

Движение тела на наклонной плоскости с продольными колебаниями. (Общий случай).

ВВЕДЕНИЕ.

Процесс движения тела на наклонной плоскости с продольными колебаниями очень часто используется в уборочных и зерноочистительных машинах для транспортирования и сортирования зерна и других продуктов обмола. Так например, для передачи продукта от одного рабочего органа к другому в молотилках, комбайнах и зерноочистительных установках применяются так называемые скатные доски—гладкие деревянные или железные щиты, поставленные под некоторым углом к горизонту. В целях уменьшения общей высоты машины угол наклона делается небольшим (во всяком случае меньше угла трения), а для того, чтобы движение тела вниз по плоскости все-таки было возможно, скатную доску приводят в колебательное движение. В некоторых машинах, например, в молотилках „Аванс-Румели“, применяются ступенчатые скатные доски, по которым обрабатываемый продукт транспортируется от одного рабочего органа к другому, переходя с одной ступени на другую, с общим подъемом кверху.

Точно также для очистки зерна от посторонних примесей и для его сортирования применяются так называемые грохота, сита и решета, представляющие собой металлические листы с пробитыми на них отверстиями и расположенные в большинстве случаев под небольшим углом наклона к горизонту. В данном случае для получения относительного движения продукта также необходимо сообщать плоскости колебательное движение.

В отдельных случаях задача транспортирования продукта вверх по наклону объединяется с задачей сортирования. В таких случаях (зерноочистительная установка „император“ фирмы Егер) сита делаются ступенчатыми и продукт, поднимаясь с одной ступени на другую, попутно очищается от более мелких примесей или зерен, проваливающихся в отверстия сита.

При конструировании всех перечисленных выше рабочих органов приходится разрешать вопрос о том, каким образом вообще можно обеспечить движение продукта и кроме этого стремиться к тому, чтобы характер движения обеспечивал наилучшее выполнение тех операций, которые выполняются на данном рабочем органе или же на следующих за ним.

Отсюда следует, что для полного разрешения задачи необходимо знать, какой характер движения вообще может иметь место на наклонной плоскости с продольными колебаниями и каким образом этот характер движения может изменяться в зависимости от тех или иных факторов; кроме того необходимо знать, какой из возможных на наклонной плоскости видов движения лучше всего способствует выполнению поставленной перед данным рабочим органом агротехнической задачи.

Данная статья имеет своей задачей разрешение первой части вопроса, а именно: исследовать с точки зрения теоретической и прикладной механики характер движения тела на наклонной плоскости, выяснить, какие

виды движения вообще возможны и, наконец, выявить влияние механических факторов на характер движения. Ввиду большого разнообразия в конструктивном оформлении подобных устройств и связанной с этим трудностью разрешения поставленной задачи в общем виде, предполагается, что колебательное движение плоскости осуществляется при помощи шатунно-кривошипного механизма с бесконечно длинным шатуном и притом так, что плоскость двигается параллельно самой себе, а траектория любой точки плоскости есть отрезок прямой, равный удвоенной длине кривошипа. Кроме этого коэффициент трения тела о плоскость считается величиной постоянной, и не принимается во внимание сопротивление воздуха.

1. Возможность начала относительного движения.

Представим себе, что плоскость, наклоненная к горизонту под углом β , приводится в колебательное движение при помощи шатунно-кривошипного или эксцентрикового механизма таким образом, что плоскость двигается параллельно самой себе, а направление колебаний образует угол φ с плоскостью.

Если считать шатун бесконечно длинным и отсчитывать углы поворота кривошипа α от левого (рис. 1а) его положения, совпадающего с направлением колебаний, а оси координат расположить так, как показано

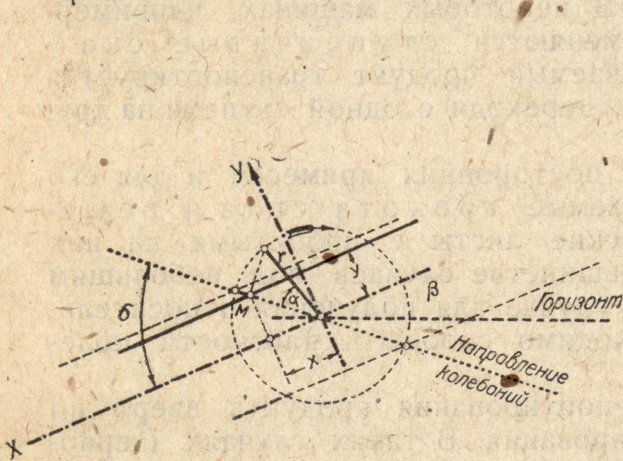


Рис. 1-а

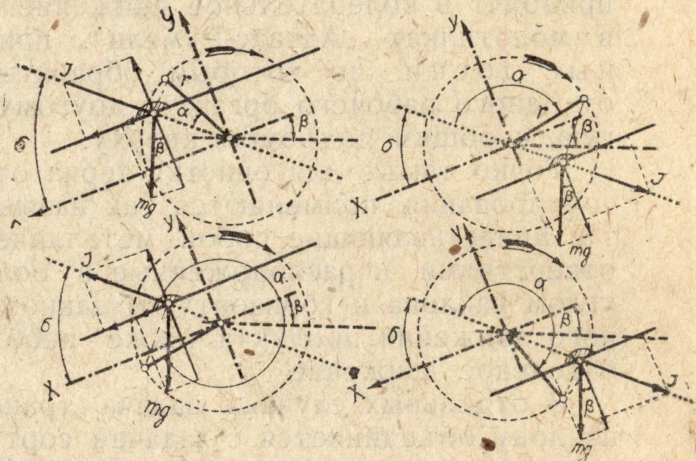


Рис. 1-б.

на чертеже, то движение любой точки плоскости будет определяться уравнениями

$$x = r \cos \sigma \cos \alpha; \quad y = r \sin \sigma \cos \alpha. \quad (1)$$

Если кривошип вращается равномерно с угловой скоростью ω , то

$$\alpha = \omega t$$

Скорость точки M определится выражениями

$$u_x = -\omega r \cos \sigma \sin \alpha; \quad u_y = -\omega r \sin \sigma \sin \alpha, \quad (2)$$

а ускорение — слагающими

$$j_x = -\omega^2 r \cos \sigma \cos \alpha; \quad j_y = -\omega^2 r \sin \sigma \cos \alpha \quad (3)$$

Если какое-либо тело лежит неподвижно на плоскости в точке M, то его движение также будет определяться выражениями (1)—(3), а потому на тело будут действовать силы инерции

$$J_x = m\omega^2 r \cos \sigma \cos \alpha; \quad J_y = m\omega^2 r \sin \sigma \cos \alpha \quad (4)$$

Если кривошип находится в первом и четвертом квадрантах, то сила инерции J_x стремится сдвинуть тело вниз по плоскости (рис. 1-b), а сила трения будет противодействовать этому. Для того, чтобы тело могло сдвинуться вниз, необходимо наличие условия

$$m\omega^2 r \cos \sigma \cos \alpha + mg \sin \beta > f(mg \cos \beta - m\omega^2 r \sin \sigma \cos \alpha).$$

Отсюда, после соответствующих преобразований, получим условие, обеспечивающее телу возможность сдвинуться вниз, в виде

$$\omega^2 r \cos \alpha > g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} \quad (5)$$

Левая часть этого неравенства будет иметь максимум при $\alpha = 0$, поэтому, очевидно, что тело вообще может сдвинуться вниз только в том случае, когда

$$\omega^2 r > g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)}, \quad (5a)$$

и если это условие выполнено, то сдвиг тела вниз может произойти только при положениях кривошипа между

$$\alpha_3 = 2\pi - \arccos \left[\frac{g}{\omega^2 r} \cdot \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} \right] \quad (6)$$

и

$$\alpha_0 = \arccos \left[\frac{g}{\omega^2 r} \cdot \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} \right] \quad (7)$$

Если кривошип находится во втором и третьем квадрантах, то сила инерции J_x стремится сдвинуть тело вверх, а сила трения будет препятствовать этому. Для того чтобы тело могло сдвинуться вверх, необходимо наличие условия

$$-m\omega^2 r \cos \sigma \cos \alpha - mg \sin \beta > f(mg \cos \beta - m\omega^2 r \sin \sigma \cos \alpha).$$

Отсюда, после соответствующих преобразований, получим условие, обеспечивающее телу возможность сдвинуться вверх, в виде

$$-\omega^2 r \cos \alpha > g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)} \quad (8)$$

Левая часть этого неравенства будет иметь максимум при $\alpha = \pi$, поэтому, очевидно, что тело вообще может сдвинуться вверх только в том случае, когда

$$\omega^2 r > g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)} \quad (8a),$$

и если это условие выполнено, то сдвиг тела вверх возможен только при положениях кривошипа между

$$\alpha_1 = \pi - \arccos \left[\frac{g}{\omega^2 r} \cdot \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)} \right] \quad (9)$$

и

$$\alpha_2 = \pi + \arccos \left[\frac{g}{\omega^2 r} \cdot \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)} \right] \quad (10)$$

Из рис. 1-б видно, что сила инерции I_y стремится оторвать тело от плоскости. Очевидно, что отрыв тела будет возможен только тогда, когда

$$m\omega^2 r \sin \sigma \cos \alpha > mg \cos \beta.$$

Отсюда—условие, обеспечивающее возможность отрыва, будет иметь вид

$$\omega^2 r \cos \alpha > g \frac{\cos \beta}{\sin \sigma} \quad (11)$$

Левая часть неравенства будет иметь максимум при $\alpha=0$, поэтому вообще отрыв тела от плоскости возможен только в том случае, когда

$$\omega^2 r > g \frac{\cos \beta}{\sin \sigma}, \quad (11a)$$

и если это условие выполнено, то при положениях кривошипа между

$$\alpha' = 2\pi - \arccos \left[g \frac{\cos \beta}{\sin \sigma} \right] \quad (12)$$

и

$$\alpha'' = \arccos \left[g \frac{\cos \beta}{\sin \sigma} \right] \quad (13)$$

2. Скольжение тела только вниз.

Предположим, что тело так или иначе разделяло движение плоскости до тех пор, пока кривошип не занял положения, определяемого углом α_3 ; в этот момент под влиянием силы инерции J_x тело начнет скользить вниз по плоскости с начальной абсолютной скоростью

$$w_3 = u_3 = -\omega r \cos \sigma \sin \alpha_3$$

Процесс движения тела по плоскости будет связан с появлением силы трения

$$F = f(mg \cos \beta - m\omega^2 r \sin \sigma \cos \alpha)$$

В связи с этим при скольжении тела вниз будет иметь место ускорение, направленное вдоль плоскости вверх.

$$j_n = \frac{F - mg \sin \beta}{m} = g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos \varphi} - \omega^2 r f \sin \sigma \cos \alpha \quad (14)$$

Поэтому абсолютная скорость тела при скольжении вниз будет изменяться по закону

$$w_n = w_3 - \int_{t_3}^t j_n dt = -\omega r \cos \sigma \sin \alpha_3 - g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos \varphi} (t - t_3) + \omega r f \sin \sigma (\sin \alpha - \sin \alpha_3), \quad (15)$$

а относительная скорость определится выражением

$$v_n = w_n - u_x = -\frac{\cos(\varphi - \sigma)}{\cos \varphi} \left[\omega r \sin \alpha_3 + g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} (t - t_3) - \omega r \sin \alpha \right] \quad (16)$$

Первый член в скобках выражения (16) есть величина постоянная и притом отрицательная, второй член равномерно увеличивается, а последний — изменяется по закону синуса; поэтому через некоторое время относительная скорость тела станет равной нулю. Положение кривошипа α_4 , этому моменту соответствующее, найдется из условия $v_n = 0$ или из выражения

$$-\omega r \sin \alpha_3 - g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} (t_4 - t_3) = -\omega r \sin \alpha_4 \quad (17)$$

Решить это выражение проще всего графически следующим образом: строим кривую $u = -\omega r \sin \alpha$ и находим точку 3 этой кривой, соответствующую положению кривошипа α_3 , из точки 3 проводим наклонную линию 3—4 под углом $-\gamma_n$ к оси абсцисс, причем

$$\operatorname{tg} \gamma_n = g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} \frac{m_t}{m_v} \quad (18)$$

где m_t — масштаб времени по оси абсцисс, а m_v — масштаб скорости по оси ординат, точка 4 пересечения этой прямой с кривой $u = -\omega r \sin \alpha$ определит собой искомое положение кривошипа $\alpha_4 = \omega t_4$.

На рис. 2 для $\omega^2 r = 5,13$; при $f = 0,4$; $\sigma = 12^\circ$; $\beta = 12^\circ$; $r = 50$ мм; кривая $u = -\omega r \sin \alpha$ построена в масштабе $m_v = 0,01 \frac{\text{м/сек}}{\text{мм}}$; $m_t = 0,00667 \frac{\text{сек}}{\text{мм}}$;

$\operatorname{tg} \gamma_n = 1,15$; $\alpha_3 = 288^\circ 30'$; $\alpha_0 = 71^\circ 30'$; момент $\alpha_4 = 2\pi + 162^\circ$ определяет собой положение кривошипа, при котором относительная скорость станет равна нулю, и тело окажется неподвижно лежащим на плоскости. В дальнейшем, в силу того что α_4 находится вне зоны, в которой возможно начало скольжений вниз, тело будет разделять движение плоскости до тех пор, пока кривошип снова не займет положения, определяемого углом α_3 , а затем процесс повторится снова и т. д.

Разобранное здесь движение тела относится к такому случаю, когда тело, уже находящееся на плоскости, почему-либо разделяло движение плоскости до α_3 . Аналогичными рассуждениями можно также доказать, что тело, упавшее на плоскость, при любом положении кривошипа в конце концов станет двигаться точно таким же образом.

Относительный путь, проходимый телом за каждый период скольжения (или, что то же самое, за каждый оборот кривошипа), будет очевидно равен

$$S_n = \int_{t_3}^{t_4} v_n dt = -\frac{\cos(\varphi - \sigma)}{\cos \varphi} \left[\omega r \sin \alpha_3 (t_4 - t_3) + g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} \frac{(t_4 - t_3)^2}{2} + r(\cos \alpha_4 - \cos \alpha_3) \right] \quad (19)$$

В нашем примере $\alpha_3 = 288^\circ 30'$; $\alpha_4 = 522^\circ$; $t_3 = 0,481$ сек; $t_4 = 0,870$ сек по формуле (19) найдем $S_n = 133$ мм.

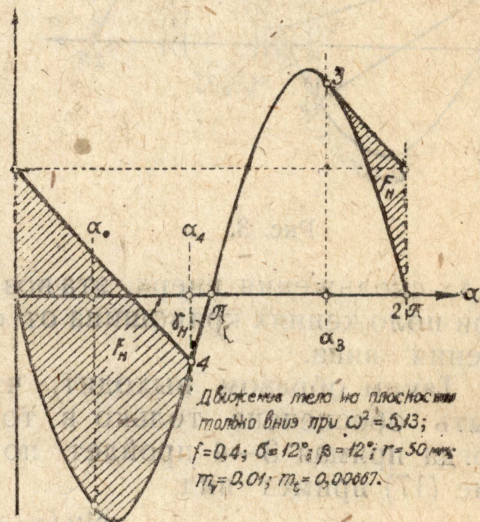


Рис. 2.

Можно найти S_H графическим путем, для этого необходимо спланиметризовать площадь F_H между прямой 3—4 и кривой $u = -\omega r \sin \alpha$ (заштриховано на фиг. 2). В таком случае

$$S_H = F_H \cdot m_v \cdot m_t \cdot \frac{\cos(\varphi - \sigma)}{\cos \varphi} \quad (19a)$$

В нашем примере

$$F_H = 1920 \text{ мм}^2; \quad \frac{\cos(22^\circ - 12^\circ)}{\cos 22^\circ} = 1,06$$

$$S_H = 1920 \cdot 0,00667 \cdot 0,01 \cdot 1,06 = 0,135 \text{ м} = 135 \text{ мм}$$

т. е, почти то же самое.

Посмотрим теперь, как будет дело обстоять в том же случае, когда

$$\omega^2 r > g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)}$$

В этом случае, как выше было доказано, будем иметь возможность начала скольжения вниз от α_3 до α_0 (рис. 3) и возможность начала скольжения вверх от α_1 до α_2 . Предположим, что при α_3 тело начало скользить вниз. Прекращение скольжения вниз, вообще говоря, может произойти при трех различных положениях кривошипа α_4 .

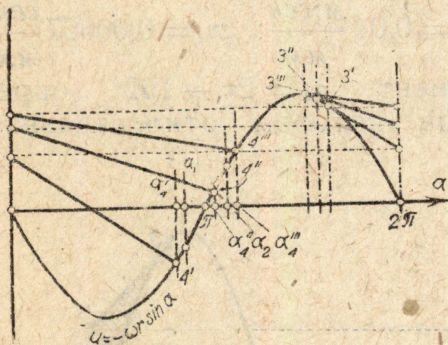


Рис. 3.

Если $\alpha_4 < \alpha_1$ (α_4' на рис. 3), то тело будет разделять движение плоскости от α_4' до α_1 , а затем начнет скользить вверх. Если $\alpha_1 < \alpha_4 < \alpha_2$ (α_4'' на фиг. 3), то тело в момент остановки при α_4'' начнет скользить вверх. Если $\alpha_4 > \alpha_2$ (α_4''' на рис. 3), то тело будет разделять движение плоскости до α_3 , а затем начнет скользить вниз. В этом случае, несмотря на возможность начала скольжения вверх, эта возможность окажется неиспользованной, т. к. при положениях кривошипа от α_1 до α_2 тело находится в процессе скольжения вниз.

Таким образом выходит, что возможность скольжения вверх может быть обеспечена только в том случае, когда $\alpha_4 < \alpha_2$ или, иначе говоря, когда прямая 3—4 пройдет под точкой 2. Для такого случая выражение (17) примет вид

$$-\omega r \sin \alpha_3 - g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} (t_2 + T - t_3) < -\omega r \sin(2\pi + \alpha_2)$$

Отсюда, после соответствующих преобразований, найдем условие, обеспечивающее возможность скольжения вверх, в виде

$$\omega^2 r < g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} \cdot \frac{(2\pi + \alpha_2 - \alpha_3)}{(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_3)} \quad (20)$$

или, что то же самое,

$$\cos \alpha_3 > \frac{\sin \alpha_2 - \sin \alpha_3}{2\pi + \alpha_2 - \alpha_3} \quad (20a)$$

Выражение (20) решается только путем подбора и требует затраты большого количества времени, поэтому можно иметь в виду, что если

$\omega^2 r$ имеет такое значение, которое превращает выражение (8 а) в равенство, а прямая 3—4 при этом значении пересекает ось абсцисс при $\alpha = \pi$, то условие (8 а) обеспечит возможность скольжения вверх. В этом случае будем иметь $\alpha_2 = \pi$ и вместо условия (20) получим

$$\omega^2 r < -g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} \frac{3\pi - \alpha_3}{\sin \alpha_3};$$

отсюда, учитывая (8а), после соответствующих преобразований получим условие, обеспечивающее возможность скольжения вверх в виде

$$\pi + \arccos \left[\frac{\sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi + \sigma)}{\cos(\varphi - \sigma) \sin(\varphi + \beta)} \right] > \sqrt{\left[\frac{\sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi + \sigma)}{\cos(\varphi - \sigma) \sin(\varphi + \beta)} \right]^2 - 1}.$$

Решая это выражение путем подбора, найдем окончательно

$$\frac{\sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi + \sigma)}{\cos(\varphi - \sigma) \sin(\varphi + \beta)} \geq 0,22 \quad (20 \text{ б})$$

Таким образом, если выполнено условие (20 б), то возможность скольжения вверх определяется формулой (8 а), в противном случае скольжение вверх может быть только в том случае, когда имеет место выражение (20) или (20 а).

Для иллюстрации вышеизложенного на рис. 4 показан график изменения $\omega^2 r$, обеспечивающего возможность скольжения вверх для частного случая при $f = 0,4$ и $\sigma = 0^\circ$.

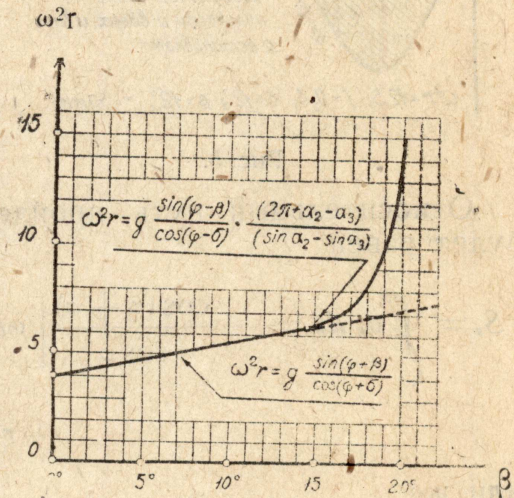


Рис. 4.

3. Скольжение тела и вверх и вниз.

Если выполнены условия (8 а) и (20), то в конце скольжения вниз, при положении кривошипа α_4 , тело начнет скользить вверх с начальной абсолютной скоростью $w_4 = u_4 = -\omega r \cos \sigma \sin \alpha_4$. Процесс скольжения тела по плоскости вверх будет связан с наличием силы трения F , поэтому будет иметь место ускорение, направленное вниз по плоскости

$$j_s = \frac{F + mg \sin \beta}{m} = g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos \varphi} - \omega^2 r f \sin \sigma \cos \alpha \quad (21)$$

Абсолютная скорость тела, при скольжении вверх, будет изменяться по закону

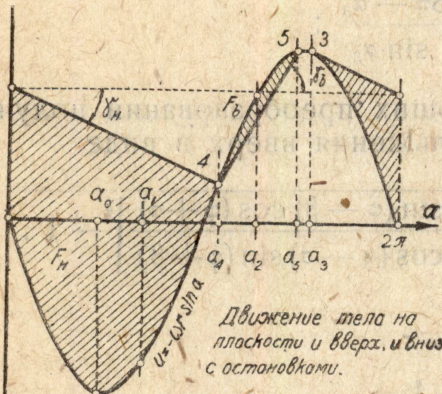
$$w_s = w_4 + \int_{t_4}^t j_s dt = -\omega r \cos \sigma \sin \alpha_4 + g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos \varphi} (t - t_4) - \omega r f \sin \sigma (\sin \alpha - \sin \alpha_4), \quad (22)$$

а относительная скорость определится уравнением

$$v_s = w_s - u_x = -\frac{\cos(\varphi + \sigma)}{\cos \varphi} \left[\omega r \sin \alpha_4 - g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)} (t - t_4) - \omega r \sin \alpha \right] \quad (23)$$

Момент α_5 , когда относительная скорость станет равной нулю и тело окажется неподвижным на плоскости, определится из условия $v_s = 0$ или

$$-\omega r \sin \alpha_4 + g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)} (t_5 - t_4) = -\omega r \sin \alpha_5 \quad (24)$$



$\omega^2 r = 12,5$; $f = 0,4$; $\beta = 12^\circ$; $\sigma = 12^\circ$; $r = 50 \text{ мм}$;
 $m_v = 0,02$; $m_t = 0,00445$

Рис. 5.

Графически это уравнение разрешится, если (рис. 5) из точки 4 на кривой $u = -\omega r \sin \alpha$ (соответствующей положению кривошипа α_4) провести прямую 4—5, наклоненную к оси абсцисс под углом γ_b , причем

$$\text{tg } \gamma_b = g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)} \frac{m_t}{m_v} \quad (25)$$

Точка 5 пересечения этой прямой с кривой $u = -\omega r \sin \alpha$ определит собой искомое положение кривошипа $\alpha_5 = \omega t_5$.

Относительный путь, пройденный телом за время скольжения вверх, будет равен

$$S_s = \int_{t_4}^{t_5} v_s dt = -\frac{\cos(\varphi + \sigma)}{\cos \varphi} \left[\omega r \sin \alpha_4 (t_5 - t_4) - g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)} \frac{(t_5 - t_4)^2}{2} + r(\cos \alpha_5 - \cos \alpha_4) \right] \quad (26)$$

или же

$$S_s = F_s \cdot m_v \cdot m_t \cdot \frac{\cos(\varphi + \sigma)}{\cos \varphi} \quad (26 a)$$

где F_s — площадь, заключенная между прямой 4—5 и кривой $u = -\omega r \sin \alpha$.

Суммарный путь, проходимый телом вниз по плоскости, будет, очевидно, равен

$$S = S_n + S_s$$

На фиг. 5 для:

$$\omega^2 r = 12,5; f = 0,4; \beta = 12^\circ; \sigma = 12^\circ; m_v = 0,02; m_t = 0,00445$$

таким образом, найдено

$$F_n = 2370 \text{ мм}^2; F_s = 60 \text{ мм}^2; S_n = 225 \text{ мм}. S_s = 5 \text{ мм}. S = 225 - 5 = 220 \text{ мм}.$$

Из рис. 5 видно, что $\alpha_2 < \alpha_5 < \alpha_3$, поэтому после α_5 тело будет разделять движение плоскости до α_3 , а затем процесс повторится снова и т. д. Таким образом, в рассматриваемом случае имеет место скольжение и вверх, и вниз с остановками.

Если обозначить через m_0 — масштаб углов α по оси абсцисс и через T период колебания, то масштаб времени по оси абсцисс определится выражением

$$m_t = m_0 \frac{T}{360^\circ} = \frac{m_0}{360^\circ} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \dots \dots \dots (27)$$

Отсюда видно, что по мере увеличения числа оборотов кривошипа (и следовательно угловой скорости ω) m_1 будет уменьшаться, а это в свою очередь значит, что по мере увеличения ω (и следовательно $\omega^2 r$) углы γ_e и γ_n будут уменьшаться. Очевидно также, что увеличение $\omega^2 r$ будет сближать точки 3 и 5 на рис. 5, и при некотором достаточно большом значении $\omega^2 r$ эти точки совпадут, а тело в момент, соответствующий окончанию скольжения вверх, снова начнет скользить вниз. Таким образом, увеличивая $\omega^2 r$, можно добиться такого положения, когда будет иметь место скольжение тела по плоскости и вверх и вниз без остановок.

В самом деле, если, например, взять $\omega^2 r = 21,8$, то при $r = 50$ мм $f = 0,4$; $\beta = 12^\circ$; $\sigma = 12^\circ$, будем иметь: $\omega = 20,9$; $\omega r = 1,04$; $n = 200$ об/мин., $\alpha_0 = 85^\circ 30'$; $\alpha_1 = 107^\circ 40'$; $\alpha_2 = 252^\circ 20'$; $\alpha_3 = 274^\circ 35'$ (рис. 6). Предположим,

напр., что тело так или иначе разделяло движение плоскости до α_1 ; в таком случае при α_1 тело начнет скользить вверх, а момент остановки определится точкой 2; затем тело будет скользить вниз до момента, определяемого точкой 3, затем снова будет скольжение вверх до момента, определяемого точкой 4; в дальнейшем скольжение вверх и вниз будет непрерывно повторяться, причем точки, в которых скольжение вверх переходит в скольжение вниз и наоборот, будут приближаться к некоторым точкам A и B, по достижении которых движение станет вполне установившимся, — скольжение вверх и скольжение вниз будут следовать друг за другом без остановок.

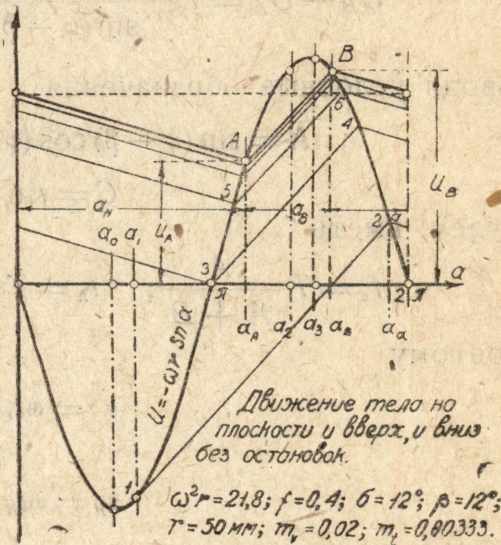


Рис. 6.

Проведем аналитическое исследование этого движения. Прежде всего, из выражений (17) и (24) следует

$$-\omega r \sin \alpha_B - g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} (t_A - t_B) = -\omega r \sin \alpha_A \dots (17 a)$$

$$-\omega r \sin \alpha_A + g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)} (t_B - t_A) = -\omega r \sin \alpha_B \dots (24 a)$$

Обозначим для дальнейших выводов:

$$-\omega r \sin \alpha_B = U_B; \quad +\omega r \sin \alpha_A = U_A; \quad t_B - t_A = t_n; \quad t_A - t_B = t_e,$$

где t_n — время, в течение которого происходит скольжение вниз, t_e — время, в течение которого происходит скольжение вверх. В таком случае из выражений (17 а) и (24 а) найдем

$$U_B - U_A = g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} t_n = g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)} t_e; \dots (28)$$

а отсюда найдем соотношение

$$\frac{t_n}{t_e} = \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\sin(\varphi - \beta)} \cdot \frac{\cos(\varphi - \sigma)}{\cos(\varphi + \sigma)} \dots (29)$$

Кроме этого очевидно, что

$$t_n + t_e = T \dots (30)$$

Решая совместно (29) и (30), найдем

$$t_e = T \frac{\sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi + \sigma)}{\sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi + \sigma) + \sin(\varphi + \beta) \cos(\varphi - \sigma)} \quad (31)$$

$$t_n = T \frac{\sin(\varphi + \beta) \cos(\varphi - \sigma)}{\sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi + \sigma) + \sin(\varphi + \beta) \cos(\varphi - \sigma)}; \quad (32)$$

подставляя (31) и (32) в (28), будем иметь

$$U_B - U_A = Tg \frac{\sin(\varphi - \beta) \sin(\varphi + \beta)}{\sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi + \sigma) + \sin(\varphi + \beta) \cos(\varphi - \sigma)} \quad (33)$$

Вводя условные обозначения

$$A = \sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi + \sigma); \quad B = \sin(\varphi + \beta) \cos(\varphi - \sigma);$$

$$C = \sin(\varphi - \beta) \sin(\varphi + \beta),$$

будем иметь

$$t_e = T \frac{A}{A+B}; \quad t_n = T \frac{B}{A+B}; \quad U_B - U_A = Tg \frac{C}{A+B};$$

поэтому,

$$\alpha_e = \omega t_e = 2\pi \frac{A}{A+B} \dots \dots \dots (34)$$

$$\alpha_n = \omega t_n = 2\pi \frac{B}{A+B} \dots \dots \dots (35)$$

Кроме этого

$$U_B - U_A = -\omega r \sin(\alpha_A + \alpha_e) + \omega r \sin \alpha_A = -2\omega r \cos\left(\alpha_A + \frac{\alpha_e}{2}\right) \sin \frac{\alpha_e}{2},$$

откуда

$$\alpha_A = \pi + \arccos \left[\frac{U_B - U_A}{2\omega r \sin \frac{\alpha_e}{2}} \right] - \frac{\alpha_e}{2} \quad (36)$$

и следовательно

$$\alpha_B = \pi + \arccos \left[\frac{U_B - U_A}{2\omega r \sin \frac{\alpha_e}{2}} \right] + \frac{\alpha_e}{2} \quad (37)$$

Преобразовывая ф-лы (19) и (26) применительно к рассматриваемому случаю, найдем, что полный относительный путь тела за каждый оборот кривошипа будет равен

$$\begin{aligned} S = S_n + S_e = & -\frac{\cos(\varphi - \sigma)}{\cos \varphi} \left[-U_B t_n + g \frac{\sin(\varphi - \beta) t_n^2}{\cos(\varphi - \sigma) 2} + \right. \\ & \left. + r(\cos \alpha_A - \cos \alpha_B) \right] - \frac{\cos(\varphi + \sigma)}{\cos \varphi} \left[-U_A t_e - g \frac{\sin(\varphi + \beta) t_e^2}{\cos(\varphi + \sigma) 2} + \right. \\ & \left. + r(\cos \alpha_B - \cos \alpha_A) \right] = \cos \sigma \left\{ \frac{U_A + U_B}{2} [T + f \operatorname{tg} \sigma (t_n - t_e)] + \right. \\ & \left. + 2r f \operatorname{tg} \sigma (\cos \alpha_B - \cos \alpha_A) \right\} \end{aligned}$$

Подставляя сюда соответствующие значения, найдем

$$S = 2\pi r \cos \sigma \left\{ \cos \frac{\pi A}{A+B} \left(1 + f \operatorname{tg} \sigma \frac{B-A}{A+B} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} f \operatorname{tg} \sigma \sin \frac{\pi A}{A+B} \right\} \sqrt{1 - \left[\frac{\pi g}{\omega^2 r} \cdot \frac{C}{(A+B) \sin \frac{\pi A}{A+B}} \right]^2} \quad (38)$$

Если известны f , β , σ и $\omega^2 r$, то по ф-ле (38), не трудно подсчитать путь, пройденный телом: напр., при $f=0,4$; $\beta=12^\circ$; $\sigma=12^\circ$

$$\frac{S}{2\pi r} = 0,978 \{ 0,8 (1 + 0,05) + 0,032 \} \sqrt{1 - \frac{52}{(\omega^2 r)^2}}$$

если $\omega^2 = 21,8$, то $\frac{S}{2\pi r} = 0,852 \sqrt{1 - 0,109} = 0,8$

при $r = 50$ мм

$$S = 0,8 \cdot 2\pi \cdot 50 = 251 \text{ мм.}$$

Таким образом, при установившемся движении тела по плоскости без остановок путь, проходимый телом, будет тем больше, чем больше r и $\omega^2 r$, причем отношение $\frac{S}{2\pi r}$ при увеличении $\omega^2 r$ быстро приближается к пределу

$$S_{\max} = 2\pi r \cos \sigma \left\{ \cos \frac{\pi A}{A+B} \left(1 + f \operatorname{tg} \sigma \frac{B-A}{A+B} \right) + \frac{2}{\pi} f \operatorname{tg} \sigma \sin \frac{\pi A}{A+B} \right\} \quad (39)$$

Посмотрим теперь, какие условия обеспечивают возможность скольжения тела вверх и вниз по плоскости без остановок. Из всего вышеизложенного ясно, что такая возможность будет иметь место только в том случае, когда $\alpha_B \geq \alpha_3$ или, учитывая выражения (6) и (37), когда

$$2\pi - \arccos \left[\frac{g \sin(\varphi - \beta)}{\omega^2 r \cos(\varphi - \sigma)} \right] \leq \pi + \arccos \left[\frac{U_B - U_A}{2\omega r \sin \frac{\alpha_B}{2}} \right] + \frac{\alpha_B}{2}$$

Отсюда, после соответствующих преобразований, можно найти условие, обеспечивающее возможность скольжения и вверх, и вниз без остановок в виде

$$\omega^2 r \geq \frac{g}{\sin \frac{\pi A}{A+B}} \times$$

$$\times \sqrt{\left[\frac{\pi C}{(A+B) \sin \frac{\pi A}{A+B}} \right]^2 + \frac{\sin^2(\varphi - \beta)}{\cos^2(\varphi - \sigma)} + \frac{2\pi C}{(A+B)} \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma) \operatorname{tg} \frac{\pi A}{A+B}} \quad (40)$$

Напр., при $f=0,4$, $\beta=12^\circ$, $\sigma=12^\circ$ $\omega^2 r \geq 14,3$ м/сек² обеспечивает возможность скольжения тела по плоскости и вверх, и вниз без остановок.

4. Движение тела при наличии отрыва.

а. При отсутствии скольжения.

Для того, чтобы уяснить себе сущность процесса движения тела при наличии отрыва, разберем предварительно более простой случай, когда в момент отрыва тело неподвижно на плоскости (и вообще на данной плоскости скольжение невозможно).

Выше было доказано, что момент отрыва характеризуется положением кривошипа α' , для которого из ф-лы (11) имеем

$$\cos \alpha' = \frac{g \cos \beta}{\omega^2 r \sin \sigma}; \quad \sin \alpha' = \sqrt{1 - \left(\frac{g \cos \beta}{\omega^2 r \sin \sigma} \right)^2} \quad (41)$$

До момента отрыва тело разделяло движение плоскости, а потому в момент отрыва абсолютная скорость тела будет равна скорости плоскости

$$w_x' = -\omega r \cos \sigma \sqrt{1 - \left(\frac{g \cos \beta}{\omega^2 r \sin \sigma} \right)^2}; \quad w_y' = -\omega r \sin \sigma \sqrt{1 - \left(\frac{g \cos \beta}{\omega^2 r \sin \sigma} \right)^2} \quad (42)$$

Положение тела в момент отрыва, очевидно, определится координатами

$$x' = \frac{g \cos \beta}{\omega^2 \operatorname{tg} \sigma}; \quad y' = \frac{g}{\omega^2} \cos \beta \quad (43)$$

С момента отрыва на тело будет действовать только одна сила тяжести, поэтому скорость тела при полете будет определяться выражениями

$$w_x = w_x' + g \sin \beta (t - t'); \quad w_y = w_y' - g \cos \beta (t - t'), \quad \dots \quad (44)$$

а траектория, описываемая телом, — уравнениями движения

$$x = x' + w_x' (t - t_1) + g \sin \beta \frac{(t - t')^2}{2}; \quad y = y' + w_y' (t - t') - g \cos \beta \frac{(t - t')^2}{2} \quad (45)$$

Так как скорость тела по оси Y постепенно уменьшается, то момент наибольшего подъема t_1' определится из условия

$$w_y = w_y' - g \cos \beta (t_1' - t') = 0,$$

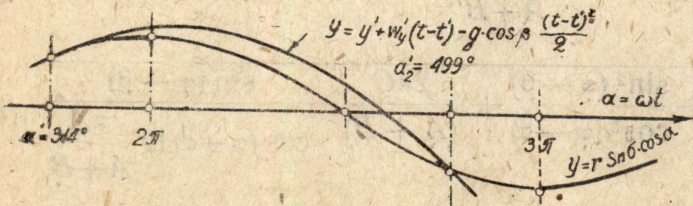
откуда время, затраченное на подъем, определится выражением

$$t_{\text{под}} = t_1' - t' = \frac{w_y'}{g \cos \beta} = -\frac{\omega r \sin \sigma}{g \cos \beta} \sqrt{1 - \left(\frac{g \cos \beta}{\omega^2 r \sin \sigma} \right)^2} \quad (46)$$

Подставляя (46) в (45), можно найти координаты тела в момент наибольшего подъема.

После момента наибольшего подъема тело, опускаясь, начнет приближаться к плоскости и в некоторый момент t_2' упадет на нее; в этот момент ординаты тела и плоскости будут равны, а потому положение кривошипа $\alpha_2' = \omega t_2'$, соответствующее моменту падения тела, найдется из условия

$$y' + w_y' (t_2' - t') - g \cos \beta \frac{(t_2' - t')^2}{2} = r \sin \sigma \cos \omega t_2' \quad (47)$$



Определение момента падения тела на плоскость.

Рис. 7.

Проще всего разрешить это уравнение, если построить по точкам кривые, соответствующие правой и левой части, и найти точку пересечения этих кривых. Полученная таким образом точка определит собой искомое положение кривошипа (фиг. 7).

Зная α_2' и t_2' , нетрудно определить дальность полета тела по формуле

$$S = x_{\text{тела}} - x_{\text{плоск}} = x' + \omega x' (t_2' - t') + g \sin \beta \frac{(t_2' - t')^2}{2} - r \cos \sigma \cos \alpha_2' \quad (48)$$

Траектория полета тела может быть построена (рис. 8) по точкам при помощи ур-ния (45); таким образом, все факторы, характеризующие полет тела в воздухе, могут быть определены.

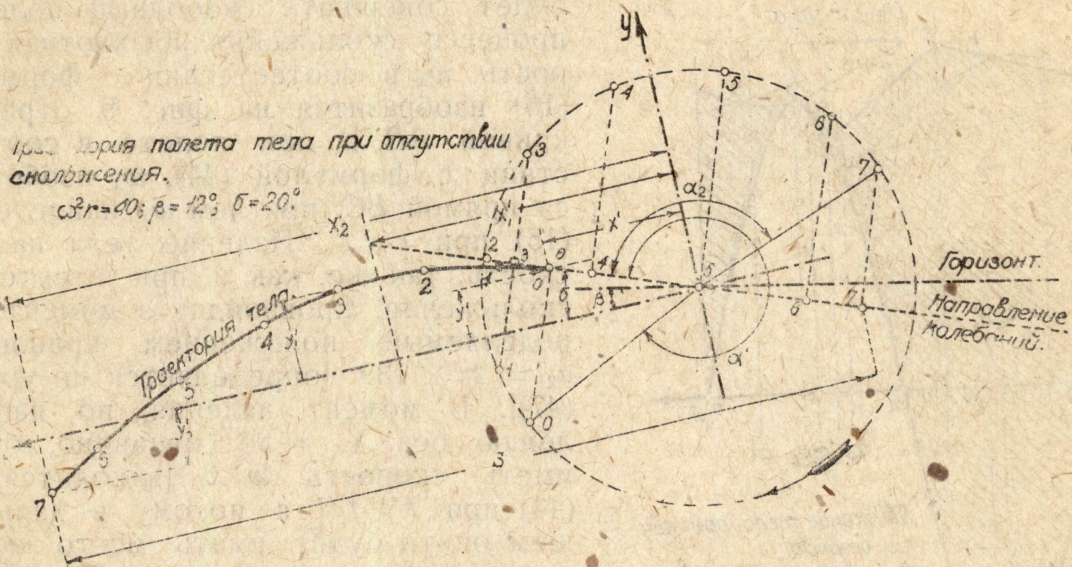


Рис. 8.

Особо интересным является случай, когда в момент падения тело снова будет подброшено. Такое положение будет иметь место только в том случае, когда

$$\alpha_2' = \alpha' + 2\pi \quad \text{или} \quad t_2' - t' = -\frac{2\pi}{\omega} = T \dots \dots \dots (49)$$

Подставляя (49) и (43) в (47), найдем условие, обеспечивающее непрерывное подбрасывание, в виде

$$\omega^2 r = g \frac{\cos \beta}{\sin \sigma} \sqrt{\pi^2 + 1} = 32,3 \frac{\cos \beta}{\sin \sigma} \quad (50)$$

Таким образом, если $\omega^2 r \geq g \frac{\cos \beta}{\sin \sigma}$, то при отсутствии скольжения тело будет отрываться от плоскости при α' , полет тела будет продолжаться до тех пор, пока кривошип не займет положения, определяемого углом α_2' ; если α_2' находится вне зоны $\alpha' - \alpha''$, то после падения тело будет разделять движение плоскости до α' , а затем процесс повторится снова; если же $\alpha_2' = 2\pi + \alpha'$, то тело тотчас же будет снова подброшено и полетит по той же траектории, что и в первый раз; если α_2' будет находиться внутри зоны $\alpha' - \alpha''$, то тело будет подброшено кверху, а траектория определится положением кривошипа в момент отрыва.

б. При наличии скольжения.

Предположим, что тело так или иначе разделяло движение плоскости до α_3 (начало возможности скольжения вниз), при α_3 тело начнет сколь-

зить вниз, причём движение по его оси Y будет одинаково с движением плоскости, а по оси X абсолютная скорость определится выражением (15).

Если бы отрыва не было, то, методом, изложенным выше, можно найти, что тело прекратит скольжение при $\alpha_1 = 2\pi + 230^\circ$ (фиг. 9) для $\omega^2 r = 40$, $f = 0,4$, $\beta = 12^\circ$; $\delta = 20^\circ$ и относительный путь, пройденный телом, был бы равен $s = 302$ мм.

Однако, благодаря возможности отрыва тело будет скользить только

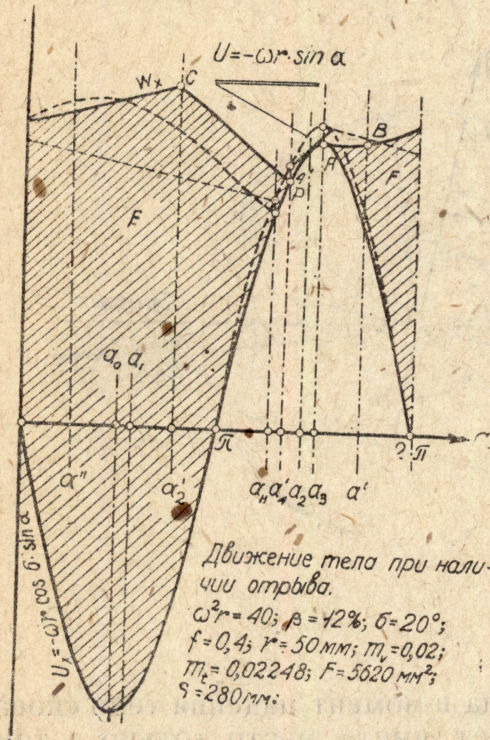


Рис. 9.

Построив кривую CD на фиг. 9, по этой формуле находим точку 4' ее пересечения с кривой $w_x = -\omega r \cos \sigma \sin \alpha$. Положение кривошипа $\alpha_4' = \omega t_4' = 2\pi + 302^\circ$, соответствующее этой точке, определит собой момент, когда абсолютная скорость тела станет равна скорости плоскости и скольжение вниз прекратится. Если $\alpha_4' > \alpha_2$, то в дальнейшем тело будет разделять движение плоскости до α_3 , а затем процесс повторится снова. Если $\alpha_4' < \alpha_2$, то тело начнет скользить вверх, положение кривошипа, соответствующее моменту прекращения скольжения вверх, найдется методом, разобранным выше; при этом возможны два случая: или скольжение вверх прекратится раньше, чем кривошип займет положение α_3 ,—в этом случае тело будет разделять движение плоскости до α_3 , а затем процесс повторится снова, или же скольжение вверх прекратится после α_3 (как на фиг. 9)—в этом случае в момент прекращения скольжения вверх снова начнется скольжение вниз с начальной скоростью несколько меньшей, чем в первый раз; поэтому линия $ABCD$ пройдет несколько ниже чем в первый раз. Через несколько оборотов движение будет установившимся.

Таким образом в зависимости от значения α_4' (иначе говоря в зависимости от $\omega^2 r$) могут иметь место различные движения:

- а) скольжение вниз—полет—скольжение вниз—остановка;
- б) скольжение вниз—полет—скольжение вниз—скольжение вверх—остановка;
- в) скольжение вниз—полет—скольжение вниз—скольжение вверх.

до $\alpha' = 314^\circ 90'$, а затем оторвется и будет совершать свободный полет. В процессе скольжения абсолютная скорость w_x в соответствии с формулой (15) изобразится на фиг. 9 отрезком кривой AB , а при полете в соответствии с формулой (44), w_x изобразится прямой BC , при чем w_x' найдется из (15) при $t = t'$. Падение тела на плоскость, так же, как и при отсутствии скольжения, произойдет в момент, определяемый положением кривошипа $\alpha_2' = 2\pi \times 139^\circ$ [определяется по ур-нию (47)]. В момент падения, по направлению оси X , тело, очевидно, будет иметь скорость $w_2' x$ [находится из (44) при $t = t_2'$], а потому в дальнейшем опять будет иметь место скольжение тела вниз по плоскости, причём скорость тела будет определяться выражением.

$$w_x = w_{2x}' - g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos \varphi} (t - t_2') + \omega r f \sin \sigma (\sin \alpha - \sin \alpha_2') \quad (50)$$

Путь, пройденный телом за период скольжения вниз, определится площадью, заключенной между линией $ABCD$ и кривой $u_x = -\omega r \cos \sigma \sin \alpha$. В рассматриваемом на рис. 9 случае эта площадь равна 5620 мм, поэтому путь будет равен $S = 5620 \cdot 0,02 \cdot 0,00248 = 0,280 \text{ м} = 280 \text{ мм}$.

Из вышеизложенного следует, что при увеличении $\omega^2 r$ угол α_1 уменьшается, а угол α_2 увеличивается; поэтому, по мере увеличения $\omega^2 r$ точки D и A на рис. 9 будут сближаться и, следовательно, при достаточно большом значении $\omega^2 r$ скольжение вниз и полет будут следовать друг за другом, а остановки и скольжение вверх совсем не будут иметь места. Такое положение очевидно будет иметь место только в том случае, когда кривая CD пройдет через точку A или же выше ее, а для этого в свою очередь необходимо, чтобы имели место условия

$$\omega_2 x' - g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos \varphi} (t_3 - t_2) + \omega r f \sin \sigma (\sin \alpha_3 - \sin \alpha_2') \geq -\omega r \cos \sigma \sin \alpha_3$$

Подставляя сюда $\omega_2 x'$, а затем $\omega x'$, после соответствующих преобразований получим необходимое для движения тела без остановок и скольжений вверх условие в виде

$$\omega^2 r \leq g \frac{(\alpha_2' - \alpha') \sin \varphi \cos \beta - 2\pi \sin(\varphi - \beta)}{\sin \varphi \sin \sigma (\sin \alpha_2' - \sin \alpha')} \quad (51)$$

Так напр., при $\omega^2 r = 40$ правая часть 5,05, поэтому остановки и скольжение вверх будут иметь место. Наоборот, при $\omega^2 r = 55$ правая часть будет равна 89. Следовательно движение будет происходить по схеме „скольжение вниз—полет“.

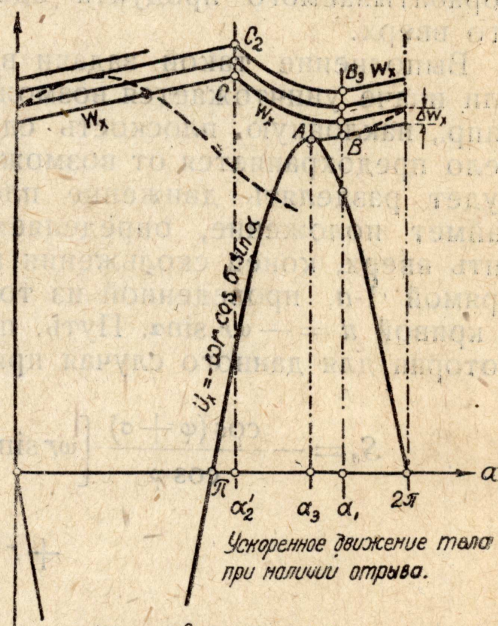
Рассмотрим подробнее этот случай: на рис. 10 показан график изменения скорости тела в направлении, параллельном оси X для $\omega^2 r = 55$; $f = 0,4$; $\beta = 12^\circ$; $\sigma = 20^\circ$; $r = 50 \text{ мм}$.

Как и следовало ожидать, в этом случае нет ни скольжения вверх, ни остановок тела на плоскости; сначала тело скользит вниз (кривая AB), затем совершает полет (прямая BC), затем снова скользит вниз (кривая CB_1) до α_1 снова совершает полет (прямая B_1C_1), снова скользит вниз (кривая C_1B_2) и т. д. При этом с каждым оборотом кривошипа абсолютная скорость тела увеличивается на некоторую величину Δw_x . Величина Δw_x может быть определена на основании следующих соображений: во время полета w_x увеличивается на величину $\Delta w_x' = g \sin \beta (t_2' - t')$ (см. ф-лу 44), а во время скольжения уменьшается на величину

$$\Delta w_{xck} = g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos \varphi} [T + t' - t_2'] - \omega r f \sin \sigma (\sin \alpha' - \sin \alpha_2');$$

поэтому

$$\Delta w_x = \Delta w_x' - \Delta w_{xck} = g \left[f \cos \beta (t_2' - t') - T \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos \varphi} \right] + \omega r f \sin \sigma (\sin \alpha' - \sin \alpha_2') \quad (52)$$



$\omega^2 r = 55$; $\beta = 12^\circ$; $\sigma = 20^\circ$; $f = 0,4$; $r = 50 \text{ мм}$.
 $m_1 = 0,02$; $m_2 = 0,002 \text{ Н}$.

Рис. 10.

Таким образом движение тела по плоскости получается ускоренным, величина ускорения (условно) очевидно будет равна

$$j_{\text{усл}} = \frac{\Delta \omega_x}{T} = g \left[f \cos \beta \frac{\alpha_2' - \alpha_1'}{2\pi} - \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos \varphi} \right] + \frac{\omega^2 r}{2\pi} f \sin \sigma (\sin \alpha_1' - \sin \alpha_2') \quad (53)$$

При увеличении $\omega^2 r$ может наступить такой случай, когда

$$\alpha_2' = 2\pi + \alpha_1';$$

в этом случае скольжение тела вниз исчезает совсем (участок кривой CB_1, C_1B_2 и т. д. на графике будет отсутствовать), и будет иметь место непрерывное подбрасывание тела. Из ф-лы (53) для такого случая найдем, как и следовало ожидать,

$$j_{\text{усл}} = g \sin \beta \quad (53a)$$

5. Движение тела по ступенчатой плоскости.

Выше было доказано, что тело, скользящее и вверх, и вниз по наклонной плоскости, в результате все-таки сползает вниз, между тем при конструировании зерноочистительных машин приходится сталкиваться с такими случаями, когда приходится осуществлять транспортирование обрабатываемого продукта вдоль машины с одновременным подъемом его вверх.

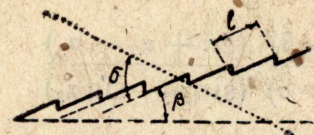
Выполнение такой задачи возможно только в том случае, когда так или иначе уничтожается возможность скольжения вниз. Для этого можно, напр., наклонную плоскость сделать ступенчатой (рис. 11); этим самым тело предохраняется от возможности скольжения вниз и, следовательно, будет разделять движение плоскости до тех пор, пока кривошип не займет положение, определяемое углом α_1 . При α_1 тело начнет скользить вверх, конец скольжения вверх определится точкой a пересечения прямой $1-a$, проведенной из точки 1 под углом γ_s к оси абсцисс (рис. 6) с кривой $u = -\omega r \sin \alpha$. Путь, пройденный телом, определится ф-лой (26), которая для данного случая примет вид

$$S_s = -\frac{\cos(\varphi + \sigma)}{\cos \varphi} \left[\omega r \sin \alpha_1 (t_a - t_1) - g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)} \frac{(t_a - t_1)^2}{2} + r(\cos \alpha_a - \cos \alpha_1) \right] \quad (54)$$

После α_a тело будет разделять движение плоскости до тех пор, пока кривошип снова не займет положение α_1 , а затем процесс повторится снова. Длина уступа должна быть, очевидно, равна или несколько меньше S_s , для того чтобы за каждый оборот кривошипа тело перемещалось по плоскости на один уступ. Само собой разумеется, что использование ступенчатой плоскости для транспортирования или сортирования продукта с подачей его вверх будет возможно только в том случае, когда выполнено условие (8a).

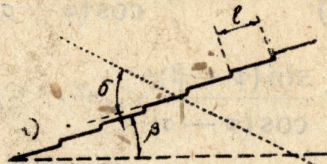
В некоторых случаях конструкторской практики может встретиться необходимость использования ступенчатой плоскости для подачи продукта вниз. Это может быть или потому, что наклонная плоскость для увеличения прочности делается ступенчатой (грохот у больших молотилок)

или же потому, что нежелательно истирание транспортируемого продукта, а скорость перемещения требуется настолько большая, что на гладкой плоскости тело могло бы скользить и вверх и вниз (рис. 12).



Ступенчатая плоскость для подачи продукта вверх.

Рис. 11.



Ступенчатая плоскость для подачи продукта вниз.

Рис. 12.

В таком случае применимы все рассуждения, изложенные выше, с той только разницей, что скольжение будет начинаться при α_3 и кончатся при α_4 (см. рис. 5), а пройденный путь определится формулой (19).

На рис. 13 изображен график, показывающий изменение S_v и S_k для

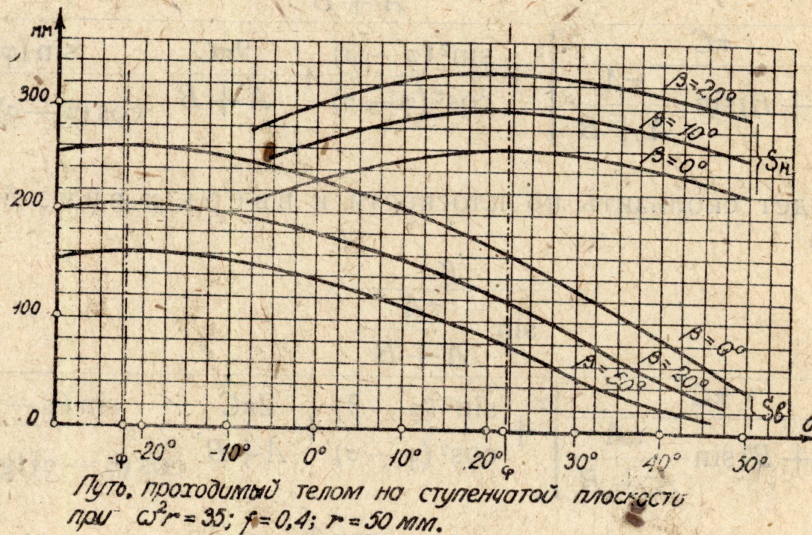


Рис. 13.

ступенчатой плоскости, в частном случае—при $\omega_2 r = 35$; $r = 50$; $f = 0,4$. Из этого графика следует, что

- S_v будет тем больше, чем меньше β и чем σ ближе к $-\psi$;
- S_k будет тем больше, чем больше β и чем σ ближе к $+\psi$.

6. Выводы.

Основной вывод из всего вышеизложенного заключается в том, что характер движения тела на плоскости с продольными колебаниями может быть весьма разнообразным и зависит от: центростремительного ускорения кривошипа $\omega^2 r$, коэффициента трения f тела о плоскость, угла наклона β плоскости к горизонту и угла σ между направлением колебаний и плоскостью.

Влияние $\omega^2 r$ заключается в том, что:

1. Тело совсем не будет двигаться по плоскости, если

$$\omega^2 r < g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)}$$

2. Тело будет двигаться по плоскости только вниз, если

$$g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} < \omega^2 r < g \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\varphi + \sigma)} \quad \text{при} \quad \frac{\sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi + \sigma)}{\cos(\varphi - \sigma) \sin(\varphi + \beta)} \geq 0,22$$

или

$$g \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma)} < \omega^2 r < g \frac{\sin(\varphi - \beta) (2\pi + \alpha_2 - \alpha_1)}{\cos(\varphi - \sigma) (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)}$$

при

$$\frac{\sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi + \sigma)}{\cos(\varphi - \sigma) \sin(\varphi + \beta)} \leq 0,22.$$

3. Тело будет скользить по плоскости и вверх и вниз с остановками, если $\omega^2 r$ будет больше, чем в предыдущем случае, и

$$\omega^2 r < \frac{g}{\sin \frac{\pi A}{A+B}} \times$$

$$\times \sqrt{\left[\frac{\pi C}{(A+B) \sin \frac{\pi A}{A+B}} \right]^2 + \frac{\sin^2(\varphi - \beta)}{\cos^2(\varphi - \sigma)} + \frac{2\pi C}{A+B} \cdot \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma) \operatorname{tg} \frac{\pi A}{A+B}}$$

4. Тело будет скользить по плоскости и вверх и вниз без остановок, если

$$\frac{g}{\sin \frac{\pi A}{A+B}} \times$$

$$\times \sqrt{\left[\frac{\pi C}{(A+B) \sin \frac{\pi A}{A+B}} \right]^2 + \frac{\sin^2(\varphi - \beta)}{\cos^2(\varphi - \sigma)} + \frac{2\pi C}{A+B} \cdot \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\varphi - \sigma) \operatorname{tg} \frac{\pi A}{A+B}} <$$

$$< \omega^2 r < g \frac{\cos \beta}{\sin \sigma}$$

5. Тело будет в процессе скольжения вниз отрываться от плоскости и совершать полет, при этом могут иметь место остановки и скольжение вверх, если

$$g \frac{\cos \beta}{\sin \sigma} < \omega^2 r < g \frac{(\alpha_2' - \alpha_1') \sin \varphi \cos \beta - 2\pi \sin(\varphi - \beta)}{\sin \varphi \sin \sigma (\sin \alpha_2' - \sin \alpha_1')}$$

6. Тело будет скользить вниз и совершать полет без остановок на плоскости, если

$$g \frac{(\alpha_2' - \alpha_1') \sin \varphi \cos \beta - 2\pi \sin(\varphi - \beta)}{\sin \varphi \sin \sigma (\sin \alpha_2' - \sin \alpha_1')} \geq \omega^2 r < g \frac{\cos \beta}{\sin \sigma} \sqrt{\pi^2 + 1}$$

7. Тело будет непрерывно подскакивать ¹⁾ по плоскости без остановок и скольжений вниз, если только

$$\omega^2 r = \frac{g \cos \beta}{\sin \sigma} \sqrt{\pi^2 + 1}$$

¹⁾ Общее движение тела будет направлено вниз и будет равномерным для случаев 1—5 и ускоренным для случаев 6—7.

Влияние угла наклона β плоскости к горизонту видно из рис. 14 и заключается в том, что:

1. Увеличение угла β уменьшает значение $\omega^2 r$, необходимое для возможности скольжения вниз, и увеличивает значение $\omega^2 r$, необходимое для возможности скольжения вверх, особенно когда β близко к φ .

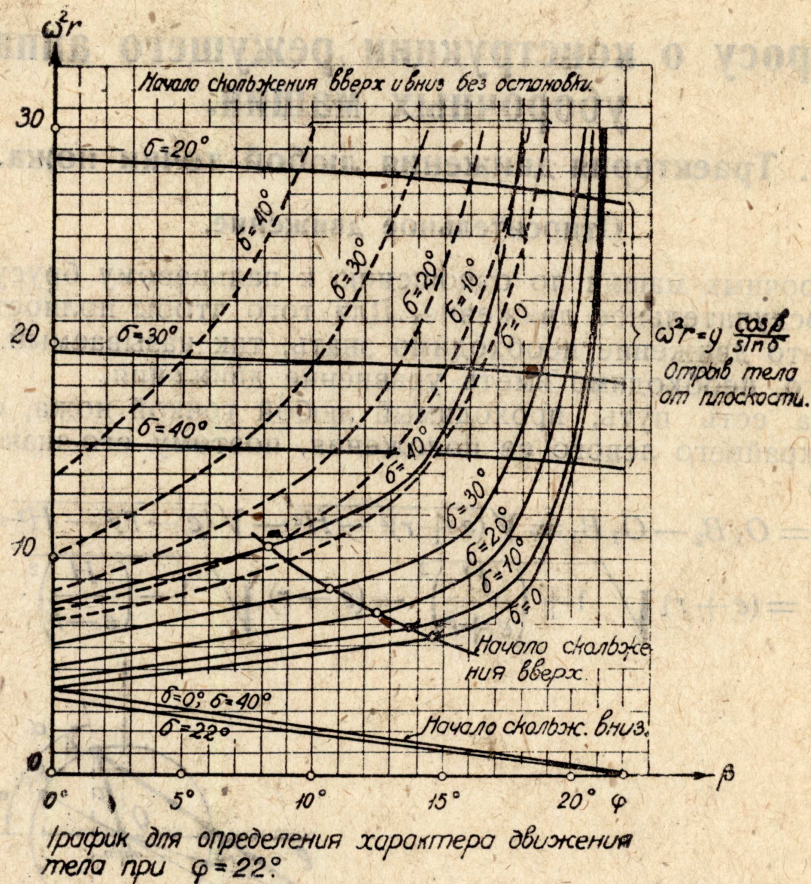


Рис. 14.

2. Увеличение угла β уменьшает значение $\omega^2 r$, необходимое для возможности отрыва, причем это уменьшение не особенно велико.

3. Увеличение угла β уменьшает значение $\omega^2 r$, необходимое для ускоренного движения; при $\beta > \varphi$ ускоренное движение будет при отсутствии колебаний, а при $\beta = 0$ ускоренное движение вообще невозможно.

Влияние угла σ между направлением колебаний и плоскостью также видно из рис. 14 и заключается в том, что:

1. Изменение σ незначительно отражается на значениях $\omega^2 r$, обеспечивающих возможность скольжения вниз; минимальное значение $\omega^2 r$ получается при $\sigma = +\varphi$.

2. Увеличение σ увеличивает значение $\omega^2 r$, необходимое для возможности скольжения вверх, и уменьшает значение $\omega^2 r$, необходимое для возможности отрыва; минимальное значение, обеспечивающее возможность скольжения вверх, получается при $\sigma = -\varphi$; минимальное значение $\omega^2 r$, обеспечивающее возможность отрыва, будет при $\sigma = \frac{\pi}{2}$, а при $\sigma = 0$

отрыв вообще невозможен. Увеличение угла трения φ вызывает увеличение значений $\omega^2 r$, обеспечивающих возможность скольжения вниз и вверх. На возможность отрыва угол φ не влияет.