

Доц. В. К. НЕЧАЕВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ТОРСИОГРАММЫ ДЛЯ ВАЛА ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

(к вопросу о крутильных колебаниях валов)



ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
СВЕРДЛОВСК — МОСКВА

1937

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших динамических характеристик каждой силовой установки с поршневым двигателем является степень неравномерности вращения главного вала, определяемая общеизвестной формулой:

$$\delta = \frac{\eta_{\max} - \eta_{\min}}{\eta}, \quad (1)$$

где η_{\max} и η_{\min} — соответственно максимальная и минимальная угловые скорости вращения вала (или, точнее, данного его поперечного сечения) за цикл рабочего процесса в цилиндрах двигателя;

$$\eta = \frac{\pi n}{30} — \text{средняя угловая скорость вращения вала, соот-}$$

ветствующая n — числу оборотов вала в минуту.

В ряде случаев практики заданная величина δ , необходимая по производственно-эксплуатационным соображениям, обуславливает выбор типа двигателя для проектируемой установки.

Высокие требования в отношении величины δ предъявляются, например, к агрегатам дизель-динамо постоянного или переменного тока, работающим на осветительную сеть. В подобных установках достаточная равномерность вращения коренного вала двигателя должна обеспечить отсутствие мигания света.

Но малая величина δ не всегда может служить гарантией надежной и удовлетворительной работы установки с динамической точки зрения.

Практика и теория параллельной работы дизель-генераторов переменного тока показывает, что здесь существенна не столько величина степени неравномерности вращения ротора генератора, сколько углы отклонения ротора от того его положения, которое он занимал бы в каждый момент времени при абсолютно равномерном его вращении. При чрезмерной величине углов отставания или опережения ротора (по отношению к равномерному вращению) возникают очень большие уравнительные токи в генерато-

рах, возможно выпадение генераторов из синхронизма и, следовательно, полное нарушение нормальной работы всей установки¹.

Поэтому, например, правила и нормы для дизель-генераторов переменного тока, работающих параллельно, предъявляют очень жесткие требования в отношении величины этих углов и в значительно меньшей мере настаивают на малой величине степени неравномерности вращения вала (δ)².

Достаточная равномерность хода поршневого двигателя заданного типа обычно достигается соответствующим выбором величины маховых масс на главном валу (прежде всего маховика).

Общеизвестные классические методы расчета маховика (по диаграмме тангенциальных усилий или по способу Виттенбауэра), призванные решать задачу динамического исследования силовых установок с поршневыми двигателями, дают значения δ , часто очень сильно расходящиеся с действительностью (обычно преуменьшенные против действительных в $1\frac{1}{2}$ —2 раза и больше). К тому же эти методы анализа неравномерности вращения не дают суждения о величине углов отставания или опережения маховика или ротора динамо по отношению к равномерному его вращению и поэтому, по крайней мере в своей обычной форме, непригодны, например, для расчета маховых колес параллельно работающих машин переменного тока³.

Причиной указанной выше значительной погрешности в расчете δ по диаграмме тангенциальных усилий или по Виттенбауэру следует считать, прежде всего, скрытое в обоих этих методах допущение абсолютной жесткости вала установки на скручивание⁴. Это допущение лежит в основе предположения взаимного равенства угловых скоростей вращения всех масс, расположенных на валу, в каждый момент времени.

Фактически же, вследствие податливости и упругости вала при действии на него переменных крутящих моментов и обусловленной этим неизбежности его крутильных колебаний, каждая

¹ Н. Görges, «Elektrotechnische Zeitschrift», 1900, s. 186; 1902, s. 1053 и следующие.

Е. Rosenberg, «E. T. Z.», 1902, s. 425, 450, 468.

» » 1904, s. 793, 856.

Ф. Klönne » 1902, s. 287 и следующие.

Г. Люст, Применимость двигателей внутреннего сгорания на электрических станциях, «Изв. Петроградского Политехн. ин-та,» 1916, т. XXV, стр. 1—145.

В. Иванов, Синхронные машины, 1934 г.

² В. К. Житомирский, Параллельная работа дизель-генераторов, «Дизелестроение», 1935, № 1.

Н. Г. Калиш, Связь между истинной степенью неравномерности и допустимым отклонением ротора в электрических градусах, «Дизелестроение», 1936, № 2.

³ F. Sass, Gleichgang von Kolbenkraftmaschinen, «Archiv f. Wärmewirtschaft u. Dampfkesselwesen», 1928, s. 100, а также работы, указанные в сноске 1.

⁴ В этом отношении метод Виттенбауэра не имеет преимуществ перед расчетом по диаграмме тангенциальных усилий.

из масс, жестко связанных с валом, имеет свою угловую скорость вращения, переменную по времени. Это приводит к тому, что каждая масса и каждое сечение вала имеют свою степень неравномерности вращения, зависящую от величины и расположения масс упругой системы, местоположения данной массы (или данного сечения) на валу, числа оборотов двигателя, режима его работы и т. д.

Степень неравномерности δ маховика или ротора динамо данной установки различна при различных скоростях вращения вала двигателя. Она становится особо большой при работе двигателя на критических (или близких к ним) числах оборотов.

Зависимость δ от n в действительности оказывается совершенно иной и значительно более сложной, нежели это устанавливается обычной формулой:

$$\delta = \frac{3600A_s}{n^2GD^2}, \quad (2)$$

при расчете по диаграмме тангенциальных усилий или подобной ей, при расчете по Виттенбауэру

В формуле (2):

A^s — избыточная работа, поглощаемая маховиком.

GD^2 — маховой момент маховика.

Крутильные колебания вала имеют место (в большей или меньшей мере) при любых скоростях его вращения и любых режимах работы двигателя, поэтому степень неравномерности вращения δ , подсчитанная по классическим способам расчета маховика, никогда, по существу, не соответствует действительности⁵.

Но с достаточной для практики точностью это соответствие может иметь место при наличии только очень слабых крутильных колебаний вала. Лишь в этих случаях (малое число оборотов двигателя, очень короткий и сравнительно толстый вал, малая величина маховых масс) обычные способы расчета маховика дают достаточно надежные результаты. Однако и при таких условиях эти способы расчета непригодны для анализа равномерности вращения дизель-генераторов переменного тока, работающих на общую сеть, вследствие возникновения здесь дополнительных колебаний, так называемого «качания» роторов⁶.

Исследование колебаний в подобных установках с учетом синхронизирующих моментов и пр., выходит за пределы настоящего труда. Во всем дальнейшем изложении мы будем предпола-

⁵ К. Рерих, Теория регулирования машин, ч. 1, стр. 175, 1916.

В. Житомирский, Истинная степень неравномерности «Дизеление», 1934, № 1.

Н. Пинес, Мигание света в электрических сетях вследствие крутильных колебаний роторов электрических машин, «Электричество», 1931, стр. 193—201.

Н. Макаревич, Установки двигателей внутреннего сгорания, 1935.

F. Sass, «Arch. f. Wärmewirtschaft u. Dampfkesselwesen», 1928, s.100.

⁶ См., например, работы, указанные в сноске 1, а также В. Мажуга, Частота собственных колебаний дизель-генератора при параллельной работе с мощной сетью, «Электричество», 1934, № 6.

гать одиночную работу агрегата дизель-генератор или работу, например, судовой установки с гребным винтом.

Механическое применение расчетов маховика по диаграмме тангенциальных усилий или по Виттенбауэру ко всем случаям практики может привести иногда не только к неточным, но и совершенно ошибочным выводам. Выбор очень большого маховика с большим GD^2 , обеспечивающим согласно формулы (2) малую величину δ , далеко не всегда гарантирует надежную работу силовой установки с точки зрения достаточной равномерности вращения вала. Практикой отмечены случаи ухудшения равномерности вращения при замене одного маховика другим, с большим GD^2 .⁷ Иногда уменьшение GD^2 или даже полное устранение маховика является простейшим средством улучшения равномерности вращения вала при данном числе его оборотов.

Подобного рода факты, совершенно парадоксальные с точки зрения классической теории маховика, получают крайне простое и определенное объяснение в теории крутильных колебаний валов. Анализ этих фактов на основе теории колебаний приводит к понятию о вредных маховых массах и критической величине GD^2 маховика⁸.

Действительные закономерности вращения отдельных сечений главного вала силовой установки графически представляются торсиограммами, которые можно снять с работающего двигателя торсиографом Гейгера, DVL и др. Каждая такая торсиограмма позволяет определить действительную степень неравномерности вращения соответствующего сечения вала.

Подобные торсиограммы могут быть достаточно надежно построены теоретическим путем, уже при проектировании силовой установки.

В настоящее время в литературе как русской, так и иностранной не имеется достаточно развитой методики построения теоретических торсиограмм. Отдельные же работы по крутильным колебаниям валов, посвященные частично или полностью этому вопросу⁹, излагают лишь упрощенные приемы построения торсио-

⁷ На возможность подобных случаев указывали еще Н. Lorenz, *Dynamik der Kurbelgetriebe*, Leipzig 1901, и А. Sommerfeld, «*Z. d. V. D. I.*», 1904, s. 631; см. также работу К. Периха, указанную в сноске 5.

⁸ F. Vogt, *Über schädliche Schwungmassen bei Drehschwingungen*, «*Z. d. V. D. I.*», 1927, s. 1221. Понятие о критической величине махового момента маховика введено впервые Н. Görges и E. Rosenberg в работах по теории колебаний параллельно включенных машин переменного тока. См. также F. Punga, «*E. T. Z.*», s. 385, 1911. Но в этих работах совершенно не учитывались крутильные колебания валов.

⁹ Н. Wydler, *Drehschwingungen in Kolbenkraftanlagen*, Berlin 1922. В. Житомирский, Влияние крутильных колебаний вала на степень неравномерности дизеля, «*Известия Всесоюзного теплотехнического института*», 1930, № 6—7 (59).

В. Житомирский, Истинная степень неравномерности, «*Дизелестроение*», 1934, № 1.

грамм, основанные на целом ряде допущений, например: вся установка сводится к двух- или трехмассовой системе, решающими являются только главные порядки гармоник крутящего момента на валу двигателя, двигатель работает вне критических оборотов и т. д.

Задачей настоящего труда является изложение более детальной методики построения теоретических торсиограмм, основанной на возможно малом числе допущений, а также способов определения наивыгоднейшей величины махового момента маховика.

Движение каждой массы, находящейся на валу силовой установки, складывается из равномерного вращения всего вала, как одно жесткое целое с постоянной скоростью (равной средней угловой скорости вращения вала за цикл в цилиндре) и наложенных на это вращение вынужденных колебательных движений, создаваемых гармоническими составляющими крутящего момента на валу двигателя.

Каждое из этих вынужденных колебательных движений имеет свою фазу, амплитуду и частоту, зависящие от закономерности диаграммы крутящих моментов, характеристик приведенной упругой системы, величины демпфирующих сил, скорости вращения вала, порядка чередования вспышек в цилиндрах двигателя и т. д.

Расчетная работа по построению теоретической торсиограммы для данного сечения вала или для данной массы установки распадается на следующие основные этапы:

1) гармонический анализ диаграммы крутящих моментов на валу двигателя, создаваемых одним цилиндром;

2) определение амплитуд вынужденных колебаний данного сечения вала, вызываемых отдельными слагающими гармониками крутящего момента;

3) суммирование всех вынужденных колебаний данного сечения вала, т. е. построение для него теоретической торсиограммы.

Перед выполнением этих пунктов необходимо провести обычный расчет установки на свободные крутильные колебания, определить частоты собственных колебаний и подсчитать критические числа оборотов вала двигателя. В случае совпадения каких-либо (в особенности главных) критических чисел оборотов с рабочими скоростями двигателя необходимо принять меры к устранению опасностей возникающего при этом резонанса¹⁰. Окончательное суждение о возможности или недопустимости работы двигателя на определенных критических оборотах (обычно второстепенных, высоких порядков) может быть установлено только после расчета дополнительных напряжений в валу.

¹⁰ В. Нечаев, Сдвиг критических оборотов, «Известия Томского индустриального института», т. LVI, 1936.

В. Гудков-Беляков, Смещение критических чисел оборотов в поршневых двигателях, «Дизелестроение», 1935, № 7.

Крутящий момент на валу двигателя создается давлением газов в цилиндрах, силами инерции поступательно-двигающихся масс, моментами сил инерции шатунов и весом частей шатунно-кривошипных механизмов¹¹.

Гармонический анализ диаграммы тангенциальных усилий, построенной по индикаторной диаграмме без учета сил инерции и т. п., позволяет представить крутящий момент, создаваемый на валу двигателя давлением газов в одном цилиндре, в виде ряда Фурье:

$$M' = M_0 + \sum M'_h \cdot \sin(h\eta t + \beta'_h), \quad (3)$$

где: M_0 — средний крутящий момент на валу, за цикл работы цилиндра;

η — угловая скорость вращения вала;

h — порядок гармоники крутящего момента по отношению к одному обороту вала двигателя;

β'_h — фазовый угол данной гармоники h -го порядка;

M'_h — амплитуда гармоники.

В четырехтактных двигателях порядок h гармонических составляющих крутящего момента принимает последовательно значения:

$$h = \frac{1}{2}; 1; 1\frac{1}{2}; 2 \dots;$$

в двухтактных двигателях:

$$h = 1; 2; 3 \dots$$

Каждый гармонический момент $M'_h \cdot \sin(h\eta t + \beta'_h)$ может быть представлен в виде проекции вращающегося вектора, длиной M'_h на вертикаль (фиг. 1). Угловая скорость вращения этого вектора равна $h\eta$. Фазовый угол β'_h есть угол, составляемый вектором M'_h с осью абсцисс в начальный момент времени, при $t=0$. Во всем дальнейшем изложении мы предполагаем вращение векторов моментов против часовой стрелки и отсчет времени с момента прохода кривошипа через верхнюю мертвую точку.

¹¹ Крутящий момент, создаваемый на валу инерционными силами шатуна, лишь приближенно учитывается обычным разложением шатуна на вращающуюся и поступательно-двигающуюся массы.

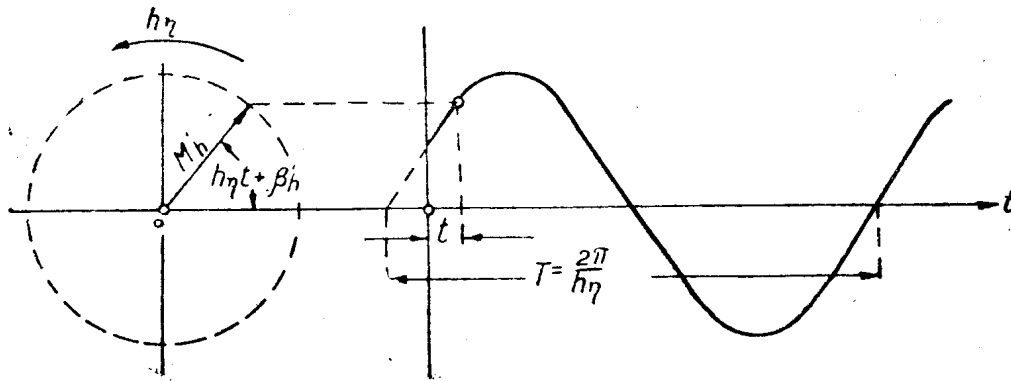
О точном учете влияния шатуна см. И. Нейман, Динамика и расчет на прочность авиационных моторов, ч. I, 1933.

Л. Мартенс, Динамика поршневых двигателей, 1932.

A. Gorfinkel, Vibration de torsion dans les moteurs polycylindriques, «Genie Civil», 1928, p. 513.

F. Porter, The range and severity of torsional vibration in Diesel engines, «Trans. A. S. M. E.», Vol. 50, 1927—1928.

Влияние веса частей шатунно-кривошипного механизма в большинстве случаев ничтожно и им можно пренебречь.



Фиг. 1

Крутящий момент, создаваемый на валу силами инерции поступательно-движущихся масс шатунно-кривошипного механизма одного цилиндра, определяется рядом¹²:

$$M'' = \sum M''_h \cdot \sin h\eta t, \quad (4)$$

где $h=1, 2, 3, \dots$

Коэффициенты M''_h (амплитуды гармонических составляющих крутящего момента на валу, от сил инерции поступательно-движущихся масс) имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} M_1'' &= \frac{G_h}{g} r^2 \eta^2 \left(\frac{\mu}{4} + \frac{\mu^3}{16} + \frac{15}{512} \mu^5 + \dots \right), \\ M_2'' &= \frac{G_h}{g} r^2 \eta^2 \left(-\frac{1}{2} \mu - \frac{\mu^4}{32} - \frac{\mu^6}{32} - \dots \right), \\ M_3'' &= \frac{G_h}{g} r^2 \eta^2 \left(-\frac{3}{4} \mu - \frac{9}{32} \mu^3 - \frac{81}{512} \mu^5 - \dots \right), \\ M_4'' &= \frac{G_h}{g} r^2 \eta^2 \left(-\frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu^4}{8} - \frac{\mu^6}{16} - \dots \right), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и т. д.

где G_h — вес поступательно движущихся масс шатунно-кривошипного механизма одного цилиндра;

r — радиус кривошипа;

$\mu = \frac{r}{l}$, где l — длина шатуна;

$g = 9,81 \text{ м/сек}^2$.

Фазовые углы составляющих гармонических моментов в формуле (4) равны 0° или 180° , в зависимости от знака M''_h .

Раздельный гармонический анализ тангенциальных усилий от давления газов в цилиндре и от сил инерции поступательно-движущихся масс представляет большие удобства для расчета вынужденных крутильных колебаний вала при различных ско-

¹² F. Porter, «Trans. A. S. M. E.», Vol. 50, 1927—1928.

ростях его вращения. В этом случае, с достаточной для практики точностью, можно индикаторную диаграмму, а следовательно, и разложение M^1 в ряд (3) считать независимыми от числа оборотов n двигателя (конечно, лишь при изменении n в сравнительно узких пределах). Коэффициенты же ряда (4) должны подсчитываться по формулам (5) для каждого n отдельно.

Суммирование рядов (3) и (4) при данном n дает окончательное выражение для полного крутящего момента, создаваемого на валу двигателя одним цилиндром:

$$M = M_0 + \sum M_n \cdot \sin(h\eta t + \beta_n), \quad (6)$$

где M_0 сохраняет свое прежнее значение. Величины M_n и β_n определяются сложением соответствующих (одного порядка) гармоник M'_n и M''_n с учетом их фазовых углов. Очевидно, что каждому числу оборотов вала двигателя соответствуют различные значения величин M_n , β_n и η .

Каждый гармонический момент M_n , входящий в ряд (6), можно представить в следующем виде:

$$M_n = C_n \cdot F \cdot r, \quad (7)$$

где F — площадь поршня в $см^2$;

C_n — гармонический коэффициент, измеряемый в $кг/см^2$.

Построение теоретической торсиограммы и определение действительной степени неравномерности вращения должно быть проведено отдельно для каждого заданного рабочего числа оборотов двигателя. Если это число оборотов совпадает с одной из критических скоростей вращения вала, то одна (соответствующая) гармоника крутящего момента входит в резонанс с собственными колебаниями валопровода, вызывая при этом большие амплитуды вынужденных колебаний. Все другие гармоники при этом находятся вне резонанса, и амплитуды вызываемых ими колебаний сравнительно невелики¹³.

Методики определения амплитуд и фазовых углов вынужденных колебаний, создаваемых резонирующими и нерезонирующими гармониками, различны и должны быть рассмотрены раздельно.

¹³ В многомассовой системе, имеющей несколько частот собственных колебаний, принципиально возможно одновременное вхождение в резонанс нескольких гармонических составляющих крутящего момента.

II. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВНЕ РЕЗОНАНСА

При расчете вынужденных колебаний, создаваемых нерезонирующими гармониками крутящего момента, можно пренебречь всеми демпфирующими силами (сопротивлениями), неизбежно возникающими в установке при крутильных колебаниях ее вала. Исследования Гольцера (Holzer), Портера (Porter)¹⁴ и др. показали, что эти силы заметно уменьшают амплитуды вынужденных колебаний масс упругой системы лишь при резонансе или в непосредственной близости от него, т. е. в очень узких областях, около критических скоростей вращения вала. Влияние демпфирующих сил на величину амплитуд вынужденных колебаний совершенно ничтожно уже при небольшом удалении от резонанса. Это обстоятельство находит себе объяснение в малой величине демпфирующих сил по сравнению с силами инерции колеблющихся масс.

При исследовании закономерностей вынужденных колебаний, вызываемых нерезонирующими гармониками крутящего момента, целесообразно воспользоваться теоремой Рэлея (Rayleigh) о взаимности вынужденных колебаний в упругой системе со многими степенями свободы¹⁵. Применительно к вынужденным крутильным колебаниям эта теорема может быть высказана следующим образом: амплитуда $\varphi_{k,i}$ колебания сечения k вала, вызываемая гармоническим моментом M , приложенным в сечении вала i , равна амплитуде $\varphi_{i,k}$ колебания сечения i вала, получающейся при действии того же момента M в сечении k , т. е.

$$\varphi_{k,i} = \varphi_{i,k} \quad ^{16}$$

Рассмотрим упругие системы с одним маховиком (фиг. 2) и двумя маховиками (фиг. 3), при чем предположим, что внешний возбуждающий момент действует только на крайнюю правую массу валопровода¹⁷. По теореме Рэлея возбуждающий момент M , действующий на массу i двигателя, вызывает колебания правой массы системы (маховика или ротора динамо) с такой же амплитудой

¹⁴ H. Holzer, Die Berechnung der Drehschwingungen, Berlin 1922.

F. Porter, «Trans. A. S. M. E.», Vol. L.

¹⁵ Rayleigh, Theorie des Schalles, Braunschweig 1880, Bd. 1.

¹⁶ Это соотношение может быть получено на основании общего анализа крутильных колебаний без применения теоремы Rayleigh, см. указанную выше работу Holzera, s. 130, а также M. Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 3. Aufl., Berlin 1921.

¹⁷ Теоретические торсиограммы обычно необходимо выстраивать для маховика или ротора динамо, т. е. для крайней правой по фиг. 2 и 3 массы приведенной упругой системы. Это в значительной мере облегчает решение нашей задачи, так как освобождает от необходимости детального расчета вынужденных нерезонансных колебаний всех масс установки.

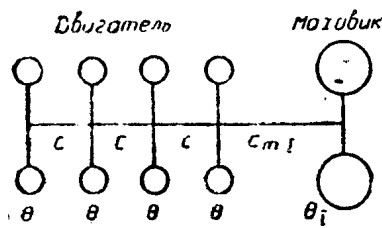
дой, какую получает масса i при действии этого момента M на правый конец вала, т. е.

$$\varphi_{I,i} = \varphi_{i,I} \quad (8)$$

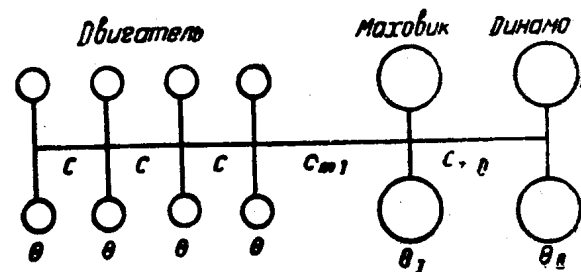
для системы с одним маховиком (см. Фиг. 2);

$$\varphi_{II,i} = \varphi_{i,II} \quad (9)$$

для системы с двумя маховиками (см. Фиг. 3), где $\varphi_{I,i}$ — амплитуда вынужденных колебаний маховика, вызываемая моментом M , действующим на массу i двигателя; $\varphi_{i,I}$ — амплитуда вынужденных колебаний массы i двигателя, создаваемая этим же моментом M , но приложенным к маховику. Аналогичен смысл индексов и в равенстве (9).



Фиг. 2



Фиг. 3

Для определения $\varphi_{I,i}$ или $\varphi_{II,i}$ из соотношений (8) и (9) необходимо предварительно найти зависимость между каким-либо моментом данной частоты, приложенным к маховику (вообще крайней правой массе системы), и вызываемыми им амплитудами колебания масс двигателя. Эта зависимость фактически устанавливается в виде связи между амплитудами колебания масс установки и остаточным моментом R на правом конце валопровода. (например при расчете частот собственных колебаний по методу Толле (Tolle), путем вычисления ряда таблиц для различных значений угловой скорости колебания ω). Эти вычисления могут быть значительно сокращены при исследовании силовых установок с рядовыми двигателями, имеющими одинаковые жесткости участков коленчатого вала между осями каждых двух соседних цилиндров и одинаковые моменты инерции приведенных масс каждого цилиндра (это условие выполняется в практике для всех тяжелых и многих легких двигателей внутреннего сгорания).

В установках с подобного рода двигателями амплитуды колебания масс двигателя определяются следующими зависимостями¹⁸, справедливыми при расчете системы слева направо, т. е. в предпо-

¹⁸ В. К. Нечаев, Графический метод определения частот собственных колебаний, «Известия Томского индустриального института», т. LIV, вып. VI, 1935, а также «Дивелестроение», 1934, № 4.

ложении, что внешний возбуждающий момент действует только на крайнюю правую массу валопровода:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1(1 - A), \\ \varphi_3 &= \varphi_1(1 - 3A + A^2), \\ \varphi_4 &= \varphi_1(1 - 6A + 5A^2 - A^3), \\ \varphi_5 &= \varphi_1(1 - 10A + 15A^2 - 7A^3 + A^4), \\ \varphi_6 &= \varphi_1(1 - 15A + 35A^2 - 17A^3 + 8A^4 - A^5), \\ &\text{и т. д.} \end{aligned} \right\} (10)$$

где $A = \frac{\Theta\omega^2}{c}$ — основной параметр колебания;

Θ — момент инерции маховых масс каждого цилиндра двигателя относительно оси вала;

c — жесткость участков коленчатого вала между осями каждых двух соседних цилиндров;

ω — угловая скорость колебания, т. е. угловая скорость внешнего возбуждающего момента, приложенного к крайней правой массе системы.

При $\varphi_1 = 1$ радиан выражения (10) переходят в:¹⁹

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= 1 - A, \\ \varphi_3 &= 1 - 3A + A^2, \\ \varphi_4 &= 1 - 6A + 5A^2 - A^3, \\ \varphi_5 &= 1 - 10A + 15A^2 - 7A^3 + A^4, \\ \varphi_6 &= 1 - 15A + 35A^2 - 17A^3 + 8A^4 - A^5 \\ &\text{и т. д.} \end{aligned} \right\} (11)$$

Эти величины φ можно назвать относительными амплитудами колебания масс двигателя (т. е. отнесенными к амплитуде колебания первой массы).

Числовые значения φ , подсчитанные по формулам (11) при различных значениях параметра A приведены в табл. I (см. приложение).

Относительная амплитуда колебания маховика в установке по фиг. 2 определяется очевидным выражением:

$$\varphi_I = \varphi_m \frac{\sum_{i=1}^{i=m} \theta\omega^2 \varphi_i}{c_{mI}},$$

¹⁹ В формулах (10), (11) и дальше нумерация масс двигателя начинается с левого конца установки по фиг. 2 и 3.

ИЛИ

$$\varphi_I = \varphi_m - \frac{\theta\omega^2}{\beta_1 c} \sum_{i=1}^{i=m} \varphi_i = \varphi_m - \frac{A}{\beta_1} \sum_{i=1}^{i=m} \varphi_i, \quad (12)$$

где φ_m — амплитуда колебания последней правой массы двигателя при $\varphi_1=1$;

φ_i — относительная амплитуда колебания i -ой массы двигателя;

φ_I — относительная амплитуда колебания маховика;

c_{mI} — жесткость участка вала между последним цилиндром двигателя и маховиком;

$\beta_1 = \frac{c_{mI}}{c}$ — относительная жесткость этого участка вала;

m — число цилиндров двигателя;

$\sum_{i=1}^{i=m} \varphi_i$ — алгебраическая сумма относительных амплитуд колебания всех масс двигателя.

Значения $\sum_{i=1}^{i=m} \varphi_i$ в функции от A приведены в табл. II и III

(см. приложение) для четырех- и шестицилиндровых двигателей²⁰. Относительная амплитуда колебания второго маховика или ротора динамо в установке по фиг. 3 определяется выражением:

$$\varphi_{II} = \varphi_I - \frac{\sum_{i=1}^{i=m} \theta\omega^2 \varphi_i + \theta_I \omega^2 \varphi_I}{c_{I, II}}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \varphi_{II} &= \varphi_I - \frac{\theta\omega^2}{\beta_2 c} \left(\sum_{i=1}^{i=m} \varphi_i + \alpha_I \varphi_I \right) = \\ &= \varphi_I - \frac{A}{\beta_2} \left(\sum_{i=1}^{i=m} \varphi_i + \alpha_I \varphi_I \right). \end{aligned} \quad (13)$$

²⁰ В табл. II и III даны также значения D_4 и D_6 , необходимые при расчете частот собственных колебаний установок с четырех- и шестицилиндровыми двигателями по способу, изложенному автором в указанной выше статье «Графический метод определения частот собственных колебаний».

Здесь φ_{II} — относительная амплитуда колебания второго маховика или ротора динамо;

$c_{I,II}$ — жесткость участка вала между первым и вторым маховиками;

$$\beta_2 = \frac{c_{I,II}}{c} \text{ — относительная жесткость этого участка вала;}$$

Θ_I — момент инерции первого маховика;

Θ_{II} — момент инерции второго маховика (ротора динамо);

$$\alpha_I = \frac{\Theta_I}{\Theta}.$$

Величина относительной амплитуды φ_I колебания первого маховика, входящая в формулу (13), определяется выражением (12).

Остаточный момент R при расчете системы слева направо, как известно, представляет собою амплитуду того внешнего возбуждающего гармонического момента, который нужно приложить к крайней правой массе установки, чтобы уравновесить инерционные моменты всех масс валопровода, колеблющихся с угловой скоростью колебания ω^{21} .

В установке с одним маховиком (см. фиг. 2) остаточный момент на правом конце вала равен алгебраической сумме максимальных инерционных моментов всех масс двигателя и маховика:

$$R = - \left(\sum_{i=1}^{i=m} \theta \omega^2 \varphi_i + \theta_I \omega^2 \varphi_I \right) =$$

$$= - \theta \omega^2 \left(\sum_{i=1}^{i=m} \varphi_i + \alpha_I \varphi_I \right) = - A c \left(\sum_{i=1}^{i=m} \varphi_i + \alpha_I \varphi_I \right), \quad (14)$$

и аналогично в установке с двумя маховиками (см. фиг. 3):

²¹ Необходимо отличать угловую скорость колебания ω (ее именуют иногда «угловой частотой»; Drehschnelle) от угловой скорости колебательного движения массы. Первая связана с частотой колебания N выражением: $\omega = \frac{\pi N}{30}$ сек.⁻¹, при чем N равно частоте возбуждающего гармонического момента (числу циклов изменения его в минуту). Величину ω следует представлять как угловую скорость вращения вектора колебания φ_i , равную угловой скорости вращения $h\eta$ вектора гармонического момента. При установившемся колебательном процессе величина ω постоянна. Угловая скорость колебательного движения массы равна $\frac{d\varphi_i}{dt}$ и переменна по времени.

$$R = - \left(\sum_{i=1}^{i=m} \theta \omega^2 \varphi_i + \theta_I \omega^2 \varphi_I + \theta_{II} \omega^2 \varphi_{II} \right) =$$

$$= - A c \left(\sum_{i=1}^{i=m} \varphi_i + \alpha_I \varphi_I + \alpha_{II} \varphi_{II} \right). \quad (15)$$

По этим формулам могут быть подсчитаны числовые значения R для конкретной исследуемой системы при различных ω . Входящие сюда величины φ_I и φ_{II} определяются соответственно выра-

жениям (12) и (13). Значения $\sum_{i=1}^{i=m} \varphi_i$, как и ранее, берутся непосредственно из прилагаемых таблиц.

Найденная таким образом, величина R является амплитудой того внешнего гармонического момента, который нужно приложить к крайней правой массе системы (маховику или ротору динамо), чтобы вызвать колебания первой (крайней левой) массы двигателя с амплитудой $\varphi_1 = 1$. Соответствующие амплитуды колебания всех остальных масс даются формулами (11), (12), (13).

Формулы (10) — (13) показывают, что при действии возбуждающего гармонического момента только на правый конец упругой системы амплитуды колебания всех масс пропорциональны амплитуде колебания первой массы φ_1 . Равным образом, согласно формулам (14) и (15) пропорциональна φ_1 и величина остаточного момента R , или обратно: амплитуда φ_1 , а следовательно, и амплитуды колебания всех масс установки пропорциональны амплитуде внешнего возбуждающего гармонического момента, приложенного к правому концу валопровода.

Таким образом, если на правый конец системы действует гармонический момент с амплитудой M , вместо R (но с той же угловой скоростью ω), то амплитуда колебания первой массы двигателя, вызываемого этим моментом, определится из соотношения:

$$\varphi_{1, I abc} = 1 \cdot \frac{M^{22}}{R},$$

а амплитуды всех других масс из соотношения:

$$\varphi_{i, I abc} = \varphi_i \cdot \frac{M^{22}}{R}.$$

Но на основании теоремы Рэлея, согласно формуле (8), амплитуда $\varphi_{1, I abc}$ равна амплитуде $\varphi_{1, I abc}$ вынужденных колебаний ма-

²² Для системы по фиг. 3, вместо $\varphi_{1, I abc}$, нужно писать $\varphi_{1, II abc}$, и т. д. В дальнейшем мы будем, для краткости изложения, рассматривать установку по фиг. 2.

на,²³ определяемая графическим путем (см. ниже) с учетом фазовых углов слагающих колебаний.

В общем случае возбуждающий момент

$$M \cdot \sin(h\eta t + \beta_h),$$

h -го порядка, действующий на i -ю массу упругой системы, вызовет движение этой массы по закону:

$$(\varphi_i) = \varphi_i \cdot \sin(h\eta t + \beta_h - \varepsilon). \quad (20)$$

Аналогичным же образом по закону:

$$(\varphi_k) = \varphi_k \cdot \sin(h\eta t + \beta_h - \varepsilon), \quad (21)$$

будут двигаться теперь и все остальные массы валопровода. Здесь ε — фазовый угол между возбуждающим моментом и вынужденным колебанием. Геометрически ε есть угол между вектором момента M и вектором колебания φ_i . При отсутствии демпфирующих сил в системе, колеблющейся во внерезонансной области, фазовый угол ε равен 0° или 180° , т. е. все массы валопровода имеют одинаковые или частью прямопротивоположные фазы. Поэтому, считая M существенно положительным, можно выражения (20) и (21) для вынужденных колебаний вне резонанса писать в виде:

$$(\varphi_i) = \varphi_i \cdot \sin(h\eta t + \beta_h),$$

$$(\varphi_k) = \varphi_k \cdot \sin(h\eta t + \beta_h),$$

при чем, положительные значения φ_i и φ_k соответствуют углу $\varepsilon = 0^\circ$, т. е. когда векторы колебаний совпадают по направлению с вектором момента M , а отрицательные значения φ_i и φ_k — фазовому углу $\varepsilon = 180^\circ$. В этом случае векторы гармонического момента и вынужденного колебания соответствующей массы взаимно противоположны.

Фазовый угол ε между возбуждающим гармоническим моментом M и колебанием точки его приложения равен 0° или 180° только в тех случаях, когда на упругую систему действует лишь один гармонический момент (только на одну массу валопровода) или все моменты данного порядка, приложенные к массам двигателя, имеют одинаковые или прямо противоположные фазы. Этот угол отличен от 0° и 180° , если гармонические моменты (исследуемого порядка), действующие на массы двигателя, различны по фазе.

²³ Подобное уточнение необходимо, например, при исследовании влияния выключения отдельных цилиндров двигателя на крутильные колебания его вала.

Для определения величины $\sum \vec{\phi}_i$, входящей в формулу (19), и фазового угла, результирующего (суммарного) колебания маховика, необходимо построить так называемую «фазовую» диаграмму возбуждающих гармонических моментов данного порядка. Фазовая диаграмма представляет взаимное расположение векторов гармоник M , действующих на массы 1, 2... m двигателя в каждый момент времени. Расположение векторов M в этой диаграмме обуславливается порядком исследуемых гармонических возбуждающих моментов, типом двигателя (двух или четырехтактный), числом его цилиндров и порядком чередования вспышек в них.

В фазовой диаграмме векторы моментов размещаются один за другим по часовой стрелке, в порядке чередования вспышек в цилиндрах, при чем угол между каждыми двумя соседними векторами равен $h\alpha$ градусов, где

$$\alpha = \frac{360^\circ}{m} \quad (22)$$

в двухтактных двигателях;

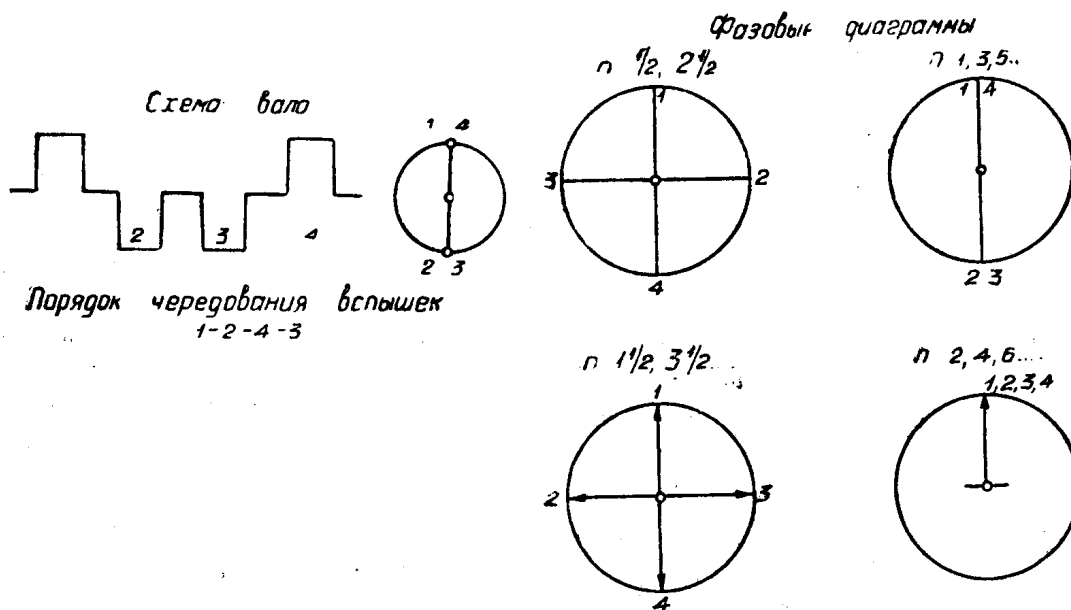
$$\alpha = \frac{720^\circ}{m} \quad (23)$$

в четырехтактных двигателях;

m — число цилиндров двигателя;

h — как и ранее — порядок гармоники ²⁴.

На фиг. 4 показаны в качестве иллюстрации фазовые диаграммы для четырехтактного четырехцилиндрового двигателя, с порядком чередования вспышек в цилиндрах 1—2—4—3.

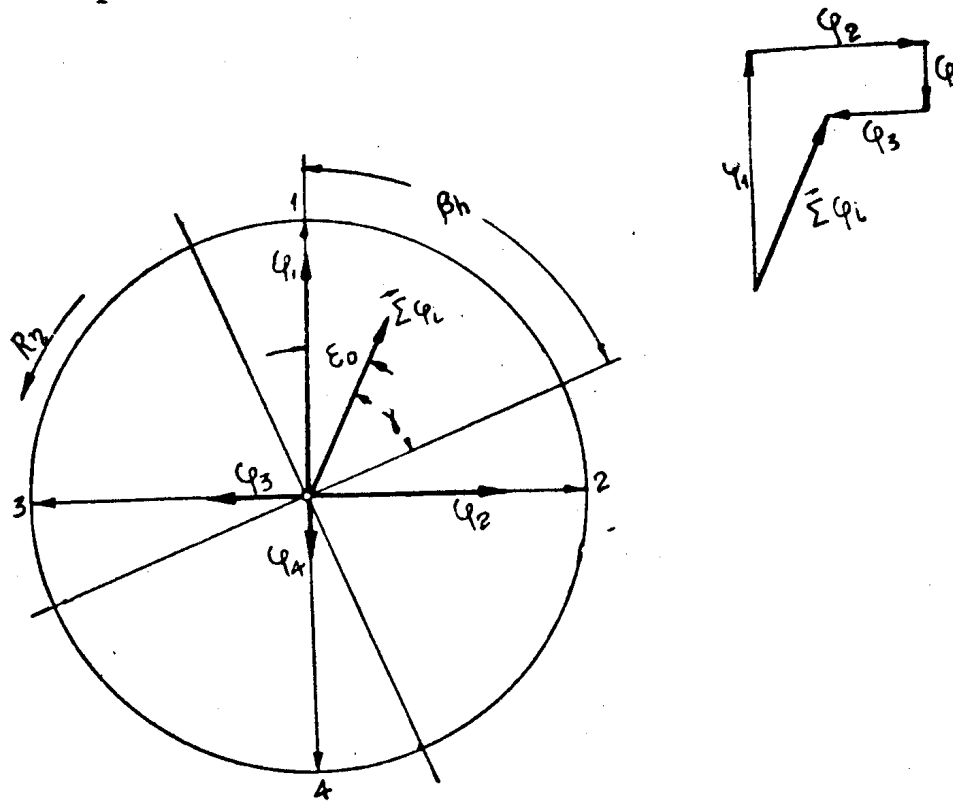


Фиг. 4

²⁴ Примеры построения фазовых диаграмм см. Н. Урванцев, Критические числа оборотов в дизельных установках, 1931.

Значения относительных амплитуд φ_i колебания масс двигателя, подсчитанные по формулам (11) или взятые непосредственно из табл. I (см. приложение), должны быть отложены теперь по направлениям векторов моментов в фазовой диаграмме данного порядка; при этом положительные φ_i откладываются от центра диаграммы наружу, а отрицательные — снаружи к центру. Замыкающая сторона многоугольника, построенного на этих векто-

рах φ_i , дает искомую величину $\sum \varphi_i$ (фиг. 5). Направление этой замыкающей определяет собою положение вектора, результирующего колебания φ_{Iabc} маховика, относительно векторов возбуждающих гармонических моментов.



Фиг. 5

Обозначим через ε_0 (фиг. 5) угол между замыкающей $\sum \varphi_i$ и, например, вектором гармонического момента, действующего на первый кривошип коленчатого вала. Величина этого угла может быть измерена непосредственно по чертежу. Истинный фазовый угол γ результирующего колебания маховика относительно первого кривошипа, т. е. угол между вектором φ_{Iabc} и осью абсцисс в момент прохода кривошипа через верхнюю мертвую точку, при $t = 0$, равен, очевидно, разности фазового угла β_n гармоники возбуждающего момента и угла ε_0 :

$$\gamma = \beta_n - \varepsilon_0. \quad (24)$$

Теперь вынужденное колебательное движение маховика, создаваемое гармоническими моментами h -го порядка, действующими на все кривошипы коленчатого вала, представится уравнением:

$$\varphi = \varphi_{I abc} \cdot \sin(h\eta t + \gamma), \quad (25)$$

в котором уже известны числовые значения всех входящих в него величин.

Подобные подсчеты $\varphi_{I abc}$ и определение $\sum \varphi_i$ и γ по фазовой диаграмме необходимо провести для всех или по крайней мере для наиболее важных, больших и близких к резонированию, при данном числе оборотов двигателя, гармоник крутящего момента. Наиболее существенными будут здесь гармоники главных порядков, т. е. тех порядков, для которых все вектора моментов в фазовой диаграмме совпадают по направлению.

Согласно сказанному выше, это совпадение векторов будет иметь место при

$$h\alpha = h \cdot \frac{360^\circ}{m} = 360^\circ$$

в двухтактных двигателях,

$$h\alpha = h \cdot \frac{720^\circ}{m} = 360^\circ$$

в четырехтактных двигателях,
т. е. при

$$h = m \quad \text{и} \quad h = \frac{m}{2}$$

соответственно — в двух и четырехтактных двигателях.

Таким образом, главные порядки гармоник крутящего момента кратны числу вспышек в цилиндрах двигателя за один оборот его вала.

III. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ РЕЗОНАНСЕ

Все те скорости вращения вала двигателя, при которых одна из частот собственных колебаний валопровода совпадает с частотой одной из гармоник крутящего момента на валу, являются его критическими скоростями.

Критические скорости вращения вала двигателя определяются выражением:

$$\eta_{кр} = \frac{\omega_0}{h}, \quad (26)$$

где ω_0 — угловая скорость собственных колебаний упругой системы, связанная с частотой собственных колебаний N_0 соотношением:

$$\omega_0 = \frac{\pi N_0}{30} \text{ сек}^{-1};$$

h — порядок резонирующей гармоник, принимающей последовательно значения 1, 2, 3... в двухтактных и $1/2$; 1; $1 1/2$... в четырехтактных двигателях.

Из наличия целого ряда частот собственных колебаний много-массовой системы и из множественности гармонических составляющих крутящего момента вытекает существование множества критических скоростей у каждой силовой установки с много-цилиндровым двигателем.

При вынужденных колебаниях валопровода с угловой скоростью ω_0 , т.е. при резонансе остаточный момент R , как известно, обращается в нуль. Теперь применение формулы (19) для определения амплитуд вынужденных колебаний маховика, создаваемых одновременным действием резонирующих гармоник порядка

$$h = \frac{\omega_0}{\eta_{кр}}$$

$$\varphi_{1abc} = \infty,$$

что совершенно естественно при резонансе без сопротивлений. Одновременно с этим получаются бесконечно-большими и амплитуды колебания всех остальных масс установки. Практически же рост амплитуд колебаний ограничивается демпфирующими силами, неизбежно возникающими при крутильных колебаниях валопровода.

В самом общем случае, зная конкретные характеристики упругой приведенной системы, возбуждающих моментов и демпфирующих сил, можно было бы написать дифференциальные уравнения движения для каждой массы исследуемой установки. Совместное решение полученной системы уравнений должно было бы дать уравнения движения всех масс, а следовательно, и полную картину вынужденных крутильных колебаний вала. Но подобный подход почти не применяется в практике в виду того, что решение указанной системы дифференциальных уравнений крайне сложно и вообще возможно (в квадратурах) только при введении ряда упрощающих допущений в отношении характера демпфирующих сил и т. п. Этот путь достаточно удобен лишь при исследовании простых, двух- или трехмассовых систем.

Для анализа резонансных крутильных колебаний вала с большим числом масс, как правило, применяется энергетический метод, предложенный Видлером (Wydler)²⁵ и основанный на следующем:

Рост амплитуд вынужденных колебаний валопровода при работе двигателя на одной из его критических скоростей прекратится лишь только тогда, когда работа гармонических возбуждающих моментов, действующих на вал, совершаемая ими за каж-

²⁵ Н. Wydler, Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen, 1922.

дый цикл колебания, будет равна работе, поглощаемой за этот цикл демпфирующими силами.

РАБОТА ВОЗБУЖДАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Положим, что на массу i упругой системы, колеблющуюся по закону: ²⁶

$$(\varphi_i) = \varphi_{i \text{ abs}} \cdot \sin((h\eta t + \beta_h - \varepsilon), \quad (27)$$

действует возбуждающий момент:

$$(M_i) = M_i \cdot \sin(h\eta t + \beta_h). \quad (28)$$

За каждый цикл колебания массы i этот момент совершает работу:

$$A_{\text{возб}} = \int_{t=0}^T (M_i) \cdot d\varphi_{i \text{ abs}} = \pi M_i \cdot \varphi_{i \text{ abs}} \cdot \sin \varepsilon, \quad (29)$$

где

$$T = \frac{2\pi}{h\eta} \quad (30)$$

период колебания.

Если в установке отсутствуют другие внешние гармонические моменты, кроме M_i , приложенного к массе i , то фазовый угол ε в выражениях (27) и (29) зависит исключительно от величины и характера демпфирующих сил и соотношения между $h\eta$ и ω_0 . При колебаниях вне резонанса ($h\eta \neq \omega_0$):

$$0 < \varepsilon < 180^\circ,$$

и при резонансе ($h\eta = \omega_0$):

$$\varepsilon = 90^\circ,$$

т. е. вынужденные резонансные колебания массы i отстают на 90° от действующего на нее момента M_i . Этой величине фазового угла соответствует наибольшая возможная работа возбуждающего момента за цикл колебания:

$$A_{\text{возб}} = \pi M_i \cdot \varphi_{i \text{ abs}}. \quad (31)$$

Но значение $\varepsilon = 90^\circ$ между моментом и колебанием точки его приложения выдерживается при резонансе лишь в том случае, если на систему действует только один возбуждающий мо-

²⁶ Величины (φ_i) и (M_i) означают соответственно мгновенные значения угла отклонения массы и действующего на них момента.

мент, в одной ее точке. Фазовый угол ε может получиться совершенно иным при резонансных колебаниях многомассовой системы, при действии на нее в различных ее точках нескольких гармонических моментов одинаковой частоты, но с различными фазами ²⁷. Здесь колебательное движение каждой массы является результатом наложения отдельных ее слагающих колебаний, создаваемых каждым из возбуждающих гармонических моментов, приложенных к системе.

Если на массы $1, 2 \dots m$ двигателя, колеблющиеся по закону:

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_1) &= \varphi_{1abc} \cdot \sin(h\eta t + \beta_{h,1} - \varepsilon_1), \\ (\varphi_2) &= \varphi_{2abc} \cdot \sin(h\eta t + \beta_{h,2} - \varepsilon_2), \\ \dots \dots \dots \\ (\varphi_i) &= \varphi_{iabc} \cdot \sin(h\eta t + \beta_{h,i} - \varepsilon_i), \\ \dots \dots \dots \\ (\varphi_m) &= \varphi_{mabc} \cdot \sin(h\eta t + \beta_{h,m} - \varepsilon_m), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

действуют соответственно возбуждающие гармонические моменты:

$$\left. \begin{aligned} (M_1) &= M_1 \cdot \sin(h\eta t + \beta_{h,1}) \\ (M_2) &= M_2 \cdot \sin(h\eta t + \beta_{h,2}) \\ \dots \dots \dots \\ (M_i) &= M_i \cdot \sin(h\eta t + \beta_{h,i}), \\ \dots \dots \dots \\ (M_m) &= M_m \cdot \sin(h\eta t + \beta_{h,m}), \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

то полная работа, совершаемая всеми этими моментами за один цикл колебания, определится, согласно формуле (29), выражением:

$$A_{возб} = \sum \pi M \cdot \varphi_{iabc} \cdot \sin \varepsilon_i. \quad (34)$$

При наличии демпфирующих сил в установке фазовые углы $(\beta_{h,i} - \varepsilon_i)$, в выражениях (32) различны для каждой из масс валапровода. Взаимное неравенство $(\beta_{h,1} - \varepsilon_1)$, $(\beta_{h,2} - \varepsilon_2)$ и т. д. имеет вообще место при любых вынужденных крутильных колебаниях как при резонансе, так и вне его. Отсутствие синхронности движения масс крайне усложняет исследование вынужденных крутильных колебаний с учетом демпфирующих сил, так как требует определения фазового угла $(\beta_{h,i} - \varepsilon_i)$ для каждой из

²⁷ В этом случае угол $\varepsilon = 90^\circ$ сохраняется только между гармоническим моментом M_i и вызываемым им колебанием точки его приложения.

масс в отдельности. Но решение задачи может быть упрощено при анализе только резонансных вынужденных колебаний.

Видлер²⁸ показал, что при резонансе, по крайней мере пока демпфирующие силы не очень велики, кривая формы вынужденных колебаний валопровода практически не отличается от кривой формы свободных колебаний без сопротивлений.

Таким образом, при анализе вынужденных резонансных колебаний можно, с вполне достаточной для практики точностью, принять синхронность колебательного движения всех масс системы. Это обстоятельство позволяет удобно использовать уравнение (34) для расчетов резонансных амплитуд.

Полагая теперь в выражениях (32) равенство абсолютных фазовых углов колебания масс²⁹:

$$(\beta_{h,1} - \varepsilon_1) = (\beta_{h,2} - \varepsilon_2) = \dots = (\beta_{h,i} - \varepsilon_i) = \gamma, \quad (36)$$

можно формулу (35) переписать в виде:

$$A_{всзб} = \pi \sum M_i \cdot \varphi_{iabc} \cdot \sin(\beta_{h,i} - \gamma),$$

или, при одинаковой величине амплитуд всех гармонических моментов данного порядка, действующих на коленчатый вал:

$$A_{всзб} = \pi M \sum \varphi_{iabc} \cdot \sin(\beta_{h,i} - \gamma). \quad (37)$$

Принятое нами равенство (36) показывает, что векторы вынужденных колебаний всех масс, при действии гармонических моментов одного порядка на все кривошипы коленчатого вала двигателя, коллинеарны в каждый момент времени. В начальный момент времени, при $t=0$, все эти векторы, вращающиеся с угловой скоростью $h\eta = \omega_0$, составляют угол γ с осью абсцисс.

Каждое из слагаемых:

$$\varphi_{iabc} \cdot \sin(\beta_{h,i} - \gamma),$$

входящих под знак суммы в выражении (37), можно рассматривать, согласно фиг. 6, как проекцию вектора $OB = \varphi_{iabc}$, отложенного по направлению вектора гармонического момента $M_i = OA$, действующего на эту массу, на линию OII , перпендикулярную линии OI , определяющей действительное направление вектора

φ_{iabc} , т. е.

$$OD = BC = \varphi_{iabc} \cdot \sin(\beta_{h,i} - \gamma).$$

²⁸ См. его работу, указанную в сноске 25.

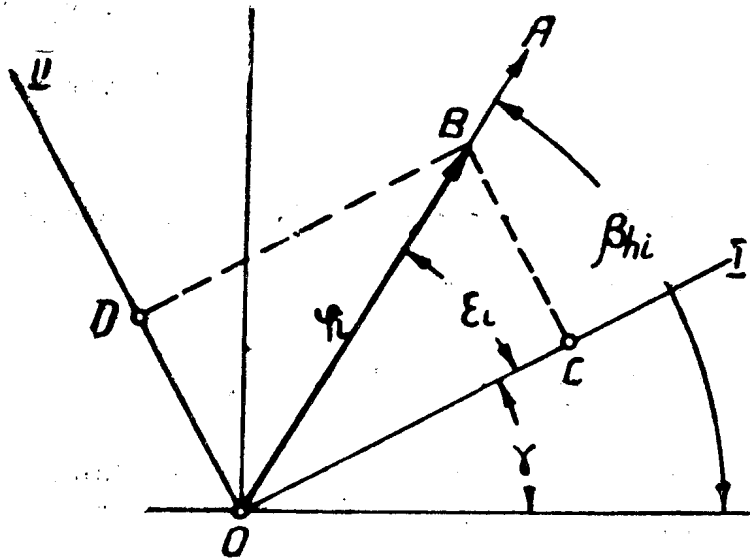
²⁹ Противоположность фаз колебания отдельных масс учитывается знаком φ_i .

Отсюда следует, что величина

$$\sum \varphi_{i abc} \cdot \sin(\beta_{h,i} - \gamma)$$

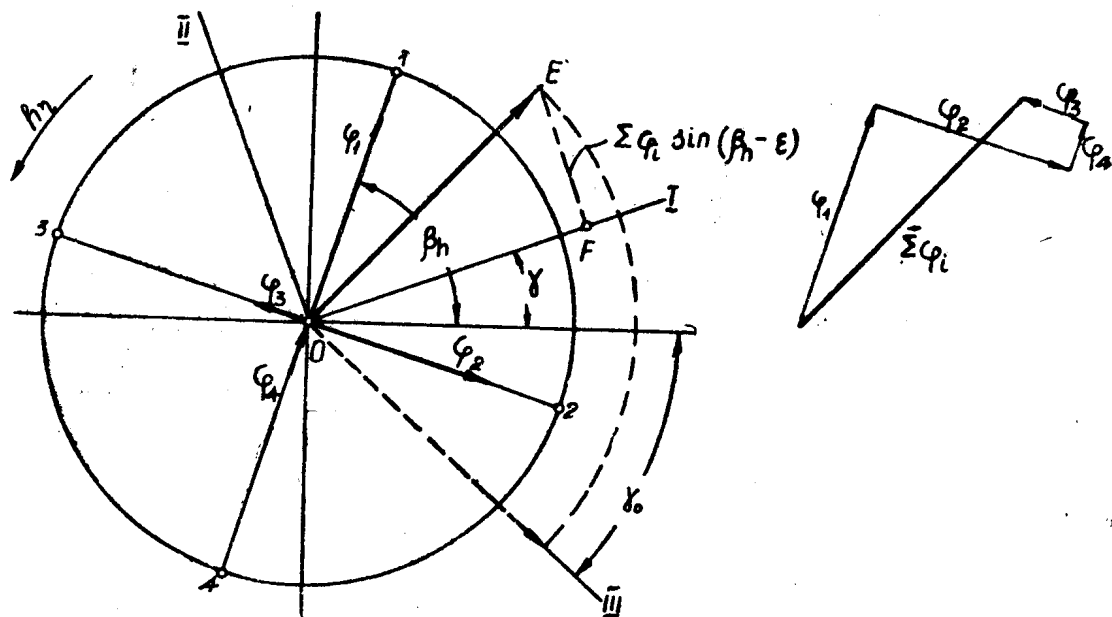
в формуле (37) для полной работы возбуждающих моментов представляет собою проекцию результирующего вектора $\sum \vec{\varphi}_{i abc}$, постро-

строенного в фазовой диаграмме возбуждающих моментов данного порядка, на линию, перпендикулярную действительному направлению коллинеарных векторов колебания всех масс. Этот результирующий вектор определяется как замыкающая сторона многоугольника, построенного на векторах амплитуд $\varphi_{i abc}$



Фиг. 6

колебания всех масс двигателя, отложенных по направлениям соответствующих векторов возбуждающих моментов в их фазовой диаграмме (Фиг. 7):



Фиг. 7

$$OE = \sum \vec{\varphi}_{i abc}, \quad (38)$$

$$EF = \sum \varphi_{i abc} \cdot \sin(\beta_{h,i} - \gamma). \quad (39)$$

В уравнении (37) остается пока неизвестной величина абсолютного фазового угла γ колебания масс, а следовательно, и величины относительных фазовых углов $\beta_{h,i} - \gamma = \epsilon_i$ между возбуждающими моментами и колебаниями точек их приложения.

Очевидно, что полный резонанс будет иметь место при тех условиях и соотношениях, которые будут обеспечивать наибольшую эффективность воздействия возбуждающих моментов, т. е. наибольшую величину совершаемой ими работы $A_{возб}$ за каждый цикл колебания. Согласно уравнениям (37), (39) и фиг. 7, работа $A_{возб}$ пропорциональна отрезку EF , т. е. проекции вектора

$\vec{OE} = \sum \vec{\varphi}_{i abc}$ на линию OII , перпендикулярную направлению векторов колебания (линия OI). Отрезок EF достигает макси-

мального значения: $(EF)_{\max} = OE = \sum \vec{\varphi}_{i abc}$ при угле в 90°

между OE и OI , т. е. при полном резонансе векторы вынужденных колебаний всех масс располагаются по линии $OIII$, перпендикулярной OE , и отстают на 90° от вектора

$\sum \vec{\varphi}_{i abc}$. Абсолютный фазовый угол этих колебаний γ_0 равен

углу между линией $OIII$ и осью абсцисс (см. фиг. 7). Величина γ_0 может быть измерена непосредственно по чертежу.

В случае полного резонанса работа возбуждающих моментов определяется теперь формулой:

$$A_{возб} = \pi M \cdot \sum \vec{\varphi}_{i abc}, \quad (40)$$

или

$$A_{возб} = \pi M \cdot \varphi_{1 abc} \cdot \sum \frac{\vec{\varphi}_{i abc}}{\varphi_{1 abc}} = \pi M \cdot \varphi_{1 abc} \sum \vec{\varphi}_i, \quad (41)$$

где $\frac{\varphi_{i abc}}{\varphi_{1 abc}} = \varphi_i$ — относительная амплитуда колебания i -й массы.

Формула (41), являющаяся основной при расчете резонансных амплитуд крутильных колебаний, показывает, что $A_{возб}$ прямо пропорциональна амплитуде колебания первой массы двигателя.

В соответствии с указанным выше положением Видлера о практически точном подобии кривых формы свободных и вынужденных резонансных колебаний, можно величины φ_i , входящие в формулу (41) вычислять по формулам (11) или взять по табл. I (см. приложение) при

$$A = \frac{\theta \omega_0^2}{c},$$

где ω_0 — угловая скорость собственных колебаний системы.

Для двигателя с неравномерным (по длине коленчатого вала) распределением приведенных масс шатунно-кривошипных механизмов величины φ_i подсчитываются, например, по методу Толле.

Фазовые диаграммы возбуждающих моментов, необходимые для определения $\vec{\Sigma \varphi_i}$, строятся согласно указаниям в разделе II настоящей статьи. Для гармонических моментов главных порядков, вследствие коллинеарности их векторов, геометрическая сумма φ_i переходит в сумму алгебраическую.

РАБОТА ДЕМПФИРУЮЩИХ СИЛ И РЕЗОНАНСНЫЕ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЯ

Методика подсчета работы демпфирующих сил зависит от характера важнейших, учитываемых в расчете, сопротивлений и вида принятого для них аналитического выражения.

Теория Видлера. Видлер предложил³⁰ считать все демпфирующие силы в двигателе, не вдаваясь в детальный их анализ, пропорциональными первой степени скорости колебательного движения масс шатунно-кривошипных механизмов, приведенных к радиусу кривошипа. Теория Видлера наиболее проста с формальной и расчетной стороны и находит себе известное оправдание в обычной оценке характера демпфирующих сил, принимаемой в общей теории колебаний.

Согласно Видлеру, на массу i двигателя, колеблющуюся по закону:

$$(\varphi_i) = \varphi_{i \text{ абс}} \cdot \sin(\omega t + \gamma),$$

действует демпфирующая сила:

$$P = -k_1 r \cdot \frac{d\varphi_i}{dt},$$

где k_1 — сила сопротивления (демпфирующая сила) (в кг), встречаемая массой при движении ее с линейной скоростью в 1 см/сек;

r — радиус приведения массы, равный радиусу кривошипа.

Работа, поглощаемая этой демпфирующей силой P за цикл колебания:

³⁰ См. его работу, указанную в сноске 25.

$$A_r = \int_{t=0}^T P \cdot r \cdot d\varphi_i = \pi r^2 k_1 \cdot \dot{\varphi}_i^2_{abc} \cdot \omega, \quad (42)$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Полная работа демпфирующих сил во всем двигателе, т. е. в m цилиндрах за цикл колебания:

$$A_r = \sum \pi r^2 k_1 \cdot \varphi_i^2_{abc} \cdot \omega,$$

или, как и ранее, введя относительные амплитуды φ_i колебания масс двигателя:

$$A_r = \pi r^2 k_1 \omega \cdot \varphi_{1abc}^2 \cdot \sum \varphi_i^2. \quad (43)$$

Таким образом, работа, поглощаемая скоростными демпфирующими силами³¹ в двигателе, за один цикл колебания, растет пропорционально квадрату амплитуды колебания первой массы, т. е. значительно быстрее, чем работа возбуждающих моментов, определяемая формулой (41).

Приравнявая правые части формул (41) и (43) для $A_{возб}$ и A_r ,

$$\pi M \cdot \varphi_{1abc} \cdot \sum \varphi_i = \pi r^2 \cdot k_1 \cdot \omega \cdot \varphi_{1abc}^2 \cdot \sum \varphi_i^2, \quad (44)$$

получаем отсюда выражение для максимальной величины амплитуды вынужденных резонансных колебаний первой массы двигателя, создаваемой резонирующими гармониками M :

$$\varphi_{1abc} = \frac{M \sum \varphi_i}{r^2 k_1 \omega \sum \varphi_i^2} \quad (45)$$

Очевидно, что на фиг. 8 φ_{1abc} определится как абсцисса точки пересечения кривой A_r с прямой $A_{возб}$, так как φ_{1abc} по формуле (45) соответствует установившемуся резонансному колебательному процессу.

Обозначая:

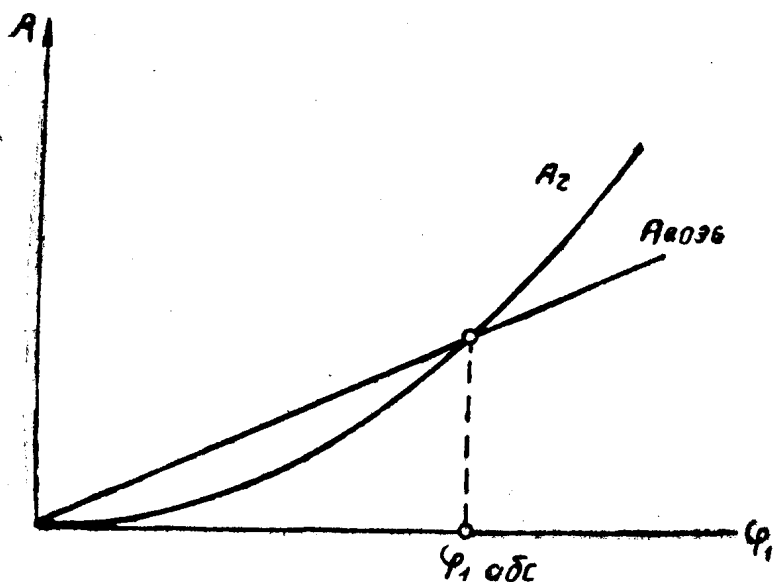
$$k_1 = k \cdot F, \quad (46)$$

где F — площадь поршня (в $см^2$) и выражая M через гармонический коэффициент C_n по формуле (7), можно записать окончательное выражение для φ_{1abc} в следующем виде:

³¹ Т. е. силами сопротивлений, пропорциональными скорости колебательного движения масс.

$$\varphi_{1 \text{ abs}} = \frac{C h \cdot \sum \varphi_i}{k g \omega \cdot \sum \varphi_i^2} \quad (47)$$

Здесь $\sum^2 \varphi_i$ — арифметическая сумма квадратов относительных амплитуд всех масс двигателя, т. е. только тех масс уста-



Фиг. 8

новки, на которые предполагаются действующими скоростные демпфирующие силы. В судовых установках, наряду с демпфирующими силами в двигателе, необходимо учесть дополнительные сопротивления, возникающие при колебательном движении гребного винта. В этом случае в правую часть уравнения (44) следует

добавить работу, поглощаемую демпфирующими силами на винте ³². В соответствии с этим изменится, конечно, и формула (47). Аналогичным образом могут быть учтены скоростные сопротивления в динамомашинах и т. п.

Коэффициент k , входящий в формулу (47) и определяемый, согласно формуле (46), выражением:

$$k = \frac{k_1}{F} \text{ кг сек/см}^3, \quad (48)$$

представляет собою силу сопротивления (в кг), встречаемую колеблющейся массой шатунно-кривошипного механизма цилиндра двигателя, приведенной к радиусу кривошипа, при колебательном движении ее со скоростью 1 см/сек, отнесенную к 1 см² площади поршня.

На основании опытов ряда экспериментаторов, коэффициент k имеет следующие значения:

для тяжелых (нефтяных) двигателей ³³:

$$k = 0,005 - 0,006 \text{ кг сек/см}^3;$$

³² О методике определения демпфирующих сил на гребном винте см. F. Lewis, «Trans. Soc. Nav. Arch. and Mar. Eng.», 1925; F. Porter, «Trans. A. S. M. E.», Vol. 50.

³³ H. Wydler, op. cit., s. 55

для автомобильных двигателей: ³⁴

$$k = 0,0025 \text{ кг сек/см}^3;$$

для авиомоторов: ³⁵

$$k = 0,001 — 0,002 \text{ кг сек/см}^3;$$

для таких же авиомоторов Манца (Manza) ³⁶ получил:

$$k = 0,00035 — 0,00055 \text{ кг сек/см}^3.$$

Формула (45) дает действительную амплитуду суммарных вынужденных колебаний первой массы двигателя, создаваемых одновременным действием всех резонирующих гармоник данного порядка, на все, соответственно, кривошины коленчатого вала.

Для определения абсолютных амплитуд резонансных колебаний всех остальных масс установки необходимо их относительные амплитуды φ_i умножить на $\varphi_I \text{ абс.}$ Величины φ_i подсчитываются по формулам (11). Относительные же амплитуды колебания маховиков могут быть найдены следующим образом.

При свободных колебаниях системы двигатель—маховик (см. фиг. 2):

$$\sum_1^m \theta \omega_0^2 \varphi_i + \theta_I \omega_0^2 \cdot \varphi_I = 0,$$

отсюда

$$\varphi_I = - \frac{1}{\alpha_I} \sum_1^m \varphi_i, \quad (49)$$

где $\alpha_I = \frac{\theta_I}{\theta};$

$\sum_1^m \varphi_i$ — алгебраическая сумма относительных амплитуд

всех масс двигателя.

³⁴ I. Plünzke, Drehschwingungen des Automobilmotors, Motorwagen, 1926.

³⁵ A. Stieglitz, Drehschwingungen in Reihenmotoren, Luftfahrtforschung, s. 133, 1929, имеется русский перевод этой статьи в сборнике переводных работ «Крутильные колебания коленчатых валов», изд. ВВА РККА, 1935.

³⁶ I. Manza, Die Bestimmung der Dämpfung von Drehschwingungen einer Flugmotorenkurbelwelle. Diss. T. H. Karlsruhe, 1933.

Аналогично в установке двигатель — маховик — динамо (см. фиг. 3):

$$\sum_1^m \theta \omega_0^2 \varphi_i + \theta_I \omega_0^2 \varphi_I + \theta_{II} \omega_0^2 \varphi_{II} = 0,$$

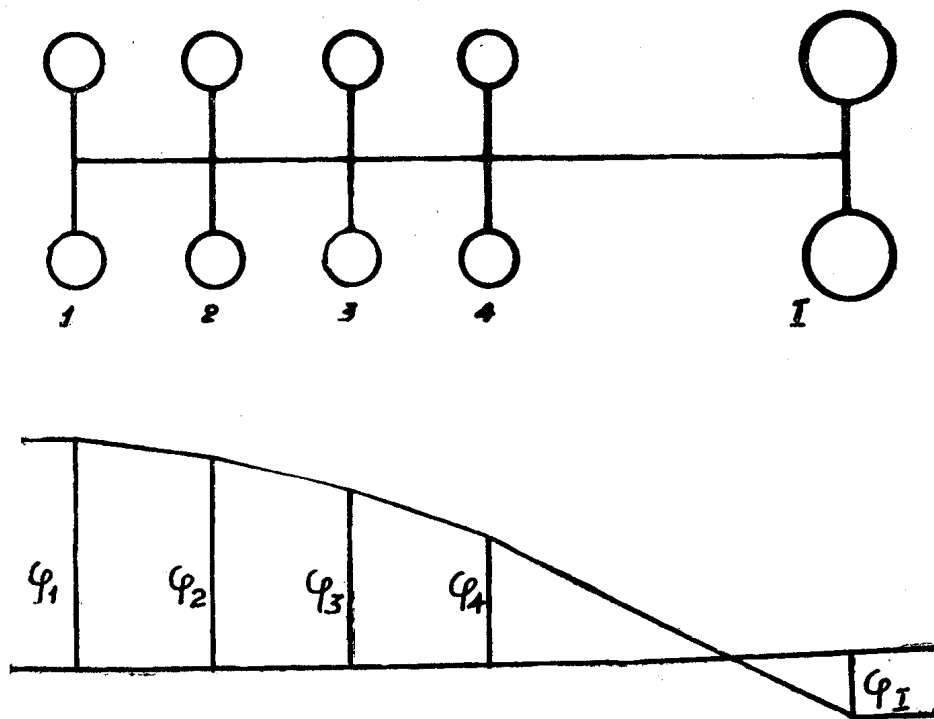
или

$$\varphi_{II} = - \frac{\sum_1^m \varphi_i + \alpha_I \varphi_I}{\alpha_{II}}, \quad (50)$$

где $\alpha_{II} = \frac{\theta_{II}}{\theta}$.

Входящее в формулу (50) значение φ_I определяется по формуле (12).

По относительным амплитудам φ_i , φ_I , φ_{II} , определяемым формулами (11), (49), (12) и (50), можно построить обычную кривую формы свободных колебаний исследуемой приведенной системы (фиг. 9).



Фиг. 9

Теперь абсолютные величины амплитуд вынужденных резонансных колебаний маховика или ротора динамо:

$$\varphi_{I abc} = \varphi_I \cdot \varphi_{1 abc} = -\frac{1}{\alpha_I} \varphi_{1 abc} \cdot \sum_1^m \varphi_i, \quad (51)$$

$$\varphi_{II abc} = \varphi_{II} \cdot \varphi_{1 abc} = -\frac{1}{\alpha_{II}} \varphi_{1 abc} \cdot \left(\sum_1^m \varphi_i + \alpha_I \varphi_I \right), \quad (52)$$

и уравнения их движения:

$$(\varphi_I abc) = \varphi_{I abc} \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma_0), \quad (53)$$

$$(\varphi_{II}) = \varphi_{II abc} \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma_0), \quad (54)$$

при чем фазовый угол γ_0 находится из построения по фиг. 7.

Исследования Шэннона (F. Shannon)³⁷. Шэннон, на основании экспериментов с автомобильным двигателем, работающим вхолостую и приводимым в действие от электромотора, а также на основании обработки данных других исследователей, вводит понятие о безразмерном коэффициенте демпфирования (non-dimensionale damping factor):

$$\frac{\theta \omega_0}{k_0},$$

где k_0 — коэффициент демпфирования в кг. см на 1 сек⁻¹ угловой скорости колебательного движения (vibrational velocity) массы;

θ — момент инерции приведенной массы шатунно-кривошипного механизма одного цилиндра;

ω_0 — угловая скорость собственных колебаний валопровода.

Коэффициент k_0 , например, для простейшей одномассовой системы (фиг. 10) входит в основное уравнение вынужденных колебаний:

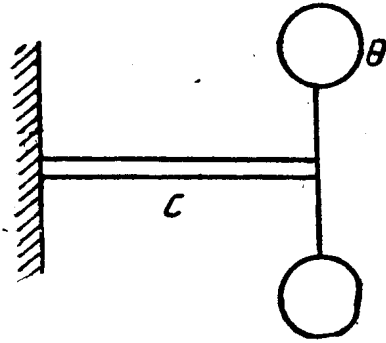
$$\theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k_0 \frac{d \varphi}{dt} + c \varphi = M \cdot \sin \omega t,$$

т. е. k_0 представляет собою момент демпфирующих сил в цилиндре двигателя, действующий на приведенную массу механизма цилиндра при скорости ее колебательного движения в 1 сек⁻¹.

По опытам Шэннона величина безразмерного коэффициента демпфирования $\frac{\theta \omega_0}{k_0}$ зависит от характера кривой формы сво-

³⁷ F. Shannon, Damping influences in torsional oscillation, «Engineering», 1935, p. 675, 702.

бодных колебаний валопровода. Фактором, оценивающим характер этой кривой, может служить средняя относительная амплитуда:



Фиг. 10

$$\varphi_{cp} = \frac{\sum_1^m \varphi_i}{m} \quad (55)$$

свободных колебаний масс двигателя, где m — число цилиндров двигателя, а

$\sum_1^m \varphi_i$ — алгебраическая сумма относительных амплитуд.

Величина φ_{cp} , в зависимости от конкретных свойств упругой колеблющейся системы, может иметь любое значение в пределах от 0 до 1:

при расположении угла колебания далеко вне двигателя:

$$\varphi_{cp} = \frac{\sum_1^m \varphi_i}{m} \cong 1;$$

если же узел колебания находится точно по середине двигателя, то:

$$\varphi_{cp} = \frac{\sum_1^m \varphi_i}{m} = 0$$

В первом случае все массы двигателя колеблются вместе, как одно целое, во втором — направление колебательного движения половины масс двигателя в каждый момент времени противоположно направлению движения второй половины их.

Графическую зависимость между $\frac{\theta\omega_0}{k_0}$ и $\frac{\sum_1^m \varphi_i}{m}$, полученную

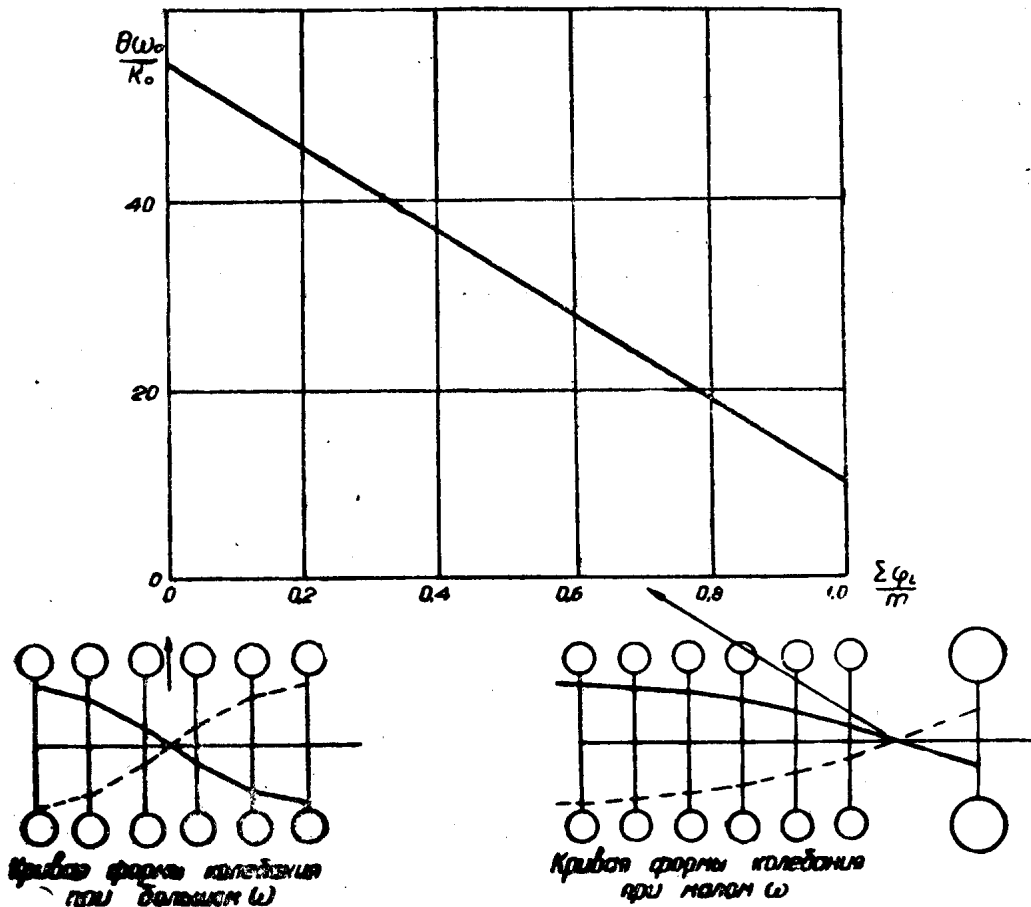
Шэнноном (Фиг. 11), можно представить следующим уравнением:

$$\frac{\theta\omega_0}{k_0} = 55 - 45 \frac{\sum_1^m \varphi_i}{m}.$$

Отсюда коэффициент демпфирования

$$k_0 = \frac{\theta \omega_0}{m \sum_{i=1}^n \varphi_i} \quad (56)$$

Коэффициенты k_0 по Шэннону и k по Видлеру, очевидно, тесно связаны между собою, так как оба характеризуют демпфирующие силы в двигателе, пропорциональные скорости колебательного движения.



Фиг. 11

Момент демпфирующих сил, действующих на приведенную массу одного цилиндра, по Шэннону:

$$M_r = k_0 \frac{d\varphi}{dt}$$

по Видлеру:

$$M_r = kFr^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Из необходимого равенства обоих этих моментов имеем:

$$k = \frac{k_0}{Fr^2}, \quad (57)$$

или, на основании формулы (56), окончательно:

$$k = \frac{\theta \omega_0}{F r^2} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^m \varphi_i} \quad (58)$$

Отношение $\frac{\theta}{r^2} = m_{red}$ есть масса механизма одного цилиндра, приведенная к радиусу кривошипа, следовательно,

$$k = m_{red} \cdot \omega_0 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^m \varphi_i} \quad (59)$$

т. е. коэффициент демпфирования k по Видлеру, согласно опытам Шэннона, зависит от приведенной массы m_{red} механизма цилиндра, отнесенной к площади F поршня, угловой скорости собственных колебаний системы и средней относительной амплитуды колебаний масс двигателя.

Степень точности своей зависимости (см. фиг. 11) Шэннон оценивает в $\pm 15\%$.

Теория Льюиса (F. Lewis)³⁸. По Льюису, важнейшей причиной затухания вынужденных крутильных колебаний следует считать упругий гистерезис в валу.

Упругий гистерезис характеризуется потерей энергии в металле во время циклического изменения напряжения в нем ниже предела упругости. Это поглощение энергии обуславливается несовершенной упругостью металла. Вследствие отклонения каждого металла от закона Гука кривая деформаций и напряжений в стержне, подвергаемом, например, знакопеременному скручиванию, превращается в замкнутую петлю³⁹. Площадь этой гисте-

³⁸ См. его работу, указанную в сноске 32.

³⁹ Исследованию упругого гистерезиса в металле посвящена довольно большая литература, см. например;

W. Thomson (Kelvin), «Proc. of Roy. Soc. of London», Vol. 14 (1865), p. 289.

M. Guye, «Journal de Physique», 1912, p. 620.

B. Hopkinson and F. Williams, «Proc. of Roy. Soc. of London», Vol. 87 (1912), p. 502.

O. Föppl, «Z. d. V. D. I.» 1928, s. 1293.

H. Kortum, «Z. d. V. D. I.», 1930, s. 1426.

P. Ludwik u. R. Scheu, «Z. d. V. D. I.», 1932, s. 683.

A. Appenrodt, «Z. d. V. D. I.» 1936, s. 517.

О. Фөппль, Беккер, Гейдекамф, Длительное испытание материалов. ОНТИ, 1935.

O. Föppl, Grundzüge der technischen Schwingungslehre, Berlin 1931.

резисной петли определяет энергию, поглощаемую металлом за цикл изменения нагрузки.

Для подсчета гистерезисной потери в валу силовой установки при крутильных его колебаниях, Льюис использует опытные данные, полученные Рауэтт (F. Rowett).⁴⁰

Рауэтт определял гистерезисную потерю при крутильных колебаниях тонкостенных цельнотянутых труб, изготовленных из простой углеродистой стали, имеющей состав: С — 0,17%; Мп — 0,24%; S — 0,02%; Р — следы, и временное сопротивление на растяжение (в отожженном состоянии)

$$\sigma_B = 22,4 \text{ т/дм}^2.$$

Обработкой данных Рауэтта Льюис получил следующее выражение для энергии ΔA_h , поглощаемой единицей объема металла тонкостенной трубы за один цикл колебания:

$$\Delta A_h = 1,37 \cdot 10^{-10} \cdot \tau_{\max}^{2,3} \text{ фун. дм/дм}^3, \quad (60)$$

где τ_{\max} — максимальное напряжение скручивания в трубе в фун/дм². Пересчет этой формулы в метрические меры дает:

$$\Delta A_h = 43,3 \cdot 10^{-10} \cdot \tau_{\max}^{2,3} \text{ кг см/см}^3, \quad (61)$$

где τ_{\max} в кг/см².

Формулы (60) и (61) справедливы лишь для

$$\tau_{\max} < 8000 \text{ фун./дм}^3. (562 \text{ кг/см}^2).$$

При более высоких напряжениях τ_{\max} гистерезисная потеря растет значительно быстрее, нежели это устанавливается показателем степени 2,3.

При подсчете гистерезисной потери в сплошном валу или в полом, но с большой толщиной стенок, необходимо учесть переменность τ_{\max} по его поперечному сечению.

Выделим из толстостенного полого вала с внутренним диаметром d_i и наружным диаметром d_a , длиной l коаксиальный цилиндр радиусом ρ и с толщиной стенки $d\rho$. Напряжение скручивания (максимальное за время цикла колебания) в поперечном сечении этого цилиндра:

$$\tau'_{\max} = \tau_{\max} \cdot \frac{2\rho}{d_a},$$

где τ_{\max} — максимальное, за цикл колебания, напряжение в крайних волокнах вала. Гистерезисная потеря в выделенном элементарном цилиндре:

⁴⁰ F. Rowett, Elastic hysteresis in steel. «Proc. of Roy. Soc. of London», Vol. 88, p. 528.

$$dA_h = 43,3 \cdot 10^{-10} \cdot (\tau'_{\max})^{2,3} \cdot dV = \\ = 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot l \cdot 43,3 \cdot 10^{-10} \cdot \left(\tau_{\max} \cdot \frac{2\rho}{d_a} \right)^{2,3},$$

и полная гистерезисная потеря во всем валу за один цикл колебания:

$$A_h = \int_{d_i/2}^{d_a/2} 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot l \cdot 43,3 \cdot 10^{-10} \cdot \left(\tau_{\max} \cdot \frac{2\rho}{d_a} \right)^{2,3} = \\ = 15,85 \cdot 10^{-10} \cdot \tau_{\max}^{2,3} \cdot (1 - \psi^{4,3}) \cdot d_a^2 \cdot l \text{ кг см}, \quad (62)$$

где

$$\psi = \frac{d_i}{d_a}. \quad (63)$$

Если обозначить:

$$k_h = 15,85 \cdot \tau_{\max}^{2,3} \cdot (1 - \psi^{4,3}) \text{ кг см/см}^3, \quad (64)$$

то формулу (62) можно написать в виде:

$$A_h = k_h \cdot d_a^2 \cdot l. \quad (65)$$

Гистерезисная потеря в валу всей установки:

$$A_h = \sum k_h \cdot d_a^2 l, \quad (66)$$

где k_h , d_a и l — различны для каждого из участков вала. Гистерезисную потерю в коленчатом валу двигателя, вследствие отсутствия необходимых экспериментальных данных, приходится считать равной потере в гладком приведенном валу, имеющем тот же наружный диаметр, что и коренные шейки колена.

Максимальное напряжение скручивания τ_{\max} в формулах (62), (64), (66) определяется по обычной формуле, отдельно для каждого цилиндрического участка вала установки:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_p} = \frac{16 M_{\max}}{\pi d_a^3 (1 - \psi^4)}, \quad (67)$$

где W_p — полярный момент сопротивления поперечного сечения вала.

Максимальный момент M_{\max} , возникающий за счет крутильных колебаний и скручивающий вал на участке между массами i и $i+1$:

$$M_{\max} = (\varphi_{i+1 \text{ abc}} - \varphi_{i \text{ abc}}) \cdot c_{i,i+1}, \quad (68)$$

где $c_{i,i+1}$ — жесткость участка вала между этими массами.

Теперь:

$$\tau_{\max} = \frac{(\varphi_{i+1 abc} - \varphi_{i abc}) \cdot c_{i, i+1}}{W_p},$$

и полная гистерезисная потеря в валу установки за цикл вынужденных колебаний:

$$A_h = 15,85 \cdot 10^{-10} \cdot \sum \left[\frac{(\varphi_{i+1 abc} - \varphi_{i abc}) \cdot c_{i, i+1}}{W_p} \right]^{2,3} \times \\ \times (1 - \psi^{4,3}) \cdot d_a^2 \cdot l, \quad (69)$$

или, если ввести относительные амплитуды колебания φ_i :

$$A_h = 15,85 \cdot 10^{-10} \cdot \varphi_1^{2,3} \cdot \sum \left[\frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i) c_{i, i+1}}{W_p} \right]^{2,3} \times \\ \times (1 - \psi^{4,3}) \cdot d_a^2 l \text{ кг/см.} \quad (70)$$

Отсюда следует, что полная гистерезисная потеря A_h пропорциональна абсолютной амплитуде колебания первой массы φ_{1abc} в степени 2,3, т. е. в общем виде:

$$A_h = a \cdot \varphi_1^{2,3}, \quad (71)$$

где

$$a = 15,85 \cdot 10^{-10} \cdot \sum \left[\frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \cdot c_{i, i+1}}{W_p} \right]^{2,3} \times \\ \times (1 - \psi^{4,3}) \cdot d_a^2 \cdot l. \quad (72)$$

Величины относительных амплитуд φ_i всех масс установки, входящие в выражение (72), известны из предыдущего (см. выше расчет по Видлеру). Но подсчет величины a по формуле (72) для этих φ_i , т. е. в предположении $\varphi_1 = 1$ радиан, приводит к крайне большим значениям τ_{\max} , неудобным для практических вычислений. Поэтому целесообразнее принять здесь.

$$\varphi_1 = \xi \text{ радиан,}$$

где ξ — достаточно малая величина, например равная 1/100 радиана. Тогда получим новые значения относительных амплитуд колебания всех масс, при $\varphi_1 = \xi$: для второй массы — $\xi\varphi_2$, для третьей массы — $\xi\varphi_3$ и вообще для i -й массы — $\xi\varphi_i$.

При таких амплитудах гистерезисная потеря в валу, на основании формулы (69), будет равна:

$$A_{h, \xi} = 15,85 \cdot 10^{-10} \cdot \sum \left[\frac{(\xi \varphi_{i+1} - \xi \varphi_i) \cdot c_{i, i+1}}{W_p} \right] \times \\ \times \left(1 - \psi^{4,3} \right) \cdot d_a^2 \cdot l \quad (73)$$

Числовой подсчет $A_{h, \xi}$ по этой формуле в каждом отдельном конкретном случае не представляет затруднений.

На основании формулы (70) $A_{h, \xi}$, и A_h связаны соотношением:

$$\frac{A_{h, \xi}}{A_h} = \left(\frac{\xi}{\varphi_{1abc}} \right)^{2,3}, \quad (74)$$

или

$$A_h = A_{h, \xi} \cdot \left(\frac{\varphi_{1abc}}{\xi} \right)^{2,3}. \quad (75)$$

Для определения наибольшей величины вынужденных колебаний φ_1 первой массы упругой системы при установившемся резонансе, необходимо приравнять работу возбуждающих моментов за цикл колебания работе, поглощаемой упругим гистерезисом:

$$A_{возб} = A_h,$$

или, по формулам (41) и (75),

$$\pi M \cdot \varphi_{1abc} \cdot \sum \overrightarrow{\varphi_i} = A_{h, \xi} \cdot \left(\frac{\varphi_{1abc}}{\xi} \right)^{2,3},$$

где, согласно формуле (7),

$$M = C_h \cdot F \cdot r.$$

Отсюда

$$\varphi_{1abc} = \sqrt[1,3]{ \frac{\pi M \cdot \sum \overrightarrow{\varphi_i} \cdot \xi^{2,3}}{A_{h, \xi}} } \text{ радиан.} \quad (76)$$

Действительные амплитуды резонансных колебаний всех остальных масс установки, в частности маховиков, так же, как и выше, при расчете по Видлеру, определяются умножением их относительных амплитуд на φ_{1abc} , подсчитанное по формуле (76).

Вынужденные резонансные колебания всех масс отстают на 90° или 270° (в зависимости от знака соответствующего φ_{iabc})

от вектора $\sum \overrightarrow{\varphi_i}$, построенного в фазовой диаграмме возбуждающих резонирующих гармоник крутящего момента (см. фиг. 7).

Исследования Дорей (Dorey) ⁴¹. Данные Рауэтта, используемые Льюисом при расчетах вынужденных крутильных колебаний и лежащие в основе формул (60) и следующих, получены из опытов лишь с одной маркой малоуглеродистой стали и, конечно, не могут иметь универсального значения для всех тех сталей, которые применяются в настоящее время для изготовления коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания и вообще главных валов силовых установок.

Большим шагом вперед в деле исследования гистерезисных потерь в валах из современных марок стали является работа Дорей.

Табл. 1 и 2 дают соответственно общую характеристику и химический состав испытанных Дореем сталей. (В последнем столбце табл. 1 мы приводим примерные, эквивалентные по химическому составу, марки сталей по классификациям SAE и ОСТ 7123—7124).

Таблица 1

Наименование стали	Обозначение стали (по Дорей)	Примерные эквивалентные (по химическому составу) марки сталей по классификации SAE и ОСТ 7123—7124
Углеродистая	A	1020—1120 SAE; 20 ОСТ
»	B	1030 SAE; 30 ОСТ
Никелевая (3-проц.) .	C	2230 SAE —
Хромо-никелевая . . .	D	2435 SAE; 20ХН3ОСТ
Хромо-ванадиевая . .	E	6145 SAE —

Таблица 2

Обозначения стали (по Дорей)	Химический состав (в процентах)							
	C	Mn	Si	S	P	Ni	Cr	Va
A	0,21	0,66	0,17	0,026	0,021	0,05	—	—
B	0,30	0,63	0,31	0,031	0,019	0,12	—	—
C	0,28	0,59	0,20	0,007	0,013	3,17	—	—
D	0,31	0,54	0,29	0,014	0,016	3,42	0,85	—
E	0,45	0,71	0,28	0,009	0,017	0,36	1,38	0,17

⁴¹ S. Dorey, Elastic hysteresis in crank — shaft steel, «Proc. of the Inst. of Mech. Engineers, London», Vol. 123 (1932), p. 479.

Термическая обработка сталей:

А и В — Обычная нормализация для стальных поковок при 850°;

С — Закалка в масле, 850°; отпуск 610°, охлаждение на воздухе;

Д — закалка в масле, 830°; отпуск 610°, охлаждение в воде;

Е — закалка в масле, 850°; отпуск 710°, охлаждение в воздухе.

Механические характеристики сталей при статических испытаниях на растяжение даны в табл. 3.

Таблица 3

Механические характеристики	Обозначения сталей (по Дорей)				
	А	В	С	Д	Е
Предел пропорциональности σ_p (в кг/см ²)	2360	2600	1490	3780	4880
Предел текучести σ_s (в кг/см ²)	2570	3230	5300	8160	7940
Временное сопротивление σ_B (в кг/см ²)	4690	5890	7380	9480	8480
Удлинение (в %)	42,0	33,0	27,5	23,5	26,0

В результате своих опытов Дорей приходит к следующим заключениям.

Все исследованные стали имеют критическую точку (критическое напряжение τ_c), за которой гистерезисная потеря в металле очень быстро возрастает. Для углеродистых сталей А и В τ_c примерно на 10—15% ниже предела выносливости металла на знакопеременное скручивание и для всех случаев практики может быть принято равным 0,2 σ_B . Для следующих классов сталей τ_c примерно равно пределу выносливости металла на знакопеременное скручивание.

Потеря энергии на гистерезис за цикл колебания при любом диапазоне напряжений зависит от предыдущей истории металла. Если металл подвергался ранее циклическим напряжениям ниже τ_c , то потеря энергии при последующих нагрузках с меньшим напряжением остается такой же, как и для нового металла. Такой случай нагрузки Дорей называет первичным (primary). Если же металл подвергался ранее напряжениям большим, чем τ_c , то потеря энергии в нем за цикл колебания при напряжениях меньших, чем τ_c , получается большей, чем для нового металла. Этот случай нагрузки может быть назван вторичным (secondary).

Величина гистерезисной потери почти совершенно не зависит от скорости вибраций, что подтверждается также опытами Гопкинсона (Hopkinson), Рауэтта, Фепля (Förpl), Баккера (Bakker) и др.

Согласно Дорею, гистерезисная потеря в валу за один цикл колебания, отнесенная к единице объема вала, может быть определена выражением (в наших обозначениях):

$$\Delta A_h = a_h \cdot \left(\frac{\tau_{\max}}{\tau_c} \right)^2, \quad (77)$$

где ΔA_h — энергия гистерезиса (в кг см/см³);

a_h — константа гистерезиса;

q — гистерезисный показатель;

τ_{\max} — максимальное напряжение скручивания в валу во время колебания (в кг/см²);

τ_c — критическое напряжение (в кг/см²).

Значения q , а также a_h и τ_c , перечисленные нами для метрической системы, приведены в табл. 4.

Таблица 4

Обозначения стали (по Дорею)	Первичный случай нагрузки			Вторичный случай нагрузки			Критическое напряжение τ_c (в кг/см ²)
	a_h	q		a_h	q		
		при $\tau < \tau_c$	при $\tau > \tau_c$		при $\tau < \tau_c$	при $\tau > \tau_c$	
A	$12,7 \cdot 10^{-3}$	2,8	10,0	$52,1 \cdot 10^{-3}$	3,2	6,6	945
B	$12,0 \cdot 10^{-3}$	3,0	10,5	$62,6 \cdot 10^{-3}$	3,5	6,7	1100
C	$51,4 \cdot 10^{-3}$	3,2	10,5	$218,1 \cdot 10^{-3}$	3,5	6,7	1860
D	$25,3 \cdot 10^{-3}$	2,7	9,0	$56,3 \cdot 10^{-3}$	2,8	6,5	2330
E	$7,5 \cdot 10^{-3}$	2,8	10,5	$67,5 \cdot 10^{-3}$	3,2	6,4	1730

Табл. 4 показывает, что стали с высоким пределом упругости имеют малые гистерезисные потери. Но демпфирующая способность стали является той существенной ее характеристикой, которую необходимо учитывать при выборе материала для колебчатого вала. С этой точки зрения сталь с большим поглощением энергии за счет упругого гистерезиса особенно пригодна для

валов тех двигателей, которые в период пуска должны проходить через ряд сильных критических скоростей. В этих случаях стали А, В и С значительно выгоднее, нежели стали D и E.

Пользуясь выражением (77) и повторяя выводы формулы (62), можно получить следующую формулу для гистерезисной потери в полом цилиндрическом валу с диаметрами d_a и d_i и длиной l , за один цикл колебания:

$$A_h = \frac{\pi}{2(q+2)} \cdot a_h \cdot \left(\frac{\tau_{\max}}{\tau_c} \right)^2 \cdot \left(1 - \psi^{q+2} \right) \cdot d_a^2 l, \quad (78)$$

или, как и ранее,

$$A_h = k_h \cdot d_a^2 l,$$

где

$$k_h = \frac{\pi}{2(q+2)} \cdot a_h \cdot \left(\frac{\tau_{\max}}{\tau_c} \right)^2 \left(1 - \psi^{q+2} \right)$$

и

$$\psi = \frac{d_i}{d_a}.$$

Полная гистерезисная потеря в валу силовой установки за цикл колебания при резонансе, при амплитуде колебания первой массы $\varphi_1 = \xi$, определится теперь, подобно формуле (73), выражением:

$$\begin{aligned} A_{h,\xi} &= \sum k_h \cdot d_a^2 l = \\ &= \sum \frac{\pi}{2(q+2)} \cdot a_h \cdot \left[\frac{(\xi \varphi_{i+1} - \xi \varphi_i) \cdot c_{i,i+1}}{W_p \cdot \tau_c} \right]^2 \cdot \\ &\quad \cdot \left(1 - \psi^{q+2} \right) \cdot d_a^2 l \end{aligned} \quad (79)$$

и аналогично формуле (75):

$$A_h = A_{h\xi} \cdot \left(\frac{\xi}{\varphi_{1abc}} \right)^2,$$

где A_h — действительная гистерезисная потеря в валу при амплитуде колебания φ_{1abc} первой массы.

Наконец, из равенства работ возбуждающих моментов и демпфирующих сил, пользуясь формулами (41) и (79), получаем окончательную расчетную формулу для действительной резонансной амплитуды колебания первой массы двигателя:

$$\varphi_{1abc} = \sqrt[q-1]{\frac{\pi M \sum_{h,\xi} \vec{\varphi}_i \cdot \xi^2}{A_{h,\xi}}} \quad (80)$$

при учете гистерезисных потерь по данным Дорей. Эта формула аналогична формуле (76).

Действительные резонансные амплитуды вынужденных колебаний всех остальных масс установки определяются теперь совершенно так же, как при расчете по Видлеру и Льюису (см. выше).

При вычислении гистерезисной потери в валу по формуле (79), следует всегда, в нормальных условиях, предполагать случай первичной нагрузки при $\tau_{\max} < \tau_c$, так как условия прочности вала не позволяют допускать в нем слишком больших дополнительных напряжений от крутильных колебаний.

Общая характеристика методов Видлера, Льюиса и др. В настоящее время еще не имеется всех необходимых данных для совершенно надежного подсчета амплитуд вынужденных колебаний при резонансе, а следовательно, и для вполне безупречного построения теоретических торсиограмм для вала двигателя, работающего на одной из своих критических скоростей.

В основе всех рассмотренных выше методов определения резонансных амплитуд лежат прежде всего следующие допущения:

1) кривая формы вынужденных колебаний системы при резонансе совпадает с кривой формы ее собственных свободных колебаний;

2) демпфирующие силы в установке не снижают частоты собственных колебаний ее вала;

3) наибольшие амплитуды вынужденных колебаний получаются при точном совпадении частоты резонирующей гармоники крутящего момента с частотой собственных колебаний системы;

4) двигатель достаточно долго работает на критическом числе оборотов, число оборотов строго постоянно, и резонанс не сбивается.

Первое из этих допущений целиком (в пределах практической точности) подтверждается детальными исследованиями Видлера. Второе и третье допущения также вполне приемлемы во всех практических расчетах резонансных крутильных колебаний⁴². Четвертое допущение оправдывается при длительной работе двигателя на устойчивом режиме при хорошем регуляторе и постоянной нагрузке; к тому же погрешность, вводимая этим допу-

⁴² O. Föppl, Grundzüge der technischen Schwingungslehre, Berlin 1931.

F. Porter, «Trans. A. S. M. E.», Vol, 50.

щением, приводит лишь к несколько преувеличенным, против действительности, расчетным величинам резонансных амплитуд и дополнительных напряжений в валу, т. е. дает ошибку в сторону прочности вала.

Наибольшие затруднения при расчете вынужденных крутильных колебаний представляет определение величины демпфирующих сил и их характера.

Числовые значения коэффициента скоростных сопротивлений k по Видлеру, приведенные выше, не могут претендовать на достаточную точность. Опыты Гейгера (Geiger)⁴³ показали колебания величины k в исследованных им двигателях внутреннего сгорания в пределах 1 : 10. Подобное же отклонение дают и опыты Манца.

Есть основания полагать, что коэффициент k по Видлеру не является постоянной величиной для одного и того же двигателя, а меняется в зависимости от режима и условий работы силовой установки. Поэтому расчеты вынужденных колебаний по методу Видлера, при использовании значений k , постоянных для данного типа двигателя, имеют лишь относительную ценность и пригодны только для сравнительных исследований, не требующих большой точности.

Зависимость для коэффициента k , полученная Шэнноном (см. фиг. 11), обеспечивает возможность более надежного учета демпфирующих сил при определении резонансных амплитуд по методу Видлера. Обработка данных многочисленных экспериментальных исследований крутильных колебаний в установках с двигателями внутреннего сгорания, выполненная Шэнноном и приведенная в указанной выше его статье⁴⁴, подтверждает, повидимому, достаточную, в большинстве случаев, практическую точность установленной им величины безразмерного коэффициента демпфирования

$$\frac{\theta\omega_0}{k_0}$$

Расчет по теории Льюиса на основе опытов Рауэтта дает обычно несколько преувеличенные величины амплитуд вынужденных резонансных колебаний. Портер⁴⁵ указывает случаи, когда действительные амплитуды резонансных колебаний, найденные торсиографированием, составляли 0,4 от подсчитанных по Льюис — Рауэтту. Это равнозначно увеличению гистерезисной потери в 3,29 против значения ее, определяемого формулой (60).

Браун (Brown), в дискуссии по докладу Дорей⁴⁶, отмечает исследования двух судовых дизельных установок, для которых расчет

⁴³ I. Geiger, Dämpfung bei Drehschwingungen von Motoren, «Z. d. V. D. I.», 1934, s. 1353.

⁴⁴ См. сноску 37.

⁴⁵ См. сноску 42.

⁴⁶ См. сноску 41.

по Льюис — Рауэтту дал значения резонансных амплитуд, преувеличенные в 1,95—2,17 раза против действительных. На возможность аналогичных расхождений указывает Н. Урванцев ⁴⁷, отмечая, что большая разница между действительными и расчетными (по Льюис—Рауэтту) амплитудами имеет место в судовых установках с гребным винтом при двухузловых колебаниях главного вала.

Одной из причин подобной неувязки между данными расчета по Льюис—Рауэтту и результатами непосредственного торсиографирования работающей установки можно считать неточность формулы (60) для материалов современных коленчатых валов. Применение формулы Дорей для гистерезисной потери в валу (формула 77), безусловно, должно в значительной мере повысить надежность расчета резонансных амплитуд по методу Льюиса ⁴⁸. Но и в этом случае иногда возможно довольно большое расхождение между теоретическим расчетом и экспериментом ⁴⁹.

Теория Льюиса основана на учете лишь гистерезисной потери в валу. Фактически же, наряду с упругим гистерезисом, имеется целый ряд других источников появления демпфирующих сил в силовой установке.

В соответствии с Гейгером ⁵⁰ все демпфирующие силы, возникающие при крутильных колебаниях вала двигателя, можно разделить на действительные (*Wirksame Dämpfung*) и кажущиеся (*Scheinbare Dämpfung*). Действительные демпфирующие силы уменьшают амплитуды вынужденных резонансных колебаний за счет превращения работы возбуждающих гармонических моментов в тепло. Кажущееся демпфирование обуславливает уменьшение резонансных амплитуд без потери энергии (имеет место в каждом поршневом двигателе).

Приведенная масса шатунно-кривошипного механизма каждого цилиндра двигателя переменна по углу поворота кривошипа. Она достигает минимума в верхней и нижней мертвых точках, максимума — при угле поворота кривошипа в 90° и 270° ⁵¹. В соответствии с этим изменением приведенных масс в двигателе меняется и частота собственных колебаний валопровода. Поэтому теоретически полный резонанс в валу силовой установки с поршневым двигателем никогда не может быть достигнут. Постоянное нарушение резонанса ведет к уменьшению резонансных ампли-

⁴⁷ Н. Урванцев, Критические числа оборотов в дизельных установках, 1931.

⁴⁸ Заслуживающая большого внимания работа Е. Лунца «Об определении сил затухания от внутреннего трения при крутильных колебаниях металлических стержней» («Вестник металлопромышленности, 1936, № 5, 12—13, 15) требует развития особой методики подсчета резонансных амплитуд, рассмотрение которой выходит за пределы данной статьи.

⁴⁹ W. Ker. Wilson. «Engineering», 1934, p. 167.

⁵⁰ «Z. d. V. D. I.», 1934, s. 1353.

⁵¹ См. например, I. Geiger, Mechanische Schwingungen, Berlin 1927.

туд по сравнению с подсчитанными теоретически при обычном допущении неизменной величины приведенных масс двигателя.

Действительное демпфирование в двигателе обуславливается:

- 1) дополнительными силами трения на шейках коленчатого вала, возникающими при его крутильных колебаниях;
- 2) дополнительным трением в направляющих;
- 3) потерей энергии на удары в подшипниках, фланцах, муфтах, шпоночных соединениях и т. д.
- 4) передачей энергии в окружающую среду и фундамент, возникающей при вибрациях машины;
- 5) потерей энергии за счет упругого гистерезиса вала.

По опытам Гейгера, решающей является гистерезисная потеря в валу. Она составляет 62—64% всех потерь при сильных критических скоростях и 16—35% при более слабых (второстепенных) критических скоростях.

Гистерезисная потеря может быть значительно повышена (для уменьшения резонансных амплитуд и напряжений в валу) введением промежуточного вала между двигателем и генератором, если только этот вал имеет несколько меньший диаметр, чем шейки коленчатого вала. Для получения необходимого эффекта достаточна уже небольшая разница в диаметрах обоих валов, так как гистерезисная потеря по Дорю, при $\tau_{\max} < \tau_c$, примерно пропорциональна τ_{\max}^3 но τ_{\max} обратно пропорционально d^3 . Следовательно, гистерезисная потеря на единицу объема вала обратно пропорциональна примерно девятой степени d .

Дополнительная работа трения в цапфах, направляющих и т. д., обусловленная добавочными нагрузками в них, составляет, по Гейгеру, 30% всей потери при слабых (второстепенных) критических скоростях и 3—6% при сильных (главных) критических скоростях.

Кажущееся демпфирование эквивалентно потере в 20% и 6—7% соответственно при слабых и сильных критических скоростях.

Остальные, указанные выше, источники потерь в двигателе играют крайне незначительную роль.

В судовых установках весьма существенным источником потерь могут быть демпфирующие силы, действующие на гребной винт. Этой потерей можно пренебречь лишь в том случае, если узел колебания находится близко к гребному винту и амплитуды колебания последнего не велики.

Для учета работы всех демпфирующих сил в установке, Портер, в дискуссии по докладу Гартога (I. P. den Hartog)⁵², предложил формулу Льюис — Рауэтта (60), определяющую гистере-

⁵² J. P. den Hartog and J. Ormondroyd, Torsional-vibration dampers, «Trans. A.S.M.E.», Vol. 52 (1930).

зисную потерю в тонкостенном валу, отнесенную к единице его объема, заменить другой:

$$\Delta A_h = 4,5 \cdot 10^{-10} \cdot \tau_{\max}^{2,3} \text{ фун. дм/дм}^3. \quad (81)$$

Эта формула Портера в метрических мерах приобретает вид:

$$\Delta A_h = 142 \cdot 10^{-10} \cdot \tau_{\max}^{2,3} \text{ кг см/см}^3, \quad (82)$$

где τ_{\max} в кг/см^2 .

Увеличение числового коэффициента в формуле (82) по сравнению с формулой (61) должно учитывать все потери в установке (за исключением потерь на гребном винте, при сильных его колебаниях). Значение поправочного коэффициента $\frac{4,5}{1,37}$ было найдено

Портером экспериментальным путем. Сопоставление результатов расчета по формуле (81) с данными опыта, проведенное Портером для целого ряда силовых установок, подтверждает достаточную ее надежность.

Применение формулы (82), вместо формулы (61), не изменяет методики расчета по Льюису, рассмотренную выше. Достаточно только в выражении (76) увеличить $A_{h,\xi}$ в $\frac{4,5}{1,37} = 2,84$ раза. Конечно, формула Портера справедлива лишь при отсутствии зазоров в соединениях валов, муфтах и т. п.

Анализ всех изложенных выше данных о демпфирующих силах, возникающих при крутильных колебаниях валов, подчеркивает безусловную необходимость дальнейших экспериментальных работ по изучению и дифференциации источников потери энергии в колеблющейся системе.

Расчет вынужденных резонансных колебаний по Видлеру или Льюису не в силах дать совершенно надежные результаты, так как многообразие демпфирующих сил в силовой установке не может быть выражено одной формулой. Закономерности изменения сил трения в двигателе, демпфирующих сил на гребном винте и т. п. совершенно отличны от закономерностей упругого гистерезиса.

Лишь отдельный анализ всех или по крайней мере важнейших демпфирующих сил обеспечит необходимую большую точность расчетов вынужденных крутильных колебаний в валах силовых установок.

У. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ТОРСИОГРАММЫ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ НЕРАВНОМЕРНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Методика определения амплитуд вынужденных крутильных колебаний валопровода, изложенная в предыдущих разделах, обеспечивает получение всех данных, необходимых при построении теоретических торсиограмм для маховика или ротора динамо.

Теоретические торсиограммы, вычерченные, например, для ротора динамо, дают возможность:

1) определить углы отставания или опережения ротора относительно равномерного вращения;

2) построить теоретическую тахограмму, т. е. кривую действительных скоростей вращения ротора;

3) определить действительную степень неравномерности вращения ротора;

4) определить действительную величину максимальных напряжений скручивания в валу между двигателем и генератором.

Построение теоретических торсиограмм для ряда различных чисел оборотов вала позволяет установить запретные и наиболее выгодные, с динамической точки зрения, зоны рабочих скоростей двигателя.

Сопоставление теоретических торсиограмм с действительными, полученными непосредственным торсиографированием данной работающей установки, является средством контроля степени точности теоретических расчетов вынужденных крутильных колебаний.

Наконец, сопоставление и совместный анализ теоретической и действительной торсиограмм дает возможность детально изучить поведение демпфирующих сил в машине, определить конкретную их величину и исследовать зависимость их от режима работы двигателя и т. д.

Каждая теоретическая торсиограмма выстраивается для определенного числа оборотов двигателя и для определенной массы установки. Пусть n — число оборотов двигателя, при котором должна быть построена торсиограмма для маховика или ротора динамо. При этом n , как и при любом другом, истинная закономерность движения каждой массы установки характеризуется наложением на равномерное вращение вала, со средней угловой скоростью, всех тех вынужденных гармонических колебаний, которые вызываются всеми гармоническими составляющими крутящего момента.

Но для практического построения теоретической торсиограммы нет необходимости принимать во внимание очень много слагающих гармонических колебаний. Следует учесть влияние гармонических моментов главных, в особенности низших порядков, резонирующих как выше, так и ниже данного числа оборотов вала n и затем влияние второстепенных гармоник, дающих критические числа оборотов, близкие к рабочему n .

Пусть h — порядки подлежащих учету гармоник крутящего момента. Каждая из этих гармоник вызывает вынужденные крутильные колебания всего валопровода с угловой скоростью:

$$\omega = h\eta \text{ сек}^{-1}$$

и частотой:

$$N = hn.$$

Здесь $\eta = \frac{\pi n}{30}$ — угловая скорость вращения вала при заданном n .

Далее, для каждой из выбранных гармоник проводятся следующие вычисления.

Подсчитываем параметр:

$$A = \frac{\theta \omega^2}{c} = \frac{\theta (h\eta)^2}{c},$$

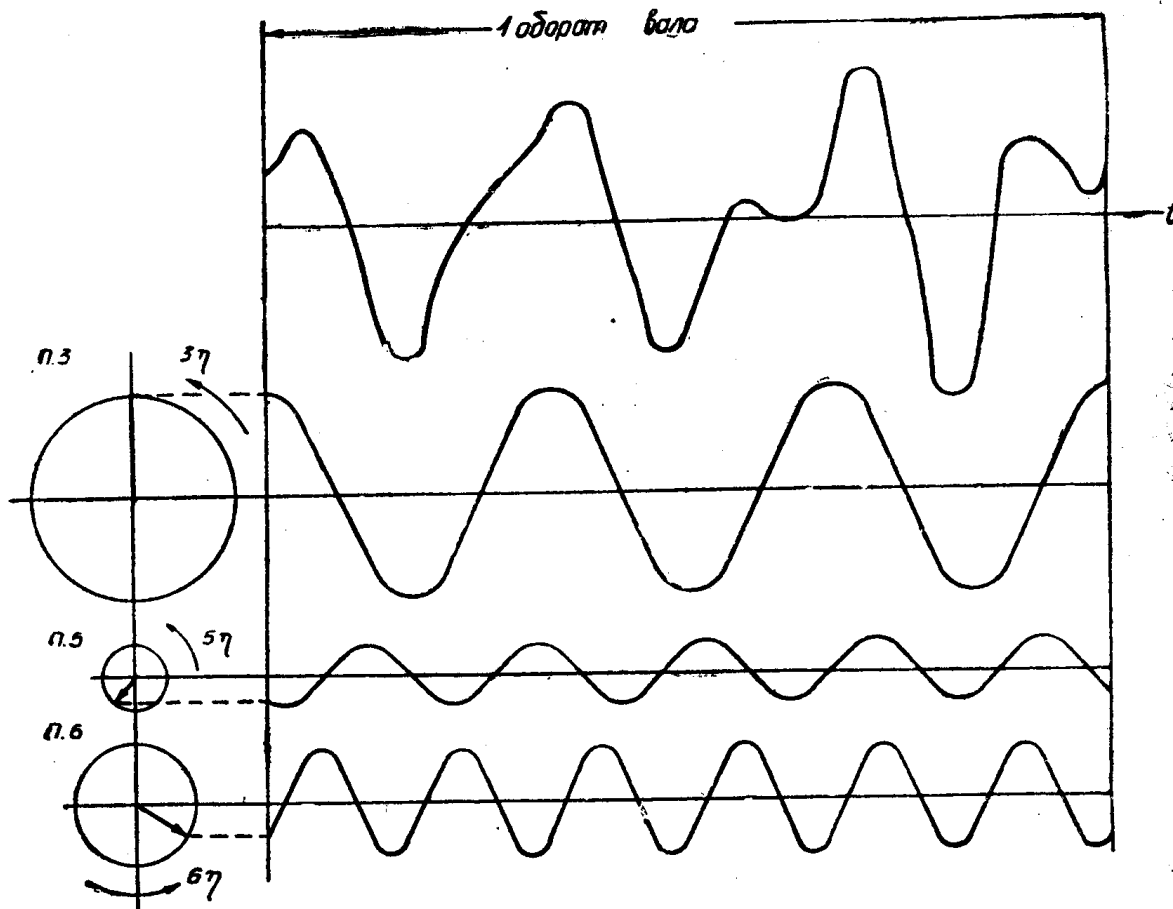
по нему, пользуясь приложенными таблицами или формулами (11), справедливыми для рядового двигателя с равномерным размещением его масс по длине коленчатого вала, находим относительные амплитуды колебания масс двигателя. Относительные амплитуды колебания масс маховика и ротора динамо подсчитываются по формулам (12) и (13) при $h\eta \neq \omega_0$ и по формулам (49), (50) — если $h\eta = \omega_0$.

Если исследуемая гармоника не является резонирующей при данном n , то по формулам (14), (15) подсчитываем R , выстраиваем фазовую диаграмму, определяем из нее $\vec{\Sigma \varphi_i}$ и угол γ и по формуле (19) находим $\varphi_{I abc}$ или $\varphi_{II abc}$. Теперь гармоническое колебательное движение маховика представляется уравнением (25).

Амплитуды колебаний, создаваемых резонирующими ($h\eta = \omega_0$) гармоническими моментами, подсчитываются по методам Видлера или Льюиса. При расчете по Видлеру целесообразно учитывать демпфирующие силы по данным Шэннова. При расчете по Льюису следует использовать данные Дорей или эмпирическую формулу Портера. Фазовый угол γ_0 резонансных колебаний находится из фазовой диаграммы, согласно указаниям, приведенным в разделе III настоящей статьи.

Подобным путем определяются амплитуды, фазовые углы и угловые скорости ($h\eta$) отдельных слагающих гармонических колебаний маховика или ротора динамо. Период каждого из этих колебаний равен продолжительности одного оборота вала, деленной на порядок вызывающих эти колебания гармонических моментов.

Построение синусоид всех подсчитанных слагающих колебаний и суммирование соответствующих их ординат дает искомым теоретическую торсиограмму для данной скорости вращения вала двигателя. Ординаты торсиограммы представляют величины углов опережения или отставания массы относительно равномерного ее вращения со средней угловой скоростью η , в каждый момент времени. На фиг. 12 показано построение торсиограммы для маховика шестицилиндрового двигателя.



Фиг. 12

Мгновенная дополнительная, налагающаяся на равномерное вращение угловая скорость, обусловленная крутильными колебаниями вала, характеризуется, очевидно, тангенсом угла наклона касательной к торсиограмме, проведенной в данной ее точке⁵³. Но построение этих касательных затруднительно и не может обеспечить необходимой точности результатов. Для анализа закономерностей изменения действительной скорости вращения маховика или ротора динамо целесообразно построить новую кривую — теоретическую тахограмму.

В общем случае движение маховика, изображаемое торсиограммой, аналитически представляется выражением:

$$\alpha_m = \eta t + \sum \varphi_{I abc} \cdot \sin(h\eta t + \gamma), \quad (83)$$

где α_m — абсолютные углы поворота маховика в каждый момент времени относительно, например, плоскости, проходящей через оси цилиндров;

η — средняя угловая скорость вращения вала;

⁵³ 1. Geiger, *Mechanische Schwingungen*, 1927.
В. Житомирский, «Изв. В. Т. И.», 1930, № 6—7.

$\varphi_{I abc}$ — амплитуды вынужденных колебательных движений маховика.

Дифференцирование формулы (83) по времени дает уравнение для действительной абсолютной угловой скорости вращения маховика:

$$\begin{aligned} \eta_m &= \frac{d \alpha_m}{dt} = \eta + \sum \varphi_{I abc} \cdot h\eta \cdot \cos(h\eta t + \gamma) = \\ &= \eta + \sum \varphi_{I abc} \cdot h\eta \cdot \sin(h\eta t + \gamma'), \end{aligned}$$

или

$$\eta_m = \eta + \sum \eta_h \cdot \sin(h\eta t + \gamma'), \quad (84)$$

где

$$\eta_h = \varphi_{I abc} \cdot h\eta \quad (85)$$

есть максимальная скорость вынужденного колебательного движения маховика, создаваемого гармоническими составляющими h -го порядка крутящего момента на валу двигателя. Эту скорость η_h не следует смешивать с угловой скоростью $h\eta$ вынужденных гармонических колебаний маховика.

В формуле (84)

$$\gamma' = \gamma + 90^\circ, \quad (86)$$

т. е. векторы η_h гармонических колебательных движений маховика опережают на 90° векторы углов отклонения $\varphi_{I abc}$, но, конечно, имеют ту же угловую скорость своего вращения и тот же период.

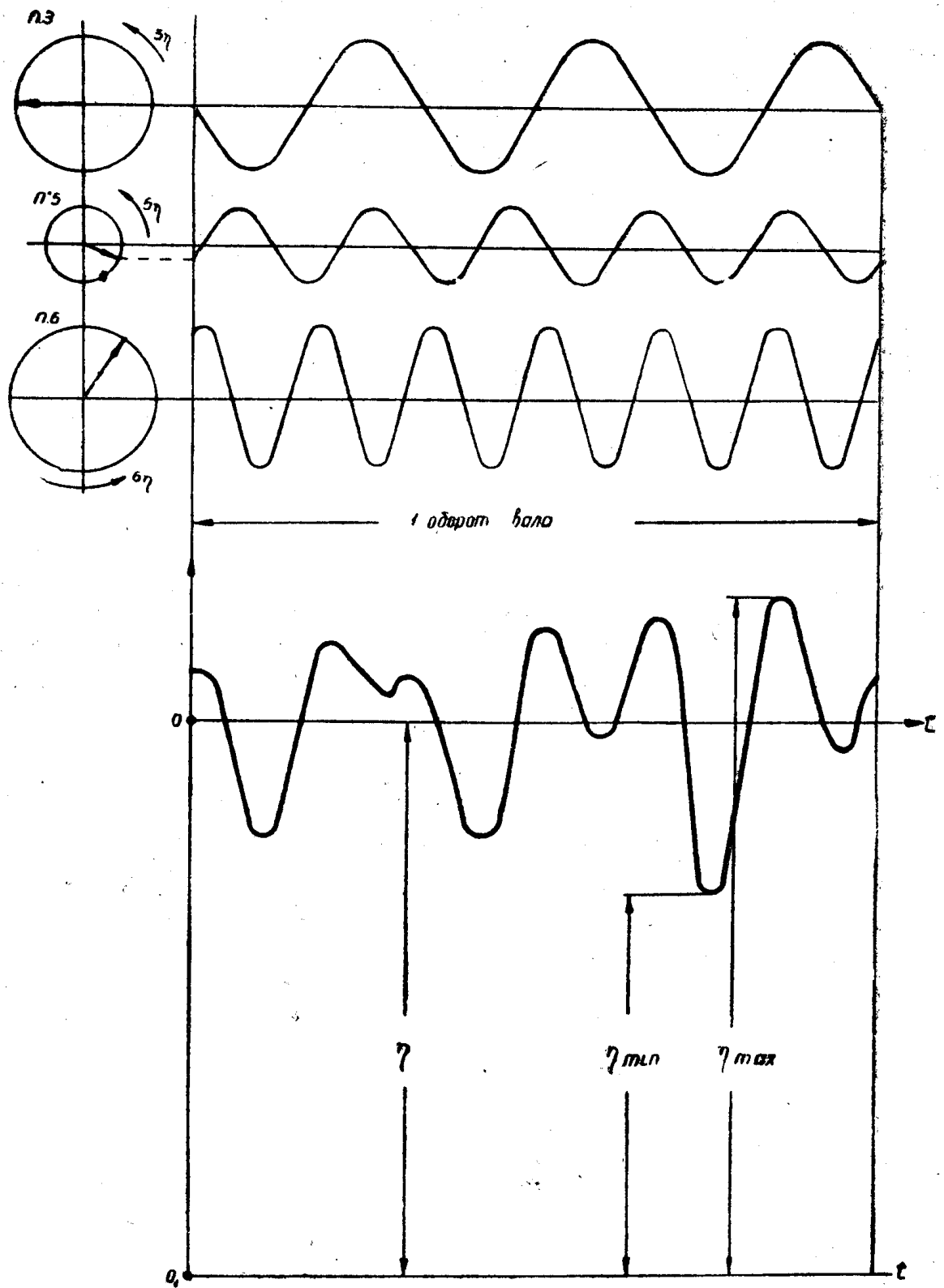
Построение всех синусоидальных кривых (с учетом их фазовых углов γ'), определяемых выражениями ⁵⁴:

$$(\eta_h) = \eta_h \cdot \sin(h\eta t + \gamma')$$

и входящих под знак суммы в формуле (84), и суммирование их ординат дает искомую теоретическую тахограмму для маховика (Фиг. 13). Совершенно подобным же образом может быть построена теоретическая тахограмма для ротора динамо, в установке по Фиг. 3.

Откладывая вниз от средней линии Ot (оси абсцисс) тахограммы среднюю угловую скорость η вращения вала, получаем новую ось O_1t — линию нулевых абсолютных скоростей вращения маховика. Ординаты тахограммы, измеренные до этой новой оси, дают абсолютную величину угловой скорости вращения махо-

⁵⁴ Здесь (η_h) , в отличие от η_h обозначает мгновенную, а не максимальную величину угловой скорости гармонического колебательного движения массы.



Фиг. 13

вика в каждый момент времени. Теперь действительная степень неравномерности вращения маховика определится формулой (1):

$$\delta = \frac{\eta_{\max} - \eta_{\min}}{\eta},$$

где η_{\max} и η_{\min} — соответственно — максимальная и минимальная ординаты тахограммы (см. Фиг. 13).

Очевидно, что это значение δ маховика, а также и построенные ранее для него теоретические торсиограмма и тахограмма справедливы только для одного заданного и принятого в расчете вынужденных крутильных колебаний числа оборотов вала n . Уже сравнительно небольшое изменение n может очень сильно отразиться на характере торсиограммы, тахограммы и величине δ .

Допустим вначале, что крутящий момент на валу двигателя, создаваемый в одном цилиндре, представляется выражением:

$$M = M_0 + M_h \cdot \sin(h\eta t + \beta_h), \quad (87)$$

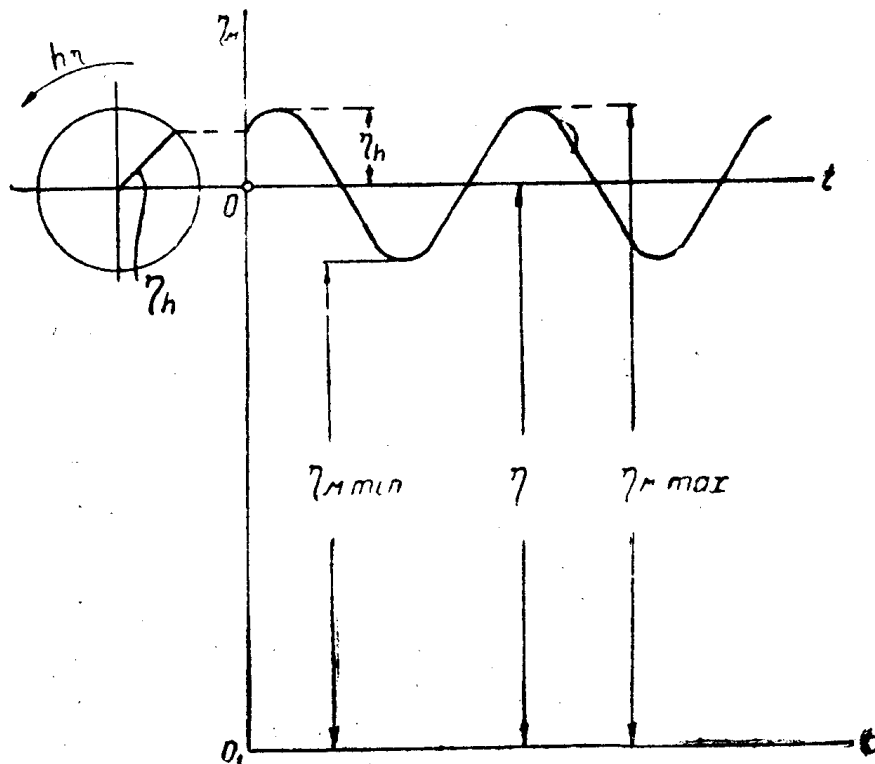
т. е. складывается из среднего постоянного момента M_0 и одного гармонического момента M_h порядка h . При этих условиях маховик двигается по закону:

$$\alpha_m = \eta t + \varphi_{Iabc} \cdot \sin(h\eta t + \gamma), \quad (88)$$

с угловой скоростью:

$$\eta_m = \frac{d\alpha_m}{dt} = \eta + \varphi_{Iabc} \cdot h\eta \cdot \sin(h\eta t + \gamma'), \quad (89)$$

где γ' определяется формулой (86). Теперь теоретическая тахограмма для маховика будет простой синусоидой (фиг. 14). Ма-



Фиг. 14

ксимальная скорость гармонического колебательного движения маховика равна амплитуде этой синусоиды:

$$\eta_h = \varphi_{Iabc} \cdot h\eta,$$

и соответственно максимальная и минимальная абсолютные угловые скорости его вращения будут:

$$\eta_{\text{max}} = \eta + h\eta \varphi_{I \text{ abs}},$$

$$\eta_{\text{min}} = \eta - h\eta \varphi_{I \text{ abs}}.$$

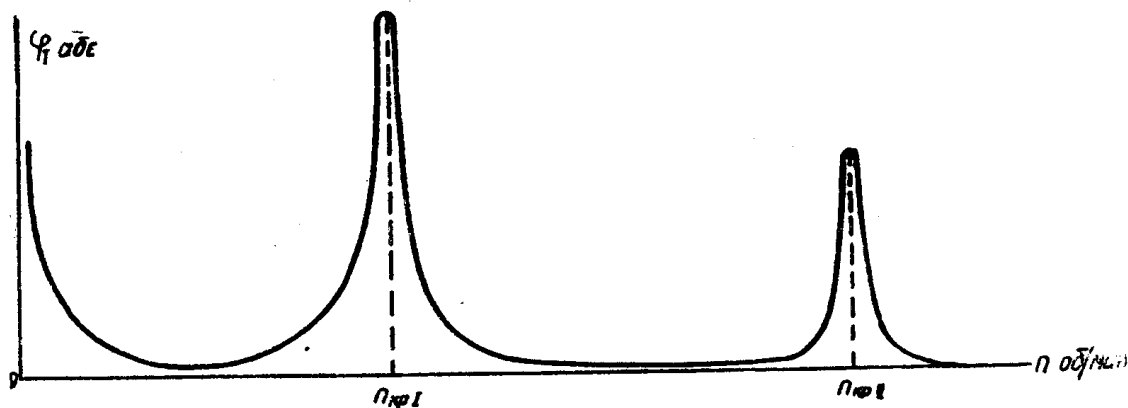
Отсюда степень неравномерности вращения маховика:

$$\delta_h = \frac{\eta_{\text{max}} - \eta_{\text{min}}}{\eta} = 2h \varphi_{I \text{ abs}}. \quad (90)$$

Таким образом, степень неравномерности δ_h вращения маховика, обуславливаемая воздействием на вал гармонических моментов только одного порядка прямо пропорциональна амплитуде колебания маховика $\varphi_{I \text{ abs}}$ и порядку вызывающей эти колебания гармонике.

Величина $\varphi_{I \text{ abs}}$ в формулах (88), (89), (90) есть функция угловой скорости вынужденных колебаний (или, что то же, угловой скорости возбуждающего гармонического момента), т. е. зависит от скорости вращения вала η , или числа его оборотов.

Пользуясь формулой (19), можно при различных n подсчитать $\varphi_{I \text{ abs}}$, создаваемые гармоническими моментами одного порядка (фиг. 15). Максимальную ординату кривой $\varphi_{I \text{ abs}} = f(n)$



Фиг. 15

на фиг. 15, являющуюся резонансным значением $\varphi_{I \text{ abs}}$ при критическом числе оборотов двигателя:

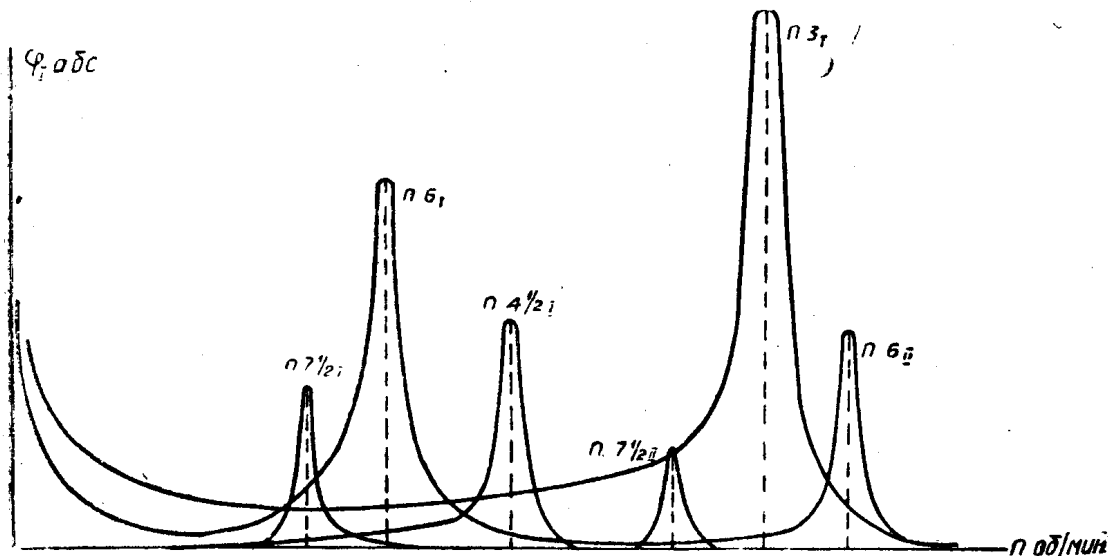
$$n_{кр} = \frac{N_0}{h}, \quad (91)$$

где N_0 — частота собственных колебаний валопровода, необходимо определить особо, по методу Видлера, Льюиса и т. д. При отсутствии демпфирующих сил в установке кривая $\varphi_{I \text{ abs}} = f(n)$ получает разрыв в точке, соответствующей $n_{кр}$.

Умножение всех координат кривой по фиг. 15 на $2h$ в соответствии с формулой (90) дает значения δ_h маховика, создаваемое

мые гармониками M_n данного порядка при различных n (фиг. 17).

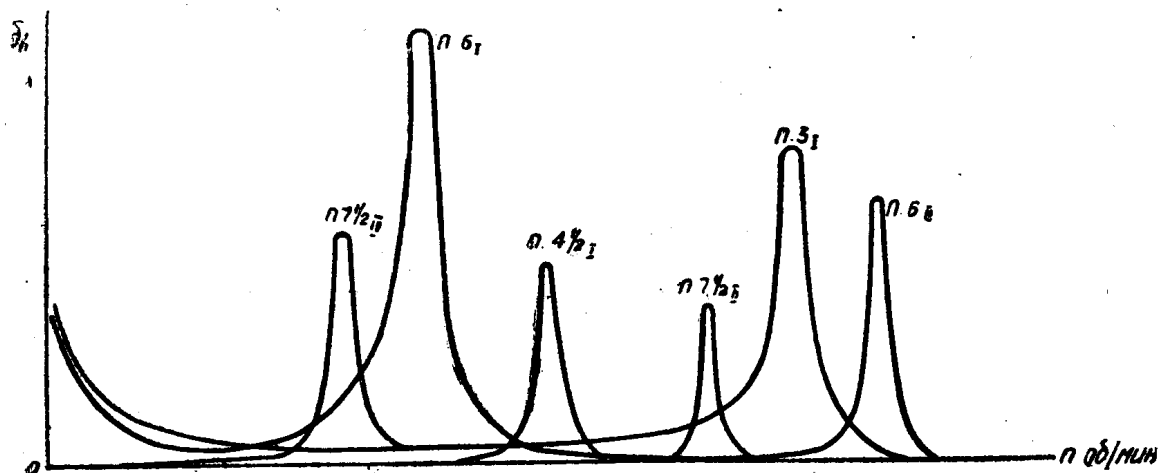
В реальных условиях крутящий момент на валу, согласно формуле (6), складывается из среднего момента M_0 и ряда гармонических моментов различных порядков. На основании конкретных подсчетов зависимостей $\varphi_{Iabc} = f(n)$ и $\delta_h = f_1(n)$ могут быть построены диаграмма для действительных амплитуд слагающих гармонических колебаний маховика (фиг. 16) и диаграмма для степеней неравномерности его вращения, соответствующих этим колебаниям (см. фиг. 17).



Фиг. 16

Полная степень неравномерности δ вращения маховика определяется только из построения теоретической тахограммы для каждого заданного числа оборотов. Но во всяком случае действительная δ будет не больше суммы ординат всех кривых на фиг. 17, измеренных для соответствующего n .

Фиг. 17 указывает на значительно более сложную зависимость между δ маховика и n двигателя, нежели это устанавливается классической формулой (2).



Фиг. 17

V. КРИТИЧЕСКАЯ И ОПТИМАЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНЫ GD^2 МАХОВИКА

Формула (2) утверждает обратно пропорциональную зависимость между степенью неравномерности вращения δ и маховым моментом GD^2 маховика. Из этой формулы делается обычно, формально совершенно естественный и основанный на теории расчета δ по диаграмме тангенциальных усилий или по методу Виттенбауэра, вывод о прямой пропорциональности между GD^2 и эффективностью маховика с точки зрения улучшения равномерности вращения вала машины. Но, как указано выше, практика в ряде случаев опровергает это положение и требует введения понятия о вредных маховых массах и критической величине GD^2 маховика. ⁵⁵

Изложенная выше методика анализа вынужденных крутильных колебаний дает возможность установить действительную связь между GD^2 маховика и δ в каждом конкретном случае, при каждом заданном числе оборотов коренного вала двигателя.

Гармонические моменты M одного порядка h , действующие на массы двигателя, вызывают вынужденные колебания маховика с амплитудой φ_{Iabc} , определяемой формулой (19), справедливой при колебаниях вне резонанса. Остаточный момент R , входящий в формулу (19), можно, на основании формул (12) и (14), представить в виде:

$$R = -Ac \cdot \left[\alpha_I \varphi_m + \left(1 - \frac{\alpha_I}{\beta_1} A \right) \sum_1^m \varphi_i \right] \quad (92)$$

для установки по фиг. 2. Подстановка этого значения в формулу (19) дает:

$$\begin{aligned} \varphi_{Iabc} &= \frac{M \sum \varphi_i}{Ac \cdot \left[\left(1 - \frac{\alpha_I}{\beta_1} A \right) \sum_1^m \varphi_i + \alpha_I \varphi_m \right]} \\ &= \frac{M \sum \varphi_i}{Ac \cdot \left[\sum_1^m \varphi_i - \alpha_I \left(\frac{A}{\beta_1} \sum \varphi_i - \varphi_m \right) \right]}, \end{aligned}$$

⁵⁵ См. работу F. Vogt, указанную в сноске 8, а также работу Е. Львова «Исследование влияния разделения маховых масс двигателя на равномерность его хода», помещенную в «Вестнике металлопромышленности», 1927, № 11.

где α_1 и β_1 постоянны для заданной конкретной установки, а величины

$$\sum \vec{\varphi}_i, \sum_1^m \varphi_i, \varphi_m, A = \frac{\theta \omega^2}{c}$$

зависят от уг-

ловой скорости вынужденных колебаний:

$$\omega = h\eta = h \cdot \frac{\pi n}{30},$$

т. е. от порядка h возбуждающих гармоник M и скорости вращения вала η .

При постоянном числе оборотов двигателя n и заданном h величины:

$$\sum \vec{\varphi}_i = \text{const}, \sum_1^m \varphi_i = \text{const}, \varphi_m = \text{const}, A = \text{const},$$

$M = \text{const}$, $\omega = h\eta = \text{const}$, имеют вполне определенные числовые значения, не зависящие от величины момента инерции θ_1 маховика и жесткости c_{m1} вала, соединяющего маховик с двигателем.

При этих условиях ($n = \text{const}$, $h = \text{const}$) формула (92) может быть записана следующим образом:

$$\varphi_{I abc} = \frac{B_1}{1 - \alpha_1 B_2}, \quad (93)$$

где B_1 и B_2 — постоянные величины, определяемые формулами:

$$B_1 = \frac{M \sum \vec{\varphi}_i}{Ac \sum_1^m \varphi_i}, \quad (94)$$

$$B_2 = \frac{A}{\beta_1} \frac{\varphi_m}{\sum_1^m \varphi_i}. \quad (95)$$

Теперь по формуле (90)

$$\delta_h = 2h \varphi_{I abc} = 2h \frac{B_1}{1 - \alpha_1 B_2}. \quad (96)$$

Выражения (93) и (96) показывают, что амплитуды вынужденных колебаний маховика и степень неравномерности его вращения в очень сильной степени зависят от величины α_I , т. е. при заданном двигателе от величины θ_I маховика.

При полном отсутствии маховика ($\theta_I = 0$)

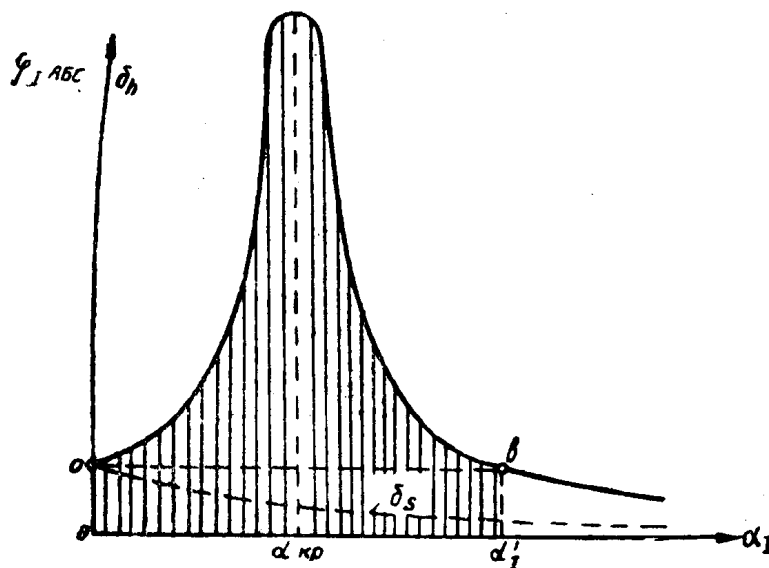
$$\alpha_I = 0,$$

и

$$\varphi_{I abc} = B_1 = \frac{M \sum \vec{\varphi}_i}{A_c \sum \varphi_i} \quad (97)$$

$$\delta_h = 2hB_1. \quad (98)$$

Подсчеты $\varphi_{I abc}$ и δ_h по формулам (93) и (96) для различных значений α_I позволяют построить диаграмму по фиг. 18.



Фиг. 18

При

$$\alpha_{kp} = \frac{1}{B_2}, \quad (99)$$

т. е. при величине θ_I маховика:

$$\theta_{I kp} = \alpha_{I kp} \cdot \theta = \frac{\theta}{B_2}, \quad (100)$$

формула (93) дает

$$\varphi_{I abc} = \infty,$$

что является очевидной характеристикой резонанса без сопротивлений. Действительную, в условиях практики, величину $\varphi_{I abc}$

при $\theta_I = \frac{\theta}{B_2}$, необходимо подсчитать по формуле (51), опре-

деляя входящую в нее величину амплитуды вынужденных резонансных колебаний первой массы двигателя $\varphi_{I abc}$, согласно указаниям раздела III настоящего труда.

Соотношения (99) и (100), соответствующие наивысшей точке кривой $\varphi_{I abc}$ и δ_n на фиг. 18 и обращающие в нуль знаменатель выражений (93) и (96), дают критическую величину момента инерции маховика:

$$\theta_{I kp} = \frac{\theta}{B_2} = \frac{\theta}{\beta_1 \frac{A}{\sum_{i=1}^m \varphi_i} \varphi_m} \quad (101)$$

и критический маховой момент:

$$GD^2_{kp} = 4g \cdot \theta_{I kp} = 4g \frac{\theta}{\beta_1 \frac{A}{\sum_{i=1}^m \varphi_i} \varphi_m} \quad (102)$$

где g — земное ускорение;

θ — момент инерции приведенной массы механизма одного цилиндра двигателя.

Маховик с критической величиной момента инерции $\theta_{I kp}$ делает заданное число оборотов двигателя одной из критических скоростей вращения его вала и дает наихудшую степень неравномерностей вращения δ_n . Фиг. 18 и формула (98) показывают, что двигатель, совершенно не имеющий маховика, обладает значительно большей равномерностью вращения вала, нежели при маховике с критическим или близким к нему маховым моментом GD^2 .

Очевидно, что последнее заключение справедливо только с точки зрения величины периодических колебаний скорости вращения коренного вала, в течение каждого его оборота, при постоянной нагрузке на двигатель. Полное устранение или значительное уменьшение GD^2 маховика ухудшает и часто делает совершенно невозможной работу двигателя при резких изменениях нагрузки. При недостаточной величине махового момента маховика двигатель глохнет в случае внезапного возрастания сопротивлений, например, в автомобилях и тракторах в момент вклю-

чения фрикциона после пуска. Уже из этих соображений каждый поршневой двигатель должен иметь достаточно большой маховик⁵⁶.

Горизонталь, проведенная на фиг. 18 через точку a , соответствующую $\alpha_I = 0$, пересекает правую ветвь кривой $\delta_h = f(\alpha_I)$ в точке b . Заштрихованный участок ab этой кривой указывает область вредных значений α_I , т. е. вредных величин момента инерции маховика

$$\theta_I = \alpha_I \theta.$$

Лишь выбор маховика с моментом инерции

$$\theta_I > \alpha'_I \theta, \quad (103)$$

или маховым моментом

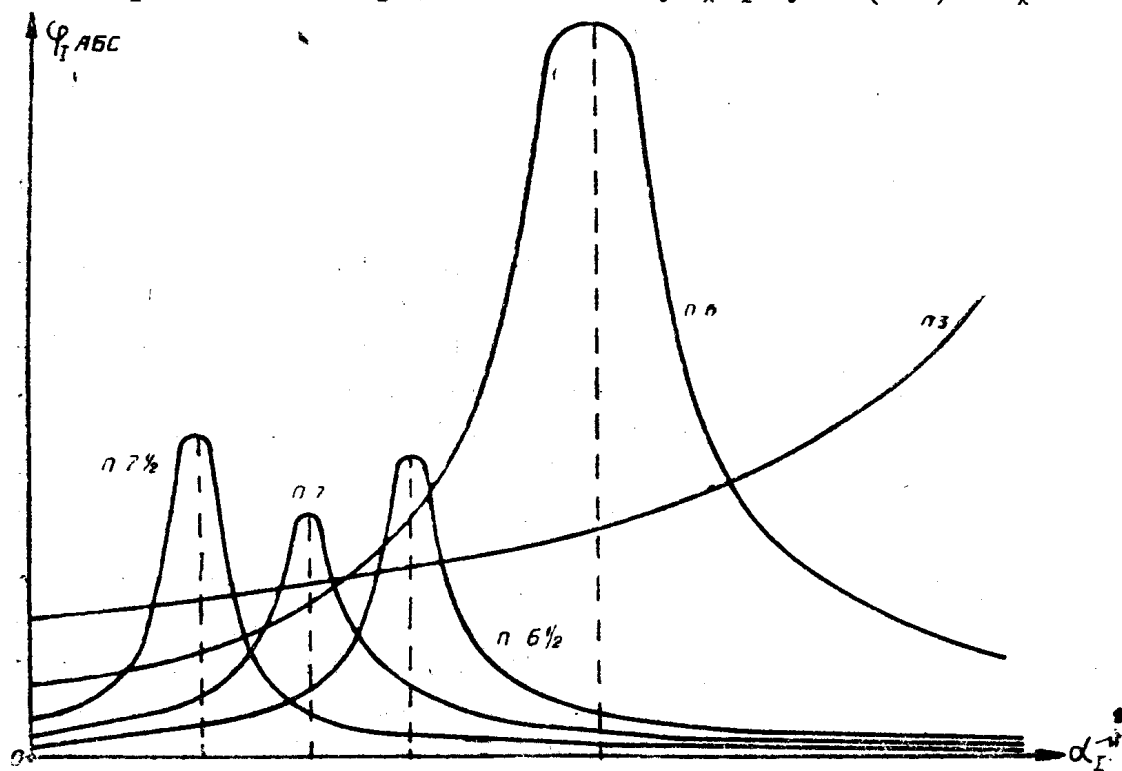
$$GD^2 > \alpha'_I \cdot \theta \cdot 4g, \quad (104)$$

где α'_I — абсцисса точки b на фиг. 18, может обеспечить уменьшение δ_h . Постановка же на вал двигателя маховика, имеющего маховой момент

$$GD^2 < \alpha'_I \cdot 4g\theta,$$

не только бесполезна, но и вредна при условии действия на вал гармонических моментов M только одного порядка h , так как приводит к увеличению δ_h , т. е. степени неравномерности вращения конца вала под маховиком.

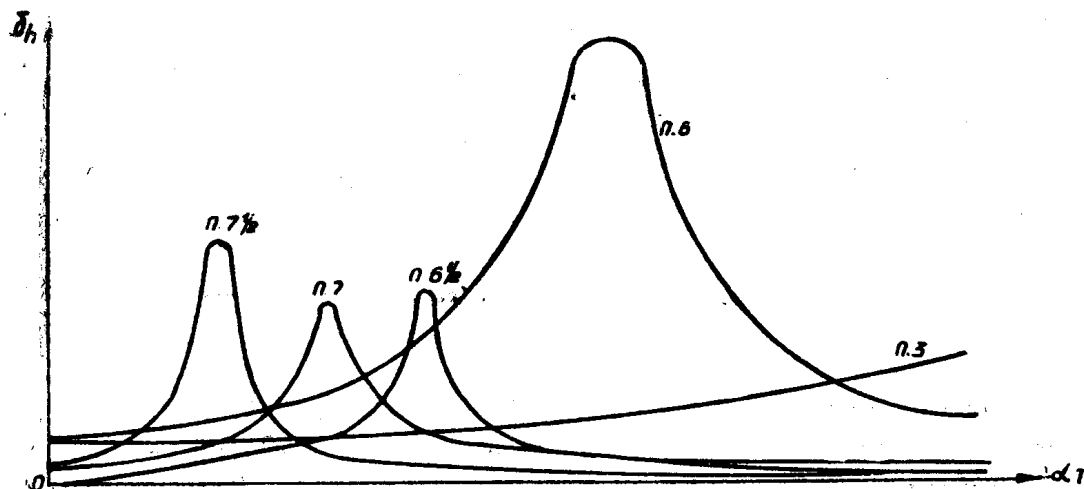
На вал двигателя, как правило, действуют гармонические моменты различных порядков. Поэтому формула (103) и фиг. 18



Фиг. 19

⁵⁶ См., например, Е. Львов, Тракторы. т. I, 1933; Е. Львов, Динамика поршневых двигателей, 1936.

обычно не могут быть использованы для конкретного определения оптимальной величины Θ_1 или GD^2 маховика, обеспечивающей возможно малую величину полной степени неравномерности вращения δ в данной силовой установке. Здесь необходимо, пользуясь формулами (93) и (96), провести подсчеты зависимостей между φ_{Iabc} и α_1 для важнейших (при заданной скорости вращения вала двигателя) порядков гармоник крутящего момента и построить диаграммы по фиг. 19 и 20. Эти диаграммы, являющиеся наложением кривых на фиг. 18, вычисленных для различных h , показывают, что каждому порядку гармоник крутящего момента соответствуют отдельные, особые, конкретные значения $\alpha_{1кр}$ и $\Theta_{1кр}$.



Фиг. 20

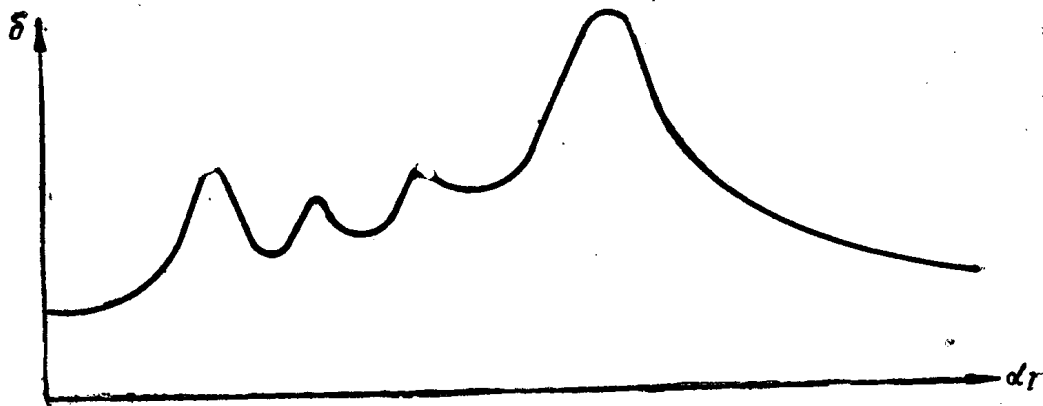
Суммирование амплитуд слагающих гармонических колебаний, представленных на диаграмме φ_{Iabc} (фиг. 19), может быть произведено только путем построения теоретических торсиограмм для каждого отдельного значения α_1 . На основании торсиограмм выстраивается кривая $\varphi_{Iabc} = f(\alpha_1)$ полных действительных, максимальных углов опережения или отставания маховика или ротора генератора маховичного типа, относительно равномерного его вращения со средней угловой скоростью.

Равным образом, построение теоретических тахограмм при различных α_1 дает полную величину истинной степени неравномерности вращения маховика δ и приводит к диаграмме по фиг. 21.

Полученные диаграммы обеспечивают все возможности для точного и, безусловно, надежного выбора наивыгоднейшей величины махового момента маховика, удовлетворяющего всем требованиям, которые в каждом конкретном случае выдвигаются практикой в отношении степени неравномерности вращения вала силовой установки и углов отставания и опережения маховика или ротора динамо.

Для экономии времени и сокращения расчетной работы можно, иногда без большой погрешности, опустить указанное выше

построение теоретических торсиограмм и тахограмм при различных значениях α_I и подсчитывать ординаты кривых φ_{Iabc} и δ (см. фиг. 21) как арифметические суммы ординат слагающих кривых φ_{Iabc} и δ , взятых при каждом значении α_I соответственно по фиг. 19 и 20. Полная степень неравномерности вращения маховика δ при данном θ_I , конечно, не будет больше суммы ординат кривых δ_h на фиг. 20, взятых для $\alpha_I = \frac{\theta_I}{\theta}$.



Фиг. 21

Рассмотренная методика определения критической и оптимальной величины махового момента маховика в установке, по фиг. 2 применима и для установки двигатель—маховик—динамо по фиг. 3. В этом случае формула (19) для абсолютной амплитуды вынужденных гармонических колебаний крайней правой массы приведенной упругой системы переходит в

$$\varphi_{IIabc} = \frac{M}{R} \sum \vec{\varphi}_i,$$

где, согласно формуле (15),

$$R = -Ac \left(\sum_1^m \varphi_i + \alpha_I \varphi_I + \alpha_{II} \varphi_{II} \right),$$

или, подставляя сюда значения для φ_I и φ_{II} соответственно из (12) и (13),

$$R = -Ac \left\{ \sum_1^m \varphi_i + \alpha_I \left(\varphi_m - \frac{A}{\beta_1} \sum_1^m \varphi_i \right) + \right. \\ \left. + \alpha_{II} \left[\varphi_m - \frac{A(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 \beta_2} \sum_1^m \varphi_i \right] + \right.$$

$$+ \alpha_{II} \alpha_{II} \left[\frac{A^2}{\beta_1 \beta_2} \sum_1^m \varphi_i - \frac{A}{\beta_2} \varphi_m \right] \Bigg\}.$$

Теперь формулу для $\varphi_{II abc}$ можно записать сокращенно в виде:

$$\varphi_{II abc} = \frac{B_1}{B_3 - \alpha_I B_4}, \quad (105)$$

где

$$B_1 = - \frac{M \sum \vec{\varphi}_i}{Ac}, \quad (106)$$

$$B_3 = \sum_1^m \varphi_i + \alpha_{II} \left[\varphi_m - \frac{A(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 \beta_2} \sum_1^m \varphi_i \right], \quad (107)$$

$$B_4 = - \left[\varphi_m + \frac{A}{\beta_1} \left(\frac{\alpha_{II} A}{\beta_2} - 1 \right) \sum_1^m \varphi_i - \alpha_{II} \varphi_m \frac{A}{\beta_2} \right], \quad (108)$$

или же

$$\varphi_{II abc} = \frac{B_1}{B_5 - \alpha_{II} B_6}. \quad (109)$$

Здесь

$$B_5 = \sum_1^m \varphi_i + \alpha_I \left(\varphi_m - \frac{A}{\beta_1} \sum_1^m \varphi_i \right), \quad (110)$$

$$B_6 = - \left[\varphi_m - A \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 \beta_2} \sum_1^m \varphi_i + \right. \\ \left. + \alpha_I \left(\frac{A^2}{\beta_1 \beta_2} \sum_1^m \varphi_i + \varphi_m \frac{A}{\beta_2} \right) \right], \quad (111)$$

а B_1 определяется по формуле (106).

Отсюда, аналогично формуле (96), степень неравномерности вращения ротора динамо, обуславливаемая воздействием на вал двигателя гармонических крутящих моментов h -го порядка:

$$\delta_h = 2h \frac{B_1}{B_3 - \alpha_I B_4}, \quad (112)$$

или

$$\delta_h = 2h \frac{B_1}{B_5 - \alpha_{II} B_6}. \quad (113)$$

Коэффициенты $B_1, B_2 \dots B_6$ в формулах (105), (106), (112), (113) имеют вполне определенное постоянное числовое значение для исследуемой конкретной установки при данном порядке h гармоники M и заданном неизменном числе оборотов вала двигателя n . Коэффициенты B_1, B_3 и B_4 совершенно не зависят от величины момента инерции θ_I маховика. Равным образом B_5, B_6 не зависят от момента инерции θ_{II} ротора генератора.

Формула (112) аналогична формуле (96), поэтому, пользуясь ею, можно построить диаграммы для δ_h в функции от $\alpha_I = \frac{\theta_I}{\theta}$ подобные фиг. 19, 20, 21, и, согласно сказанному выше, найти критические и оптимальные величины GD^2 маховика в установке по фиг. 3.

Совершенно так же, на основании формулы (113), проводится исследование зависимости между маховым моментом или моментом инерции $\theta_{II} = \alpha_{II}\theta$ ротора генератора и степенью неравномерности его вращения и определяется оптимальная величина его GD^2 .

Изложенная здесь методика подхода к определению необходимой и наивыгоднейшей величины GD^2 маховика или ротора динамо, при заданной степени неравномерности его вращения или лимитированном угле его отставания или опережения, требует довольно большой вычислительной работы, но обеспечивает значительно большую точность решения задачи, нежели это возможно при применении классических способов расчета по диаграмме тангенциальных усилий или по методу Виттенбауэра.

VI. КЛАССИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ НЕРАВНОМЕРНОСТИ ВРАЩЕНИЯ δ_s

Из методики расчета вынужденных колебаний и построения теоретических торсиограмм, изложенной выше, как частное следствие вытекает способ определения классической степени неравномерности вращения δ_s .

Классические методы расчета маховика предполагают абсолютную жесткость вала установки на скручивание. При этом допущении амплитуды колебания всех масс валопровода (относительно его равномерного вращения со средней угловой скоростью) всегда одинаковы между собою:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_m = \varphi_I = \varphi_{II},$$

так как принимается, что $c = \infty$, $c_{mI} = \infty$, $c_{I,II} = \infty$.

Теперь из формулы (15)

$$\begin{aligned} R &= - \left(\sum \theta \omega^2 \varphi_i + \theta_I \omega^2 \varphi_I + \theta_{II} \omega^2 \varphi_{II} \right) = \\ &= - \varphi_1 \omega^2 (m\theta + \theta_I + \theta_{II}) = - \varphi_1 \omega^2 \sum \theta, \end{aligned}$$

или, при $\varphi_1 = 1$ радиан,

$$R = - \omega^2 \sum \theta, \quad (114)$$

где $\omega = h\eta$ — угловая скорость гармонических моментов данного порядка, действующих на вал двигателя;

$\sum \theta$ — сумма моментов инерции всех маховых масс валапровода.

Согласно формуле (19), гармонические моменты M данного порядка вызывают колебательные движения первой массы, а теперь, при допущении абсолютной жесткости вала, и всех масс установки, с амплитудой,

$$\varphi_{abc} = \frac{M}{R} \sum \vec{\varphi}_i = - \frac{M \sum \vec{\varphi}_i}{\omega^2 \sum \theta}. \quad (115)$$

Здесь $\sum \vec{\varphi}_i$ — геометрическая сумма векторов, каждый из которых равен 1 радиану, найденная в фазовой диаграмме возбуждающих гармонических моментов данного порядка.

Для главных порядков

$$\sum \vec{\varphi}_i = m,$$

где m — число цилиндров в двигателе.

Для всех же остальных порядков, в обычных типах многоцилиндровых двигателей, имеющих равномерное распределение всышек в цилиндрах по углу поворота коленчатого вала, эта сумма обращается в нуль.

Таким образом, лишь гармоники главных порядков создают колебательные движения и обуславливают неравномерность вращения абсолютно-жесткого вала. Знак минус в формуле (115)

показывает, что вынужденные колебания всех масс валопровода отстают на 180° от возбуждающих гармонических моментов.

Степень неравномерности вращения вала, соответствующая каждому из этих слагающих гармонических колебательных движений всего валопровода, как одно жесткое целое, определится теперь на основании формул (90) и (115) выражением:

$$\begin{aligned} \delta_h &= 2\varphi_{I abc} \cdot h = \frac{2Mh \sum \vec{\varphi}_i}{\omega^2 \sum \theta} = \\ &= \frac{2Mhm}{\omega^2 \sum \theta} = \frac{2Mm}{h\eta^2 \sum \theta}, \end{aligned} \quad (116)$$

где η , как и ранее, угловая скорость вращения вала.

Только здесь, в предположении абсолютной жесткости вала, степень неравномерности δ_h обратно пропорциональна квадрату угловой скорости вращения вала и непрерывно падает с увеличением момента инерции $\sum \theta$ вращающихся масс, т. е. с увеличением момента инерции маховика и ротора динамо.

Значения классической степени неравномерности δ_h , подсчитанные по формуле (116), показаны пунктирной кривой на фиг. 18 (на фиг. 18 δ_h обозначено через δ_s).

Гармоническое колебательное движение всей системы, вызываемое гармониками M порядка h , происходит по закону:

$$(\varphi_{abc}) = \varphi_{abc} \cdot \sin(h\eta t + \beta_h - 180^\circ).$$

Здесь β_h — фазовый угол гармоники M ;

(φ_{abc}) — мгновенный угол отклонения (опережения или отставания) вала относительно равномерного вращения с угловой скоростью η ;

φ_{abc} — амплитуда колебания, определяемая формулой (115).

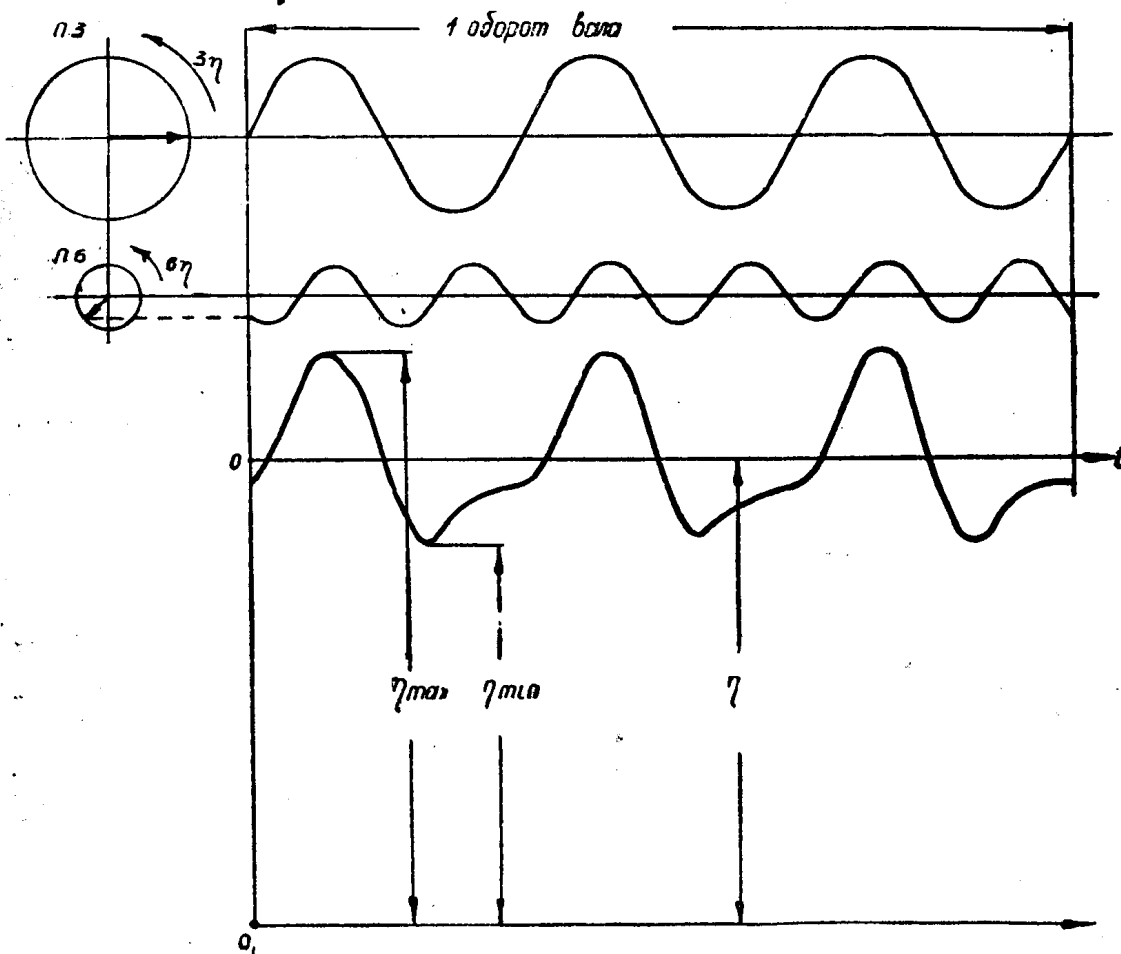
Соответствующая угловая скорость гармонического колебательного движения валопровода:

$$\begin{aligned} (\eta_h) &= \frac{d(\varphi_{abc})}{dt} = \varphi_{abc} \cdot h \cos(h\eta t + \beta_h - 180^\circ) = \\ &= \eta_h \cdot \sin(h\eta t + \beta_h - 90^\circ), \end{aligned} \quad (117)$$

где $\eta_h = \varphi_{abc} h$ — максимальная угловая скорость гармонического движения.

Из формулы (117) следует, что векторы скорости η_h отстают от векторов соответствующих моментов M на угол в 90° , но, конечно, вращаются с той же угловой скоростью η_h . Построение

синусоид (117) для всех, достаточно больших гармоник M главных порядков и суммирование их ординат дает теоретическую тахограмму для абсолютно-жесткого вала (фиг. 22)⁵⁷. Откладывая вниз от оси абсцис построенной тахограммы величину средней угловой скорости η , получаем новую ось O_1t — линию нулевых скоростей вращения вала.



Фиг 22.

Теперь классическая степень неравномерности вращения вала силовой установки

$$\delta_s = \frac{\eta_{\max} - \eta_{\min}}{\eta},$$

при чем η_{\max} и η_{\min} измеряются по диаграмме на фиг. 22.

Конечно, эта величина δ_s будет отличаться, и часто весьма существенно, от того ее значения, которое определяется при учете реальной упругости вала и наличия его крутильных колебаний.

⁵⁷ Для построения теоретической тахограммы абсолютно жесткого вала нет необходимости проводить детальный гармонический анализ диаграммы тангенциальных усилий. Достаточно лишь, пользуясь гармоническим анализатором или, например, методом Фишер-Хиннена или Шредера, определить амплитуды и фазовые углы гармоник главных порядков.

VII. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ СКРУЧИВАНИЯ В ВАЛУ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ЕГО КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Знание величины дополнительных напряжений в валу, возникающих при его крутильных колебаниях, действительно необходимо для суждения об эксплуатационной надежности силовой установки при работе ее на заданном скоростном режиме.

В практике конструкторских расчетов иногда ограничиваются только определением частот собственных колебаний приведенной уругой системы и, в лучшем случае, проводят подсчет резонансных напряжений в валу, т. е. тех дополнительных напряжений скручивания, которые вызываются резонирующими гармониками крутящего момента. Подсчет этих напряжений не сложен.

Скручивающий момент на участке вала между массами i и $i+1$ вычисляется по очевидной формуле:

$$M_{i,i+1} = c_{i,i+1} \cdot (\varphi_{i+1abc} - \varphi_{iabc}),$$

где φ_{iabc} и φ_{i+1abc} — абсолютные (действительные) величины амплитуд вынужденных резонансных колебаний масс i и $i+1$, вызываемых резонирующими гармониками;

$c_{i,i+1}$ — жесткость участка вала между этими массами. Величины φ_{iabc} и φ_{i+1abc} определяются согласно указаниям в разделе III.

Теперь максимальное дополнительное напряжение скручивания на данном участке вала

$$\tau_{\max} = \frac{M_{i,i+1}}{W_p}, \quad (118)$$

где W_p — полярный момент сопротивления наиболее опасного его поперечного сечения.

Для нахождения наиболее нагруженного участка вала установки достаточно построить кривую формы свободных колебаний валопровода (см. фиг. 9). Участок этой ломаной кривой, имеющий наибольший угол наклона к оси абсцисс, соответствует участку вала, скручиваемому наибольшим дополнительным моментом.

Но подсчеты только резонансных напряжений в валу не отображают полностью условий его работы, так как не учитывают влияния других, не резонирующих, гармоник крутящего момента и совершенно не характеризуют нагрузки и напряжения в валу при работе двигателя вне критических скоростей. Кроме того, эти подсчеты не дают данных для определения той величины удаления рабочих скоростей двигателя от его критических скоро-

стей, которая необходима для обеспечения достаточной прочности его вала при работе на нормальных оборотах ⁵⁸.

Методика построения теоретических торсиограмм и тахограмм, указанная выше, позволяет провести анализ дополнительных напряжений в валу, соединяющем двигатель с маховиком при работе двигателя на любом числе оборотов и с учетом любого числа порядков гармоник крутящего момента.

Угловая скорость вращения маховика в каждый момент времени определяется выражением (84), дифференцирование которого по времени дает угловое ускорение маховика

$$\begin{aligned}(\eta_m') &= \frac{d(\eta_m)}{dt} = \sum \eta_h \cdot h \cos(h\eta t + \gamma') = \\ &= \sum \eta_h \cdot h \sin(h\eta t + \gamma' + 90^\circ),\end{aligned}$$

или, на основании формул (85) и (86),

$$(\eta_m') = \sum h^2 \eta^2 \varphi_{I abc} \cdot \sin(h\eta t + \gamma + 180^\circ). \quad (119)$$

Отсюда

$$(\eta_m') = \sum \eta_m' \cdot \sin(h\eta t + \gamma + 180^\circ), \quad (120)$$

где

$$\eta_m' = h^2 \eta^2 \varphi_{I abc} \quad (121)$$

есть максимальное угловое ускорение вынужденного гармонического колебательного движения маховика, вызываемого гармоническими моментами h -го порядка.

Формула (120) показывает, что векторы ускорений маховика, определяемые формулой (121), опережают на 180° векторы амплитуд его вынужденных колебаний, но имеют ту же угловую скорость и частоту.

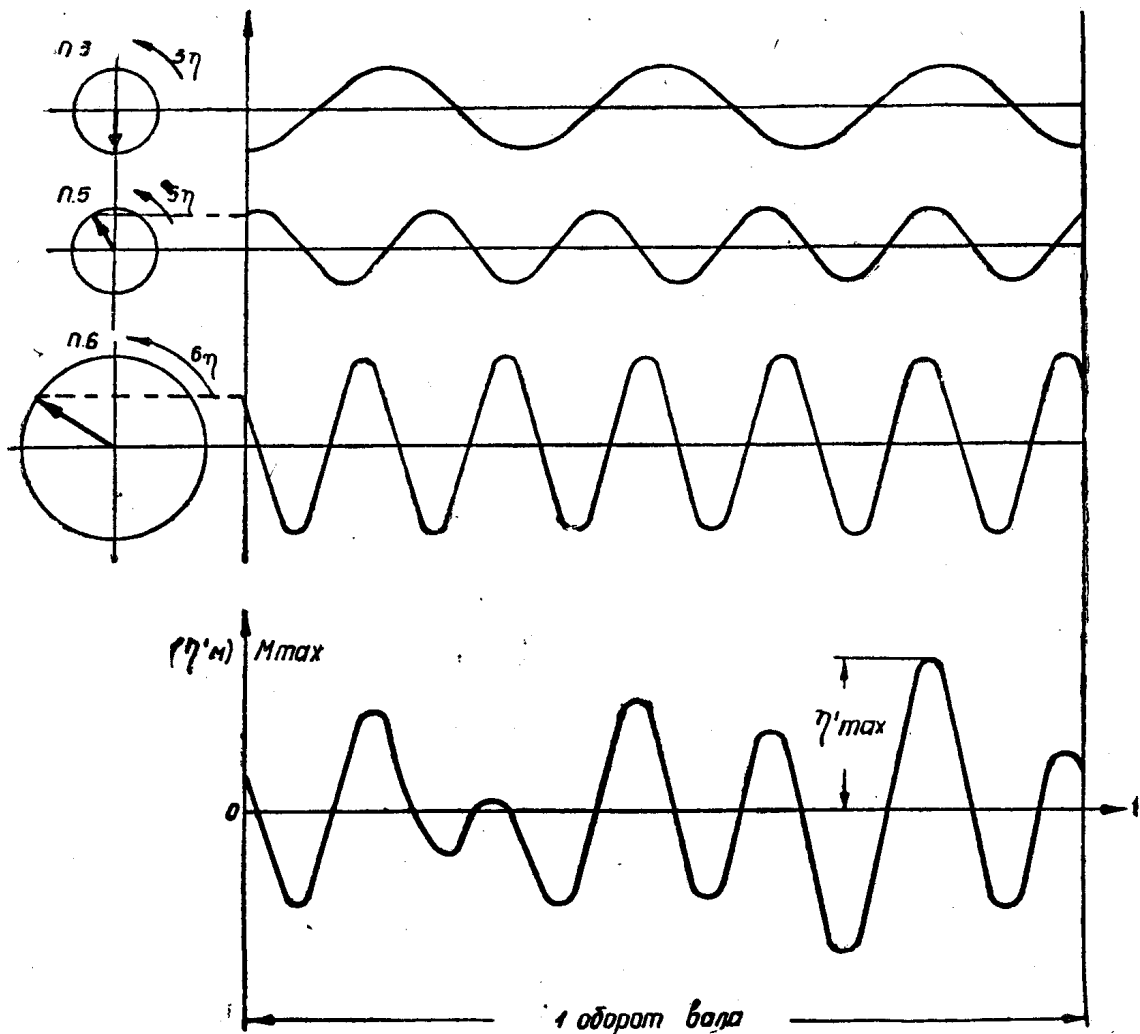
Суммирование синусоид

$$(\eta_m') = \eta_m' \cdot \sin(h\eta t + \gamma + 180^\circ),$$

построенных для гармоник различных порядков, дает диаграмму угловых ускорений вращения маховика (фиг. 23).

Если умножить все ординаты этой кривой на величину момента инерции θ_I маховика, то диаграмма по фиг. 23 будет показывать изменение дополнительного скручивающего момента в валу, на участке между двигателем и маховиком, возникающего вследствие крутильных колебаний валопровода. Максимальная

⁵⁸ В работе Н. Behrens'a, помещенной в «ZS. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt», 1930, Н. 12, s. 297, дана приближенная методика определения необходимой величины этого удаления, основанная однако на целом ряде упрощающих допущений и учитывающая действие на вал двигателя гармонических крутящих моментов только одного из главных порядков.



Фиг. 23

ордината этой кривой определяет наибольшую величину дополнительного скручивающего момента:

$$M_{\max} = \theta_{\Gamma} \eta'_{\max}. \quad (122)$$

Теперь наибольшее дополнительное напряжение скручивания на этом участке:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_p} = \frac{\theta_{\Gamma} \eta'_{\max}}{W_p}. \quad (123)$$

Выполнив построение диаграмм по фиг. 23 для различных скоростей вращения вала η , можно построить кривую $\tau_{\max} = f_2(n)$ и по ней установить запретные (опасные) и оптимальные зоны рабочих чисел оборотов двигателя с точки зрения обеспечения достаточной прочности его вала между последним цилиндром двигателя и маховиком. Этот участок вала обычно является наиболее опасным, в особенности в последней коренной шейке коленчатого вала, так как, кроме дополнительных моментов M_{\max} , он нагружен еще средним передаваемым полезным крутящим моментом mM_0 двигателя, подсчитываемым по его мощности и числу оборотов.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A = \frac{\Theta \omega^2}{c}$ — основной параметр крутильного колебательного процесса.

$A_{возб}$ — работа возбуждающих гармонических моментов, действующих на вал двигателя, совершаемая ими за цикл колебания.

A_r — работа, поглощаемая демпфирующими силами в двигателе, пропорциональными скорости колебания, за цикл колебания (расчет по Видлеру).

A_h — работа, поглощаемая упругим гистерезисом вала, за цикл колебания (расчет по Льюису и др.).

a_h — константа гистерезиса в формуле Дорей.

c — жесткость участков коленчатого вала между осями каждых двух соседних цилиндров двигателя, для системы по фиг. 2 и 3.

c_{m1} — жесткость вала между последней массой двигателя и первым маховиком.

$c_{I,II}$ — жесткость вала между первым и вторым маховиками в установке по фиг. 3.

$c_{i,i+1}$ — жесткость вала между массами i и $i+1$ приведенной системы, в общем случае.

C_h — гармонический коэффициент h -го порядка в $кг/см^2$, определяемый гармоническим анализом диаграммы тангенциальных усилий для одного цилиндра двигателя.

d_a и d_i — соответственно — наружный и внутренний диаметры полого вала.

$D_n = \frac{\varphi_m}{\sum_1^m \varphi_i}$ — отвлеченный коэффициент.

F — площадь поршня.

h — порядок гармоники крутящего момента на валу двигателя, отнесенный к одному его обороту.

i — порядковый номер масс установки при счете их, начиная с левого конца вала по фиг. 2 и 3.

k — коэффициент скоростных сопротивлений в двигателе, по Видлеру (в $кг\ сек/см^3$).

k_0 — коэффициент демпфирования по Шэннону (в $кг\ сек/см$).

l — длина цилиндрического участка вала.

m — число цилиндров двигателя.

m_{red} — масса механизма одного цилиндра, приведенная к радиусу кривошипа.

M — амплитуда гармонического момента h -го порядка, создаваемого на валу одним цилиндром двигателя.

(M) — мгновенная величина этого момента.

$M_{i,i+1}$ — момент, скручивающий вал на участке между массами i и $i+1$.

- M_{max} — максимальный момент, скручивающий вал на участке между последним цилиндром двигателя и маховиком.
- M_0 — средний крутящий момент на валу двигателя, создаваемый одним цилиндром.
- N — частота колебания, т. е. число циклов колебания в минуту.
- N_0 — частота собственных колебаний вала установки.
- n — число оборотов вала двигателя в минуту.
- q — показатель степени в формуле Дореля для гистерезисной потери в валу.
- r — радиус кривошипа.
- R — остаточный момент.
- t — время.
- W_p — полярный момент сопротивления поперечного сечения вала.
- α — угол поворота кривошипа, измеряемый от верхней мертвой точки.
- α_m — мгновенный угол поворота маховика.
- $\alpha_I = \frac{\theta_I}{\theta}$ — отвлеченный коэффициент.
- $\alpha_{II} = \frac{\theta_{II}}{\theta}$ — » »
- $\beta_1 = \frac{c_{mI}}{c}$ — » »
- $\beta_2 = \frac{c_{I,II}}{c}$ — » »
- β_h — фазовый угол гармонического крутящего момента h -го порядка.
- γ — абсолютный фазовый угол вынужденного колебания вне резонанса, т. е. угол между вектором колебания и первым кривошипом в начальный момент времени, при $t=0$.
- γ_0 — абсолютный фазовый угол вынужденных колебаний при резонансе.
- γ' — абсолютный фазовый угол вектора скорости движения гармонически колеблющейся массы.
- δ — полная степень неравномерности вращения данной массы установки, например маховика.
- δ_h — степень неравномерности вращения, обуславливаемая действием на вал гармонических моментов h -го порядка.
- δ_s — классическая степень неравномерности вращения вала.
- ε — относительный фазовый угол вынужденного гармонического колебания массы, т. е. угол между вектором колебания и вектором возбуждающего момента.
- η — средняя угловая скорость вращения вала, определенная формулой $\eta = \frac{\pi n}{30}$ сек⁻¹.

η_h — максимальная угловая скорость вынужденного гармонического колебательного движения маховика, создаваемого гармоническими моментами h -го порядка.

$(\eta_h)'$ — соответствующая мгновенная угловая скорость гармонического движения маховика.

η_m — действительная угловая скорость вращения маховика.

η'_m — максимальное угловое ускорение маховика при его гармоническом колебательном движении.

$\eta'_{m \max}$ — максимальное полное угловое ускорение маховика.

θ — момент инерции приведенной массы одного цилиндра двигателя относительно оси вала.

θ_I — момент инерции первого маховика относительно оси вала.

θ_{II} — момент инерции второго маховика (ротора динамо) относительно той же оси.

ξ — амплитуда колебания первой массы двигателя (в радианах), принятая при подсчете гистерезисной потери в валу по Рауэту или Дорею.

τ_{\max} — максимальное напряжение скручивания в валу.

τ_c — критическое напряжение по Дорею.

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_t$ — относительные амплитуды колебания масс двигателя (при $\varphi_1 = 1$ радиан).

φ_m — относительная амплитуда колебания последней массы двигателя.

φ_I и φ_{II} — соответственно относительные амплитуды колебания первого и второго маховиков (ротора динамо).

$\varphi_{1abc}, \varphi_{2abc}, \dots$

$\varphi_{iabc}, \varphi_{mabc},$

$\varphi_{Iabc}, \varphi_{IIabc}$ — абсолютные амплитуды вынужденных гармонических колебаний соответствующих масс системы.

$\sum_1^m \varphi_i$ — алгебраическая сумма относительных амплитуд колебания масс двигателя.

$\vec{\sum} \varphi_i$ — геометрическая сумма относительных амплитуд колебания масс двигателя, определяемая построением фазовой диаграммы возбуждающих моментов.

$\omega = h\eta$ — угловая скорость вынужденных колебаний, создаваемых гармоническими моментами h -го порядка.

ω_0 — угловая скорость собственных (свободных) колебаний приведенной упругой системы.

$\Psi = \frac{d_i}{d_a}$ — отношение внутреннего диаметра полого вала к его наружному диаметру.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ МАСС ДВИГАТЕЛЯ

Таблица 1

$$A = \frac{\Theta \omega^2}{c}$$

$$\varphi_2 = 1 - A;$$

$$\varphi_1 = +1,0000 \text{ рад.};$$

A	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	A	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
0,00	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	0,27	+0,2629	-0,2752	-0,7390	-1,0032
0,01	+0,9701	+0,9405	+0,9014	+0,8535	0,28	+0,2384	-0,3100	-0,7715	-1,0171
0,02	+0,9404	+0,8820	+0,8059	+0,7138	0,29	+0,2141	-0,3439	-0,8022	-1,0278
0,03	+0,9109	+0,8200	+0,7133	+0,5808	0,30	+0,1900	-0,3770	-0,8309	-1,0355
0,04	+0,8816	+0,7679	+0,6236	+0,4542	0,31	+0,1661	-0,4093	-0,8578	-1,0404
0,05	+0,8525	+0,7124	+0,5366	+0,3341	0,32	+0,1424	-0,4408	-0,8829	-1,0425
0,06	+0,8236	+0,6578	+0,4525	+0,2201	0,33	+0,1189	-0,4714	-0,9062	-1,0419
0,07	+0,7949	+0,6042	+0,3711	+0,1121	0,34	+0,0956	-0,5013	-0,9278	-1,0388
0,08	+0,7664	+0,5515	+0,2925	-0,0100	0,35	+0,0725	-0,5304	-0,9476	-1,0332
0,09	+0,7381	+0,4998	+0,2165	-0,0863	0,36	+0,0496	-0,5587	-0,9658	-1,0253
0,10	+0,7100	+0,4490	+0,1431	-0,1771	0,37	+0,0269	-0,5862	-0,9823	-1,0150
0,11	+0,6821	+0,3992	+0,0723	-0,2625	0,38	+0,0044	-0,6129	-0,9973	-1,0027
0,12	+0,6544	+0,3503	+0,0041	-0,3425	0,39	-0,0179	-0,6388	-1,0106	-0,9882
0,13	+0,6269	+0,3023	-0,0616	-0,4175	0,40	-0,0400	-0,6640	-1,0224	-0,9718
0,14	+0,5996	+0,2553	-0,1248	-0,4874	0,41	-0,0619	-0,6884	-1,0327	-0,9536
0,15	+0,5725	+0,2091	-0,1856	-0,5525	0,42	-0,0836	-0,7120	-1,0415	-0,9335
0,16	+0,5456	+0,1639	-0,2440	-0,6129	0,43	-0,1051	-0,7350	-1,0489	-0,9117
0,17	+0,5189	+0,1196	-0,3001	-0,6687	0,44	-0,1264	-0,7572	-1,0548	-0,8883
0,18	+0,4924	+0,0762	-0,3538	-0,7200	0,45	-0,1475	-0,7786	-1,0594	-0,8634
0,19	+0,4661	+0,0336	-0,4052	-0,7671	0,46	-0,1684	-0,7993	-1,0626	-0,8370
0,20	+0,4400	-0,0080	-0,4544	-0,8099	0,47	-0,1891	-0,8193	-1,0645	-0,8093
0,21	+0,4141	-0,0488	-0,5014	-0,8487	0,48	-0,2096	-0,8386	-1,0651	-0,7803
0,22	+0,3884	-0,0886	-0,5462	-0,8836	0,49	-0,2299	-0,8571	-1,0644	-0,7501
0,23	+0,3629	-0,1277	-0,5889	-0,9146	0,50	-0,2500	-0,8750	-1,0625	-0,7188
0,24	+0,3376	-0,1658	-0,6295	-0,9420	0,51	-0,2699	-0,8922	-1,0594	-0,6864
0,25	+0,3125	-0,2031	-0,6680	-0,9658	0,52	-0,2896	-0,9086	-1,0551	-0,6530
0,26	+0,2876	-0,2396	-0,7045	-0,9862	0,53	-0,3091	-0,9244	-1,0497	-0,6187

A	φ ₃	φ ₄	φ ₅	φ ₆	A	φ ₃	φ ₄	φ ₅	φ ₆
0,54	-0,3284	-0,9395	-1,0432	-0,5836	0,86	-0,8404	-1,0981	-0,4114	+0,6291
0,55	-0,3475	-0,9539	-1,0356	-0,5478	0,87	-0,8531	-1,0940	-0,3831	+0,6611
0,56	-0,3664	-0,9676	-1,0270	-0,5112	0,88	-0,8656	-1,0895	-0,3546	+0,6923
0,57	-0,3851	-0,9807	-1,0173	-0,4740	0,89	-0,8779	-1,0845	-0,3259	+0,7228
0,58	-0,4036	-0,9931	-1,0066	-0,4363	0,90	-0,8900	-1,0790	-0,2969	+0,7524
0,59	-0,4219	-1,0049	-0,9950	-0,3980	0,91	-0,9019	-1,0731	-0,2677	+0,7812
0,60	-0,4400	-1,0160	-0,9824	-0,3594	0,92	-0,9136	-1,0667	-0,2384	+0,8092
0,61	-0,4579	-1,0265	-0,9689	-0,3203	0,93	-0,9251	-1,0599	-0,2089	+0,8363
0,62	-0,4756	-1,0363	-0,9545	-0,2809	0,94	-0,9364	-1,0526	-0,1793	+0,8625
0,63	-0,4931	-1,0455	-0,9393	-0,2413	0,95	-0,9475	-1,0449	-0,1496	+0,8878
0,64	-0,5104	-1,0541	-0,9232	-0,2015	0,96	-0,9584	-1,0367	-0,1198	+0,9121
0,65	-0,5275	-1,0621	-0,9064	-0,1615	0,97	-0,9691	-1,0282	-0,0899	+0,9356
0,66	-0,5444	-1,0695	-0,8887	-0,1214	0,98	-0,9796	-1,0192	-0,0560	+0,9580
0,67	-0,5611	-1,0763	-0,8703	-0,0813	0,99	-0,9899	-1,0098	-0,0300	+0,9795
0,68	-0,5776	-1,0824	-0,8512	-0,0412	1,00	-1,0000	-1,0000	-0,0000	+1,0000
0,69	-0,5939	-1,0880	-0,8314	-0,0011	1,01	-1,0099	-0,9898		
0,70	-0,6100	-1,0930	-0,8109	+0,0388	1,02	-1,0196	-0,9792		
0,71	-0,6259	-1,0974	-0,7898	+0,0786	1,03	-1,0291	-0,9682		
0,72	-0,6416	-1,1012	-0,7680	+0,1182	1,04	-1,0384	-0,9569		
0,73	-0,6571	-1,1045	-0,7456	+0,1576	1,05	-1,0475	-0,9451		
0,74	-0,6724	-1,1072	-0,7227	+0,1966	1,06	-1,0564	-0,9330		
0,75	-0,6875	-1,1094	-0,6992	+0,2354	1,07	-1,0651	-0,9205		
0,76	-0,7024	-1,1110	-0,6752	+0,2737	1,08	-1,0736	-0,9077		
0,77	-0,7171	-1,1120	-0,6507	+0,3117	1,09	-1,0819	-0,8945		
0,78	-0,7316	-1,1126	-0,6257	+0,3492	1,10	-1,0900	-0,8810		
0,79	-0,7459	-1,1125	-0,6003	+0,3862	1,11	-1,0979	-0,8671		
0,80	-0,7600	-1,1120	-0,5744	+0,4227	1,12	-1,1056	-0,8530		
0,81	-0,7739	-1,1109	-0,5481	+0,4587	1,13	-1,1131	-0,8384		
0,82	-0,7876	-1,1094	-0,5215	+0,4941	1,14	-1,1204	-0,8235		
0,83	-0,8011	-1,1073	-0,4944	+0,5288	1,15	-1,1275	-0,8084		
0,84	-0,8144	-1,1047	-0,4671	+0,5629	1,16	-1,1344	-0,7929		
0,85	-0,8275	-1,1016	-0,4394	+0,5964	1,17	-1,1411	-0,7771		

Таблица 1 (окончание)

A	φ ₃	φ ₄	A	φ ₃	φ ₄	A	φ ₃	φ ₄
1, 18	-1, 1476	-0, 7610	1, 50	-1, 2500	-0, 1250	1, 82	-1, 1476	+0, 6134
1, 19	-1, 1539	-0, 7447	1, 51	-1, 2499	-0, 1025	1, 83	-1, 1411	+0, 6360
1, 20	-1, 1600	-0, 7280	1, 52	-1, 2496	-0, 0798	1, 84	-1, 1344	+0, 6585
1, 21	-1, 1659	-0, 7111	1, 53	-1, 2491	-0, 0571	1, 85	-1, 1275	+0, 6809
1, 22	-1, 1716	-0, 6931	1, 54	-1, 2484	-0, 0343	1, 86	-1, 1204	+0, 7031
1, 23	-1, 1771	-0, 6764	1, 55	-1, 2475	-0, 0114	1, 87	-1, 1131	+0, 7253
1, 24	-1, 1824	-0, 6586	1, 56	-1, 2464	+0, 0116	1, 88	-1, 1056	+0, 7473
1, 25	-1, 1875	-0, 6406	1, 57	-1, 2451	+0, 0346	1, 89	-1, 0979	+0, 7692
1, 26	-1, 1924	-0, 6224	1, 58	-1, 2436	+0, 0577	1, 90	-1, 0900	+0, 7910
1, 27	-1, 1971	-0, 6039	1, 59	-1, 2419	+0, 0808	1, 91	-1, 0819	+0, 8126
1, 28	-1, 2016	-0, 5852	1, 60	-1, 2400	+0, 1040	1, 91	-1, 0736	+0, 8341
1, 29	-1, 2059	-0, 5662	1, 61	-1, 2379	+0, 1272	1, 93	-1, 0651	+0, 8554
1, 30	-1, 2100	-0, 5470	1, 62	-1, 2356	+0, 1505	1, 94	-1, 0564	+0, 8766
1, 31	-1, 2139	-0, 5276	1, 63	-1, 2331	+0, 1738	1, 95	-1, 0475	+0, 8976
1, 32	-1, 2176	-0, 5080	1, 64	-1, 2304	+0, 1971	1, 96	-1, 0384	+0, 9185
1, 33	-1, 2211	-0, 4881	1, 65	-1, 2275	+0, 2204	1, 97	-1, 0291	+0, 9391
1, 34	-1, 2244	-0, 4681	1, 66	-1, 2244	+0, 2437	1, 98	-1, 0196	+0, 9596
1, 35	-1, 2275	-0, 4479	1, 67	-1, 2211	+0, 2670	1, 99	-1, 0099	+0, 9799
1, 36	-1, 2304	-0, 4275	1, 68	-1, 2176	+0, 2904	2, 00	-1, 0000	+1, 0000
1, 37	-1, 2331	-0, 4069	1, 69	-1, 2139	+0, 3137			
1, 38	-1, 2356	-0, 3861	1, 70	-1, 2100	+0, 3370			
1, 39	-1, 2379	-0, 3651	1, 71	-1, 2059	+0, 3603			
1, 40	-1, 2340	-0, 3440	1, 72	-1, 2016	+0, 3836			
1, 41	-1, 2419	-0, 3227	1, 73	-1, 1971	+0, 4068			
1, 42	-1, 2436	-0, 3013	1, 74	-1, 1924	+0, 4300			
1, 43	-1, 2451	-0, 2797	1, 75	-1, 1875	+0, 4531			
1, 44	-1, 2464	-0, 2580	1, 76	-1, 1824	+0, 4762			
1, 45	-1, 2475	-0, 2361	1, 77	-1, 1771	+0, 4993			
1, 46	-1, 2484	-0, 2141	1, 78	-1, 1716	+0, 5222			
1, 47	-1, 2491	-0, 1920	1, 79	-1, 1659	+0, 5452			
1, 48	-1, 2496	-0, 1698	1, 80	-1, 1600	+0, 5680			
1, 49	-1, 2499	-0, 1474	1, 81	-1, 1539	+0, 5908			

ЗНАЧЕНИЯ $\sum_1^4 \varphi_i$ И D_4 ДЛЯ ЧЕТЫРЕХЦИЛИНДРОВОГО ДВИГАТЕЛЯ

$\varphi_1 = +1,0000$ рад

A	$\sum_1^4 \varphi_i$	D_4	A	$\sum_1^4 \varphi_i$	D_4	A	$\sum_1^4 \varphi_i$	D_4	A	$\sum_1^4 \varphi_i$	D_4
0,00	+4,0000	+0,2500	0,27	+1,7177	-0,1602	0,54	+0,1921	4,8893	0,81	-0,6948	+1,5988
0,01	+3,9006	+0,2411	0,28	+1,6484	-0,1880	0,55	+0,1486	6,4180	0,82	-0,7170	+1,5473
0,02	+3,8024	+0,2320	0,29	+1,5802	-0,2176	0,56	+0,1060	9,1298	0,83	-0,7384	+1,4996
0,03	+3,7009	+0,2216	0,30	+1,5130	-0,2492	0,57	+0,0642	15,2739	0,84	-0,7591	+1,4553
0,04	+3,6095	+0,2128	0,31	+1,4468	-0,2829	0,58	+0,0233	42,6448	0,85	-0,7791	+1,4139
0,05	+3,5149	+0,2027	0,32	+1,3816	-0,3190	0,59	-0,0168	59,8891	0,86	-0,7985	+1,3752
0,06	+3,4214	+0,1923	0,33	+1,3175	-0,3578	0,60	-0,0560	18,1429	0,87	-0,8171	+1,3389
0,07	+3,3291	+0,1815	0,34	+1,2543	-0,3997	0,61	-0,0944	10,8759	0,88	-0,8351	+1,3046
0,08	+3,2379	+0,1709	0,35	+1,1921	-0,4449	0,62	-0,1319	7,8553	0,89	-0,8524	+1,2723
0,09	+3,1479	+0,1588	0,36	+1,1309	-0,4940	0,63	-0,1686	6,1996	0,90	-0,8690	+1,2412
0,10	+3,0590	+0,1468	0,37	+1,0707	-0,5474	0,64	-0,2045	5,1536	0,91	-0,8850	+1,2125
0,11	+2,9713	+0,1344	0,38	+1,0115	-0,6059	0,65	-0,2396	4,4324	0,92	-0,9003	+1,1848
0,12	+2,8847	+0,1214	0,39	+0,9533	-0,6701	0,66	-0,2739	3,9048	0,93	-0,9150	+1,1584
0,13	+2,7992	+0,1080	0,40	+0,8960	-0,7411	0,67	-0,3073	3,5016	0,94	-0,9290	+1,1330
0,14	+2,7149	+0,0940	0,41	+0,8397	-0,8199	0,68	-0,3000	3,1833	0,95	-0,9424	+1,1088
0,15	+2,6316	+0,0795	0,42	+0,7843	-0,9079	0,69	-0,3719	2,9255	0,96	-0,9551	+1,0854
0,16	+2,5495	+0,0643	0,43	+0,7299	-1,0070	0,70	-0,4030	2,7122	0,97	-0,9673	+1,0630
0,17	+2,4685	+0,0484	0,44	+0,6764	-1,1194	0,71	-0,4333	2,5326	0,98	-0,9788	+1,0413
0,18	+2,3886	+0,0319	0,45	+0,6239	-1,2480	0,72	-0,4628	2,3793	0,99	-0,9897	+1,0203
0,19	+2,3097	+0,0146	0,46	+0,5723	-1,3968	0,73	-0,4916	2,2367	1,00	-1,0000	+1,0000
0,20	+2,2320	-0,0036	0,47	+0,5216	-1,5709	0,74	-0,5196	2,1308	1,01	-1,0097	+0,9803
0,21	+2,1553	-0,0226	0,48	+0,4718	-1,7774	0,75	-0,5469	2,0286	1,02	-1,0188	+0,9611
0,22	+2,0798	-0,0426	0,49	+0,4230	-2,0266	0,76	-0,5734	1,9376	1,03	-1,0273	+0,9425
0,23	+2,0052	-0,0637	0,50	+0,3750	-2,3333	0,77	-0,5991	1,8561	1,04	-1,0353	+0,9262
0,24	+1,9318	-0,0858	0,51	+0,3279	-2,7205	0,78	-0,6242	1,7825	1,05	-1,0426	+0,9065
0,25	+1,8597	-0,1092	0,52	+0,2818	-3,2244	0,79	-0,6484	1,7157	1,06	-1,0494	+0,8891
0,26	+1,7880	-0,1340	0,53	+0,2365	-3,9843	0,80	-0,6720	1,6548	1,07	-1,0556	+0,8720

Таблица II (окончание)

A	$\sum_{1}^4 \varphi_i$	D ₄	A	$\sum_{1}^4 \varphi_i$	D ₄	A	$\sum_{1}^4 \varphi_i$	D ₄
1,08	-1,0613	+0,8553	1,39	-0,9930	+0,3677	1,70	-0,5730	0,5881
1,09	-1,0664	+0,8388	1,40	-0,9780	+0,3517	1,71	-0,5556	0,6485
1,10	-1,0710	+0,8226	1,41	-0,9746	+0,3311	1,72	-0,5380	0,7129
1,11	-1,0750	+0,8066	1,42	-0,9649	+0,3123	1,73	-0,5203	0,7818
1,12	-1,0785	+0,7908	1,43	-0,9548	+0,2929	1,74	-0,5024	0,8558
1,13	-1,0815	+0,7752	1,44	-0,9444	+0,2732	1,75	-0,4841	0,9355
1,14	-1,0839	+0,7598	1,45	-0,9336	+0,2529	1,76	-0,4662	1,0216
1,15	-1,0859	+0,7444	1,46	-0,9225	+0,2321	1,77	-0,4478	1,1149
1,16	-1,0873	+0,7292	1,47	-0,9111	+0,2108	1,78	-0,4294	1,2164
1,17	-1,0882	+0,7141	1,48	-0,8994	+0,1888	1,79	-0,4118	1,3240
1,18	-1,0886	+0,6991	1,49	-0,8873	+0,1662	1,80	-0,3920	1,4490
1,19	-1,0886	+0,6841	1,50	-0,8750	+0,1429	1,81	-0,3731	1,5832
1,20	-1,0880	+0,6691	1,51	-0,8624	+0,1188	1,82	-0,3542	1,7320
1,21	-1,0870	+0,6542	1,52	-0,8494	+0,0940	1,83	-0,3351	1,8981
1,22	-1,0847	+0,6390	1,53	-0,8362	+0,0683	1,84	-0,3159	2,0845
1,23	-1,0835	+0,6243	1,54	-0,8227	+0,0416	1,85	-0,2966	2,2954
1,24	-1,0810	+0,6093	1,55	-0,8089	+0,0141	1,86	-0,2773	2,5361
1,25	-1,0778	+0,5944	1,56	-0,7948	-0,0146	1,87	-0,2578	2,8134
1,26	-1,0748	+0,5791	1,57	-0,7805	-0,0443	1,88	-0,2383	3,1364
1,27	-1,0710	+0,5639	1,58	-0,7659	-0,0753	1,89	-0,2187	3,5178
1,28	-1,0668	+0,5485	1,59	-0,7511	-0,1076	1,90	-0,1990	3,9749
1,29	-1,0621	+0,5331	1,60	-0,7360	-0,1413	1,91	-0,1793	4,5330
1,30	-1,0570	+0,5175	1,61	-0,7207	-0,1765	1,92	-0,1595	5,2299
1,31	-1,0515	+0,5018	1,62	-0,7051	-0,2134	1,93	-0,1397	6,1253
1,32	-1,0455	+0,4858	1,63	-0,6893	-0,2521	1,94	-0,1198	7,3183
1,33	-1,0392	+0,4697	1,64	-0,6733	-0,2927	1,95	-0,0999	8,9875
1,34	-1,0325	+0,4534	1,65	-0,6571	-0,3354	1,96	-0,0799	11,4900
1,35	-1,0254	+0,4368	1,66	-0,6407	-0,3804	1,97	-0,0600	15,6591
1,36	-1,0179	+0,4200	1,67	-0,6241	-0,4279	1,98	-0,0400	23,9950
1,37	-1,0100	+0,4028	1,68	-0,6072	-0,4782	1,99	-0,0200	48,9975
1,38	-1,0017	+0,3854	1,69	-0,5902	-0,5315	2,00	-0,0000	∞

ЗНАЧЕНИЯ $\sum_{i=1}^6 \varphi_i$ И D_6 ДЛЯ ШЕСТИЦИЛИНДРОВОГО ДВИГАТЕЛЯ

$\varphi_1 = +1,0000$ рад.

A	$\sum_{i=1}^6 \varphi_i$	D_6	A	$\sum_{i=1}^6 \varphi_i$	D_6	A	$\sum_{i=1}^6 \varphi_i$	D_6	A	$\sum_{i=1}^6 \varphi_i$	D_6
0,00	+6,0000	+0,1667	0,27	-0,0245	+40,9833	0,54	-1,4347	+0,4068	0,81	-0,7843	-0,5848
0,01	+5,6555	+0,1509	0,28	-0,1401	+7,2581	0,55	-1,4348	+0,3818	0,82	-0,7444	-0,6637
0,02	+5,3221	+0,1341	0,29	-0,2497	+4,1156	0,56	-1,4322	+0,3569	0,83	-0,7040	-0,7511
0,03	+4,9949	+0,1163	0,30	-0,3534	+2,9299	0,57	-1,4271	+0,3322	0,84	-0,6632	-0,8487
0,04	+4,6873	+0,0965	0,31	-0,4514	+2,3049	0,58	-1,4196	+0,3073	0,85	-0,6221	-0,9585
0,05	+4,3856	+0,0762	0,32	-0,5437	+1,9172	0,59	-1,4098	+0,2823	0,86	-0,5808	-1,0832
0,06	+4,0940	+0,0538	0,33	-0,6307	+1,6521	0,60	-1,3978	+0,2571	0,87	-0,5392	-1,2261
0,07	+3,8123	+0,0294	0,34	-0,7123	+1,4584	0,61	-1,3836	+0,2315	0,88	-0,4974	-1,3919
0,08	+3,5404	+0,0028	0,35	-0,7887	+1,3100	0,62	-1,3674	+0,2054	0,89	-0,4555	-1,5869
0,09	+3,2780	-0,0263	0,36	-0,8602	+1,1920	0,63	-1,3492	+0,1788	0,90	-0,4135	-1,8197
0,10	+3,0250	-0,0585	0,37	-0,9266	+1,0954	0,64	-1,3292	+0,1516	0,91	-0,3715	-2,1029
0,11	+2,7811	-0,0944	0,38	-0,9884	+1,0144	0,65	-1,3075	+0,1235	0,92	-0,3295	-2,4557
0,12	+2,5462	-0,1345	0,39	-1,0456	+0,9452	0,66	-1,2840	+0,0945	0,93	-0,2876	-2,9076
0,13	+2,3201	-0,1799	0,40	-1,0982	+0,8849	0,67	-1,2590	+0,0646	0,94	-0,2458	-3,5083
0,14	+2,1026	-0,2318	0,41	-1,1466	+0,8317	0,68	-1,2324	+0,0334	0,95	-0,2042	-4,3472
0,15	+1,8935	-0,2918	0,42	-1,1907	+0,7840	0,69	-1,2044	+0,0009	0,96	-0,1628	-5,6027
0,16	+1,6926	-0,3621	0,43	-1,2307	+0,7408	0,70	-1,1751	-0,0230	0,97	-0,1216	-7,6916
0,17	+1,4997	-0,4459	0,44	-1,2667	+0,7013	0,71	-1,1445	-0,0687	0,98	-0,0808	-11,8638
0,18	+1,3148	-0,5477	0,45	-1,2989	+0,6647	0,72	-1,1126	-0,1062	0,99	-0,0402	-24,3694
0,19	+1,1375	-0,6744	0,46	-1,3273	+0,6306	0,73	-1,0797	-0,1459	1,00	-0,0000	—∞
0,20	+0,9681	-0,8366	0,47	-1,3522	+0,5985	0,74	-1,0457	-0,1880			
0,21	+0,8052	-1,0540	0,48	-1,3736	+0,5681	0,75	-1,0107	-0,2329			
0,22	+0,65017	-1,3594	0,49	-1,3915	+0,5390	0,76	-0,9749	-0,2808			
0,23	+0,5017	-1,8230	0,50	-1,4062	+0,5114	0,77	-0,9382	-0,3322			
0,24	+0,3603	-2,6144	0,51	-1,4178	+0,4841	0,78	-0,9007	-0,3877			
0,25	+0,2256	-4,2814	0,52	-1,4263	+0,4578	0,79	-0,8625	-0,4478			
0,26	+0,0974	-10,1280	0,53	-1,4319	+0,4321	0,80	-0,8237	-0,5132			

Грязная, рваная печать греческой буквы «сигмы» произошла по вине типографии. За недостатком фабричной «сигмы», последняя была изготовлена кустарным способом.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
I. Введение	3
II. Вынужденные колебания вне резонанса	13
III. Вынужденные колебания при резонансе	23
IV. Теоретические торсионные диаграммы и действительная степень неравномерности вращения	51
V. Критическая и оптимальная величины CD^2 маховика	60
VI. Классическая степень неравномерности вращения	68
VII. Дополнительные напряжения скручивания в валу, возникающие при его крутильных колебаниях	72

Отв. редактор проф. М. А. Усов.

Техн. редактор Н. Дугина.

Сдано в произв. 4/VII 1937 г.
Формат бумаги $60 \times 92\frac{1}{16}$. Печ. л. 5.
Свердловск. отд. ОНТИ № 268.
Тираж 1000.

Подписано к печати 25/IX 1937 г.
Знаков в одном п. ч. л. 49776
Уполн. Свердлобллита № В-3906.

Тип. газ.-журн. изд-ва Свердл. Обкома ВКП(б) «Ур. рабочий». Зак. 8666.