

КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

Р. А. Воронов

Изменение режима работы электрической цепи, происходящее в связи с изменением сопротивления нагрузки, или по каким-либо другим причинам, влечет за собой увеличение или уменьшение всех токов и напряжений, а также изменение углов сдвига фаз между ними. При изображении их векторами таковые будут изменяться как по величине, так и по направлению.

Получающиеся при этих изменениях геометрические места концов векторов носят название диаграмм токов и напряжений. Эти диаграммы, в общем случае, могут получать самые различные формы, начиная от прямой линии и кончая сложными кривыми высших порядков. Давая графическую зависимость между векторами токов и напряжений и позволяя находить еще мощности и ряд других величин, эти диаграммы сложны для использования и в общем виде почти не имеют применения.

Наиболее простой и чаще других встречающейся формой таких диаграмм будет окружность и, как частный случай ее, прямая линия. Эти диаграммы, называемые круговыми, очень просты для построения и обладают при этом многими ценными свойствами, легко используемыми для практических целей. Имея в электротехнике большое распространение, круговые диаграммы все же не используются везде, где это возможно и полезно, а если и используются, то очень неполно. Причиной ограниченного применения круговых диаграмм можно считать некоторые затруднения, встречающиеся при их построении, что объясняется неясными и неполными указаниями, даваемыми различными источниками, в которых изложены их свойства и способы построения.

Наибольшим распространением пользуется диаграмма для простой Т-образной схемы замещения однофазного или симметричного трехфазного токов. При этом обычно ограничиваются только нахождением тока, поступающего из сети в данную цепь, и мощностями полной и потребляемой нагрузки, т. е. полезной. Иногда добавляются еще ток и напряжение нагрузки и очень редко какие-либо другие величины. Круговые диаграммы для несимметричных многофазных цепей хотя и строятся (например, перемещение нулевой точки трехфазной цепи), но очень редко, и ставятся они как-то отдельно от остальных диаграмм, хотя и обладают совершенно теми же свойствами.

Тем не менее, при правильном и полном построении диаграмм, таковые могут быть применены в очень многих случаях (почти всегда, когда имеется одна изменяющаяся величина—параметр) и по ним могут быть получаемы все токи, напряжения, мощности, углы сдвигов фаз и т. д. Целью настоящей работы является обобщение имеющегося материала и приведение его в форму, дающую возможность легко применить эти построения в различных случаях. Рассматривается два различных случая: первый, когда дана схема и известны все включенные сопротивления, и второй, когда цепь осуществлена в натуре, но неизвестны включенные сопротивления, а иногда и сама схема соединения.

Ряд приведенных в работе доказательств и способов построения являются новыми и ниоткуда незаимствованными, другие же взяты из различных источников. Диаграммы другой формы, чем круговые (бициркулярные, параболические и др.), в настоящую работу не включены.

I. ТЕОРИЯ КРУГОВЫХ ДИАГРАММ

1. УСЛОВИЯ ПОЛУЧЕНИЯ КРУГОВЫХ ДИАГРАММ

Если режим работы электрической цепи определяется значением переменной величины \dot{K} (параметра), чаще всего сопротивления нагрузки, то другая величина \dot{N} , для которой необходимо построить круговую диаграмму (обычно ток или напряжение), связана с ней уравнением вида

$$\dot{N} = \frac{\dot{A} + \dot{B} \dot{K} + \dot{E} \dot{K}^2 + \dots}{\dot{C} + \dot{D} \dot{K} + \dot{F} \dot{K}^2 + \dots},$$

где $\dot{A}; \dot{B}; \dot{C}; \dot{D}; \dot{E}; \dot{F}; \dots$ постоянные коэффициенты.

В общем виде эта диаграмма может получать самые различные формы и, только при определенных соотношениях между коэффициентами, будет иметь форму дуги окружности. Так как дугу окружности легче строить, чем какую-либо другую кривую, и так как при этом все свойства диаграммы легче и лучше используются, то желательно стремиться к созданию условий, необходимых для получения этой формы кривой.

Наиболее простой и чаще всего встречающейся диаграммой будет такая, для которой все коэффициенты, кроме $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$ и \dot{D} обращаются в нуль, т. е. зависимость между \dot{N} и \dot{K} имеет вид

$$\dot{N} = \frac{\dot{A} + \dot{B} \dot{K}}{\dot{C} + \dot{D} \dot{K}}. \quad (1)$$

Диаграммы этого только вида и являются предметом распространения в настоящей работе.

Переменная величина \dot{K} может в общем случае получать любые значения от $+\infty$ до $-\infty$, причем для построения всех диаграмм главную роль имеют два из них: одно, когда $\dot{K} = \pm \infty$, что соответствует

$$\dot{N}_\infty = \frac{\dot{B}}{\dot{D}} \quad (2)$$

и второе, когда $\dot{K} = 0$, что соответствует

$$\dot{N}_0 = \frac{\dot{A}}{\dot{C}}. \quad (3)$$

В случае, когда \dot{K} представляет собой сопротивление или проводимость нагрузки, эти значения соответствуют холостому ходу цепи ($\dot{Z}_n = \infty$ или $\dot{Y}_n = 0$) и короткому замыканию ($\dot{Z}_n = 0$ или $\dot{Y}_n = \infty$).

Изобразив значения \dot{N}_∞ и \dot{N}_0 в виде отрезков (векторов), возьмем там же еще один отрезок (вектор) для \dot{N} , соответствующий некоторо-

му значению \dot{K} (рис. 1). Концы этих отрезков должны находиться на иско-
мой дуге круговой диаграммы.

Соединяя полученные точки прямыми, находим треугольник abc . Сто-
роны этого треугольника найдутся как разности отрезков \dot{N} , \dot{N}_0 и \dot{N}_∞ .

$$\overline{cb} = \overline{ob} - \overline{oc} = \dot{N}_0 - \dot{N} = \frac{\dot{A}}{\dot{C}} - \frac{\dot{A} + \dot{B}\dot{K}}{\dot{C} + \dot{D}\dot{K}} = \frac{\dot{A}\dot{D} - \dot{B}\dot{C}}{\dot{C} + \dot{D}\dot{K}} \cdot \frac{\dot{K}}{\dot{C}}, \quad (4)$$

$$\overline{ac} = \overline{oc} - \overline{oa} = \dot{N} - \dot{N}_\infty = \frac{\dot{A} + \dot{B}\dot{K}}{\dot{C} + \dot{D}\dot{K}} - \frac{\dot{B}}{\dot{D}} = \frac{\dot{A}\dot{D} - \dot{B}\dot{C}}{\dot{C} + \dot{D}\dot{K}} \cdot \frac{1}{\dot{D}}. \quad (5)$$

Отношение полученных значений будет равно

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{cb}} = \frac{\dot{N} - \dot{N}_\infty}{\dot{N}_0 - \dot{N}} = \frac{1}{\dot{K}} \cdot \frac{\dot{C}}{\dot{D}}.$$

Если представить комплексы в символической форме

$$\dot{A} = A \cdot e^{j\alpha}; \quad \dot{B} = B e^{j\beta}; \quad \dot{C} = C e^{j\gamma}; \quad \dot{D} = D e^{j\delta}; \quad \dot{K} = K e^{j\psi}, \quad (6)$$

то это отношение получает вид

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{cb}} = \frac{C}{K \cdot D} \cdot e^{j(\gamma - \delta - \psi)}.$$

Угол ρ между направлениями отрезков \overline{ac} и \overline{cb} будет равен аргументу по-
лученного выражения, т. е. равен
разности

$$\rho = \gamma - \delta - \psi. \quad (7)$$

Для того, чтобы при измене-
нии значения \dot{K} точка c перемеща-
лась по дуге окружности, необхо-
димо и достаточно, чтобы угол ρ
оставался все время постоянным

$$\rho = \gamma - \delta - \psi = \text{const.}$$

Так как выше было оговорено, что
коэффициенты \dot{C} и \dot{D} постоянны, то
постоянными же должны быть и
их аргументы γ и δ , из чего сле-
дует, что и значение ψ не должно
изменяться при изменении величи-
ны \dot{K} .

Таким образом единственным и
вполне достаточным условием по-
лучения круговой диаграммы яв-
ляется постоянство аргумента пе-
ременной величины уравнения (1)

$$\psi = \text{const.}$$

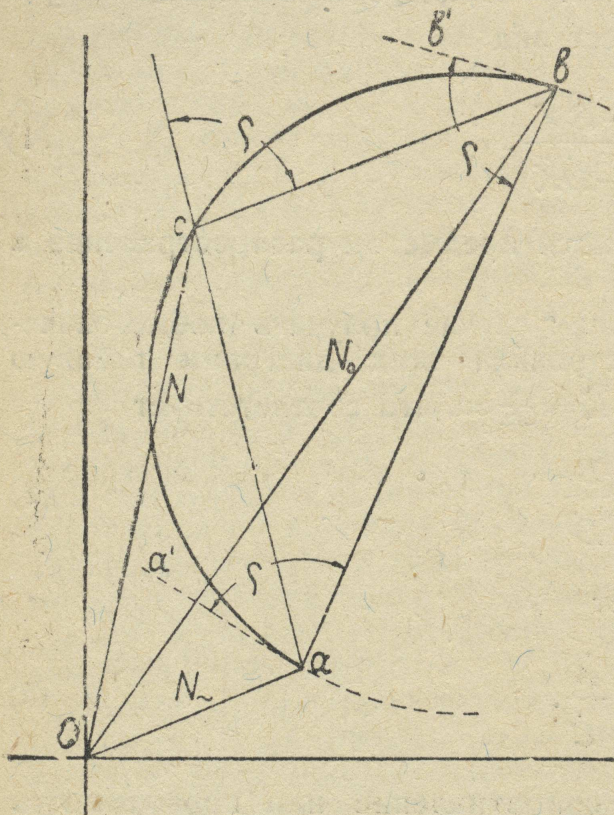


Рис. 1.

В большинстве случаев, когда переменной величиной является сопротив-
ление или проводимость нагрузки, это условие сводится к постоянству
угла сдвига фаз или постоянству коэффициента мощности нагрузки.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КРУГОВЫХ ДИАГРАММ.

По свойству касательных и хорд окружностей угол ρ будет иметься также между хордой \overline{ab} и касательными aa' и bb' , проведенными в ее концах, причем он будет измеряться половиной дуги acb . Из уравнения (7) следует, что этот угол будет зависеть только от значений аргументов переменной величины \dot{K} и коэффициентов \dot{C} и \dot{D} , входящих в знаменатель уравнения (1), и совершенно не будет зависеть от коэффициентов \dot{A} и \dot{B} числителя того же уравнения.

Из этого следует, что для всех величин, у которых знаменатель будет одинаков, получаются диаграммы с равными углами ρ , а следовательно, и с подобными сегментами $acba$, отличающимися только размерами хорды.¹⁾

Эта хорда может быть для каждой диаграммы найдена как разность

$$\overline{ab} = \overline{ob} - \overline{oa} = \dot{N}_0 - \dot{N}_\infty = \frac{\dot{A}}{\dot{C}} - \frac{\dot{B}}{\dot{D}} = \frac{\dot{A}\dot{D} - \dot{B}\dot{C}}{\dot{C}\dot{D}}, \quad (8)$$

а ее длина может быть вычислена из соотношения сторон треугольника рис. 1

$$(ab)^2 = (ob)^2 + (oa)^2 - 2(ob) \cdot (oa) \cdot \cos(\overline{ob}; \overline{oa})$$

или, подставляя значения сторон из уравнений (2) и (3),

$$H^2 = N_0^2 + N_\infty^2 - 2N_0N_\infty \cos(\varphi_0 - \varphi_\infty) = \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{D}\right)^2 - 2\frac{AB}{C \cdot D} \cos(\varphi_0 - \varphi_\infty), \quad (8a)$$

где H — длина хорды в том же масштабе, как и значения N_0 и N_∞ , а углы φ_0 и φ_∞ являются аргументами значений этих величин.

Угол sab определится, как аргумент отношения сторон \overline{ac} и \overline{ab} , которое, принимая во внимание уравнения (5) и (8), будет равно

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} = \frac{\dot{N} - \dot{N}_\infty}{\dot{N}_0 - \dot{N}_\infty} = \frac{\dot{C}}{\dot{C} + \dot{D}\dot{K}}. \quad (9)$$

Это отношение также не будет зависеть от коэффициентов \dot{A} и \dot{B} , т. е. угол sab для данного значения переменной величины \dot{K} будет одинаков для всех диаграмм, имеющих одинаковые знаменатели в уравнениях (1). Из этого следует, что при любом значении \dot{K} для всех таких диаграмм будут получаться подобные треугольники abc .

При отрицательных значениях \dot{K} точка s будет находиться на пунктирной части окружности (рис. 1), причем, если угол ρ меньше 90° , то эта часть окружности будет больше сплошной, а если больше 90° , то — наоборот. Для большинства диаграмм переменного тока величина \dot{K} не может получать отрицательных значений (сопротивления), т. е. будет использоваться только часть диаграммы.

В случае, если угол ρ окажется равным 0° или 180° , окружность диаграммы получает форму прямой (радиус равен бесконечности). В прямую же линию превращается диаграмма и в том случае, когда коэффициенты \dot{C} или \dot{D} равны нулю, т. е. когда \dot{N}_0 или \dot{N}_∞ обращаются в бесконечность.

¹⁾ Одинаковые углы ρ получаются не только при одинаковых знаменателях ур. 1, но и при всех таких, для которых имеется условие $\gamma - \delta = \text{const}$. Но такие диаграммы не будут иметь подобных треугольников abc , следовательно, не смогут быть совмещены (см. ур. 9).

В этих случаях многие свойства диаграммы исчезают или не могут быть использованы.

3. СОВМЕЩЕНИЕ КРУГОВЫХ ДИАГРАММ

Если имеется несколько круговых диаграмм, построенных для величин, у которых знаменатели уравнения (1) одинаковы, т. е.

$$\dot{N}_1 = \frac{\dot{A}_1 + \dot{B}_1 K_1}{\dot{C} + \dot{D} K}; \quad \dot{N}_2 = \frac{\dot{A}_2 + \dot{B}_2 K}{\dot{C} + \dot{D} K}$$

и так далее, то точки C_1 и C_2 (рис. 2), найденные для одного и того же значения переменной K , будут находиться в вершинах подобных треугольников $a_1 c_1 b_1$ и $a_2 c_2 b_2$.

Чтобы для некоторого значения N_1 , определяемого отрезком oc_1 , найти соответствующее значение N_2 , необходимо построить на второй диаграмме треугольник $c_2 a_2 b_2$, подобный треугольнику $c_1 a_1 b_1$ первой диаграммы (или, что все равно, $\angle c_2 a_2 b_2$, равный $\angle c_1 a_1 b_1$). Это построение, особенно при большом количестве диаграмм или значительном числе различных N_1 , для которых нужно произвести таковые, отнимают много времени и могут легко повести к ряду ошибок.

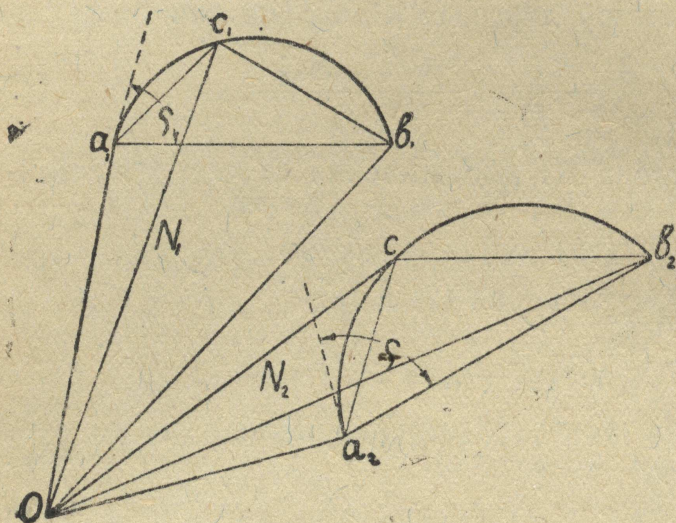


Рис. 2.

Гораздо удобнее изменить взаимное расположение диаграмм с таким расчетом, чтобы их хорды совпали между собой по направлению, а точки a_1, a_2, a_3 совместились в одну; такие совмещенные диаграммы, соответствующие диаграммам рис. 2, представлены на рис. 3.

При подобном расположении диаграмм совпадают по направлению все касательные $a_1 a_1', a_2 a_2'$ и стороны $a_1 c_1, a_2 c_2$ подобных треугольников. Для нахождения точки c_2 , соответствующей точке c_1 дугой диаграммы, достаточно будет провести прямую ac_1 и найти место ее пересечения с дугой соответствующей окружности.

Численные значения отрезков, изображающих величины N_1 и N_2 , при этом не изменяются, но их взаимное расположение (углы сдвига) не будут равняться действительным, имеющимся в цепи. Если

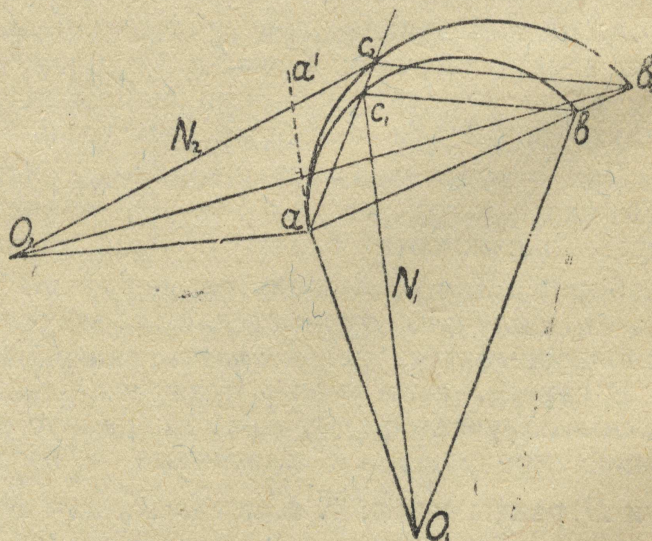


Рис. 3.

для совмещения диаграмм первая была повернута на угол τ_1 , а вторая на угол τ_2 , то действительный угол сдвига между \dot{N}_1 и \dot{N}_2 будет равен

$$\angle(\dot{N}_1; \dot{N}_2) = \angle(\dot{N}'_1; \dot{N}'_2) - (\tau_1 \tau_2),$$

т. е. из угла, получающегося на рис. 3, необходимо вычесть разность углов поворота диаграмм.

Вместо совмещения точек $a_1; a_2; a_3$ могут быть совмещены точки $b_1; b_2; b_3$ диаграмм. В этом случае совпадут касательные $b_1 b'_1; b_2 b'_2$ и стороны $c_1 b_1$ и $c_2 b_2$ треугольников. Для нахождения точки c_2 придется проводить прямую bc_1 , беря ее пересечение с дугой окружности. Это расположение диаграмм менее удобно, так как при нем труднее получать значения переменной величины K (см. ниже).

Во многих случаях оказывается удобным произвести дальнейшее совмещение диаграмм, добившись слияния всех окружностей в одну. Для этого необходимо так изменить масштабы отдельных величин, чтобы хорды всех диаграмм оказались равными друг другу. Подобные диаграммы приведены на рис. 4. В этом случае совсем нет надобности отыскивать точку c_2 , так как она совместится с точкой c_1 .

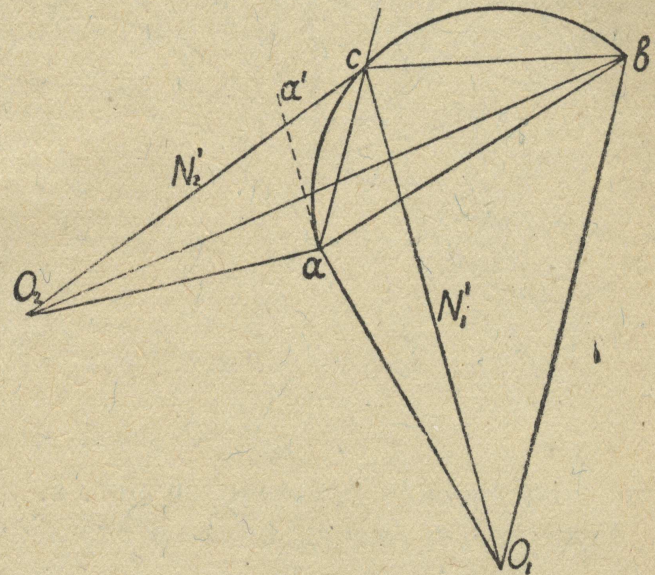


Рис. 4.

Этот вид диаграмм хотя и очень удобен для построений и использования, но он может уменьшить наглядность, так как, вследствие изменения масштабов,

меньшие по величине токи или напряжения могут оказаться больше по отрезкам, чем другие токи или напряжения, большие, чем они, по величине.

Ниже на рисунках 16, 17 и 18 построены для одной и той же цепи диаграммы всех трех видов. Сравнивая их, легко видеть упрощения, получающиеся для совмещенных диаграмм, в особенности для последнего случая.

4. СЛОЖЕНИЕ КРУГОВЫХ ДИАГРАММ

Если необходимо построить круговую диаграмму для величины \dot{N}_3 , которая равна сумме двух других

$$\dot{N}_3 = \dot{N}_1 + \dot{N}_2,$$

для которых уже имеются построенные диаграммы, то такое построение удобнее производить графическим путем, а не вычислением.

Так как

$$\dot{N}_3 = \frac{\dot{A}_1 + \dot{B}_1 \dot{K}}{\dot{C} + \dot{D} \dot{K}} + \frac{\dot{A}_2 + \dot{B}_2 \dot{K}}{\dot{C} + \dot{D} \dot{K}} = \frac{(\dot{A}_1 + \dot{A}_2) + (\dot{B}_1 + \dot{B}_2) \dot{K}}{\dot{C} + \dot{D} \dot{K}},$$

то эта диаграмма будет иметь тот же угол ρ , как слагаемые диаграммы. Легко видеть, что для $K = \infty$ и $K = 0$ имеются соотношения

$$\dot{N}_{3\infty} = \dot{N}_{1\infty} + \dot{N}_{2\infty}; \quad \dot{N}_{30} = \dot{N}_{10} + \dot{N}_{20}.$$

Из этого следует, что для нахождения суммарной диаграммы достаточно графическим путем сложить отрезки, соответствующие этим значениям, и на их разности, как на хорде (рис. 5), построить дугу новой окружности, имеющей тот же угол ρ . Производить это построение можно, конечно, только не для совмещенных диаграмм, имеющих один и тот же масштаб.

Подобным же путем при вычислении

$$\dot{N}_4 = \dot{N}_1 - \dot{N}_2$$

необходимо найти разности отрезков крайних значений и по ним построить дугу новой окружности. Удобнее при этом находить разность отрезков не по замыкающей, а как сумму, но с заменой вычитаемой величины на противоположную ей

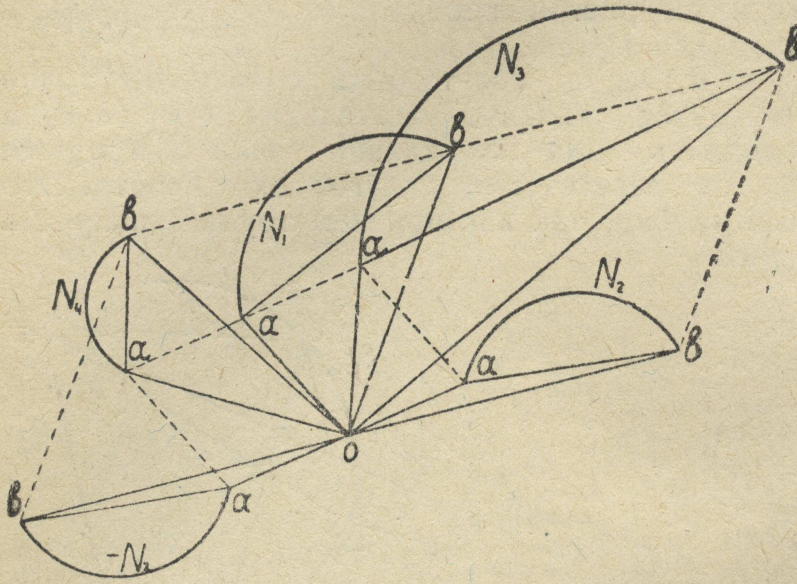


Рис. 5.

$$\dot{N}_4 = \dot{N}_1 + (-\dot{N}_2).$$

Такое построение показано на рис. 5.

Если при сложении одна из слагаемых \dot{M} постоянна:

$$\dot{N}_2 = \dot{N}_1 + \dot{M},$$

то достаточно перенести начало координат из точки O_1 в точку O_2 на величину отрезка, соответствующего обратному значению $-\dot{M}$. Правильность такого переноса видна из рис. 6.

При вычитании

$$\dot{N}_3 = \dot{N}_1 - \dot{M}$$

перенос должен быть совершен в точку O_3 на величину $-(\dot{M}) = +\dot{M}$, т. е. в конец отрезка, изображающего величину \dot{M} (рис. 6).

При обратном вычитании

$$\dot{N}_4 = \dot{M} - \dot{N}_1,$$

которое можно заменить таким

$$(-\dot{N}_4) = \dot{N}_1 - \dot{M},$$

получаем предыдущий случай, но направление результирующего отрезка будет не от точки O_3 к окружности, а наоборот, т. е. подвижным будет начало этого вектора, а конец всегда будет в точке O_3 .

Подобное расположение векторов удобно также тогда, когда их разности постоянны (напр. фазовые напряжения). В этом случае, повернув

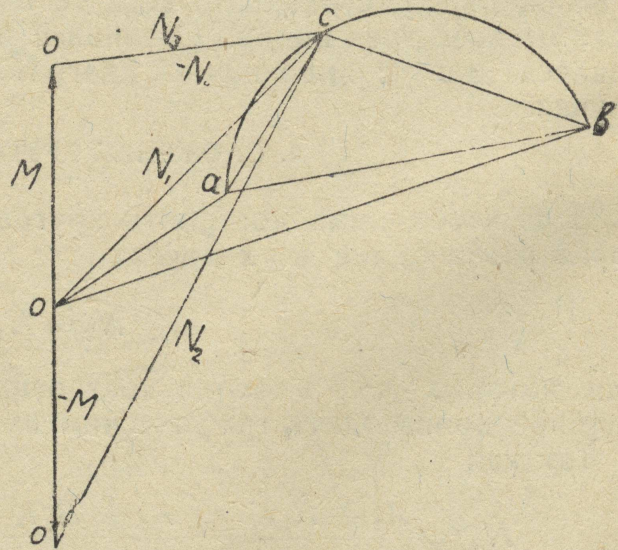


Рис. 6.

все диаграммы на 180 градусов и беря отрицательные направления отрезков

$$-(-\dot{N}) = \dot{N},$$

получим прежние значения, но при другом расположении диаграмм. На рис. 7а показано обычное расположение трех векторов фазовых напряжений, когда на окружности находятся их концы, а на рис. 7б — перевернутая диаграмма, при которой концы векторов неподвижны.

5. ПЕРЕМЕННАЯ K НА ДИАГРАММЕ.

Переменная величина K , от которой зависят все остальные изменяющиеся величины N_1 , N_2 и т. д., может быть на любой диаграмме представлена в виде отрезка, взятого по некоторому направлению в определенном масштабе. Для этого необходимо из произвольной точки d , взятой на хорде ab любой из диаграмм, провести прямую dd' , параллельную касательной aa' , соответствующей значению $K = \infty$ (рис. 8). Отрезок de , получаемый при пересечении этой прямой стороной ac треугольника abc (или продолжением этой стороны), будет пропорционален значению K .

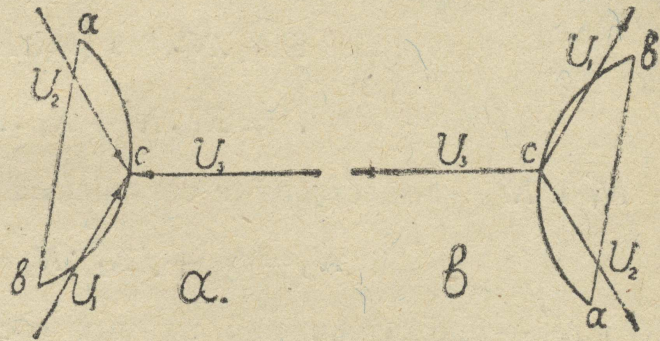


Рис. 7.

Из подобия треугольников aed и abc имеем

$$\frac{ed}{ad} = \frac{cb}{ac}$$

или, подставляя значения из уравнений (4) и (5),

$$ed = ad \cdot \frac{D}{C} \cdot K. \quad (10)$$

Так как отрезок ad постоянен так же, как и коэффициенты C и D , то ed будет в определенном масштабе соответствовать искомому значению величины K .

Если из произвольной точки f хорды ab провести прямую ff' , параллельную касательной bb' , соответствующей значению $K = 0$, и брать на ней

отрезок fg , получаемый от пересечения со стороной bc треугольника abc (рис. 8), то этот отрезок будет пропорционален обратной величине K , т. е. будет давать значения $\frac{1}{K}$.

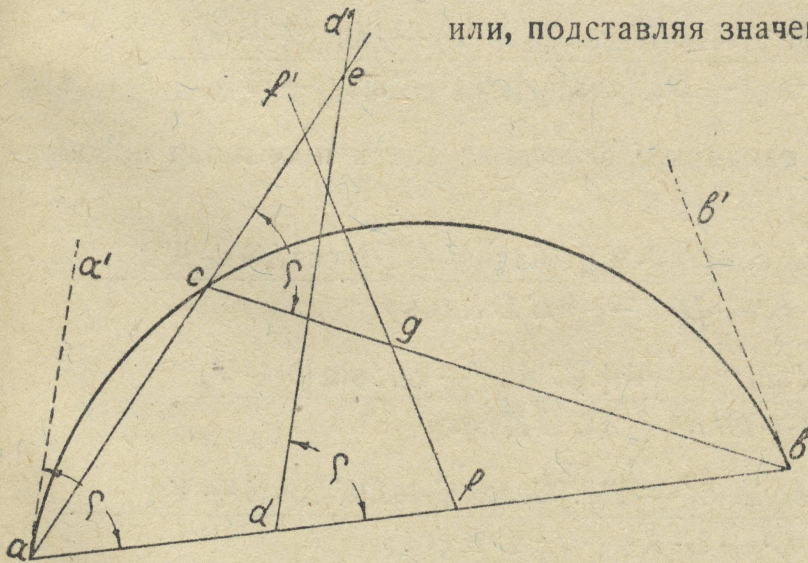


Рис. 8.

Из подобия треугольников следует

$$fg = bf \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{1}{K}, \quad (10a)$$

что и подтверждает сказанное выше.

6. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ ДВУХ ДИАГРАММ

Часто бывает необходимо иметь возможность графическим путем находить произведение двух величин, изображаемых двумя диаграммами с одинаковыми углами ρ , принадлежащими одной и той же цепи (например, мощность). В этом случае требуется на диаграммах найти такие отрезки, которые бы в некотором масштабе давали значения

$$P N_1 \cdot N_2 \cdot \cos(\dot{N}_1; \dot{N}_2) \quad (11)$$

или

$$P = N_1' \cdot N_2' + N_1'' \cdot N_2'', \quad (11a)$$

где N_1' и N_2' — вещественные составляющие комплексов

$$\dot{N}_1 = N_1' + j N_1''; \dot{N}_2 = N_2' + j N_2'',$$

а N_1'' и N_2'' — множители при мнимых составляющих тех же комплексов. В соответствии с уравнениями (1) и (6) имеем для первой величины

$$\dot{N}_1 = \frac{A_1 e^{j\alpha_1} + B_1 K e^{j(\beta_1 + \Psi)}}{C e^{j\gamma} + D K e^{j(\delta + \Psi)}}$$

или, переходя к тригонометрической форме,

$$\dot{N}_1 = \frac{A_1 (\cos \alpha_1 + j \sin \alpha_1) + B_1 K [\cos(\beta_1 + \Psi) + j \sin(\beta_1 + \Psi)]}{C (\cos \gamma + j \sin \gamma) + D K [\cos(\delta + \Psi) + j \sin(\delta + \Psi)]}$$

Освобождаясь от мнимой единицы j в знаменателе и производя преобразования, получаем

$$\begin{aligned} N_1' &= \frac{[A_1 \cos \alpha_1 + B_1 K \cos(\beta_1 + \Psi)] \cdot [C \cos \gamma + D K \cos(\delta + \Psi)]}{C^2 + D^2 K^2 + 2 C D K \cos \rho} + \\ &+ \frac{[A_1 \sin \alpha_1 + B_1 K \sin(\beta_1 + \Psi)] \cdot [C \sin \gamma + D K \sin(\delta + \Psi)]}{C^2 + D^2 K^2 + 2 C D K \cos \rho}, \\ N_1'' &= \frac{[A_1 \sin \alpha_1 + B_1 K \sin(\beta_1 + \Psi)] \cdot [C \cos \gamma + D K \cos(\delta + \Psi)]}{C^2 + D^2 K^2 + 2 C D K \cos \rho} - \\ &- \frac{[A_1 \cos \alpha_1 + B_1 K \cos(\beta_1 + \Psi)] \cdot [C \sin \gamma + D K \sin(\delta + \Psi)]}{C^2 + D^2 K^2 + 2 C D K \cos \rho}, \end{aligned}$$

где угол ρ введен согласно уравнению (7).

Подобные же выражения получим и для N_2' и N_2'' , заменив индекс 1 на индекс 2 (вместо A_1 , взяв A_2 и т. д.).

Подставляя эти выражения в уравнение (11a) и производя преобразования и сокращения (выпущены, так как занимают очень много места), получаем уравнение следующего вида

$$P = \frac{K [A_1 B_2 \cos (\beta_2 - \alpha_1 + \Psi) + A_2 B_1 \cos (\beta_1 - \alpha_2 + \Psi)]}{C_2 + D^2 K^2 C D K \cos \rho} + \frac{K^2 B_1 B_2 \cos (\beta_1 - \beta_2) + A_1 A_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2)}{C^2 + D^2 K^2 + 2 C D K \cos \rho}. \quad (12)$$

Докажем, что это значение будет в некотором масштабе соответствовать отрезку cd (рис. 9), взятому из точки c диаграммы перпендикулярно к некоторой прямой mn .

Если дуга acb построена для данной цепи и имеет угол ρ между хордой и касательной, то из уравнения (9) имеем

$$\overline{ac} = \overline{ab} \cdot \frac{\dot{C}}{\dot{C} + D\dot{K}};$$

введя обозначения

$$\overline{ac} = \dot{E}; \overline{ab} = \dot{H}, \quad (13)$$

имеем

$$\dot{E} = \dot{H} \frac{\dot{C}}{\dot{C} + D\dot{K}}$$

или

$$\dot{E} = \dot{H} \frac{C(\cos \gamma + j \sin \gamma)}{C(\cos \gamma + j \sin \gamma) + DK[\cos(\delta + \Psi) + j \sin(\delta + \Psi)]}.$$

Освобождаясь от мнимой единицы в знаменателе, получаем

$$\dot{E} = \dot{H} \frac{C^2 + CDK \cos \rho + j CDK \sin \rho}{C^2 + D^2 K^2 + 2 CDK \cos \rho};$$

если ввести еще угол η наклона хорды ab к прямой mn и взять

$$\dot{H} = H(\sin \eta - j \cos \eta),$$

то вещественная часть \dot{E} будет располагаться перпендикулярно прямой mn и будет равна

$$E' = cf = H \frac{C^2 \sin \eta + CDK \sin(\rho + \eta)}{C^2 + D^2 K^2 + 2 CDK \cos \rho}.$$

Обозначив еще через F расстояние от точки a до прямой mn

$$\overline{am} = \overline{fd} = F,$$

найдем выражение для отрезка cd , который обозначим через Q ,

$$Q = \overline{cd} = \overline{cf} + \overline{fd} = H \frac{C^2 \sin \eta + CDK \sin(\rho + \eta)}{C^2 + D^2 K^2 + 2 CDK \cos \rho} + F.$$

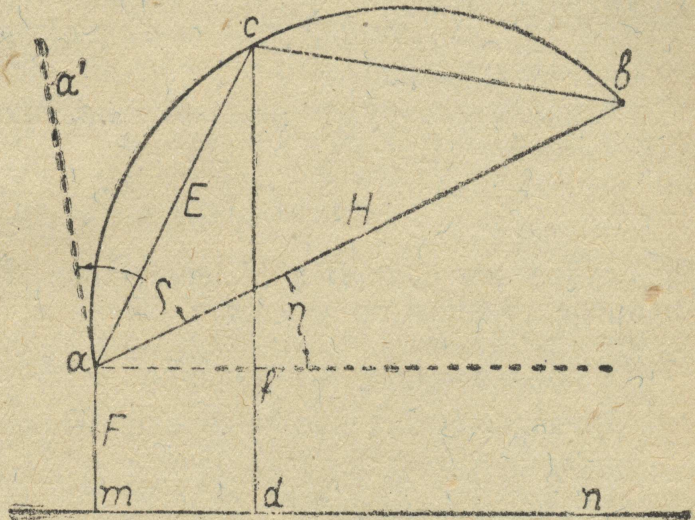


Рис. 9.

После приведения к общему знаменателю получаем

$$Q = \frac{K [H \sin(\rho + \eta) + 2F \cos \rho] \cdot CD + K^2 FD^2 + (H \sin \eta + F) C^2}{C^2 + D^2 K^2 + 2CDK \cos \rho}. \quad (14)$$

Сравнивая полученные выражения (12) и (14), видим, что их знаменатели одинаковы, а числители имеют один и тот же характер. Для полного тождества обоих уравнений необходимо выбрать отрезок F и угол η так, чтобы коэффициенты при K и K^2 и свободный член в обоих уравнениях оказались одинаковыми.

Уравнение (12) дает значения P в размерности произведения (например, для мощности в ваттах), уравнение же (14) дает для Q значения в том масштабе, в каком измерены отрезки H и F (например, в масштабе токов или прямо в сантиметрах). Чтобы их приравнять, необходимо ввести множитель M так, чтобы

$$P = MQ,$$

этот множитель будет равен отношению масштабов M_P и M_Q :

$$M = \frac{M_P}{M_Q};$$

в случае же если F и H измерялись в сантиметрах или миллиметрах, то непосредственно получится масштаб произведения

$$M = M_P.$$

Сравнивая почленно уравнения, получаем условия их совпадения

$$MCD [H \sin(\rho + \eta) + 2F \cos \rho] = A_1 B_2 \cos(\beta_2 - \alpha_1 + \Psi) + A_2 B_1 \cos(\beta_1 - \alpha_2 + \Psi)$$

$$MFD^2 = B_1 B_2 \cos(\beta_1 - \beta_2)$$

$$MC^2 (H \sin \eta + F) = A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2);$$

введя обозначения

$$R = \frac{A_1 B_2 \cos(\beta_2 - \alpha_1 + \Psi) + A_2 B_1 \cos(\beta_1 - \alpha_2 + \Psi)}{CD},$$

$$S = \frac{B_1 \cdot B_2 \cos(\beta_1 - \beta_2)}{D_2}, \quad (15)$$

$$T = \frac{A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{C^2},$$

получим, решая эти уравнения, значение искомого угла η

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{(T - S) \sin \rho}{R - (T + S) \cos \rho}; \quad (16)$$

после чего легко найти масштаб M

$$M = \frac{T - S}{H \sin \eta} = \frac{R - 2S \cos \rho}{H \sin(\rho + \eta)}, \quad (17)$$

а затем и отрезок F

$$F = \frac{S}{M}. \quad (18)$$

Все полученные уравнения дают возможность построить прямую mn и определить масштаб, в котором будут получаться отрезки произведения.

Если прямую cd проводить не перпендикулярно прямой mn , а под некоторым углом $\theta \neq 90^\circ$, то это отразится только на масштабе, причем новый масштаб будет равен

$$M' = M \sin \theta. \quad (19)$$

Во многих случаях бывает удобным направлять эти отрезки параллельно или одной из касательных aa' , или bb' , или же параллельно хорде, так как при этом получаются наиболее удобные масштабы (см. ниже).

Если в уравнение (18) вместо масштаба M подставить этот новый масштаб, то полученное значение

$$F^1 = \frac{S}{M^1} = \frac{F}{\sin \theta}$$

даст расстояние от точки a до прямой mn не по перпендикуляру, а по тому направлению, которое выбрано для отрезков cd .

Если необходимо найти отрезки, дающие не одно произведение, а сразу сумму нескольких произведений (например, мощность всех фаз многофазной цепи), то найдя для каждого из них значения R , S и T , надо в уравнения (16), (17) и (18) подставить их суммы ΣR , ΣS и ΣT .

В некоторых случаях требуется найти произведение

$$P = N_1 N_2 \sin (\dot{N}_1; \dot{N}_2), \quad (20)$$

отличающееся от уравнения (11) множителем $\sin (\dot{N}_1; \dot{N}_2)$ вместо $\cos (\dot{N}_1; \dot{N}_2)$ (например, реактивная мощность). Это произведение равносильно

$$P = N_1 N_2 \cos [(\dot{N}_1; \dot{N}_2) - 90^\circ],$$

т. е. одинаково с уравнением (11), но одна из диаграмм должна быть повернута на угол 90° . Для этого случая можно воспользоваться всеми полученными выше соотношениями, но введя для одной из величин углы

$$\alpha_2^1 = \alpha_2 - 90^\circ; \quad \beta_2^1 = \beta_2 - 90^\circ.$$

Уравнения (15) для данного случая получают следующий вид:

$$R = \frac{A_2 B_1 \sin (\beta_1 - \alpha_2 + \Psi) - A_1 B_2 \sin (\beta_2 - \alpha_1 + \Psi)}{C \cdot D};$$

$$S = \frac{B_1 B_2 \sin (\beta_1 - \beta_2)}{D^2}; \quad (21)$$

$$T = \frac{A_1 A_2 \sin (\alpha_1 - \alpha_2)}{C^2}.$$

Все остальные подсчеты остаются без изменения.

7. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Рассмотрим несколько случаев произведений отрезков, часто встречающихся в цепях переменного тока:

1. Положим, что требуется найти отрезки, соответствующие произведению

$$P = L (N_1)^2 = L N_1 \cdot N_1,$$

причем коэффициент \dot{B} уравнения (1) равен нулю. В этом случае точка a совпадает с началом координат, т. к. $N_2 = 0$. Коэффициенты сомножителей будут равны

$$B^1 = B_2 = 0; \quad LA_1 = A_2; \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

что дает по уравнениям (15)

$$R=0; S=0; T=\frac{LA_1^2}{C^2}=LH^2M_1^2,$$

где H —длина хорды в сантиметрах, а M_1 —масштаб, соответствующий величине N_1 . По уравнениям (16) и (18) имеем

$$\operatorname{tng} \eta = -\operatorname{tng} \rho; \eta = -\rho; F=0;$$

это показывает, что прямая mn будет проходить через точку a и совпадет с касательной aa^1 (рис. 10). Масштаб для произведения будет равен по уравнению (17)

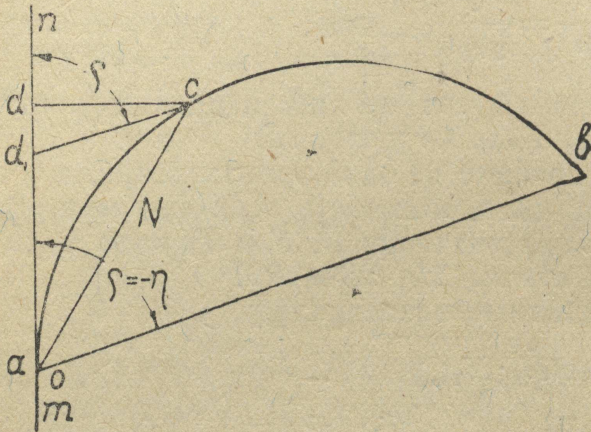


Рис. 10.

$$M = -L \frac{HM_1^2}{\sin \rho}. \quad (22)$$

Знак минус на величине масштаба не отражается, но указывает, что прямая cd идет не по направлению к хорде, а от нее.

Если проводить прямую cd_1 не перпендикулярно к прямой mn , а параллельно хорде ab (в этом случае $\theta = \rho$), то получим новый масштаб по уравнению (19)

$$M^1 = -LHM_1^2. \quad (22a)$$

2. Рассмотрим второй случай, когда требуется найти такое же произведение

$$P = L(N_1)^2 = LN_1 \cdot N_1,$$

где равным нулю оказывается коэффициент A^1 . При этом точка b совпадет с началом координат, т. к. $N_0 = 0$. Коэффициенты сомножителей будут равны

$$A_1 = A_2 = 0; \\ LB_1 = B_1; \beta_1 = \beta_2,$$

что дает по уравнениям (15)

$$R=0; T=0; \\ S = \frac{LB_1^2}{D^2} = LH^2M_1^2$$

Из уравнений (16), (17) и (18) следует, что

$$\operatorname{tng} \eta = \operatorname{tng} \rho; \eta = \rho; \\ F = -H \sin \rho;$$

$$M = -L \frac{HM_1^2}{\sin \rho} \quad (23)$$

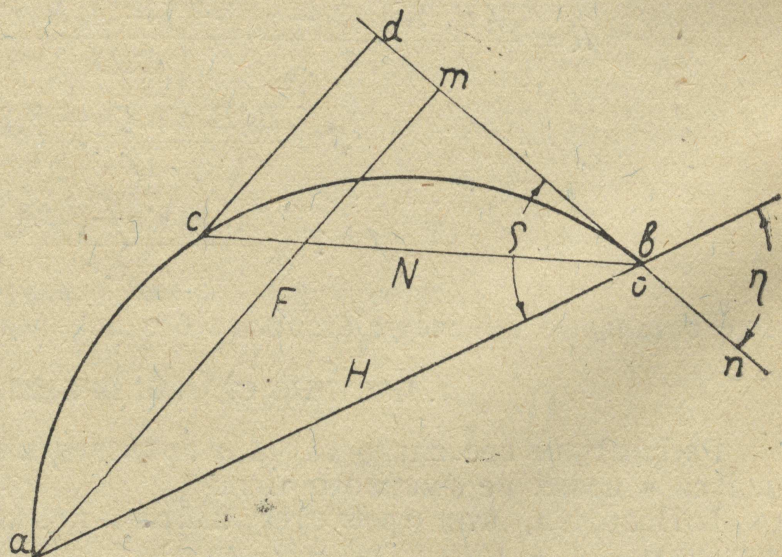


Рис. 11.

1) При $A = 0$ и $B = 0$ эта прямая будет полуполюарой окружности, M может быть найдена графическим построением.

Из рис. 11 легко видеть, что прямая mn пройдет через точку b и совпадет с касательной bb^1 . Подобно предыдущему, если проводить прямую cd_1 параллельно хорде ($\theta = \rho$), получим масштаб

$$M' = -LHM_1^2. \quad (23a)$$

В обоих рассмотренных случаях прямая проходит через начало координат и совпадает с касательной.

3. Найдем произведение N_1 и N_2 в случае, если имеется соотношение

$$\dot{N}_2 = \dot{K} N_1$$

причем $B_1 = O$. В этом случае $A_2 = O$ и $B_2 = A_1$. Из уравнений (15) имеем

$$R = \frac{A_1 B_2 \cos \Psi}{C \cdot D};$$

$$S = 0; T = 0.$$

Так как для N_1 начало координат совпадает с точкой a , а для N_2 — с точкой b , то хорда будет равна

$$HM_1 = \frac{A_2}{C}; \quad HM_2 = \frac{B_2}{D},$$

что дает для R значение

$$R = H^2 M_1 M_2 \cdot \cos \Psi.$$

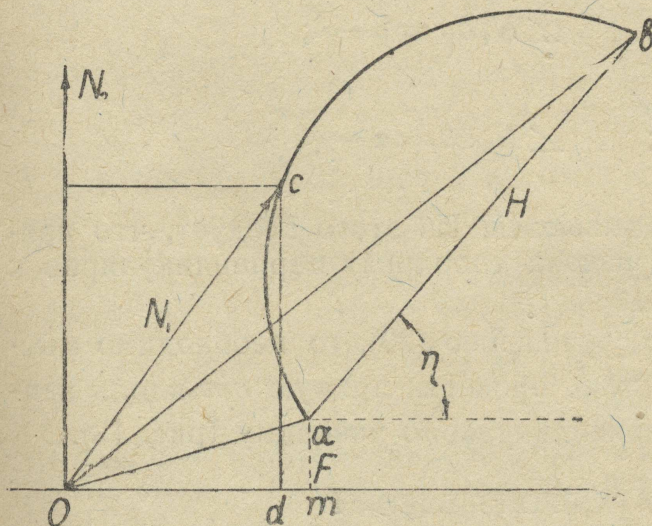


Рис. 13.

Из уравнений (16) и (18) находим

$$\operatorname{tg} \eta = 0; \quad \eta = 0; \quad F = 0,$$

т. е. прямая mn совпадает с хордой ab (рис. 12).

Масштаб произведения определится из уравнения (17)

$$M = \frac{R}{H \sin \rho} = \\ = HM_1 M_2 \frac{\cos \Psi}{\sin \rho}. \quad (24)$$

Если же взять отрезки параллельно одной из касательных aa^1 или bb^1 (отрезки cd_1 и cd_2), то новый масштаб будет равен

$$M' = HM_1 M_2 \cos \Psi, \quad (24a)$$

т. к. при этом $\theta = \rho$.

4. Рассмотрим, наконец, тот случай, когда в произведении один из сомножителей (N_2) постоянен. В этом случае, приведя его к знаменателю второго сомножителя

$$\dot{N}_2 = \frac{\dot{N}_2 \dot{C} + N_2 \dot{D}\dot{K}}{\dot{C} + \dot{D}\dot{K}},$$

можно воспользоваться выведенными выше соотношениями. Если расположить диаграмму так, чтобы \dot{N}_2 направился по оси вещественных значений (рис. 13), то уравнения (15), (16), (17) и (18) после преобразований (выпущены, как занимающие много места) дают

$$\operatorname{tng} \eta = \frac{\frac{A}{C} \cos(\alpha - \gamma) - \frac{B}{D} \cos(\beta - \delta)}{\frac{A}{C} \sin(\alpha - \gamma) - \frac{B}{D} \sin(\beta - \delta)}$$

$$M = N_2 M_1; F = \frac{B}{D} \cos(\beta - \delta). \quad (25)$$

Для выяснения значений полученных выражений рассмотрим этот случай несколько иным путем. Расположив диаграмму как это сделано на рис. 13, получим

$$\dot{N}_2 = \dot{N}_2^1 = \dot{N}_2,$$

что дает для произведения

$$P = N_1^1 N_2^1 = N_1^1 \cdot N_2;$$

из этого уравнения получаем, что произведение определяется вещественной составляющей \dot{N}_1 и будет равно отрезку cd до горизонтальной оси, взятому в масштабе $M = N_2 M_1$.

Так как для крайних значений

$$oa = N_{1\infty} = \frac{B}{D}; \quad \angle N_2 oa = \beta - \delta;$$

$$ob = N_{10} = \frac{A}{C}; \quad \angle N_2 ob = \alpha - \gamma,$$

то уравнения (25) полностью оправдываются. Из этого следует, что прямая mn должна быть проведена из начала координат перпендикулярно к направлению отрезка \dot{N}_2 .

Если находить произведение по уравнению (20), то необходимо мысленно повернуть отрезок \dot{N}_2 на 90° , т. е. провести прямую mn вдоль направления \dot{N}_2 и брать отрезки cd_1 перпендикулярно таковому (рис. 13).

8. ОТНОШЕНИЕ ДВУХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

При использовании круговых диаграмм может быть необходимо знать значения отношений двух произведений как, например, при нахождении коэффициента полезного действия

$$\eta = \frac{V_2 I_2 \cos \varphi_2}{V_1 I_1 \cos \varphi_1}$$

или угла сдвига фаз

$$\operatorname{tng} \varphi = \frac{VI \sin \varphi}{VI \cos \varphi}; \operatorname{tng} (\dot{I}_1; \dot{I}_2) = \frac{I_1 I_2 \sin (\dot{I}_1; \dot{I}_2)}{I_1 I_2 \cos (\dot{I}_1; \dot{I}_2)}.$$

Докажем, что отношение двух произведений может быть получено в виде отрезка, взятого по определенному направлению. Предположим, что для некоторой приведенной диаграммы (рис. 14) первое произведение P_1 представляется отрезком cd_1 , перпендикулярным к прямой $m_1 n_1$, а второе произведение P_2 отрезком cd_2 , перпендикулярным к $m_2 n_2$, и что необходимо найти отношение $\frac{P_2}{P_1}$.

Найдем точку k пересечения прямых $m_1 n_1$ и $m_2 n_2$ и проведем из произвольной точки e , лежащей на $m_2 n_2$, прямую ef , параллельную прямой $m_1 n_1$. Соединив точки k и c и продолжив эту прямую до пересечения с прямой ef , получим отрезок eg , который и будет пропорционален искомому отношению.

Для доказательства проведем прямую eh , перпендикулярную прямой kc . Из подобия треугольников

$$\Delta egh \sim \Delta ckd; \Delta ehk \sim \Delta cd_2 k$$

получаем

$$\frac{eh}{cd_1} = \frac{eg}{kc}; \frac{cd_2}{eh} = \frac{kc}{ke};$$

перемножая почленно обе пропорции, найдем

$$\frac{cd_2}{cd_1} = \frac{eg}{ke}.$$

Если масштабы произведений равны M_1 и M_2 , т. е.

$$P_1 = M_1 \cdot cd_1; P_2 = M_2 \cdot cd_2,$$

то отрезок eg будет давать искомое отношение

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{M_2 \cdot cd_2}{M_1 \cdot cd_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{1}{ke} \cdot eg$$

в масштабе

$$M_3 = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{1}{ke}. \quad (26)$$

Если отрезки произведений брать под углами Θ_1 и Θ_2 к соответствующим прямым, то масштаб отношений будет равен

$$M_3^1 = \frac{1}{ke} \cdot \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2}. \quad (26a)$$

Взяв точку e на прямой $m_1 n_2$ и проведя прямую ef параллельно направлению $m_2 n_2$, получим подобным же путем отношение $\frac{P_1}{P_2}$, обратное имевшемуся ранее.

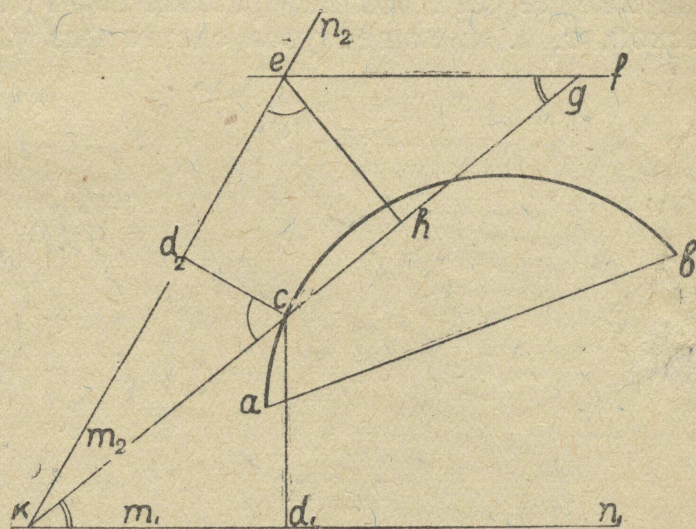


Рис. 14.

Эти построения не могут быть выполнены, если прямые m_1n_1 и m_2n_2 параллельны друг другу, или если точка их пересечения лежит далеко за пределами чертежа.

II. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ КРУГОВЫХ ДИАГРАММ

1. Т-ОБРАЗНАЯ СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ

В качестве первого примера по применению полученных выше уравнений рассмотрим простую Т-образную схему замещения, изображенную на рис. 15. Примем сопротивления, включенные в эту цепь, равными

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = 1 + j2; \quad \dot{Z}_0 = -j20.$$

Напряжение сети возьмем равным 200 В, нагрузку же будем считать омической, т. е. имеющей угол сдвига фаз $\varphi_n = 0$; ($\cos \varphi_n = 1$).

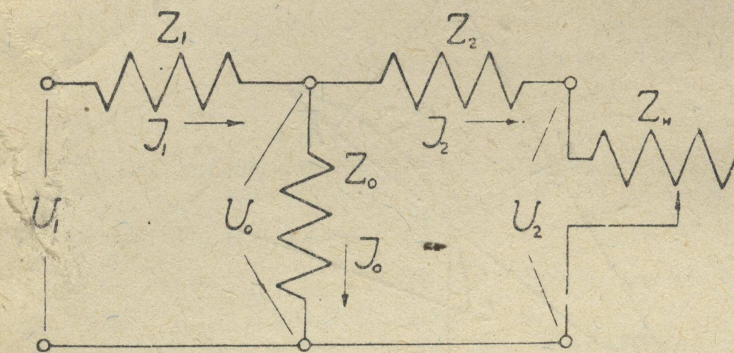


Рис. 15.

Разрешая эту цепь, находим обычным путем уравнения, связывающие все токи и напряжения с сопротивлением нагрузки.

Общий ток равен

$$I_1 = \dot{V}_1 \frac{(\dot{Z}_0 + \dot{Z}_2) + \dot{Z}_н}{\dot{C} + \dot{D}\dot{Z}_н};$$

ток нагрузки

$$I_2 = \dot{V}_1 \frac{\dot{Z}_0}{\dot{C} + \dot{D}\dot{Z}_н};$$

ток в ответвлении

$$I_0 = \dot{V}_1 \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_н}{\dot{C} + \dot{D}\dot{Z}_н};$$

напряжение на нагрузке

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 \dot{Z}_2 \frac{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_н}{\dot{C} + \dot{D}\dot{Z}_н};$$

напряжение в месте ответвления

$$\dot{V}_0 = \dot{V}_1 \dot{Z}_0 \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_н}{\dot{C} + \dot{D}\dot{Z}_н};$$

и потери напряжения в сопротивлениях \dot{Z}_1 и \dot{Z}_2 до и после разветвления

$$\dot{V}_{н1} = \dot{V}_1 \dot{Z}_1 \frac{(\dot{Z}_0 + \dot{Z}_2) + \dot{Z}_н}{\dot{C} + \dot{D}\dot{Z}_н}; \quad \dot{V}_{н2} = \dot{V}_1 \dot{Z}_2 \frac{\dot{Z}_0}{\dot{C} + \dot{D}\dot{Z}_н};$$

причем во всех этих уравнениях коэффициенты \dot{C} и \dot{D} знаменателей имеют выражения

$$\dot{C} = \dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_0 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_0; \quad \dot{D} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_0.$$

Из полученных уравнений видим, что для всех токов и напряжений знаменатели оказались одинаковыми, т. е. все диаграммы будут иметь один и тот же угол ρ между хордой и касательной.

Вычисляем значения коэффициентов \dot{C} и \dot{D} :

$$\dot{C} = (1 + j2)^2 + 2(1 + j2)(-j20) = 77j36 = 85 \angle -25,0^\circ,$$

$$\dot{D} = (1 + j2) + (-j20) = 1 - j18 = 18,02 \angle -86,8^\circ,$$

или

$$C = 85; D = 18,02; \gamma = -25,0^\circ; \delta = -86,8^\circ.$$

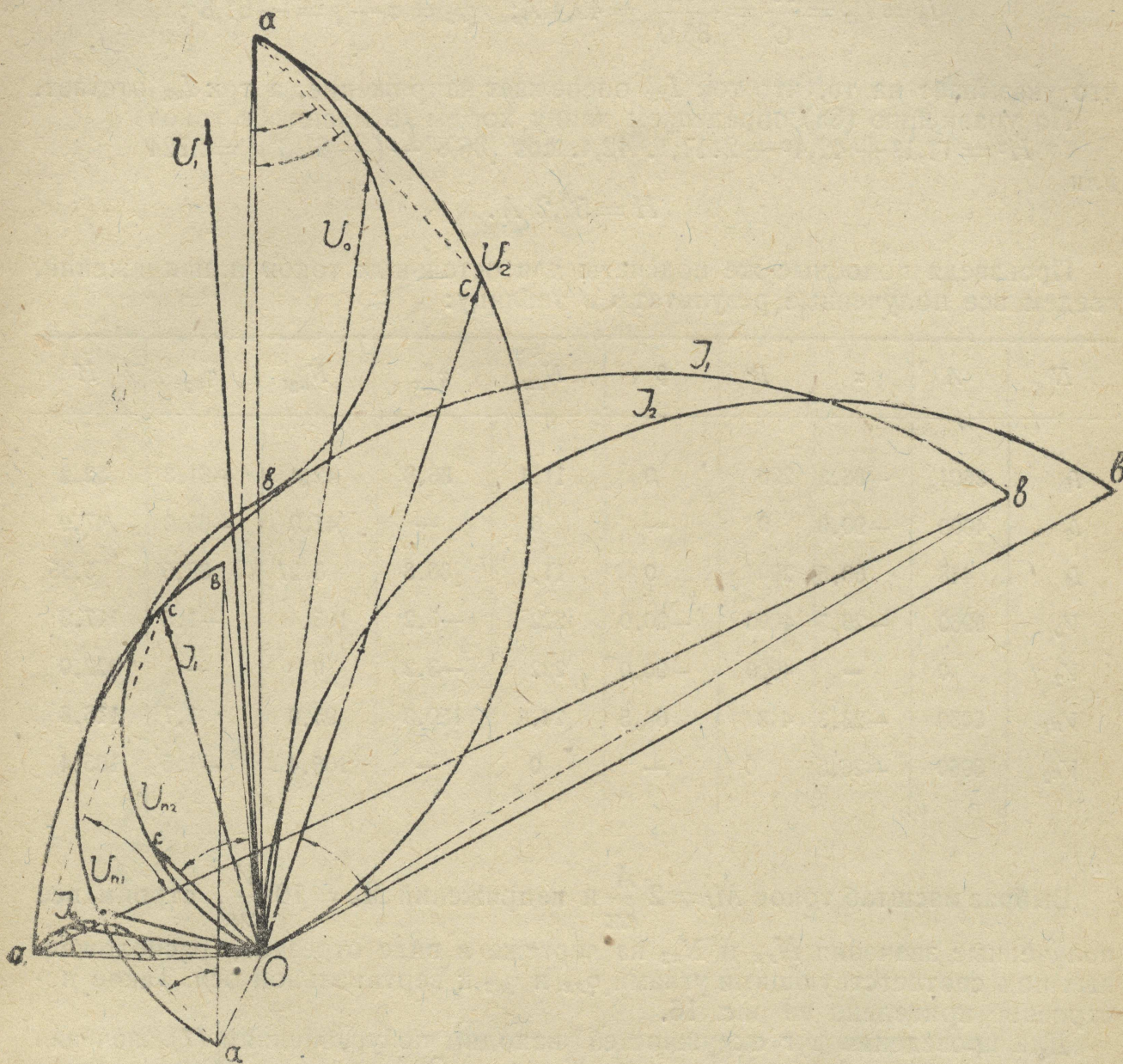


Рис. 16.

Для общего тока сети I_1 имеем из уравнений

$$\dot{A} = \dot{V}_1 (\dot{Z}_0 + \dot{Z}_2) = 200 (1 + j2 - j20) = 200 - j3600 = 3604 \angle -86,8^\circ$$

$$\dot{B} = \dot{V}_1 = 200 = 200 \angle 0$$

или

$$A = 3604; B = 200; \alpha = -86,8^\circ; \beta = 0.$$

Так как переменной величиной является сопротивление нагрузки $K = \dot{Z}_n$, то крайние значения будут соответствовать холостому ходу и короткому

замыканию цепи. Обозначая соответствующие углы поворота векторов по отношению вектора напряжения \dot{V}_1 через φ_{xx} и φ_{k3} и располагая последний вектор по вертикальной оси, имеем из уравнений (2) и (2a)

$$\dot{I}_0 = I_{xx} = \frac{B}{D} = \frac{200}{18,02} = 11,1 \text{ A}; \quad \varphi_{xx} = \beta - \delta = 86,8^\circ;$$

$$I_0 = I_{k3} = \frac{A}{C} = \frac{3604}{85,0} = 42,4 \text{ A}; \quad \varphi_{k3} = \alpha - \gamma = -61,8^\circ;$$

что указывает на то, что ток I_{xx} опережает напряжение, а ток I_{k3} отстает.

По уравнению (8a) определяем длину хорды (в масштабе токов)

$$H^2 = 11,1^2 + 42,4^2 - 2 \cdot 11,1 \cdot 42,4 \cdot \cos [86,8^\circ - (-61,8^\circ)] = 2724$$

или

$$H = 52,2 \text{ A}.$$

Произведя подобные же подсчеты для остальных токов и напряжений, сведем все полученные результаты в таблицу:

N	A	α	B	β	N_{xx}	φ_{xx}	N_{k3}	φ_{k3}	H
I_1	3604	-86,8	200	0	11,1	86,8	42,4	-61,8	52,2
I_2	4000	-90,0	0	—	0	—	47,0	-65,0	47,0
I_0	448	63,5	200	0	11,1	86,8	5,27	88,5	5,85
V_0	8960	-26,5	4000	-90,0	222	-3,2	105,4	-1,5	117,0
V_2	0	—	4000	-90,0	222	-3,2	0	—	222,0
V_{n1}	8080	-23,3	448	63,5	24,8	150,3	95,0	1,7	116,8
V_{n2}	8960	-26,5	0	—	0	—	105,4	-1,5	105,4

Выбрав масштаб токов $M_I = 2 \frac{\text{A}}{\text{см}}$ и напряжений $M_V = 10 \frac{\text{V}}{\text{см}}$, строим все полученные значения N_{xx} и N_{k3} на чертеже в виде отрезков, расположенных под соответствующими углами φ_{xx} и φ_{k3} к вертикальной оси. Такое построение приведено на рис. 16.

Для проведения дуг окружностей находим по уравнениям (7) значения угла ρ , приняв во внимание, что $\Psi = \varphi_n = 0$ (омическое сопротивление нагрузки)

$$\rho = \gamma - \delta - \Psi = (-25,0) - (-86,8) - 0 = 61,8^\circ.$$

На построенных диаграммах буквами a и b отмечены точки, соответствующие холостому ходу и короткому замыканию, а точками c — положение концов векторов для сопротивления нагрузки $Z_n = 10 \text{ см}$. Согласно выведенным соотношениям, треугольники abc должны быть подобными.

Построение на рис. 16 диаграммы очень сложно для использования, так как, чтобы найти соответствующие друг другу точки c , необходимо построить ряд подобных треугольников или равных углов. Из рисунка видно, что такое построение при большом числе значений будет очень затруднительно.

Для упрощения поворачиваем все окружности так, чтобы хорды совпали по направлению, а точки a совместились в одну. Построение удобно производить засечками по значениям N_{xx} , $N_{кз}$ и H , а при малых разностях углов $\varphi_{xx} - \varphi_{кз}$ или близких к 180° — переносом из нормальной диаграммы.

Такая совмещенная диаграмма приведена на рис. 17, на котором начала векторов обозначены теми же буквами, что и дуги окружностей. Точки c , построенные для сопротивления нагрузки в 10 ом, лежат теперь на одной прямой, так что для их нахождения достаточно провести таковую через одну из них и точку a .

Для еще большего упрощения, изменим масштабы так, чтобы окружности всех диаграмм слились в одну. Приняв длину хорды такой диаграммы равной 15 сантиметрам, найдем новый масштаб для общего тока

$$M_1 = \frac{H_1}{15} = \frac{52,2}{15} = 3,48 \frac{A}{cm}.$$

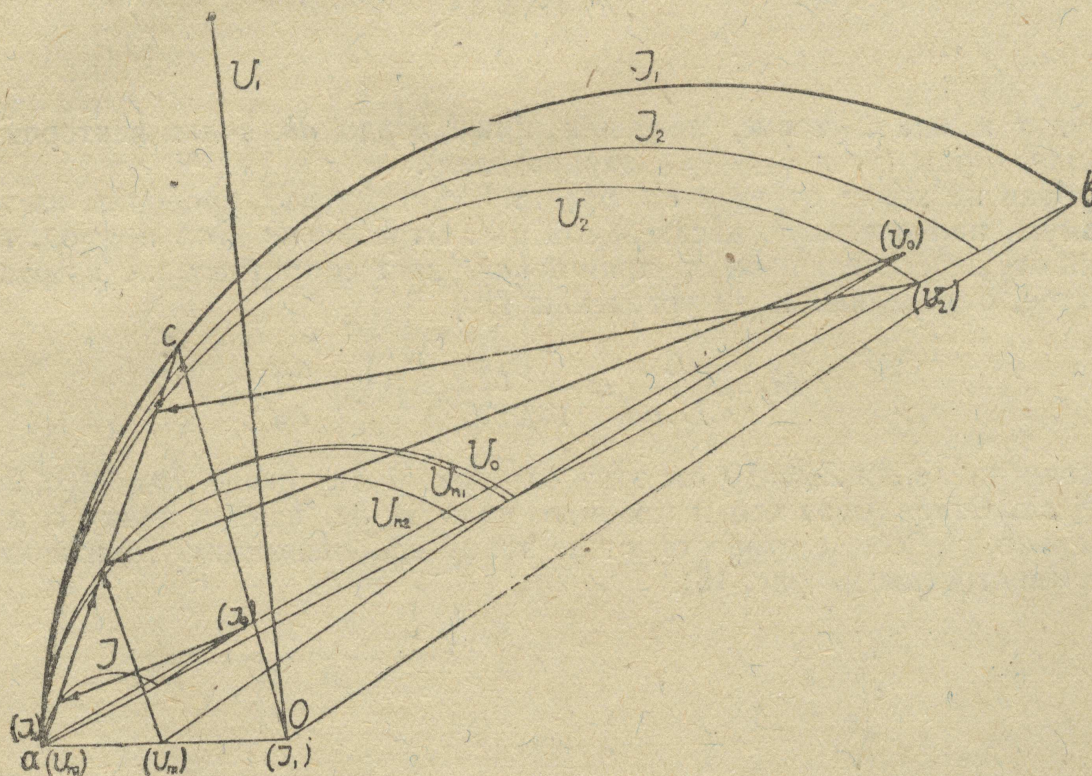


Рис. 17.

Этому масштабу соответствуют длины векторов холостого хода и короткого замыкания

$$\frac{I_{xx}}{M_1} = \frac{11,1}{3,48} = 3,2 \text{ см}; \quad \frac{I_{кз}}{M_1} = \frac{42,4}{3,48} = 12,2 \text{ см},$$

причем угол между ними равен

$$\varphi_{xx} - \varphi_{кз} = 148,6^\circ.$$

Произведя подобные же вычисления для остальных токов и напряжений, сводим полученные результаты в таблицу.

По этим данным строим засечками новую диаграмму, приведенную на рис. 18. Легко видеть, что начала векторов для I_2 и $V_{к2}$ совпадут с точкой a диаграммы, а для вектора V_2 — с точкой b . Начала векторов I_1 и

N	M_N	$\frac{N_{xx}}{M_N}$	$\frac{N_{\kappa 3}}{M_N}$	$\varphi_{xx} - \varphi_{\kappa 3}$
I_1	3,48	3,2	12,2	148,6
I_2	3,13	0	15,0	—
I_0	0,39	28,5	13,5	-1,7
V_0	7,80	28,5	13,5	-1,7
V_2	14,80	15,0	0	—
V_{n1}	7,78	3,2	12,2	148,6
V_{n2}	7,03	0	15,0	—

V_{n1} будут в одной точке, лежащей ниже хорды ab , а для векторов I_0 и V_0 выше хорды (угол $\varphi_{xx} - \varphi_{\kappa 3}$ отрицателен).

Выбрав на хорде отрезок ad , равный 5 сантиметрам, проводим из точки d прямую, параллельную касательной aa' . Отрезок de этой прямой, полученный от пересечения ее с прямой ac , даст сопротивление нагрузки в масштабе, определяемом по уравнению (10)

$$M_z = \frac{C}{D \cdot ad} = \frac{85}{18,02 \cdot 5} = 0,945 \frac{\text{ом}}{\text{см}}$$

Для сопротивления $Z_n = 10 \text{ ом}$ этот отрезок будет равен $de = 10 : 0,945 = 10,6 \text{ см}$. Откладывая его и проводя прямую ae , найдем точку c , а следовательно, и все соответствующие этому сопротивлению токи и напряжения (построены на рис. 18).

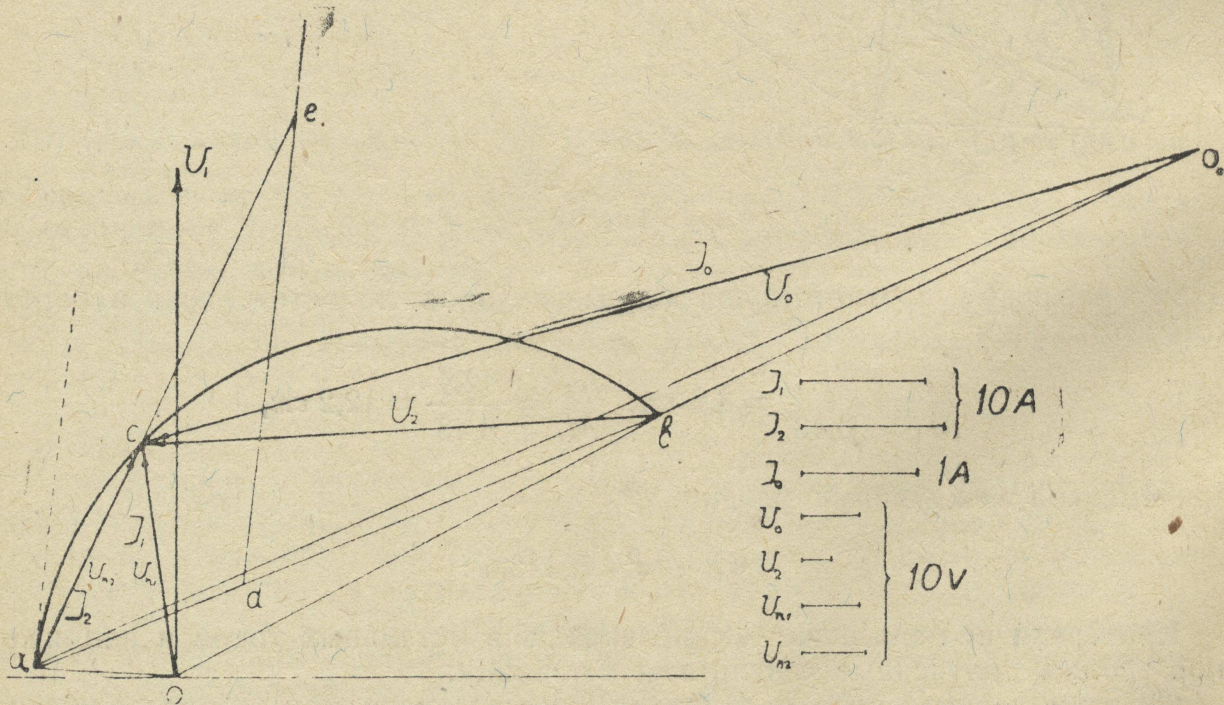


Рис. 18.

Найдем мощности отдельных участков цепи, причем для удобства все построения вынесем на отдельный рис. 19. Общая мощность, поступающая из сети в данную цепь, будет равна

$$P_2 = V_1 I_1 \cos \varphi_1$$

и будет изображаться отрезком cd_1 , проведенным параллельно вектору V_1 до прямой, проведенной из начала векторов тока \dot{I}_1 перпендикулярно вектору \dot{V}_1 . Масштаб этой мощности будет равен по уравнению (25)

$$M_1 = 3,48, 200 = 696 \frac{W}{cm}$$

Мощность, потребляемая нагрузкой, будет равна

$$P_2 = V_2 I_2 \cos \varphi_2.$$

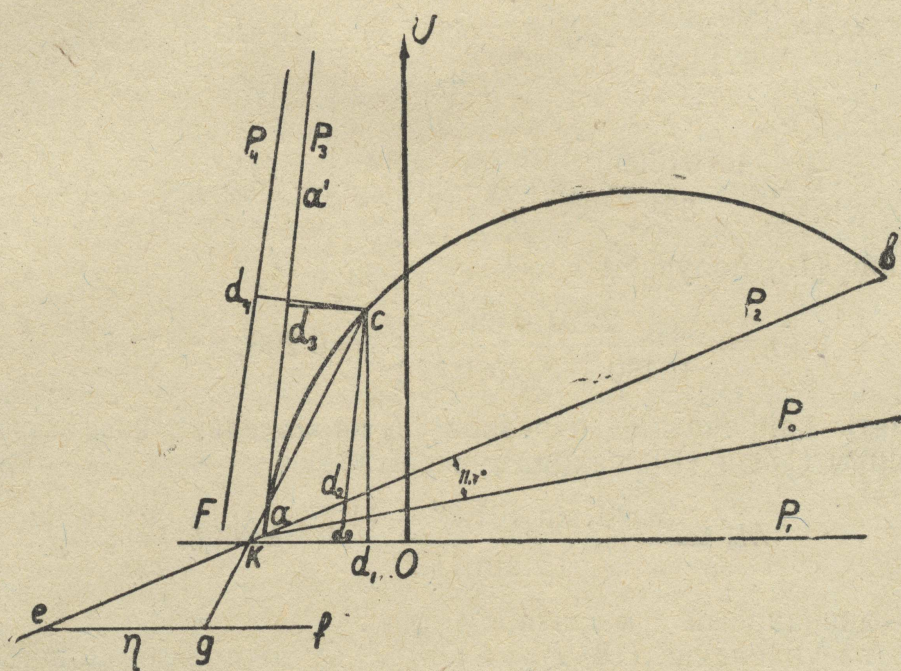


Рис. 19.

Так как при этом $V_2 = I_2 Z_n$, то эта мощность будет изображаться отрезком cd_2 от точки c до хорды. Если этот отрезок взять перпендикулярно к хорде, то масштаб получится по уравнению (24) равным

$$M_2 = 15,14,8. 3,13. \frac{1}{0,88} = 791 \frac{W}{cm};$$

если же выбрать направление параллельно касательной aa^1 , то по уравнению (24a)

$$M_{21} = 15,14,8. 3,13. \frac{1}{0,88} = 696 \frac{w}{cm}$$

Последний масштаб удобнее, так как он одинаков с масштабом для P_1 .

Мощность, теряемая в сопротивлении Z_2 , будет равна \dot{V}

$$P_3 = I_2^2 \cdot R_2.$$

Так как уравнение для тока I_2 имеет коэффициент $B = 0$, то эта мощность будет определяться отрезком cd_3 , взятым от точки c до касательной aa^1 и проведенным перпендикулярно ей. Масштаб найдем по уравнению (22)

$$M_3 = 1 \cdot \frac{3,13^2 \cdot 15}{0,88} = 167 \frac{W}{cm}$$

Мощность в месте разветвления

$$P_0 = P_2 + P_3 = V_0' I_2' + V_0'' \cdot I_2''$$

определится отрезком cd_0 до соответствующей прямой, найденной по общим уравнениям. Для данного случая имеем

$$A_1 = 4000; \alpha_1 = -90^\circ; B_1 = 0;$$

$$A_2 = 8960; \alpha_2 = -26,5^\circ; B_2 = 4000; \beta_2 = -90^\circ.$$

По уравнениям (15) получим

$$R = \frac{4000 \cdot 4000}{85 \cdot 18,02} \cdot \cos [(-90^\circ) - (-90^\circ) - 0] = 10430,$$

$$S = 0,$$

$$T = \frac{4000 \cdot 8960}{85^2} \cdot \cos [(-90^\circ) - (-26,5^\circ)] = 2220.$$

Из уравнения (16) получаем

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{2220 \cdot 0,88}{10430 - 2220 \cdot 0,472} = 0,208; \eta = 11,7^\circ.$$

Если взять направление отрезков cd_0 параллельно касательной aa^1 , то по уравнениям (17) и (19) находим масштаб

$$M_0' = \frac{2220 \cdot \sin (61,6^\circ + 11,7^\circ)}{15 \cdot \sin 11,7^\circ} = 696 \frac{W}{cm};$$

т. е. опять одинаковый с масштабом для P_1 .

Так как из уравнения (18) $F = S: M_0' = 0$, то прямая мощностей будет проходить через точку a под углом $11,7^\circ$ к хорде ab , будучи сдвинута от нее по часовой стрелке.

Мощность, теряемая в сопротивлении Z_1 , будет равна

$$P_4 = I_1^2 R = I_1 R_1 \cdot I_1.$$

Так как для данного случая $R_1 = 1 \text{ ом}$, и

$$A_1 = A_2 = 3604; \alpha_1 = \alpha_2 = -86,8^\circ;$$

$$B_1 = B_2 = 200; \beta_1 = \beta_2 = 0,$$

то из уравнений (15) получаем

$$R = 2 \cdot \frac{3604 \cdot 200}{85 \cdot 18,02} \cdot \cos (-86,8^\circ) = 52,8,$$

$$S = \frac{200 \cdot 200}{18,02^2} = 123,$$

$$T = \frac{3604 \cdot 3604}{85^2} = 1800.$$

Из уравнения (16) имеем

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{(1800 - 123) \sin 61,8^\circ}{52,8 - (1800 + 123) \cos 61,8^\circ} = -1,725; \eta = -60^\circ,$$

т. е. прямая мощностей будет сдвинута по отношению хорды на угол 60° против часовой стрелки. Из уравнения (17) находим масштаб

$$M_4 = \frac{1800 - 123}{15 \cdot \sin 60^\circ} = 129 \frac{W}{\text{см}},$$

а по уравнению (18)—расстояние от точки a до прямой мощности P_4

$$F = \frac{123}{129} = 0,95 \text{ см.}$$

Откладывая это расстояние и проводя прямую, получаем мощность P_4 в виде отрезка cd_4 , перпендикулярного этой прямой.¹⁾

Для нахождения коэффициента полезного действия всей цепи, найдем точку k пересечения линий мощностей P_1 и P_2 (т. е. горизонтальной оси и продолжения хорды ab) и на линии мощностей P_2 возьмем точку e на расстоянии 5 см от точки k . Проводя прямую ef параллельно линии мощностей P_1 (т. е. горизонтальной оси), находим пересечение ее с прямой, проведенной через точки k и c . Получаемый при этом отрезок eg даст значение к. п. д. $\eta = P_2 : P_1$ в масштабе, равном по уравнению (26)

$$M\eta = \frac{1}{5} \cdot \frac{791}{696} \cdot 100 = 22,7 \frac{\%}{\text{см}}$$

Имея построенную на рисунках 18 и 19 диаграмму (обычно вычерчиваемую на одном рисунке), можно очень легко по любому из заданных значений одной из величин найти все значения остальных величин данной цепи.

2. ОПРОКИДЫВАНИЕ ФАЗ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

В качестве второго примера рассмотрим трехфазную цепь, изображенную на рис. 20, которая имеет в каждой из фаз по одинаковой индуктивной катушке. В одной из фаз вставлена дополнительная емкость. При определенных условиях получается изменение порядка чередования фазовых токов и напряжений на катушках или, так называемое, опрокидывание фаз.

Построим для данной цепи круговую диаграмму, приняв за переменную величину сопротивление емкости. Фазовые напряжения источника тока примем равными 120 V , катушки же возьмем с индуктивностью $0,14 \text{ H}$ и омическим сопротивлением 20 ом каждая. Частота цепи 50 периодов.

Сопротивления фаз равны

$$\begin{aligned} \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z} &= R + jL\omega = \\ &= 20 + j0,14 \cdot 314 = 20 + j44; \end{aligned}$$

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z} + \dot{Z}_k,$$

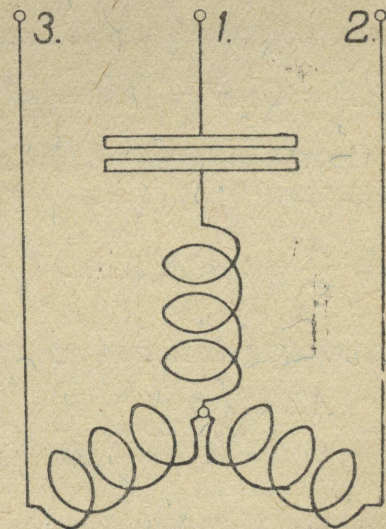


Рис. 20.

1) Эта прямая будет полуполярой окружности. Графическое построение см. ниже.

где \dot{Z}_k — переменное сопротивление конденсатора (емкости).
Симметричные сопротивления фаз цепи равны

$$\dot{Z}_a = \dot{Z} + \frac{1}{3} \dot{Z}_k,$$

$$\dot{Z}_b = \dot{Z}_e = \frac{1}{3} \dot{Z}_k.$$

Так как нулевого провода нет, то составляющая тока первой фазы для прямой последовательности будет иметь выражение

$$\dot{I}_I = \dot{V} \frac{\dot{Z}^a}{\dot{Z}_a^2 - \dot{Z}_b \dot{Z}_e} = \dot{V} \frac{3\dot{Z} + \dot{Z}_k}{3\dot{Z}^2 + 2\dot{Z}\dot{Z}_k},$$

а составляющая обратной последовательности

$$\dot{I}_{II} = \dot{V} \frac{-\dot{Z}_c}{\dot{Z}_a^2 - \dot{Z}_b \dot{Z}_e} = \dot{V} \frac{-\dot{Z}_k}{3\dot{Z}^2 + 2\dot{Z}\dot{Z}_k}.$$

Для обеих составляющих знаменатель имеет одинаковые выражения, так что их диаграммы будут с одинаковыми углами ρ . Коэффициенты знаменателя будут равны

$$\dot{C} = 3\dot{Z}^2 = 3(20 + j44)^2 = -4608 + j5280 = 7000 \angle 131^\circ,$$

$$\dot{D} = 2\dot{Z} = 2(20 + j44) = 40 + j88 = 96,5 \angle 65,5^\circ$$

или

$$C = 7000; D = 96,5; \gamma = 131^\circ; \delta = 65,5^\circ.$$

Коэффициенты числителя тока прямой последовательности равны

$$\dot{A} = \dot{V} \cdot 3\dot{Z} = 120 \cdot 3 \cdot (20 + j44) = 7200 + j15800 = 17400 \angle 65,5^\circ,$$

$$\dot{B} = \dot{V} = 120 = 120 \angle 0$$

или

$$A = 17400; B = 120; \alpha = 65,5^\circ; \beta = 0,$$

а для обратной последовательности

$$A' = 0; B' = -\dot{V} = -200 = 200 \angle 180^\circ; \beta = 180^\circ.$$

Составляющие токов для крайних значений \dot{Z}_k для прямой последовательности будут

$$\dot{I}_0 = \frac{A}{C} = 2,49A; \dot{I}_\infty = \frac{B}{D} = 1,245A; \varphi_0 = \alpha - \gamma = -65,5^\circ; \varphi_\infty = \beta - \delta = 65,5^\circ$$

и для обратной последовательности

$$\dot{I}'_0 = \frac{A'}{C} = 0; \dot{I}'_\infty = \frac{B'}{D} = 1,245A; \varphi'_\infty = \beta' - \delta = 180 - 65,5 = 114,5^\circ.$$

Выбирая масштаб токов $M_I = 0,5 \frac{A}{\text{см}}$, строим на рис. 21 эти токи, а также соответствующие им для второй и третьей фаз (будут повернуты на углы 120° и 240°).

Для нахождения суммарных диаграмм достаточно сложить соответствующие векторы для крайних значений и на их разностях построить окружности диаграмм. Производя сложение, находим токи в фазах и соответствующие им хорды (в масштабе токов).

Фаза	I_0	I_∞	H	$\varphi_\infty - \varphi_0$
Первая . .	2,49	0	2,49	—
Вторая . .	2,49	2,16	1,245	+30°
Третья . .	2,49	2,16	1,245	-30°

Угол ρ между хордой и касательной определяется уравнением

$$\rho = \gamma - \delta - \psi = 131 - 65,5 + 90 = 155,5^\circ,$$

так как для емкости

$$\psi = \varphi = -90^\circ.$$

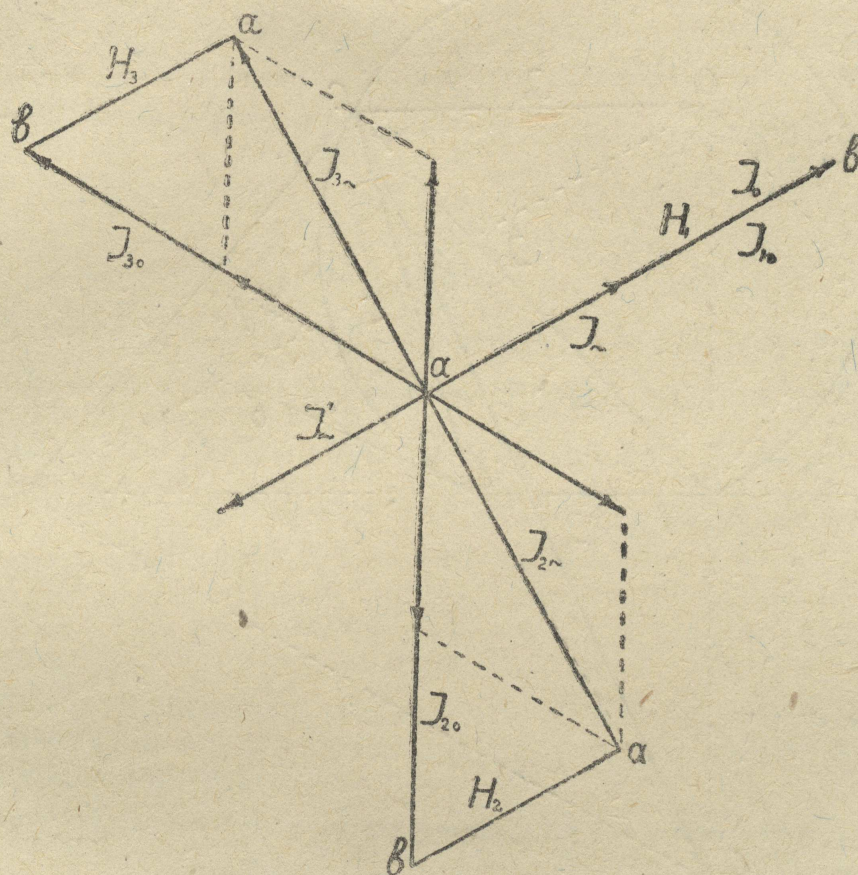


Рис. 21.

Не проводя дуг окружностей, перенесем векторы сразу на совмещенную диаграмму, построенную на рисунке 22. Оставив для тока первой фазы тот же масштаб $\left(M_I = 0,5 \frac{A}{\text{см}} \right)$, откладываем отрезок ab , равный

$$ab = \frac{H}{M_I} = \frac{2,49}{0,5} = 4,98 \text{ см}$$

и на нем, как на хорде, строим окружность с полученным выше углом.

Масштаб для токов I_2 и I_3 будет равен

$$M'_I = \frac{H'}{ab} = \frac{1,245}{4,98} = 0,25 \frac{A}{cm};$$

длины же отрезков крайних значений токов получатся равными

$$\frac{I_0}{M'_I} = \frac{2,49}{0,25} = 9,96 \text{ см}; \quad \frac{I_{\infty}}{M'_I} = \frac{2,16}{0,25} = 8,64 \text{ см}.$$

Откладывая эти отрезки от соответствующих точек хорды ab , получим точки O_2 и O_3 начал векторов токов второй и третьей фаз. Начало векторов тока первой фазы совпадет с точкой a хорды.

Сравнивая диаграммы (рис. 21 и 22), легко заметить, что при совмещении хорд векторы второй и третьей фаз оказались повернутыми на 180°

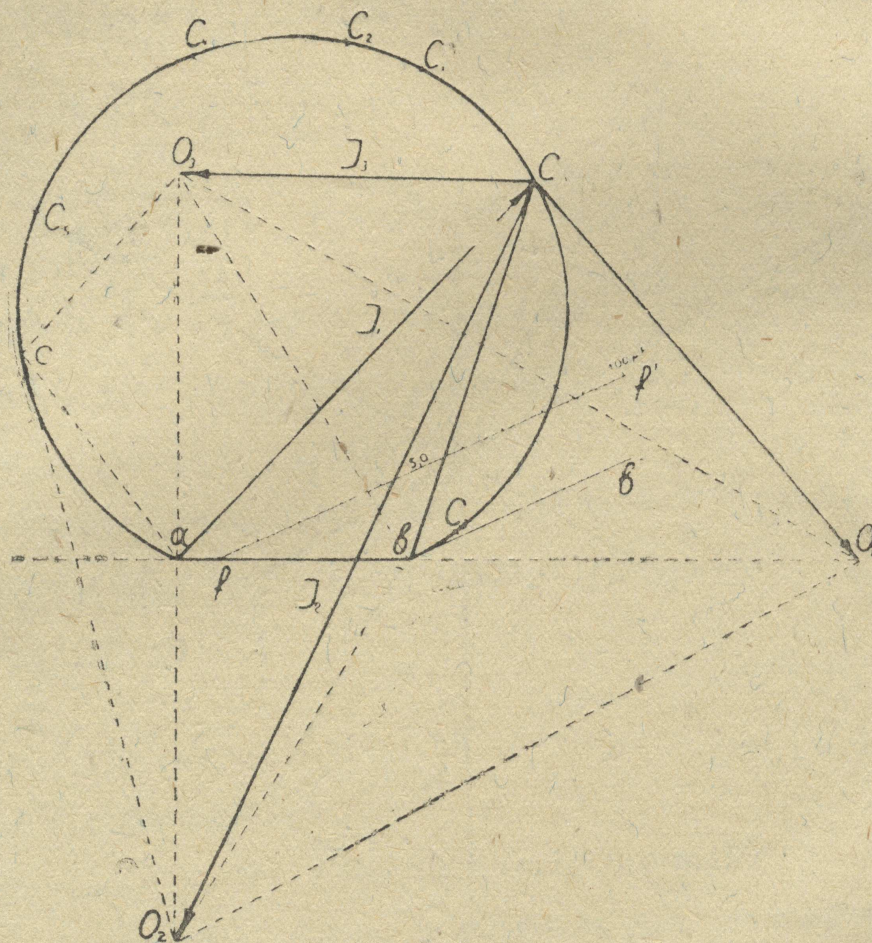


Рис. 22.

больше, чем векторы первой фазы. Если теперь изменить их направление на обратное, считая в точках O_2 и O_3 их концы, а не начала, то взаимное расположение векторов токов всех трех фаз на рис. 22 будет в точности соответствовать действительному.

Таким образом, для некоторой точки c диаграммы токи трех фаз будут изображаться отрезками ac , cb_2 и co_3 , причем первый из них имеет вдвое больший масштаб, чем остальные два.

Так как сопротивления катушек постоянны, то напряжения на них будут

$$V = Iz = I \sqrt{20^2 + 44^2} = 148,25;$$

этого следует, что они будут определяться теми же отрезками, как и гоки, причем масштаб будет равен для первой фазы

$$M_V = M_I \cdot Z = 0,5 \cdot 48,25 = 24,125 \frac{V}{\text{см}}$$

и для двух других

$$M'_{v'} = M'_{i'} Z = 0,25 \cdot 48,25 = 12,06 \frac{V}{\text{см}}$$

Взаимное расположение векторов напряжений также будет правильным, но по отношению к векторам токов они в действительности повернуты на углы

$$\varphi = \arctg \frac{44}{20} = 65,5^\circ.$$

Напряжение на емкости, как на переменном сопротивлении, будет определяться отрезком от точки b хорды до точки c окружности. Т. к. это напряжение имеет уравнение

$$V_k = i_1 Z = \dot{V} \frac{3\dot{Z}Z_k}{3\dot{Z}^2 + 2\dot{Z}Z_k},$$

дающие при $Z_k = \infty \sim$ значение $V_k = \frac{3}{2} V = 180 \text{ в}$, то масштаб получится из соотношения

$$M_{vk} = \frac{V_{k\sim}}{ab} = \frac{180}{4,98} = 36,19 \frac{V}{\text{см}}$$

Найдем прямую для получения значений переменной емкости. Так как емкость равна $C_k = \frac{1}{Z_k \omega}$, необходимо провести из произвольной точки f хорды ab прямую ff' , параллельную касательной bb' . Задавшись масштабом емкостей $M_c = 10 \frac{\mu F}{\text{см}}$, находим необходимое расстояние от точки b до точки f по уравнению (10а)

$$bf = \frac{D}{M_c \cdot C \cdot \omega}.$$

Из полученной диаграммы видно, что максимальные значения напряжений на катушках и конденсаторе получаются при различных емкостях. Производя построения, находим

Максимум для	Точка диаграммы	U_{max}	I_{max}	Соответ. емкость μF
1-ой фазы . .	C_1	289	6,9	48
2-ой фазы . .	C_2	253	5,25	45
3-ей фазы . .	C_3	121	2,5	170
Емкости . . .	C_4	434	—	40

На участке bc_1c_4 диаграммы для токов и напряжений катушек сохраняется правильное чередование фаз (1—2—3), на участке же c_4a чередование изменяется на обратное (3—2—1). Это хорошо видно из построенных векторов сплошными линиями для первого случая, и пунктиром

для второго. Полное опрокидывание, при котором токи и напряжения всех фаз будут равны, определится точкой C_0 окружности с бесконечно большим радиусом, что возможно только при отсутствии омического сопротивления.

В заключение отметим, что напряжение первой фазы, беря вместе и катушку и емкость, определится отрезком CO_1 . Точка O_1 получится из условия, что расстояния O_1O_2 ; O_2O_3 и O_3O_1 были одинаковы и равнялись линейным напряжениям сети. Масштаб всех этих напряжений будет одинаков с масштабом для векторов второй и третьей фазы. Максимум напряжения получится равным 238 вольт при емкости $32\mu F$ (точка C_5).

III. ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММ ПО ОПЫТНЫМ ДАННЫМ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА ρ ПРИ ДОСТУПНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ НАГРУЗКИ

Если некоторая цепь осуществлена в натуре, но неизвестны включенные в нее сопротивления, а может быть даже и сама схема ее соединения, то круговую диаграмму можно построить на основании измерений, произведенных для этой цепи. При этом необходимо лишь быть уверенным, что для всех величин цепи будут иметься одинаковые углы ρ .

Если переменное сопротивление, играющее роль нагрузки, доступно для включения измерительных приборов (амперметра и вольтметра), то начинать построение диаграммы лучше всего с напряжения и тока этого сопротивления. Для построения этой диаграммы достаточно произвести измерение напряжения при разомкнутом сопротивлении (холостой ход), тока при замыкании на короткое замыкание этого сопротивления (короткое замыкание) и тока и напряжения для одного какого-либо значения включенного сопротивления (нагрузка). Все эти измерения должны быть произведены при том напряжении сети (или токе, поступающем из сети), для которого предположено построить диаграмму. Если измерения производились при других условиях, то необходимо произвести пересчет результатов пропорционально изменению величины, которая должна быть постоянной (см. пример).

Ток нагрузки на совмещенной диаграмме имеет начало векторов совмещенным с точкой a хорды, а напряжение нагрузки — с точкой b . Хорда диаграммы в соответствующих масштабах будет равна как напряжению холостого хода V_{xx} , так и току короткого замыкания $I_{кз}$, т. е.

$$ab = \frac{V_{xx}}{M_v} = \frac{I_{кз}}{M_I}.$$

Ток и напряжение нагрузки в тех же масштабах будут представляться отрезками ac и bc (рис. 8). Из треугольника abc находим

$$(ab)^2 = (ac)^2 + (bc)^2 + 2(ac)(cb) \cos \rho$$

или

$$\left(\frac{V_{xx}}{M_v}\right)^2 = \left(\frac{V_H}{M_v}\right)^2 + \left(\frac{I_H}{M_I}\right)^2 + 2 \frac{V_H I_H}{M_v M_I} \cos \rho.$$

Исключая из двух полученных уравнений масштабы, находим

$$\cos \rho = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{xx} \cdot I_{кз}}{V_H \cdot I_H} - \frac{V_{xx} I_H}{V_H I_{кз}} - \frac{V_H \cdot I_{кз}}{V_{xx} \cdot I_H} \right)$$

Это уравнение дает возможность вычислить значение угла ρ , причем лучшая точность получается в том случае, когда $\cos \rho$ не очень близок к еди-

нице, а отрезки ac и bc близки по размерам. Для большей точности можно произвести измерения не для одной, а для двух нагрузок различных сопротивлений.

Если измерения произведены для нагрузки, имеющей угол сдвига φ_n , диаграмму же требуется построить для нагрузки с углом φ' , то, принимая во внимание уравнение (7), можем найти новый угол

$$\rho' = \rho + \varphi_n - \varphi_n'. \quad (28)$$

Это соотношение дает возможность производить измерения не при той нагрузке, которая должна иметься на диаграмме, а следовательно, можно всегда подобрать значение вычисляемого $\cos\rho$ отличным от единицы. В случае сомнения в знаке угла ρ , это позволяет, произведя измерения для двух различных φ_n , найти таковой из соотношения полученных углов.

Вместо вычисления угла, диаграмма может быть построена путем засечек по треугольнику abc .

Построив диаграмму, можно на ней сейчас же провести прямую для сопротивлений или проводимостей нагрузки так, как это указано было на рисунке 8. Масштаб определится из соотношения треугольников

$$\frac{de}{ad} = \frac{bc}{ac}; \quad \frac{Z_n}{M_z} : ad = \frac{V_n}{M_v} : \frac{I_n}{M_I}$$

или, так как $I_n \cdot Z_n = V_n$, масштаб сопротивления равен

$$M_z = \frac{M_v}{M_I ad}; \quad (29)$$

подобным же путем масштаб проводимостей равен

$$M_I = \frac{M_I}{M_v \cdot bf}. \quad (29a)$$

Масштабы мощностей нагрузки могут быть, в зависимости от выбранного направления отрезков, определены по одному из уравнений (24) или (24a).

2. СОПРОТИВЛЕНИЕ НАГРУЗКИ НЕДОСТУПНО

Если ток и напряжение переменного сопротивления (нагрузки) по тем или иным причинам недоступны для измерений (например, в асинхронных моторах), то построение диаграмм приходится начинать с одной из других величин. В этом случае необходимо по показаниям приборов вычислить углы сдвига фаз одной из величин цепи при холостом ходе, нагрузке и коротком замыкании, по отношению постоянного вектора. При построении диаграммы для постоянного напряжения сети, за такую величину лучше всего выбирать ток, поступающий из сети в данную цепь. При постоянной величине поступающего тока (что бывает очень редко) удобно выбирать для построения напряжение на зажимах цепи. Измерение углов можно производить или по ваттметрам, или любым другим способом.

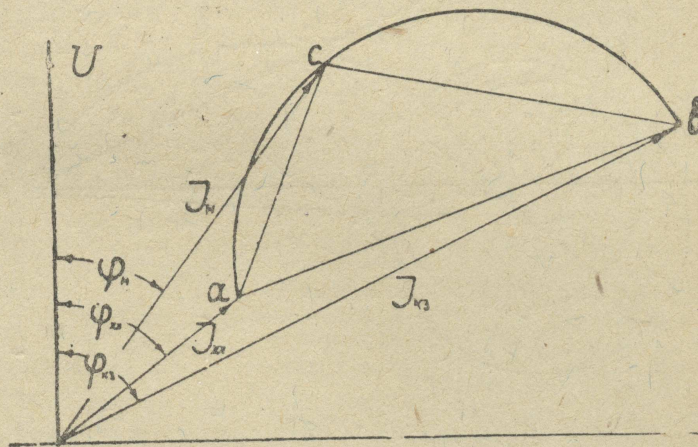


Рис. 23.

Определив для тока значения I_{xx} , I_n и $I_{кз}$, и соответствующие углы сдвига фаз φ_{xx} , φ_n и $\varphi_{кз}$, строим их (рис. 23) и через полученные три точки a , b и c проводим окружность. При этом построении можно в отношении угла ρ указать все то, что было сказано выше для тока и напряжения нагрузки. Так же, как и там, можно построить окружность для одной нагрузки, изменив потом угол в зависимости от изменения угла сдвига фаз нагрузки.

Аналитическое определение угла ρ , радиуса и центра окружности диаграммы очень сложны и обычно не нужны, почему здесь и не приводятся.

Для некоторых цепей значение угла ρ может быть найдено без измерения тока и угла при нагрузке, а только по опытам холостого хода и короткого замыкания. Так, для простой T -образной схемы замещения угол находится по дополнительному опыту обратного короткого замыкания по уравнению

$$\rho = \varphi_{окз} - \varphi_n,$$

что видно из соотношения коэффициентов \dot{C} и \dot{D} и значения тока \dot{I} при $\dot{Z}_n = 0$ для приведенного выше примера. Если цепь при этом симметрична, т. е. $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2$, то угол $\varphi_{окз}$ равен углу для нормального короткого замыкания. При этом обратного включения цепи производить не требуется совершенно.

3. ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММ ДЛЯ ОСТАЛЬНЫХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Для построения совмещенных диаграмм остальных токов и напряжений достаточно для каждого из них знать три значения, соответствующих холостому ходу цепи, короткому замыканию и той нагрузке, для которой была найдена на диаграмме промежуточная точка C . Задача сводится к

нахождению на чертеже такой точки, расстояния от которой до точек a , b и c диаграммы пропорциональны имеющимся значениям N_{xx} , $N_{кз}$ и N_n

$$oa : ob : oc = N_{xx} : N_{кз} : N_n.$$

Нахождение точки O (начало векторов) вычислением оказывается очень сложным и задача решается значительно проще графическим путем.

Из геометрии известно, что геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух неподвижных точек постоянно, представляет собой ок-

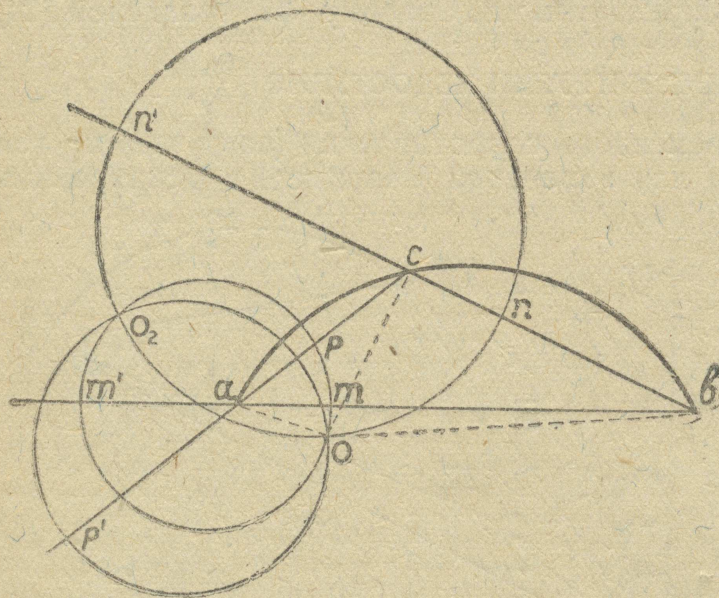


Рис. 24.

ружность с центром на прямой, соединяющей эти точки. Обозначив отношение

$$\frac{oa}{ob} = \frac{N_{xx}}{N_{кз}} = \alpha,$$

находим на стороне ab треугольника abc (рис. 24) и на ее продолжении точки m и m' , подчиняющиеся условию

$$\frac{am}{mb} = \frac{am'}{m'b} = \alpha,$$

так как при этом

$$am + mb = ab; \quad am' + ab = m'b,$$

то, решая уравнения, получаем искомые расстояния

$$am = ab \frac{\alpha}{1 + \alpha}; \quad am' = ab \frac{\alpha}{1 - \alpha}. \quad (30)$$

Если в последнем уравнении получится отрицательное значение для расстояния am' , то это будет означать, что точка m' лежит не за точкой a , а за точкой b , т.е. по другую сторону отрезка ab . При отношении

$\alpha = \frac{N_{xx}}{N_{кз}}$ равном единице, расстояние am' будет бесконечно велико.

Подобным же путем находим точки n , n' , p и p' для сторон bc и ca треугольника, производя вычисления по уравнениям

$$bn = cb \frac{\beta}{1 + \beta}; \quad bn' = cb \frac{\beta}{1 - \beta}; \quad (30a)$$

$$cp = ac \frac{\gamma}{1 + \gamma}; \quad cp' = ac \frac{\gamma}{1 - \gamma}; \quad (30b)$$

представляют отношения

$$\beta = \frac{N_{кз}}{N_n}; \quad \gamma = \frac{N_n}{N_{xx}}.$$

Если теперь на полученных отрезках mm' , nn' и pp' , как на диаметрах, построить окружности, то точка их пересечения будет искомым началом векторов для данной величины. Из рисунка видим, что таких точек будет иметься две. Если имеется сомнение в том, которая из точек O_1 или O_2 будет соответствовать началу векторов, то необходимо произвести дополнительное построение еще одной окружности для другой нагрузки, которая сразу же определит действительное начало векторов, пройдя через таковое.

Найдя точку начала векторов, легко определить и масштаб таковых из соотношения отрезков и самих значений

$$M_N = \frac{N_{xx}}{oa} = \frac{N_{кз}}{ob} = \frac{N_n}{ac}.$$

Нахождение точек m , m' , n и т. д. может быть произведено не по вычислениям, а путем графического построения. Для этого через точку b проводим прямую под произвольным углом (рис. 25) и на ней в любом масштабе откладываем отрезок bd , соответствующий значению $N_{кз}$, и отрезки df и de , соответствующие значению N_{xx} . Проведя прямую dm , параллельно ea , и прямую dm' , параллельно fa , найдем в местах пересечения их с прямой ab и ее продолжением искомые точки m и m' . Подобное же построение необходимо произвести и для второй стороны, при-

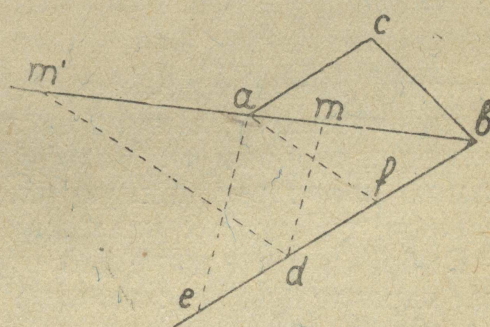


Рис. 25.

чем можно воспользоваться той же прямой be и отрезком bd , заменив только отрезки de и df на соответствующие значениям N_n .

Для уменьшения построений надлежит помнить, что начала векторов для тока некоторого постоянного сопротивления и напряжение на зажимах такого совпадают между собой.

4. ЛИНИИ МОЩНОСТЕЙ

Для построения линии мощностей какого-либо участка цепи необходимо знать значение этой мощности для трех различных нагрузок. Эти нагрузки лучше всего выбирать те же, по которым строилась диаграмма, т. е. холостой ход, короткое замыкание и одна промежуточная нагрузка.

Предположим, что линией мощностей является прямая mn (рис. 26). Проведя прямую ak , параллельную mn , и продолжив сторону cb треугольника abc до пересечения с ней в точке k , получим два подобных треугольника ckf и bkh , из которых найдем отношения

$$\frac{ck}{cf} = \frac{bk}{bh}; \quad \frac{ck - bk}{cf - bh} = \frac{bk}{bh}$$

или

$$\frac{cb}{cd - bg} = \frac{bk}{bg - am}$$

Из этого отношения найдем отрезок bk от точки b до точки k пересечения прямых

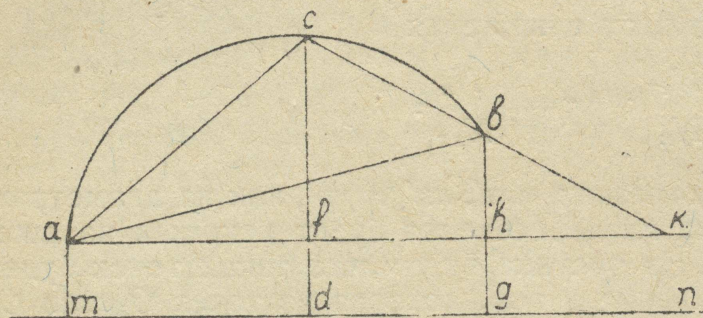


Рис. 26.

$$bk = cb \frac{bg - am}{cd - bg};$$

так как отрезки am , cd и bg должны в некотором масштабе давать значения мощностей P_{xx} , P_n и $P_{кз}$, то это уравнение получает вид

$$bk = cb \frac{P_{кз} - P_{xx}}{P_n - P_{кз}} \quad (31)$$

Из этих соотношений вытекает следующее правило построения линии мощностей. Зная три мощности, указанные выше, и измерив отрезок cb , вычисляем значение отрезка bk . Откладывая его на продолжении стороны cb , находим точку k . Через эту точку и точку a диаграммы проводим прямую ak . Если значение для bk получается отрицательным, то отрезок надлежит откладывать от точки b в сторону точки c .

Выбрав направление для отрезков мощностей (перпендикулярно прямой mn , параллельно касательной или любое другое), находим длины отрезков cf и bh и вычисляем по ним масштаб мощностей

$$M_p = \frac{P_n - P_{xx}}{cf} = \frac{P_{кз} - P_{xx}}{bh} \quad (32)$$

В этом масштабе от точки a по выбранному направлению откладываем отрезок am , соответствующий мощности холостого хода, и через точку m проводим искомую линию мощностей mn , параллельно прямой ak .

Если при построении точка k оказывается за пределами чертежа, то такое же построение может быть проведено не для стороны cb , а для

любой другой из сторон треугольника. Уравнение (32) остается того же вида, но мощности, входящие в него, меняются в круговом порядке.

Вместо вычисления по уравнению (32), точка k может быть найдена построением, аналогичным с построением, проведенным на рис. 25 для точки m' .

Для построения линии мощностей из опыта достаточно определить только одно значение мощности (например, для холостого хода), а остальные могут быть найдены из следующих соображений.

Если для холостого хода измерения дали ток I_{xx} , напряжение V_{xx} и мощность P_{xx} , то угол сдвига фаз определится из соотношения

$$\cos\varphi_{xx} = \frac{P_{xx}}{V_{xx}I_{xx}}.$$

Предположим, что на совмещенной диаграмме вектора тока I_{xx} и напряжения V_{xx} оказались расположенными под углом α_{xx} . Из соотношения этих

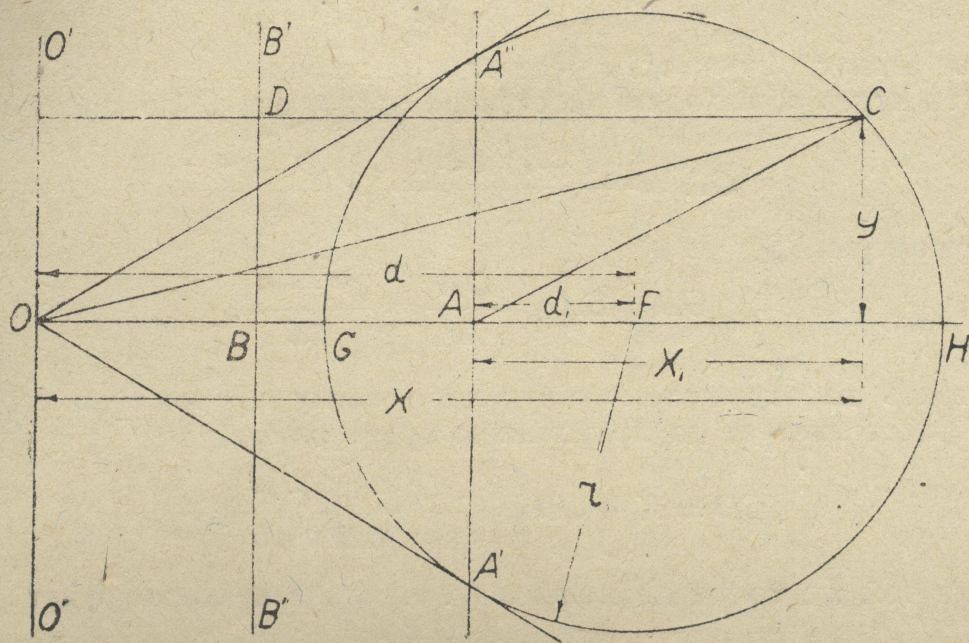


Рис. 27.

углов заключаем, что разность поворотов диаграмм при их совмещении была равна $\beta = \varphi_{xx} - \alpha_{xx}$. Измеряя теперь для любой точки диаграммы угол между током и напряжением, находим истинный угол сдвига фаз по уравнению $\varphi = \alpha + \beta$. Если имеется сомнение в знаках углов, то лучше такое определение произвести для двух мощностей, а по ним уже определить третью мощность. По найденному углу мощность вычисляется по обычному уравнению $P = VI\cos\varphi$.

В ряде случаев построение линий мощностей сильно упрощается, если принимать во внимание особенности, указанные выше для частных случаев произведения векторов. При постоянстве одного из них линия мощностей проходит перпендикулярно такому через начало вторых векторов (полная ваттная мощность) или параллельно (реактивная мощность). Джоулевы потери (I^2R или V^2g), при условии обращения вектора в нуль для одной из нагрузок, определяются касательной к окружности диаграммы.

Если вектор не получает значения равного нулю, то линия джоулевых потерь совпадает с полуполярной окружности. Докажем это и найдем масштаб получающихся отрезков.

Если полюс O окружности диаграммы (начало векторов) лежит вне таковой (рис. 27), то полярной называется прямая, проведенная через

точки A' и A'' касания прямых OA' и OA'' . Проведя прямую OF через полюс и центр окружности, разделим получившийся отрезок OA на две равных части. Прямая BB' , проведенная через точку B , получившуюся при этом делении, расположенная параллельно поляре, называется полуполярю.

Из подобия треугольников $OA'A$ и OFA' имеем

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OA'}{OF}; \quad (OA')^2 = OA \cdot OF.$$

В то же время для касательных и секущих можем написать

$$(OA')^2 = OG \cdot OH;$$

приравнивая полученные выражения, находим,

$$OA = \frac{OG \cdot OH}{OF};$$

обозначив радиус окружности через r и расстояние от полюса до центра окружности через d , находим расстояние от полюса O до поляры AA'

$$OA = \frac{(d-r)(d+r)}{d} = \frac{d^2 - r^2}{d}$$

и до полуполяры BB'

$$OB = BA = \frac{OA}{2} = \frac{d^2 - r^2}{2d}.$$

Если взять на окружности какую-либо точку c , имеющую координаты x и y , то расстояние ее до полуполяры будет равно

$$CD = X - OB = \frac{2dx - d^2 + r^2}{2d}; \quad (33)$$

расстояние той же точки до полюса (т. е. длина вектора) будет

$$oc = \sqrt{x^2 + y^2};$$

из уравнения окружности имеем

$$y^2 + (x - d)^2 = r^2,$$

откуда

$$(OC)^2 = y^2 + x^2 = 2xd - d^2 + r^2, \quad (34)$$

сравнивая уравнения (33) и (34), получаем

$$CD = \frac{(OC)^2}{2d},$$

т. е. отрезок CD пропорционален квадрату отрезка OC .

Если диаграмма построена для тока I^2 в масштабе M_I и требуется найти мощность, определяемую уравнением $P = I \cdot R$, то, строя полуполярю, получаем искомую мощность в виде отрезков CD в масштабе

$$M_p = 2dM_I^2R. \quad (35)$$

Если диаграмма построена для напряжения, а мощность определяется уравнением $P = V^2g$, то масштаб будет равен

$$M_p = 2dM_v^2g. \quad (35a)$$

Когда полюс лежит внутри окружности, то поляра будет проходить вне таковой. Для ее нахождения из полюса A (рис. 27) восстанавливаем перпендикуляр $A'A''$ к прямой AF , соединяющей полюс с центром окружности. В получаемых точках A' и A'' проводим касательные и находим точку O их пересечения. Прямая $O'O''$, проведенная через эту точку параллельно прямой $A'A''$, будет полярой. Подобно предыдущему случаю находим полуполяру, как прямую, проходящую через середину отрезка OA (прямая, проведенная через полюс, и поляра будут взаимно сопряженными и меняются местами).

Вводя расстояние d_1 от нового полюса A до центра окружности F , имеем из подобия треугольников $OA'F$ и $A'AF$

$$\frac{FA}{FA'} = \frac{FA'}{OF}; OF = \frac{(FA')^2}{FA}; d = \frac{r^2}{d_1},$$

что дает на основании полученного выше

$$OA = \frac{d^2 - r^2}{d} = \frac{r^2 - d_1^2}{d_1}$$

или расстояние до полуполяры

$$AB = OB = \frac{r^2 - d_1^2}{2d_1}.$$

Переносим начало координат в полюс A , имеем для отрезка CD выражение

$$CD = AB + X_1 = \frac{2x_1 d_1 - d_1^2 + r^2}{2d_1}.$$

Так как уравнение окружности в новых координатах будет

$$y^2 + (x_1 - d_1)^2 = r^2,$$

то квадрат длины отрезка AC получится равным

$$(AC)^2 = x_1^2 + y^2 = 2x_1 d_1 - d_1^2 + r^2$$

или, сравнивая полученные уравнения,

$$CD = \frac{(AC)^2}{2d_1},$$

т. е. и в этом случае будут действительны масштабы, получаемые по уравнениям (35), но с заменой расстояния d на d_1 .

При полюсе, лежащем на самой окружности, как поляра, так и полуполяра совпадут с касательной, проведенной через полюс. Это вполне соответствует указанному выше для случая обращения вектора в нуль. В этом случае $d = r$ и масштаб будет равен

$$M_p = 2rM_r^2R; \quad (35b)$$

так как диаметр окружности и хорда связаны уравнением

$$2r = \frac{H}{\sin p},$$

то полученное выражение для масштаба сходно с выведенными ранее уравнениями (22) и (23).

Построение линий коэффициента полезного действия и окружностей коэффициента мощности производится тем же путем, как это было указано для вычисленных диаграмм.

5. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ КРУГОВОЙ ДИАГРАММЫ ПО ОПЫТНЫМ ДАННЫМ

Для примера рассмотрим однофазную загрузку трехфазного трансформатора при соединении обеих обмоток звездой без нулевого провода в первичной цепи. Построим совмещенную диаграмму для всех токов и напряжений и найдем на ней линию общей мощности.

Опыт был произведен с трехфазным трансформатором с отношением числа витков, равным 20. Нормальные значения линейных напряжений 120/2400 V и токов 60/3 A.

При включении на холостой ход со стороны низкого напряжения и пересчета полученных результатов на напряжение 120 V, получены следующие значения:

ток в проводах и фазах 4,15 A,
 общая мощность всех фаз 505 W,
 вторичное напряжение фазы 1380 V.

По уравнениям находим значения фазового напряжения 69,7 V и угла сдвига фаз 54°. Неравенством токов и углов сдвига в отдельных фазах, получающимся из-за несимметрии сердечника, пренебрегаем, так как различия их будут очень малы.

При коротком замыкании низкое напряжение было подведено к зажимам высокого напряжения, а затем произведен пересчет на правильное включение и напряжение 120 вольт. Измерения мощности производились в каждой из фаз по отношению к нулю сети.

Фазы	1-ая	2-ая	3-ья
Линейное напряжение	120 V	120 V	120 V
Фазовое напряжение сети	70 V	70 V	70 V
Фазовое напряжение трансформатора	23 V	108 V	98 V
Ток	270 A	138 A	133 A
Мощность фазы сети	4750 W	6200 W	8900 W
Угол сдвига тока по отношению фазового напряжения сети	75°	130,5°	18,5°
Вторичный ток	18,5 A	0	0

Общая мощность всех трех фаз равна 7450 W.

Включая во вторичную обмотку первой фазы омическую нагрузку и произведя снова пересчет на напряжение 120 вольт, получаем значения:

Фазовые напряжения трансформатора	55 V	98 V	65 V
Ток	173 A	90 A	86 A
Мощность фазы сети	9200 W	800 W	5800 W
Вторичное напряжение фазы	925 V	—	—
Вторичный ток	11,5 A	0	0

Общая мощность всех трех фаз равна 14200 W.

По данным холостого хода и короткого замыкания строим векторную диаграмму, приведенную на рис. 28. Отрезки 01, 02 и 03 представляют собой фазовые напряжения сети и фазовые напряжения трансформатора при коротком замыкании первой фазы, отрезки 0a, 0b и 0c—токи при холостом ходе и 0A, 0B и 0C—токи при коротком замыкании.

Вычисляем значение угла окружностей диаграмм по уравнению (27)

$$\cos \rho = \frac{1}{2} \left(\frac{1380 \cdot 18,5}{925 \cdot 11,5} - \frac{1380 \cdot 11,5}{925 \cdot 18,5} - \frac{925 \cdot 18,5}{1380 \cdot 11,5} \right) = 0,2$$

или $\rho = 78,5^\circ$. Соединяя прямыми (пунктир) концы соответствующих векторов холостого хода и короткого замыкания, строим дуги окружностей диаграмм.

Изменяя масштабы и располагая хорду горизонтально, строим совмещенную диаграмму, изображенную на рис. 29. Масштабы для этой диаграммы оказались равными для первичных напряжений $1 \frac{V}{мм}$, для

вторичного напряжения $29 \frac{V}{мм}$,

для вторичного тока $0,385 \frac{A}{мм}$,

для первичных токов первой

фазы $5,55 \frac{A}{мм}$, второй фазы $2,9 \frac{A}{мм}$ и третьей фазы $2,7 \frac{A}{мм}$. Начала соответствующих отрезков отмечены на диаграмме буквами.

Откладывая в масштабе ток нагрузки 11,5 ампера в виде отрезка ac , находим значения соответствующего напряжения, равного из диаграммы

930 V, первичных напряжений 55, 99 и 65 вольт и токов 175, 90 и 84 ампера. Сравнивая полученные результаты с приведенными выше данными опыта, видим, что они очень близки друг к другу.

Для нахождения линии общих мощностей измеряем отрезок $cb = 32 мм$ и вычисляем по уравнению (31) значение отрезка

$$bk = 32 \frac{7450 - 505}{14200 - 7450} = 32,9 мм;$$

откладывая его на продолжении отрезка cb , проводим прямую ak и находим отрезок $cf = 26,5 мм$, взяв его по перпендикуляру к хорде ab .

По уравнению (32) вычисляем масштаб мощностей

$$M_p = \frac{14200 - 505}{26,5} = 520 \frac{W}{мм}$$

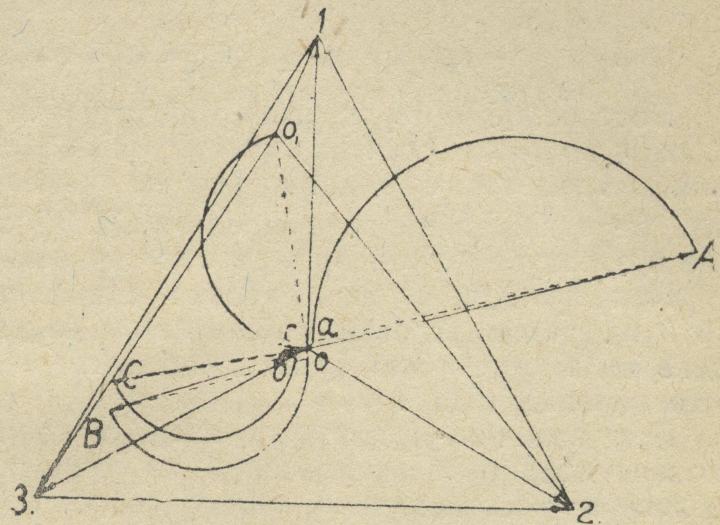


Рис. 28.

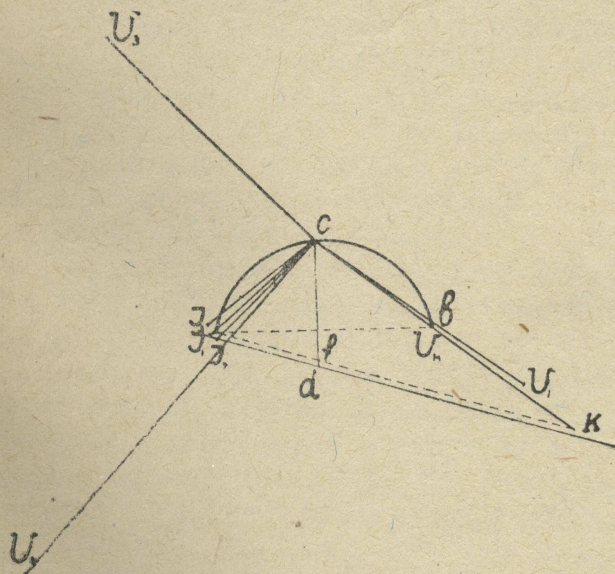


Рис. 29.

и проводим линию мощностей параллельно ak на расстоянии

$$fd = \frac{P_{xx}}{M_p} = \frac{505}{520} = 0,97 \text{ мм.}$$

Мощность будет представляться отрезками cd .

Подобным же путем можно найти и мощности для отдельных фаз.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построение совмещенных диаграмм и использование их свойств возможно во всех случаях, когда уравнение (I) для всех токов и напряжений получается с одним и тем же знаменателем или, вернее, с одним и тем же отношением коэффициентов $\hat{C} \hat{D}$. В каждом отдельном случае лучше в этом убедиться, прежде чем начинать построение.

При наличии в цепи только одного переменного сопротивления (нагрузки), такое условие соблюдается во всех случаях, какая бы сложная цепь ни имелась. Это будет действительно как для однофазной, так и для многофазных цепей.

При наличии нескольких нагрузок вообще круговые диаграммы возможны только при изменении их сопротивлений одновременно по определенному соотношению между собой. Только при некоторых соотношениях возможны круговые диаграммы и только лишь при определенных условиях они могут быть совмещаемы. В однофазных цепях достаточным условием является прямая пропорциональность между изменяющимися сопротивлениями (хотя бы и при различии их аргументов), для многофазных же цепей часто необходима еще симметрия отдельных фаз. Так при несимметрии проводов трехфазной цепи и равенстве сопротивлений нагрузок всех фаз, все же получается несколько различных диаграмм, которые не могут быть совмещены в одну.

В редакцию работа поступила в октябре 1937 г.