ (55,09)}$$

$$Z_3 = 22 \text{ (20,66)}$$

При всех других передаточных числах размеры передачи, при условии одинаковых модулей, будут больше.



Черт. 4.

С увеличением передаточного числа размеры передачи растут и определяются наименьшим числом зубьев на 2-м колесе по кривой LM.

Например, при $i = 10$

$$Z_1 = 16 \quad (15{,}60),$$
$$Z_2 = 160 \quad (156{,}07),$$
$$Z_3 = 72 \quad (70{,}23).$$

При уменьшении передаточного числа размеры передачи также растут по кривой LK, сначала сравнительно медленно, затем, начиная примерно с $i = 2{,}0—2{,}5$, быстро начинают увеличиваться, приближаясь к бесконечности.

	Наименьшие действительные числа зубьев				Наименьшие числа зубьев по таблице			
$i =$	2,5	2,0	1,5	1,2	2,5	2,0	1,5	1,2
$Z_1 =$	28	40	76	180	26,41	38,57	73,92	177,54
$Z_2 =$	70	80	114	216	66,09	77,14	110,88	213,05
$Z_3 =$	21	20	19	18	19,81	19,29	18,48	17,75

Кривая KLM показывает также, что передачи с малым передаточным числом по своим размерам будут равны передачам с большим передаточным числом при одинаковых модулях.

Например, передача при $i = 2{,}0$ будет иметь, примерно, такие же размеры, как и передача при $i = 5{,}4$. Передача при $i = 1{,}5$ будет соответствовать по размерам передаче при $i = 7{,}0$.

Это своеобразное увеличение размеров такого рода передач при уменьшении передаточного числа необходимо учитывать при выборе передач с промежуточным колесом, и при передаточных числах, близких к единице, применения таких передач при нормальном зацеплении следует избегать.