

## Векторная маховичная диаграмма.

При проектировании машин двигателей, имеющих шатунно-кривошипный механизм, возникает вопрос, связанный с равномерностью хода машины. Для равномерности хода машины необходимо, чтобы движущие силы, сообщающие вращение валу машины, все время оставались равными силам сопротивления.

В силу структурного строения шатунно-кривошипного механизма, мы не можем получить постоянным касательное усилие, развиваемое движущими силами на пальце кривошипа.

Если считать, что силы полезных сопротивлений, при установившемся движении, постоянны по величине, то тогда сталкиваемся с вопросами избытка и недостатка работы движущих сил в течение одного оборота вала. Для того чтобы получить равномерный ход машины, необходима установка аккумулятора энергии. Последний должен воспринимать избыточную энергию движущих сил и отдавать эту накопленную энергию в период недостатка работы движущих сил.

Аккумулятор энергии выполняется в виде маховика, насаженного на вал. Зависимость между наибольшей избыточной или недостающей работой и массой маховика (через момент инерции маховика) может быть выражена так<sup>1)</sup>:

$$A = J\omega_{\text{ср}}^2 \delta, \quad (1)$$

где:

- $A$  — наибольшая избыточная или недостающая работа движущих сил,
- $J$  — момент инерции вращающихся масс,
- $\omega_{\text{ср}}$  — средняя угловая скорость,
- $\delta$  — степень неравномерности.

Исходя из первого уравнения, можем определить размеры маховика.

Определение избыточной или недостающей работы связано с построением маховичной диаграммы.

Маховичная диаграмма строится из диаграммы касательных усилий, а последняя связана с диаграммой рабочих давлений.

Диаграмма рабочих давлений есть функция положения поршня и разности давления с правой и левой стороны поршня. Рабочее давление определяется из индикаторных диаграмм.

Остановимся несколько более подробно на определении касательного усилия. Обозначим через:

- $P$  — рабочее давление,
- $S$  — силу, действующую по шатуну,
- $N$  — нормальную составляющую  $\perp$  к линии хода поршня,
- $T$  — касательное усилие по направлению  $\perp$  к радиусу кривошипа,
- $R_k$  — составляющую по радиусу кривошипа.

Определение касательного усилия сводится к сложению и вычитанию векторов сил.

<sup>1)</sup> Согласно общеизвестного способа, разработанного Мореном и углубленного Портером и Радингером.

Векторная запись представляется так (фиг. 1):

$$P = S \rightarrow N \quad (2)^1$$

$$S = T \rightarrow R_k \quad (3)$$

Из сравнения (2) и (3) имеем значение касательного усилия равным

$$T = P \rightarrow N \rightarrow R_k \quad (4)^1$$

Сложение и вычитание векторов мыслится геометрически.

На фиг. 1 (а) произведено нахождение касательного усилия для шатунно-кривошипного механизма; при сложении векторов использовано правило параллелограмма.

Кривошипная окружность разбита на 8 равных частей. В общем случае для каждого положения поршня значение рабочего давления  $P$  взято произвольно.

Обычно значение рабочего давления берется из диаграммы рабочих давлений.

Для положения 2, 3, 5, 7, разложение силы  $P$  проведено непосредственно в конце кривошипа. Весь процесс построения ясен из чертежа.

Определение касательных усилий по правилу параллелограмма для каждого положения шатунно-кривошипного механизма несколько громоздкое. Было предложено несколько способов по определению касательного усилия.

Исходными данными, из известных автору способов<sup>2)</sup>, является уравнение,

$$T = \frac{P \sin(\varphi \pm \beta)}{\cos \beta},$$

где  $\varphi$  — угол между радиусом кривошипа и траекторией ползуна,  
 $\beta$  — угол между направлением шатуна и траекторией ползуна.

(Остальные обозначения в уравнении—прежние).

Диаграмма касательных усилий получалась как бы искусственным путем. Были использованы тригонометрические свойства треугольника. Затем отдельно строилась маховичная диаграмма. По существу, определение касательного усилия, как говорилось выше, есть не что иное, как геометрическое сложение векторов сил.

Автором предлагается новый способ определения касательного усилия, путем построения векторной маховичной диаграммы.

Попутно при этом выявляются свойства векторной маховичной диаграммы и решается задача с приведением положений шатуна к полюсу.

При построении векторная маховичная диаграмма дает совмещенную диаграмму касательных усилий и маховичную диаграмму, т. е. избегается промежуточное построение диаграммы касательных усилий.

В большей степени выгодность применения векторной маховичной диаграммы выявляется в многоцилиндровых двигателях<sup>3)</sup>.

Переходим к изложению способа построения векторной маховичной диаграммы.

Выбираем [фиг. 1 (b)] произвольно полюс  $O$ .

Из полюса  $O$ , как центра, проводим окружность произвольным радиусом, соотносясь с масштабом сил и с учетом диаграмм, которые помещены на чертеже.

1)  $\rightarrow$  плюс—сложение векторов.

$\rightarrow$  минус—вычитание векторов.

2) Способ проф. Угарова, Н. П. Шубина, Ф. Ретшера и др.

3) Автор предполагает осветить этот вопрос в специальной работе.

Делим окружность на одинаковое число частей<sup>1)</sup>. Число делений лучше брать таким, чтобы деления укладывались в прямом угле целое число раз. Через точки деления окружности и центр  $O$  проводим радиусы. Для каждого из положений шатунно-кривошипного механизма строим план усилий<sup>2)</sup>.

Строя план усилий, мы будем иметь искомые касательные усилия направленными по радиусам из центра  $O$ . Радиусы, по которым направлены касательные усилия, образуют фигуру, подобную положениям кривошипа, но повернутую на  $90^\circ$  в сторону вращения [сравни фиг. 1 (а) и 1 (б)]. Данное свойство вытекает из того, что касательное усилие направлено перпендикулярно к радиусу кривошипа. Переходим к определению касательного усилия.

В плане усилий все рабочие давления будут отложены в некотором масштабе<sup>3)</sup> по линии 2—6, проходящей через полюс  $O$  [фиг. 1 (б)].

Условимся считать „наивысшее“ положение шатуна, когда при ходе поршня в направлении к кривошипному валу радиус кривошипа с линией хода поршня образует прямой угол, и „наинизшее“ положение шатуна, когда при ходе поршня от кривошипного вала радиус кривошипа образует с линией хода поршня также прямой угол. Тогда можно сказать, что рабочие давления откладываются на радиусах кривошипа, соответствующих „наивысшему“ и „наинизшему“ положению шатуна, если при этом принять во внимание подобие касательных усилий в плане усилий.

Проследим, каким образом находится касательное усилие.

Имеем для первого положения геометрическую сумму векторов [фиг. 1 (б)]

$$P_1 = S_1 + \rightarrow N_1$$

$$S_1 = T_1 + \rightarrow R_{k_1}$$

О направлении действующих сил говорилось ранее.

Поскольку наше построение удовлетворяет векторным уравнениям, то

$$T_1 = P_1 - \rightarrow N_1 - \rightarrow R_{k_1}$$

Для положения 2 и 4 (наивысшее и наинизшее положение шатуна) имеем:

$$T_2 = P_2; \quad N_2 = R_{k_2}$$

$$T_4 = P_4; \quad N_4 = R_{k_4}$$

т. е. рабочие давления равны по величине и направлению касательным усилиям, и в данных положениях линии действия  $P$  и  $T$  совпадают. Составляющие же  $N$  и  $R_k$  равны по величине, но направлены в разные стороны. В мертвых положениях 0—4 составляющие касательного усилия равны нулю.

Аналогично разобранным выше первому положению построены и найдены касательные усилия для всех остальных положений шатунно-кривошипного механизма.

Из всего построения вытекает следующее: для отыскания касательного усилия необходимо отложить рабочее давление от полюса  $O$  на радиусах-векторах касательного усилия, соответствующих наивысшему и наинизшему положению шатуна, из конца вектора рабочего давления восстановить перпендикуляр до пересечения с соответствующим направлением силы  $S$  (иначе, направлением шатуна) и, наконец, из полученной точки пересечения (на направлении шатуна) опустить перпендикуляр до пересечения с

1) Для большей точности число делений не менее 16, лучше 24—32 части.

2) Аналогично кинематическому построению плана скоростей и ускорений.

3) Масштаб при построении плана усилий на фиг. 1 (б) принят таким же, как и при определении усилия на фиг. 1 (а).

соответствующим направлением касательного усилия. Тогда величина касательного усилия определится отрезком между точкой пересечения опущенного перпендикуляра и полюсом  $O$ . Направление же касательного усилия всегда будет от полюса. Годограф касательного усилия, изображенный пунктиром, и даёт нам векторную маховичную диаграмму. На плане усилий пучок направлений шатуна, иначе силы  $S$ , разбивается на два, для переднего и заднего хода поршня. Будем считать — передний ход, когда поршень идет в направлении к кривошипному валу, и задний — от кривошипного вала. Если представить на фиг. 1 (b) движение шатунно-кривошипного механизма с радиусом  $r$ , то тогда полуокружности радиуса  $r$  своими выпуклостями будут направлены от прямой 6—2 в сторону точки 0—8.

Проведенное построение несколько затруднительно, т. к. необходима специальная разметка положений касательного усилия и необходимо знать направление линии шатунов.

Поставленная задача по определению касательного усилия, может быть решена значительно проще.

Совмещаем линии направления касательных усилий с радиусами кривошипа.

Для совмещения необходимо повернуть фиг. 1 (b) на  $90^\circ$  в сторону, обратную вращению кривошипа, со всеми произведенными построениями. На фиг. 1 (c) изображен план усилий в повернутом положении, причем разметка радиусов кривошипа [фиг. 1 (a)] и направление касательных усилий [фиг. 1 (c)] совпадают.

Пучок направлений шатуна в совмещенном положении на фиг. 1 (c) направлен в сторону ползуна (поршня), по отношению к фиг. 1 (a). Стрелками  $x$  и  $y$  показано направление вращения по окружности радиуса  $r$ . Не трудно запомнить, что направление вращения радиуса  $r$  — от полюса  $O$ , что и показано на фиг. 1 (b) (c) стрелками  $x$  и  $y$ .

Несколько более сложный вопрос, — это с определением направления шатуна, так как исходным положением для шатуна является полюс плана усилий.

Для разрешения данной задачи поступаем так: проводим прямую  $O 0,6$ , произвольно радиусом  $l$  из центра  $O$  [фиг. 2 (a)] засекаем дугу. На расстоянии  $r = l_p$  проводим прямую, параллельную  $O 0,6$ , до пересечения с дугой радиуса  $l$ . Из точки пересечения 3 опускаем перпендикуляр к прямой  $O 0,6$ , находим центр  $O_1$ . Из центра  $O_1$  засекаем окружность радиуса  $r$ .

Для определения направления при любом положении кривошипа необходимо из точки, взятой на окружности радиуса  $r$ , провести прямую, параллельную горизонтали  $O 0,6$ , до пересечения с дугой радиуса  $l$ . Тогда искомое направление шатуна определится прямой, проведенной через полюс  $O$  и точку пересечения на дуге радиуса  $l$ .

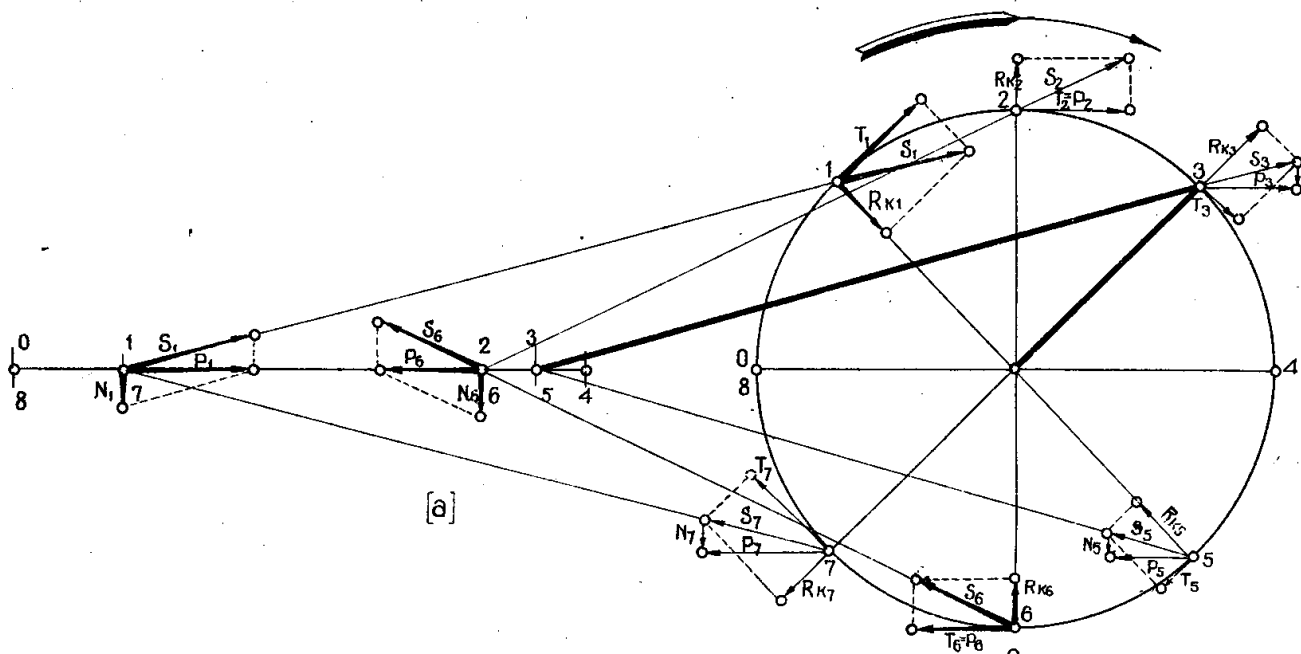
Для доказательства правильности приведения шатуна к полюсу выделим какое-либо положение шатунно-кривошипного механизма [фиг. 2 (b)] и опустим перпендикуляры из точек  $k$  и  $x$  на линию хода поршня. Имеем два прямоугольных треугольника, равных между собой, т. е.

$$\triangle Okn = \triangle zxy.$$

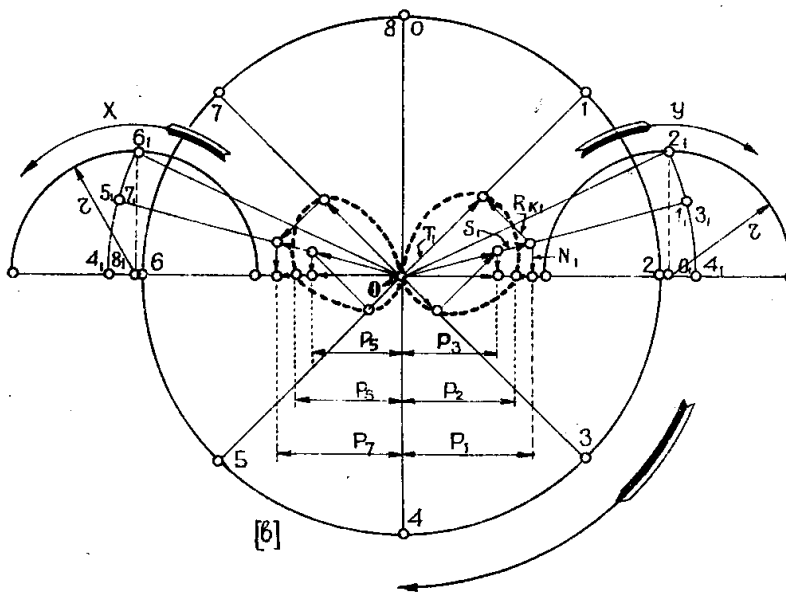
Равные треугольники сдвинуты поступательно по направлению траектории ползуна, следовательно, прямые  $Ok$  и  $zx$  параллельны между собой, иначе, совмещенное направление шатуна параллельно действительному направлению шатуна, что и требовалось доказать.

Резюмируя все вышеизложенное, отметим основные свойства плана усилий при совмещенном положении.

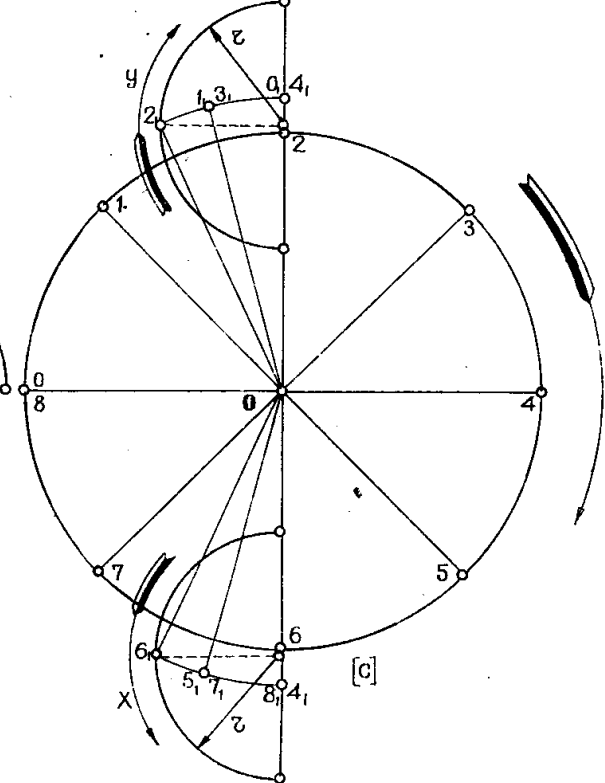
1. В плане усилий касательные усилия направлены от полюса по соответствующим направлениям радиуса кривошипа. Для определения действи-



[a]

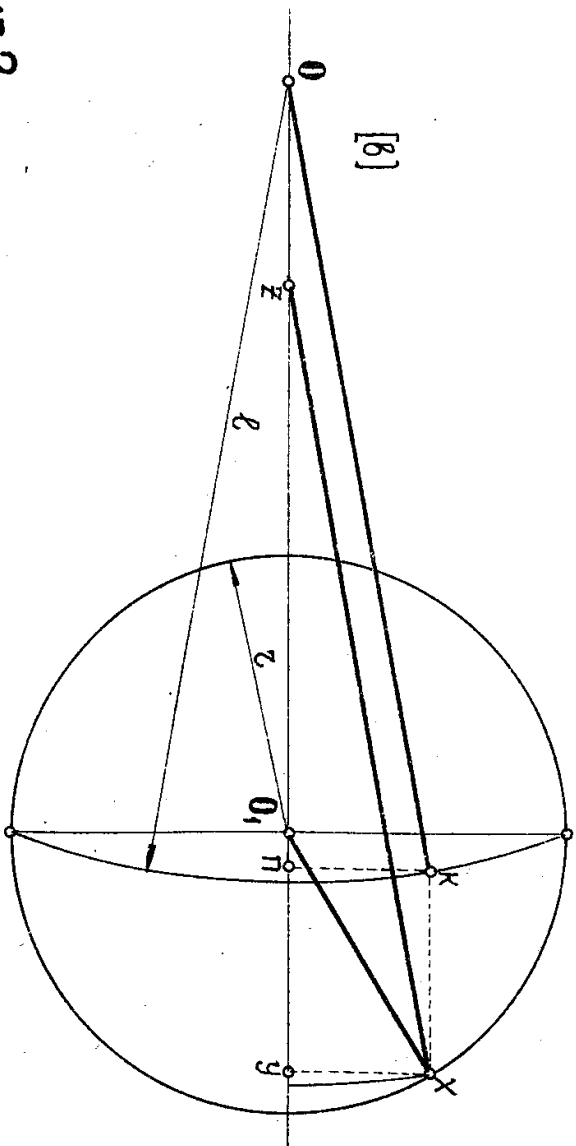
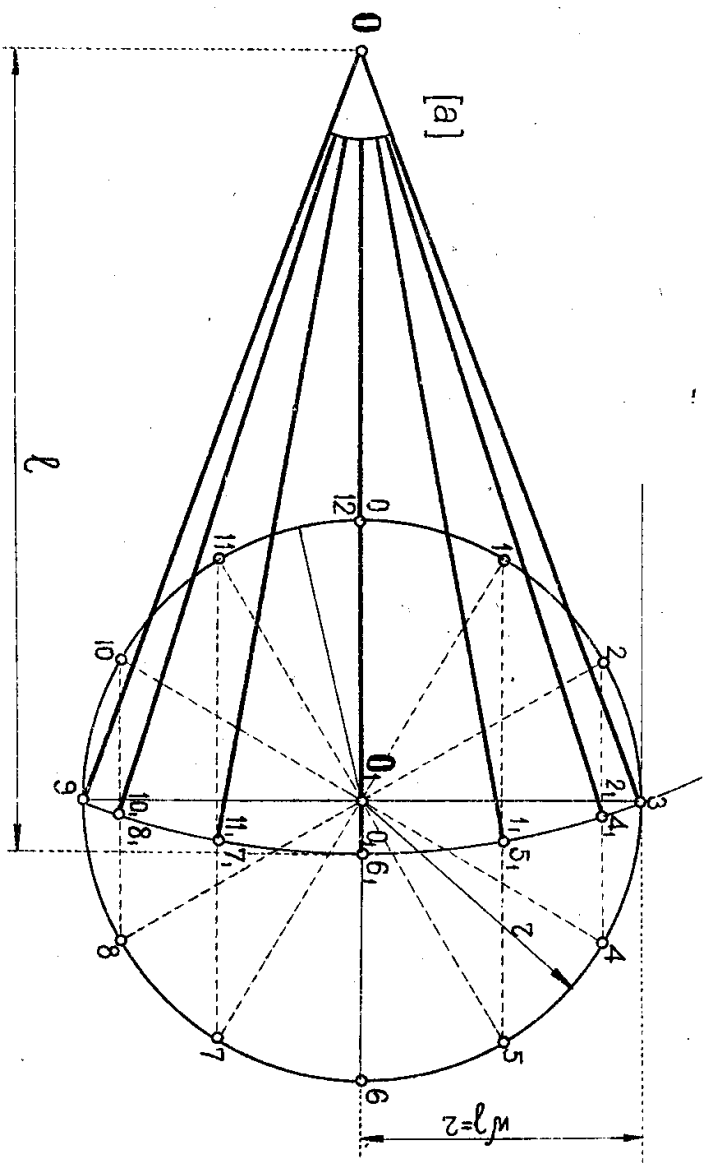


[b]

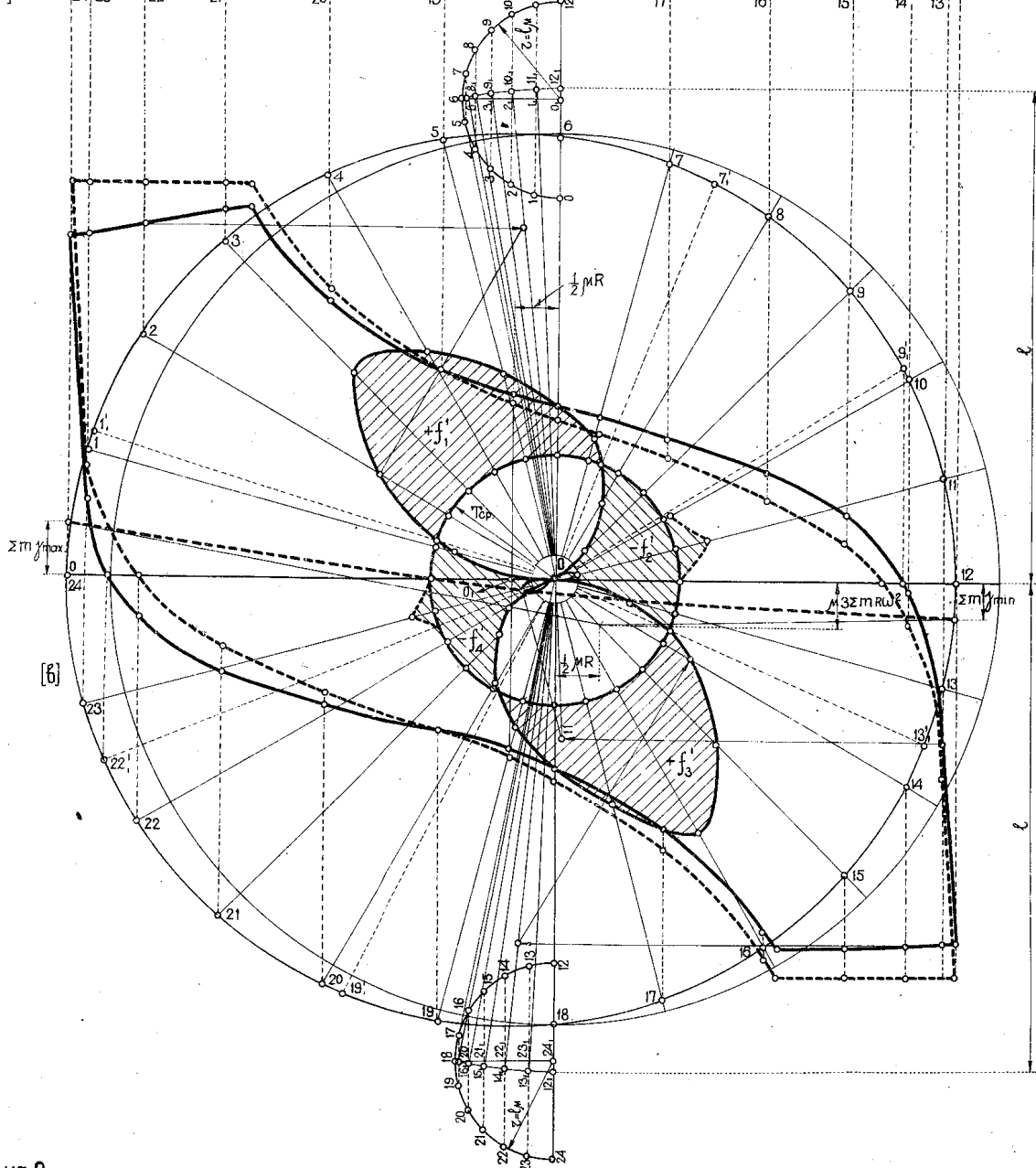
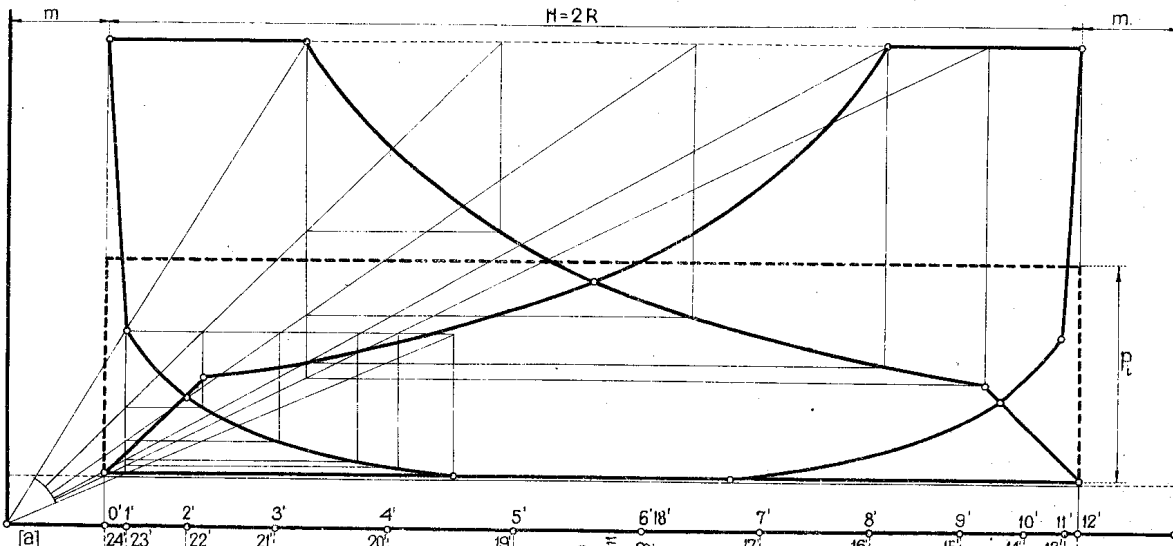


[c]

фиг. 1.



Фиг. 2



Фиг. 3.

тельного направления касательного усилия необходимо на плане усилий касательное усилие повернуть на  $90^\circ$  в сторону вращения.

2. Рабочие давления откладываются на радиусах кривошипа, соответствующих наименьшему и наибольшему положению шатуна.

3. Пучок направлений шатуна на плане усилий разбивается на два—для переднего и заднего хода, и распределяется в сторону к ползуну от радиусов кривошипа, соответствующих наименьшему и наибольшему положению шатуна.

4. Разметка кривошипной окружности радиуса  $r$ , при приведении шатуна к полюсу, начинается от точек, лежащих ближе к полюсу, причем окружность радиуса  $r$  разбивается на две полуокружности—для переднего хода—на радиусе кривошипа, соответствующем наибольшему положению шатуна, а для заднего хода—на радиусе кривошипа, соответствующем наименьшему положению шатуна.

5. При определении касательного усилия, из конца вектора рабочего давления восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с соответствующим направлением шатуна окружности радиуса  $r$ , а из точки пересечения опускаем перпендикуляр до пересечения с соответствующим радиусом кривошипа.

6. Касательное усилие всегда выходит из полюса. Для определения действительного направления касательного усилия необходимо последнее повернуть на  $90^\circ$  в сторону вращения.

7. Касательные усилия равны нулю в мертвых положениях и при рабочих давлениях, равных нулю.

8. При отрицательных рабочих давлениях, когда движение поршня не совпадает с направлением действующей силы, определение касательного усилия аналогично пункту 5, за исключением направления шатуна и радиуса кривошипа, так как последние направлены в противоположную сторону.

Проиллюстрируем предложенный способ на примере. Положим, что имеем индикаторную диаграмму, изображенную на фиг. 3(а), с средним индикаторным давлением  $p_i$  и с ходом поршня  $H = 2R$ , где  $R$ —радиус кривошипа.

На фиг. 3(а) строим диаграмму рабочих давлений (пунктирная замкнутая кривая). Рабочее давление в каждый момент представляет собой алгебраическую сумму давлений с правой и левой стороны поршня <sup>1)</sup>. Ход поршня диаграммы рабочих давлений принят в таком же масштабе, как и для индикаторной диаграммы.

Учитывая инерцию возвратно-поступательно движущихся частей [фиг. 3(б)], строим кривую инерционных давлений по способу Толле.

Приводим диаграмму рабочих давлений к линии, параллельной ходу поршня 24—12, алгебраически складывая при этом рабочие давления с силами инерции.

Приведенная диаграмма рабочих давлений изображена сплошной кривой.

Из центра  $O$  засекаем окружность радиуса кривошипа  $R$ .

Учитывая влияние конечной длины шатуна, проводим из полюса Брикса  $O$  делительную окружность произвольным радиусом, в нашем случае принят радиус кривошипа. Для отыскания полюса Брикса  $O$  необходимо от центра

$O$  в сторону, противоположную ползуну, отложить отрезок  $\frac{1}{2} \mu R$ . <sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Способ построения индикаторных диаграмм и диаграммы рабочих давлений см. соответствующие курсы паровых машин, напр., Жирицкий „Паровые машины“.

<sup>2)</sup> Более точно отрезок равен  $\frac{R}{\mu} [1 - \sqrt{1 - \mu^2}]$ .



Окружность, проведенную из полюса Брикса  $O$ , делим на 24 равных части и проводим радиусы до пересечения с окружностью центра  $O$ .

Пронумерованные точки пересечения по окружности центра  $O$  увяжут положения поршня с положениями кривошипа. На радиусах кривошипа, соответствующих наинижнему и наивысшему положениям шатуна, делаем приведение положения шатуна к полюсу  $O$  способом, изложенным выше.

На фиг. 3(b) имеем разметку точек диаграммы рабочих давлений, направлений шатуна и направлений касательных усилий.

Для отыскания касательного усилия необходимо рабочее давление по рейшине снести на соответствующее положение шатуна. Из точки пересечения восставить перпендикуляр до пересечения с соответствующим направлением касательного усилия.

Процесс построения показан на фиг. 3(b) для 2 и 14 положения.

Опускание перпендикуляра из точки пересечения на шатуне может быть произведено шаблоном, изготовленным из плотной бумаги.

При отыскании касательного усилия, соответствующего отрицательному давлению, необходимо продолжить направление шатуна от полюса  $O$  и на продолжение шатуна снести рабочее давление. Из полученной точки пересечения восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с направлением касательного усилия. Направление касательного усилия при отрицательном давлении не совпадает с положением кривошипа, а будет повернуто на  $180^\circ$  в сторону вращения.

Построение касательного усилия, при отрицательном рабочем давлении, показано на фиг. 3(b) для положения 11.

Определив все касательные усилия, соединяем концы векторов по обходу, получим годограф радиуса вектора касательного усилия.

Из центра  $O$  проводим окружность радиусом  $T_{cp}$ , соответствующим среднему касательному усилию. Выражение работы за один оборот через среднее индикаторное давление выразится так:

$$W_1 = 4R p_i \quad (5)$$

Выражение же работы через среднее касательное усилие будет

$$W_2 = 2\pi R T_{cp} \quad (6)$$

По закону сохранения энергии без учета потерь  $W_1 = W_2$ ;

$$\text{тогда} \quad 4R p_i = 2\pi R T_{cp} \quad (7)$$

Отсюда

$$T_{cp} = \frac{2p_i}{\pi} \quad (8)$$

При одинаковых масштабах усилий в диаграммах: индикаторной, рабочих давлений и маховичной, необходимо число миллиметров, соответствующих  $p_i$ , помножить на 2, разделить на  $\pi$ ; тогда в миллиметрах получим радиус  $T_{cp}$ . Пересечение окружности радиуса  $T_{cp}$  с годографом вектора касательного усилия даст нам углы поворота кривошипа, соответствующие избытку и недостатку касательного усилия в течение одного оборота. Избытки и недостатки касательных усилий, образованные годографами, заштрихованы.

|                 |  |            |         |
|-----------------|--|------------|---------|
| В пределах угла | $\angle \alpha_1 = \angle 1'_1 O 7'_1$   | избыток    | $+f'_1$ |
| " "             | $\angle \alpha_2 = \angle 7'_1 O 13'_1$  | недостаток | $-f'_2$ |
| " "             | $\angle \alpha_3 = \angle 13'_1 O 19'_1$ | избыток    | $+f'_3$ |
| " "             | $\angle \alpha_4 = \angle 19'_1 O 1'_1$  | недостаток | $-f'_4$ |

Отрицательные касательные усилия, полученные от соответствующих отрицательных рабочих давлений, как говорилось ранее, лежат не на поло-

жения радиуса кривошипа, а повернуты на  $180^\circ$  в сторону вращения. В площадках  $-f_2'$  и  $-f_4'$  отрицательные касательные усилия приведены в соответствующие положения кривошипов. На площадке  $-f_2'$  имеется отросток (пунктирный), полученный от отрицательных касательных усилий, отложенных от окружности радиуса  $T_{cp}$  в пределах угла  $\angle 9_1'O12$ ; то же самое для площадки  $-f_4'$ , но в пределах угла  $\angle 22_1'O24$ . Отыскание наибольшей из избыточной или недостающей работы в течение одного оборота сведется к следующему:

1. Обозначая через  $t_f$  — переменный вектор,  $t_{cp}$  — средний вектор площадок  $f_1'$ ,  $f_2'$ ,  $f_3'$  и  $f_4'$  имеем,

$$\left. \begin{aligned} + t_{cp_1} &= \frac{1}{n_1} \Sigma t_{f_1} \\ - t_{cp_2} &= \frac{1}{n_2} \Sigma t_{f_2} \\ + t_{cp_3} &= \frac{1}{n_3} \Sigma t_{f_3} \\ - t_{cp_4} &= \frac{1}{n_4} \Sigma t_{f_4} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В уравнениях значение  $n$  есть число взятых переменных векторов  $t_f$ .  
Избыточная или недостающая работа выразится так:

$$\left. \begin{aligned} + A_1 &= \alpha_1 R t_{cp_1} F \\ - A_2 &= \alpha_2 R t_{cp_2} F \\ + A_3 &= \alpha_3 R t_{cp_3} F \\ - A_4 &= \alpha_4 R t_{cp_4} F \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Значения  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и  $\alpha_4$  — в радианах,  $F$  — площадь поршня в  $см^2$ ,  $R$  — в метрах; тогда высчитанная работа будет в килограммо-метрах.

Зная же наибольшую из избыточных или недостающих площадей работы, обычным порядком определяем размер маховика.