

НОМОГРАММА ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Р. А. Воронов

При анализе периодических кривых, особенно в тех случаях, когда нет необходимости находить гармонические составляющие высших порядков (например, выше 5-го или 7-го), можно пользоваться приведенным ниже методом, значительно сокращающим всю работу.

Предположим, что дана периодическая кривая, представляющая собой треугольник, имеющий одну вершину в начале координат и повторяющийся через периоды 2π . Один период такой кривой изображен на

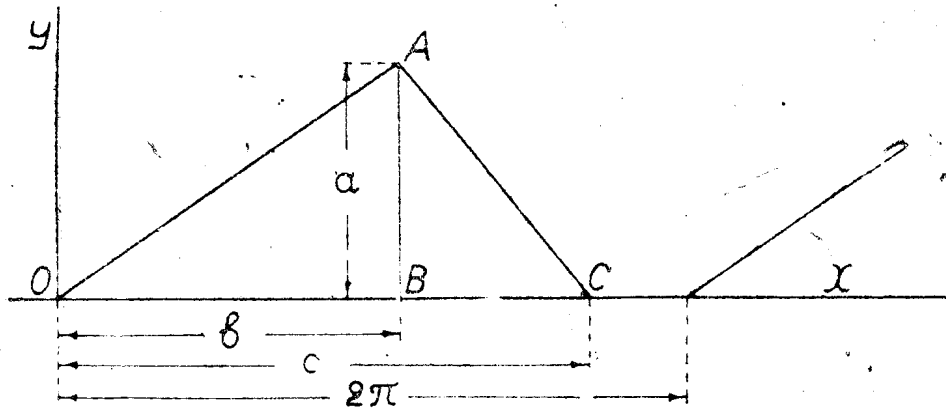


Рис. 1.

рис. 1. Обозначив высоту треугольника через a , а абсциссы вершин через b и c , можем выразить стороны OA и AC уравнениями:

$$y_1 = \frac{a}{b} x ; y_2 = a \frac{c-x}{c-b} . \quad (1)$$

Данная кривая будет иметь составляющие n -го порядка:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cdot \sin nx \cdot dx,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cdot \cos nx \cdot dx; \quad (2)$$

подставляя в первое из них значение y из уравнений (1), получаем:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{a}{b} x \sin nx \cdot dx + \frac{1}{\pi} \int_b^c a \frac{c-x}{c-b} \sin nx \cdot dx,$$

что после интегрирования и упрощения дает

$$A_n = \frac{a}{\pi n^2} \cdot \frac{c \sin nb - b \sin nc}{b(c-b)},$$

или, обозначив

$$\alpha = \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{c \sin nb - b \sin nc}{b(c-b)},$$

будем иметь

$$A_n = a \frac{\alpha}{n}. \quad (3)$$

Коэффициент α может быть представлен в виде

$$\alpha = 0,318 \frac{nc \cdot \sin nb - nb \cdot \sin nc}{nb(nc - nb)}, \quad (4)$$

если значения b и c взяты в радианах, или

$$\alpha = 18,23 \frac{nc \cdot \sin nb - nb \cdot \sin nc}{nb(nc - nb)}, \quad (4a)$$

если b и c взяты в градусах.

Из выражений для коэффициента α видно, что он зависит исключительно от nb и nc . В двух случаях эти уравнения получают неопределенную форму, легко раскрываемую по общим правилам. При $b=c$ получаем:

$$\alpha = 0,318 \cos nc - D \frac{\sin nc}{nc}, \quad (4b)$$

а при $b=0$

$$\alpha = 0,318 - D \frac{\sin nc}{nc}, \quad (4c)$$

где $D=0,318$ при значениях c в радианах и $D=18,23$ при значениях c в градусах.

Если имеется несколько кривых и требуется найти составляющие для кривой, представляющей их сумму, то по общим правилам необходимо найти составляющие для отдельных кривых, а затем сложить полученные результаты.

Из указанного выше вытекает метод анализа кривых. Заданную кривую (рис. 2) заменяем ломаной линией, возможно более близкой к ней, и соединяем все полученные точки перегиба с началом координат. Из каждой точки проводим вертикальные прямые до линий, принадлежащих

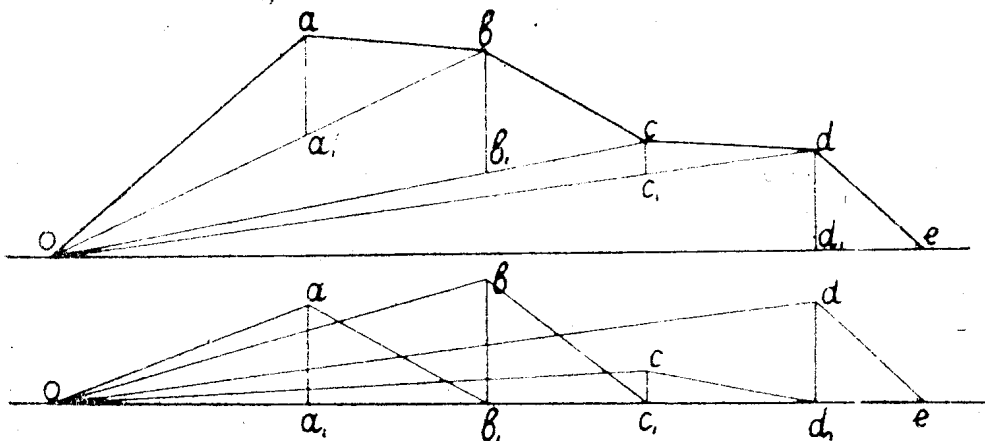


Рис. 2.

следующим соседним точкам и измеряем их длины, учитывая направление (положительное вниз и отрицательное вверх). При таком построении вся кривая распадается на ряд треугольников, которые, если их опустить на ось, получают вид, приведенный внизу (рис. 2). Эти треугольники легко могут быть разложены на составляющие по уравнениям (3 и 4), после чего найти составляющие для всей кривой, как сумму соответствующих составляющих отдельных треугольников. Легко видеть, что нет надобности переносить треугольники, достаточно лишь измерять отрезки вертикальных прямых (значения a) и проекции сторон на ось (значения b и c).

Для симметричных кривых, т. е. таких, которые имеют гармонические составляющие только нечетных порядков, достаточно разбику на треугольники производить только для одного полупериода, удваивая полученный результат. Используя для нечетных значений n соотношения

$$\sin n(\pi - b) = \sin nb,$$

можно соединять точки перегиба как с началом полупериода, так и с его концом. Удобнее всего разделить полупериод на две равные части и анализировать каждую четверть периода самостоятельно (см. пример).

При таком делении один из треугольников обязательно имеет $b = \frac{\pi}{2}$ и $c = \pi$, которым соответствуют значения коэффициента

| | |
|---------|--------------------|
| $n = 1$ | $\alpha_1 = 0.405$ |
| $n = 3$ | $\alpha_3 = 0.135$ |
| $n = 5$ | $\alpha_5 = 0.081$ |
| $n = 7$ | $\alpha_7 = 0.058$ |

Вычисление коэффициента для всех остальных случаев, производимое по уравнениям (4), требует значительной затраты времени. Для облегчения нахождения значений α на рис. 3 приведена номограмма, построенная

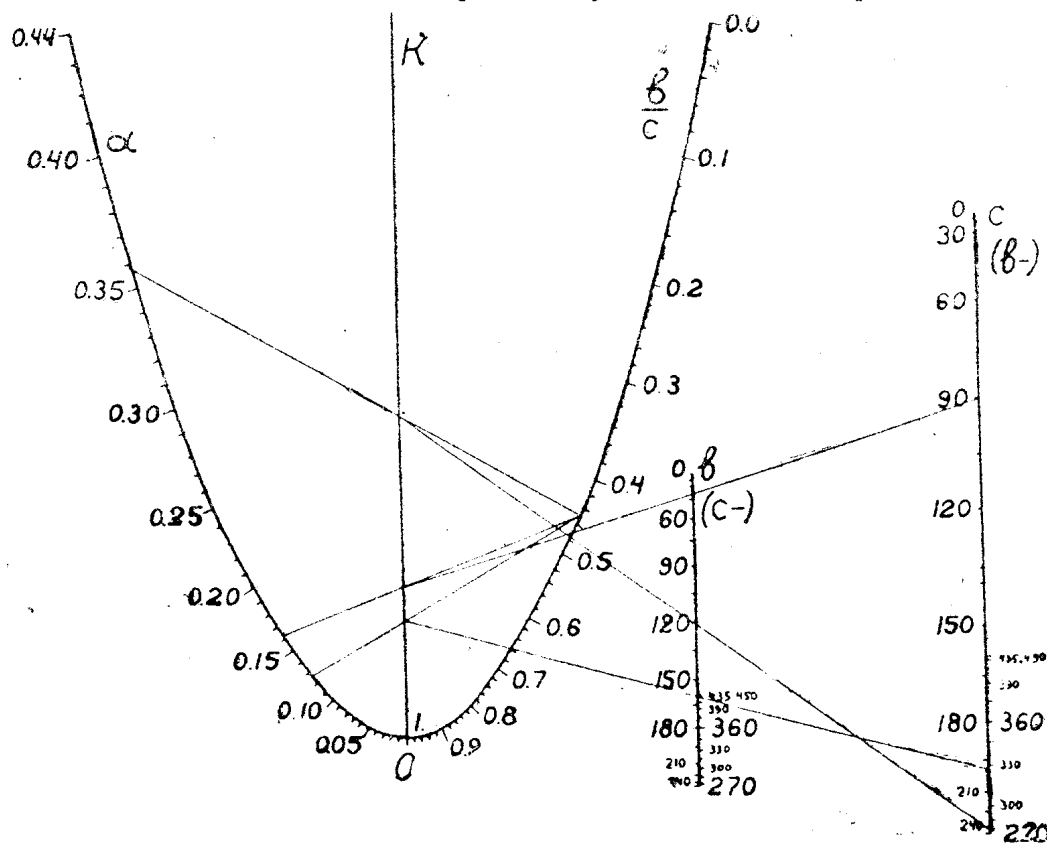


Рис. 3.

ная для этого уравнения. Так как номограмма для непосредственного получения значений α по значениям nb и nc получается с бинарным полем и очень неудобна для использования, то уравнение было преобразовано в следующий вид

$$\frac{\alpha}{18,23} \left(1 - \frac{b}{c} \right) = k = \frac{\sin nb}{nb} - \frac{\sin nc}{nc}$$

и номограмма построена с промежуточной немой шкалой R и дополнительной шкалой для отношений $\frac{b}{c}$. Схематическая польза номограммой получается следующая

$$nc \rightarrow nb \rightarrow k; \quad \frac{b}{c} \rightarrow k \rightarrow \alpha$$

В некоторых случаях точка на немой шкале получается ниже нуля, что соответствует отрицательным значениям α . Для нахождения этого значения необходимо nb и nc поменять местами, как это сделано на номограмме для примера, приведенного ниже.

На приведенной номограмме значения для nb и nc даны только до 450° , что дает возможность производить анализ до 5-го порядка всегда, в большинстве же случаев даже до 7-го. При необходимости получить составляющие более высоких порядков можно продолжить эти деления до любого предела или применить указанный ниже способ дополнительного деления периода.

Этим же способом и по этой же номограмме могут быть найдены значения вторых частей составляющих B_n . Так как они представляют собой множители при членах с косинусами $B_n \cos nx$, а для значений

$n = 1; 5; 9 \dots$ имеется соотношение

$$B_n \cos nx = B_n \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

и для значений $n = 3; 7 \dots$

$$B_n \cos nx = -B_n \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right),$$

то для них может быть повторено все построение и нахождение коэффициентов, но начало координат необходимо перенести на четверть периода назад в точку O_1 (рис. 4). Соединение точек кривой надлежит производить с точками O_1 и O_2 начала и конца нового полупериода. Легко видеть, что вследствие симметрии кривой, участок O_1O может быть заменен на участок O_2O , но с изменением знака высот α . Это дает возможность весь анализ провести для основного полупериода, но с изменением значений для второй четверти на обратные по знаку.

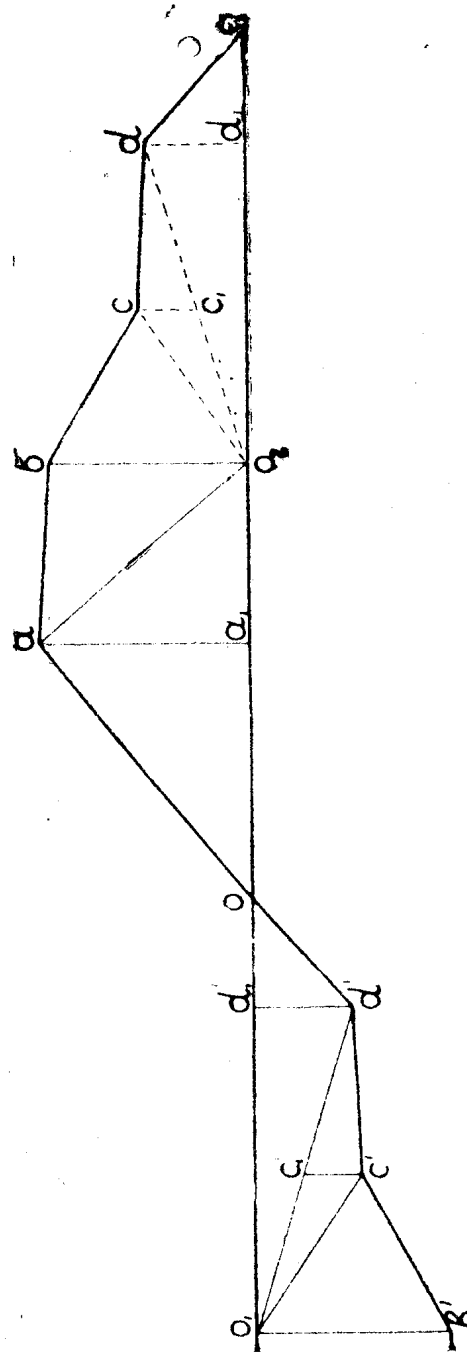


Рис. 4.

Для примера ниже проведен анализ кривой, полупериод которой изображен на рисунке 5.

Все найденные значения и результаты вычислений сведены в следующую таблицу

| a | $\frac{b}{c}$ | c | b | α_1 | $a\alpha_1$ | 3c | 3b | α_3 | $a\alpha_3$ | 5c | 5b | α_5 | $a\alpha_5$ |
|------------------------------|---------------|-------|-----|------------|-------------|------|-----|------------|-------------|-----|-----|------------|-------------|
| a_0 | 47 | 0,500 | 180 | 90 | 0,405 | 19,0 | 270 | -0,135 | -6,5 | 900 | 450 | 0,081 | 3,8 |
| a_1 | 15 | 0,444 | 90 | 40 | 0,162 | 2,4 | 270 | 0,358 | 5,4 | 450 | 200 | -0,128 | -1,9 |
| a_2 | 8 | 0,235 | 40 | 17 | 0,036 | 0,3 | 120 | 0,254 | 2,0 | 200 | 85 | 0,424 | 3,4 |
| a_3 | 26 | 0,744 | 90 | 67 | 0,187 | 4,9 | 270 | 0,205 | 5,3 | 450 | 335 | -0,247 | -6,4 |
| a_4 | 43 | 0,716 | 67 | 48 | 0,112 | 4,7 | 201 | 0,376 | 16,2 | 335 | 240 | -0,150 | -6,5 |
| a_5 | 23 | 0,713 | 48 | 35 | 0,061 | 1,4 | 144 | 0,344 | 7,9 | 240 | 175 | 0,275 | 6,3 |
| a_6 | 10 | 0,600 | 35 | 21 | 0,031 | 0,3 | 105 | 0,225 | 2,2 | 175 | 105 | 0,396 | 4,0 |
| $\Sigma a\alpha_n$ | — | — | — | — | 33,0 | — | — | — | 32,5 | — | — | — | 2,7 |

По полученным суммам $\Sigma a\alpha_n$ находим искомые составляющие

$$A_1 = \frac{2\Sigma a\alpha_n}{n} = \frac{2 \cdot 33,0}{1} = 66,0;$$

$$A_3 = \frac{2 \cdot 32,5}{3} = 21,7; \quad A_5 = \frac{2 \cdot 2,7}{5} = 1,1$$

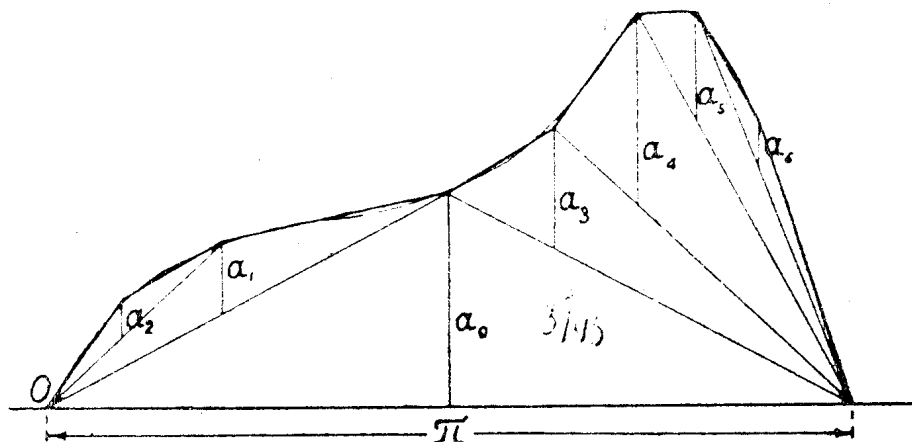


Рис. 5.

Нахождение коэффициентов $\alpha_1, \alpha_3,$ и α_5 для второй строчки таблицы показано на номограмме, причем для пятого порядка пришлось nb и nc поменять местами, что дало отрицательное значение α_5 .

Для нахождения составляющих B_n произведена разбивка на треугольники на рис. 6, все же результаты сведены в следующую таблицу:

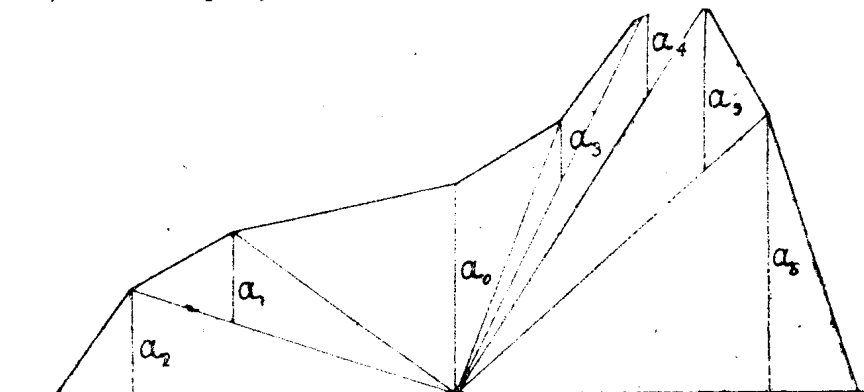


Рис. 6.

| a | $\frac{b}{c}$ | c | b | α | $a\alpha_1$ | 3c | 3b | α_3 | $a\alpha_3$ | 5c | 5b | α_5 | $a\alpha_5$ | |
|----------------------------|---------------|-------|----|----------|-------------|-------|-----|------------|-------------|-------|-----|------------|-------------|------|
| a_0 | 47 | 0 | 50 | 0 | 0,039 | 1,8 | 150 | 0 | 0,256 | 12,0 | 250 | 0 | 0,388 | 18,2 |
| a_1 | 20 | 0,685 | 73 | 50 | 0,128 | 2,6 | 219 | 150 | 0,360 | 7,2 | 365 | 250 | -0,230 | -4,6 |
| a_2 | 23 | 0,727 | 90 | 73 | 0,192 | 4,4 | 270 | 219 | 0,080 | 1,8 | 450 | 365 | -0,192 | -4,4 |
| a_3 | -47 | 0 | 23 | 0 | 0,009 | -0,4 | 69 | 0 | 0,071 | -3,3 | 115 | 0 | 0,175 | -8,2 |
| a_4 | -23 | 0,548 | 42 | 23 | 0,042 | -1,0 | 126 | 69 | 0,143 | -3,3 | 210 | 115 | 0,413 | -9,5 |
| a_5 | -19 | 0,764 | 55 | 42 | 0,080 | -1,4 | 165 | 126 | 0,374 | -7,1 | 275 | 210 | 0,095 | -1,8 |
| a_6 | -37 | 0,797 | 69 | 55 | 0,122 | -4,5 | 207 | 165 | 0,337 | -12,5 | 345 | 275 | -0,260 | 9,6 |
| a_6 | -62 | 0,767 | 90 | 69 | 0,188 | -11,7 | 270 | 207 | 0,120 | -7,4 | 450 | 345 | -0,230 | 14,2 |
| $\Sigma a\alpha_n$ | - | - | - | - | - | -10,2 | - | - | - | -12,6 | - | - | - | 13,5 |

откуда находим

$$B_n = \frac{-10,2 \cdot 2}{1} = -20,4; \quad B_3 = -\frac{-126,2}{3} = 8,6;$$

$$B_5 = \frac{13,5 \cdot 2}{5} = 5,4$$

Отрицательные значения для a соответствуют перенесенной части полу-периода.

Этот же метод и эта же номограмма пригодны и для несимметричных кривых. Для составляющих A_n и B_n нечетных порядков необходимо анализировать отдельно оба полупериода, вычитая затем алгебраически полученные результаты, так как в этом случае

$$\sin n(b \pm \pi) = -\sin nb.$$

Для составляющих A_n четных порядков так же необходимо анализировать весь период, но при суммировании результатов для второй и четвертой четвертей периода знак должен быть изменен на обратный. Для начальных треугольников, имеющих $c = \pi$ и $b = \frac{\pi}{2}$, коэффициент α получает значение равное нулю.

Для составляющих B_n четных порядков анализ производится таким же путем, но с переносом начала координат назад на величину $\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$, где m произвольное целое нечетное число. Если m равно 3 или 7, то у полученного результата знак должен быть изменен на обратный.

Для нахождения постоянной слагающей A_0 необходимо вычислить площадь всей кривой за целый период, что может быть произведено по имеющимся треугольникам. Значение этой составляющей будет равно

$$A_0^* = \frac{1}{360} \Sigma \frac{a(c-b)}{2} = 0,00139 \Sigma a(c-b),$$

если c и b взяты в градусах.

Для нахождения составляющих высших порядков, для которых на номограмме нет соответствующих делений, можно разбить всю кривую на части, содержащие целое число периодов данной составляющей, и анализировать каждый такой участок отдельно, складывая затем получен-

ные результаты. Так, для 13-й составляющей можно разбить период на три части, например

$$0 - \frac{10}{13} \pi; \frac{10}{13} \pi - \frac{20}{13} \pi; \frac{20}{13} \pi - 2\pi,$$

которые содержат 5, 5 и 3 периода таковой.

Пользуясь номограммой, можно определить погрешность, получающуюся от замены кривой на ломаную линию. Если для некоторого участка периода (рис. 7) выпадает при этом площадка $defd$, то она может быть рассматриваема как разность треугольников olf и odl , имеющих высоты ll_1

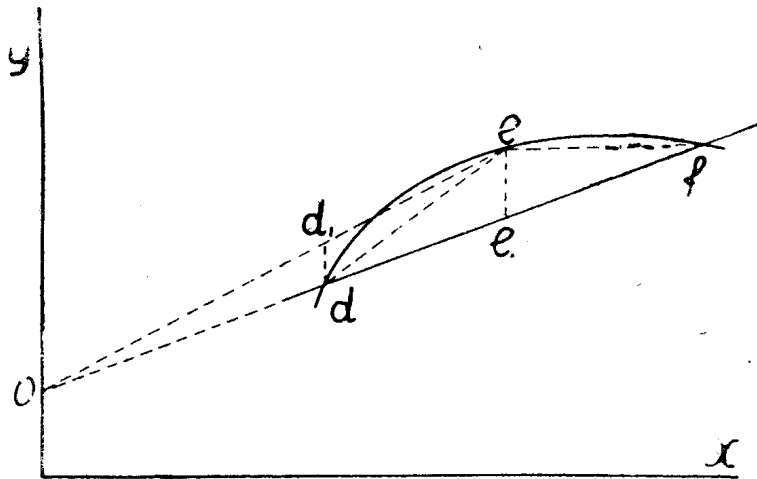


Рис. 7.

и dd_1 . Находя для них по номограмме значения коэффициентов α , вычисляем получающуюся ошибку от данного участка

$$\Delta A_n = \alpha_n' (ll_1) - \alpha_n'' (dd_1).$$

Суммируя ошибки всех участков, можно найти общую ошибку. Обычно эта ошибка получается незначительной.

Приведенный метод удобен тем, что он дает значение любой из составляющих, совершенно независимо от остальных. При кривых простой формы и необходимости иметь составляющие только нескольких первых порядков, результаты получаются очень быстро и с хорошей точностью.

Таблица 1

Таблицы для построения диаграммы

| b/c | $x_{мм}$ | $u_{мм}$ | | b/c | $x_{мм}$ | $u_{мм}$ |
|------|----------|----------|--|------|----------|----------|
| 0,00 | 219,0 | 480,0 | | 0,50 | 109,5 | 120,0 |
| 05 | 208,1 | 433,2 | | 55 | 98,6 | 97,2 |
| 10 | 197,1 | 388,8 | | 60 | 87,6 | 76,8 |
| 15 | 186,2 | 346,8 | | 65 | 76,7 | 58,8 |
| 20 | 175,2 | 307,2 | | 70 | 65,7 | 43,2 |
| 25 | 164,3 | 270,0 | | 75 | 54,8 | 30,0 |
| 30 | 153,3 | 235,2 | | 80 | 43,8 | 19,2 |
| 35 | 142,4 | 202,8 | | 85 | 32,9 | 10,8 |
| 40 | 131,4 | 172,8 | | 90 | 21,9 | 4,8 |
| 45 | 120,5 | 145,2 | | 95 | 11,0 | 1,2 |
| 0,50 | 109,5 | 120,0 | | 1,00 | 0,0 | 0,0 |

Таблица 2

| α | $X_{мм}$ | $Y_{мм}$ | | α | $X_{мм}$ | $Y_{мм}$ |
|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|
| 0,00 | 0 | 0 | | 0,20 | 100 | 100 |
| 02 | 10 | 1 | | 22 | 110 | 121 |
| 04 | 20 | 4 | | 24 | 120 | 144 |
| 06 | 30 | 9 | | 26 | 130 | 169 |
| 08 | 40 | 16 | | 28 | 140 | 196 |
| 0,10 | 50 | 25 | | 0,30 | 150 | 225 |
| 12 | 60 | 36 | | 32 | 160 | 256 |
| 14 | 70 | 49 | | 34 | 170 | 289 |
| 16 | 80 | 64 | | 36 | 180 | 324 |
| 18 | 90 | 81 | | 38 | 190 | 361 |
| 0,20 | 100 | 100 | | 0,40 | 200 | 400 |
| | | | | 42 | 210 | 441 |
| | | | | 0,44 | 220 | 484 |

Таблица 3.

| c° | $Y_{мм}$ | c° | $Y_{мм}$ | c° | $Y_{мм}$ | Примечание |
|-----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|---|
| 0 | 349,1 | 180 | 0,0 | 315 | -57,8 | Для b все значение y в 2 раза меньше |
| 15 | 345,3 | 195 | -26,6 | 330 | -30,4 | |
| 30 | 333,3 | 210 | -47,6 | 345 | -15,0 | |
| 45 | 314,2 | 225 | -62,8 | 360 | 0,0 | |
| 60 | 288,7 | 240 | -72,2 | 375 | 13,8 | |
| 75 | 257,6 | 250 | -75,0 | 390 | 25,6 | |
| 90 | 222,2 | 255 | -75,8 | 405 | 34,8 | |
| 105 | 184,0 | 260 | -75,8 | 420 | 41,2 | |
| 120 | 144,3 | 265 | -75,0 | 435 | 44,4 | |
| 135 | 104,7 | 270 | -74,2 | 440 | 44,8 | |
| 150 | 66,7 | 285 | -67,8 | 445 | 44,8 | |
| 165 | 31,4 | 300 | -57,8 | 450 | 44,4 | |

Уравнения, по которым вычислены эти таблицы

$$\begin{array}{ll} \text{Для } b/c & \text{Для } \alpha \\ X = 219 \left(1 - \frac{b}{c} \right) & X = 500 \alpha \\ Y = 480 \left(1 - \frac{b}{c} \right)^2 & Y = 2500 \alpha^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Для } c & \text{Для } b \\ X = K & X = 0,5 K \\ Y = 20000 \frac{\sin c}{c} & Y = 10000 \frac{\sin b}{b} \end{array}$$

K — произвольная величина, взятая равной 400 м.

Нулевые точки всех y должны лежать на одной прямой. На рисунке все размеры уменьшены в 6,2 раза.