С. К. Конюхов, проф. СТИ.

Определение объема жидкости в цилиндрическом котле.

1. Метод Рейнольдса и Катрелля.

В химической промышленности, нефтяном деле, на железных дорогах иногда встречается надобность определить объем жидкости, содержащейся в горизонтальном цилиндрическом котле, наполненном не до верху. Так как в справочниках нет надлежащих формул для решения этой задачи, то покажем, как ее решить.

Пусть (черт. 1) у нас имеется горизонтальный цилиндрический котел с двумя днищами, очерченными радиусом R. Назовем радиус цилиндрической части котла через r, а длину через l. Далее введем такия обозначения: $ML = x$ (глубина наполнения котла); $HOL = \angle\,\theta$ и $HO'L = \angle\,\varphi$. Заметим предварительно, что HKH' представляет поверхность уровня в сегменте котла и что точка O', представляя проекцию точки O на линию симметрии поверхности уровня, является в тоже время центром, из которого делается засечка для получения дуги круга HKH'.
Сейчас же можно написать

$$x = r - r\,\mathrm{Cos}\,\theta = 2\,r\,\mathrm{Sin}^2\frac{\theta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Если соединить точку C с точкой K, то получим прямоугольный треугольник $CO'K$, у которого $CK = R$, $CO' = OL = r\,\mathrm{Cos}\,\theta$.
Таким образом,

$$O'K = \sqrt{R^2 - r\,\mathrm{Cos}^2\,\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Но можно также положить

$$O'K = \lambda\,r\sqrt{1 + \frac{\mathrm{Sn}^2\,\theta}{\lambda^2}} = \lambda\,r\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

где

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\,\theta}{\lambda}.$$

Чтобы выявить значение коэффициента λ, обратимся к рассмотрению треугольников OHL и $O'HL$. Сейчас же можно написать:

$$HL = r\,\mathrm{Sin}\,\theta;\ HL = O'L\ \mathrm{tg}\,\varphi = CO\ \mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{R^2 - r^2} \cdot \mathrm{tg}\,\varphi \quad \ldots \quad (4)$$

Следовательно,

$$r\,\mathrm{Sin}\,\theta = \sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{tg}\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Откуда получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \operatorname{Sin} \theta \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

т. е.

$$\lambda = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Введем теперь такие условные обозначения

$$X = \theta - \frac{\operatorname{Sin} 2\theta}{2}$$

$$Y = -2L\theta - \frac{4}{3}\lambda^3\theta + \frac{2}{3}\lambda \operatorname{Sin} 2\theta +$$

$$+ \frac{1}{3}\operatorname{Cos}\theta(\operatorname{Cos} 2\theta - 6\lambda^2 - 5)\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Sin}\theta}{\lambda} + \frac{4}{3}(1+\lambda^2)^{3/2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}\operatorname{tg}\theta\right).$$

Теперь результат интегрирования получит более компактный вид

$$V = X r^2 l + Y r^3 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

Вопрос теперь сводится к тому, чтобы найти числовое значение для X и Y.

Когда необходимо произвести более точный подсчет объема жидкости, то в клепаных котлах нужно учитывать наличие заклепочных головок.

В том случае, когда заклепочные головки обращены выпуклостью внутрь котла, у-ние для объема получает вид

$$V = r^2 l X - r^3 Y \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

Если одна заклепка обращена головкой внутрь, а другая наружу, то

$$V = r^2 l X \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

Для удобства скорых подсчетов даются следующие таблицы значений X и Y, найденные путем точных вычислений, принимая во внимание наличие заклепочных головок и котельных швов.

В этих таблицах $p = \frac{X}{2r}$. Значение p взяты в пределах от $^1/_2\%$ диаметра образцового котла, в котором радиус сферического днища равняется диаметру котла или $R = 2r$.

Будем рассматривать теперь площадь уровня жидкости в котле. Она состоит из центрального прямоугольника с площадью $2 l r \operatorname{Sin}\theta$ и двух сегментов с центральным углом 2φ и радиусом $O'K$. Площадь каждого сегмента представляет разность площадей сектора $O'HKH'O'$ и треугольника $O'HH'$.

Так и выразим эту площадь

$$\omega = (O' K)^2 \varphi - H L \sqrt{R^2 - r^2} =$$

$$= r^2 (\lambda^2 + \operatorname{Sin}^2 \Theta) \varphi - r \operatorname{Sin} \Theta \sqrt{R^2 - r^2} =$$

$$= r^2 (\lambda^2 + \operatorname{Sin}^2 \Theta) \varphi - r^2 \lambda \operatorname{Sin} \Theta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Зная площадь сегмента, не трудно найти элементарный объем слоя воды в котле

$$d V = [2 r l \operatorname{Sin} \Theta + 2 r^2 (\lambda^2 + \operatorname{Sin}^2 \Theta) \varphi - 2 r^2 \lambda \operatorname{Sin} \Theta] d x \quad \ldots \quad (9)$$

Но $x = r (1 - \operatorname{Cs} \Theta)$ $\qquad d x = r \operatorname{Sin} \Theta \, d \Theta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$

Так как в этом уравнении переменными являются величины x, φ и Θ, то для проведения интегрирования необходимо выразить x и φ через Θ.

Итак, получаем

$$V = 2 r^2 \int_0^\Theta \left[(l - r \lambda) \operatorname{Sin}^2 \Theta + r (\lambda^2 \operatorname{Sin} \Theta + \operatorname{Sin}^3 \Theta) \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{Sin} \Theta}{\lambda} \right) \right] d \Theta \quad \ldots \quad (11)$$

Проще всего интегрирование производить по частям. В таком случае получаем

$$V = r^2 \left(l - 2 r \lambda - \frac{4}{3} r \lambda^3 \right) \Theta + \frac{r^2}{6} (4 r \lambda - 3 l) \operatorname{Sin} 2 \Theta +$$

$$+ \frac{r^3}{3} \operatorname{Cos} \Theta (\operatorname{Cos} 2 \Theta - 6 \lambda^2 - 5) \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{Sin} \Theta}{\lambda} +$$

$$+ \frac{4}{3} r^3 (\lambda^2 + 1)^{1/2} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{1 + \lambda^2}{\lambda}} \right) \operatorname{tg} \Theta \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Аналитически величина Θ выражается так

$$\Theta = 2 \operatorname{arc\,Sin} \sqrt{\frac{x}{2 r}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

и изменяется в пределах от 0 до 180°.

Наконец,

$$\operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{1 + \lambda^2}{\lambda}} \right) \operatorname{tg} \Theta$$

изменяется в пределах от 0 до π.

Если положить $\Theta = 0$ или $\Theta = \pi$, то

$$\operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{Sin} \Theta}{\lambda} \right) = 0.$$

$p^0/_0$	χ	Lg χ	Y	Lg Y	$p^0/_0$	χ	Lg χ	Y	Lg Y
0.5	0.0022	7.34242—10	—	—	16.5	0.3392	9.53046—10	0.045	8.65321—10
1.0	0.0054	7.73239—10	0.001	7.00000—10	17.0	0.3541	0.54913—10	0.048	8.68124—10
1.5	0.0098	7.99123—10	0.001	7.00000—10	17.5	0.3692	9.56726—10	0.052	8.71600—10
2.0	0.0150	8.17609—10	0.001	7.00000—10	18.0	0.3845	9.58490—10	0.055	8.74036—10
2.5	0.0210	8.32222—10	0.001	7.00000—10	18.5	0.4000	9.60206—10	0.059	8.77085—10
3.0	0.0275	8.43933—10	0.001	7.00000—10	19.0	0.4156	9.61868—10	0.062	8.79239—10
3.5	0.0336	8.52634—10	0.002	7.30103—10	19.5	0.4315	9.63798—10	0.066	8.81754—10
4.0	0.0422	8.62531—10	0.002	7.30103—10	20.0	0.4473	0.65060—10	0.069	8.83885—10
4.5	0.0502	8.70070—10	0.003	7.47712—10	20.5	0.4634	9.66596—10	0.073	8.86332—10
5.0	0.0587	8.76864—10	0.003	7.47712—10	21.0	0.4796	0.68088—10	0.077	8.88649—10
5.5	0.0677	8.83059—10	0.004	7.60206—10	21.5	0.4961	9.69557—10	0.081	8.90849—10
6.0	0.0770	8.86649—10	0.004	7.60206—10	22.0	0.5125	9.70969—10	0.085	8.92942—10
6.5	0.0867	8.93802—10	0.005	7.69897—10	22.5	0.5291	9.72351—10	0.089	8.94739—19
7.0	0.0967	8.98542—10	0.005	7.69897—10	23.0	0.5459	9.73711—10	0.093	8.96848—10
7.5	0.1071	9.02979—10	0.006	7.77815—10	23.5	0.5628	9.75035—10	0.098	8.99123—10
8.0	0.1178	9.07115—10	0.007	7.84510—10	24.0	0.5798	9.76328—10	0.102	9.00860—10
8.5	0.1288	9.10992—10	0.009	7.95424—10	24.5	0.5969	9.77590—10	0.107	9.02938—10
9.0	0.1401	9.14644—10	0.010	8.00000—10	25.0	0.6142	9.78839—10	0.111	9.04532—10
9.5	0.1517	9.18099—10	0.012	8.07918—10	25.5	0.6317	9.80051—10	0.116	9.06745—10
10.0	0.1635	9.21352—10	0.013	8.11394—10	26.0	0.6491	8.81239—10	0.121	9.08279—10
10.5	0.1757	8.24477—10	0.015	8.17609—10	26.5	0.6667	9.82393—10	0.126	9.10037—10
11.0	0.1880	9.17416—10	0.017	8.23045—10	27.0	0.6844	9.83531—10	0.131	9.11727—10
11.5	0.2007	9.30255—10	0.019	8.27875—10	27.5	0.7023	9.84652—10	0.137	9.13672—10
12.0	0.2135	9.32940—10	0.021	8.32222—10	28.0	0.7201	9.85739—10	0.142	9.15229—10
12.5	0.2266	9.35526—10	0.024	8.38021—10	28.5	0.7381	9.86812—10	0.148	9.17026—10
13.0	0.2399	9.38003—10	0.026	8.41497—10	29.0	0.7562	9.87864—10	0.153	9.18469—10
13.5	0.2535	9.40398—10	0.029	8.46240—10	29.5	0.7744	9.88897—10	0.159	9.20140—10
14.0	0.2673	9.42700—10	0.031	8.49136—10	30.0	0.7927	9.89911—10	0.164	9.21484—10
14.5	0.2813	9.44917—10	0.034	8.53148—10	30.5	0.8100	9.90849—10	0.170	9.23045—10
15.0	0.2955	9.47056—10	0.036	8.55630—10	31.0	0.8295	9.91882—10	0.176	9.24553—10
15.5	0.3100	9.49136—10	0.039	8.59106—10	31.5	0.8481	9.92845—10	0.182	9.26007—10
16.0	0.3245	9.51121—10	0.042	8.62325—10	32.0	0.8667	9.93787—10	0.187	9.27184—10

$p^0/_0$	χ	Lg χ	Y	Lg Y	$p^0/_0$	χ	Lg χ	Y	Lg Y
32.5	0.8854	9.94714—10	0.193	9.28556—10	48.5	1.5109	0.17924—00	0.411	9.61384—10
33.0	0.9042	9.95626—10	0.199	9.29885—10	49.0	1.5308	0.18492—00	0.418	9.62118—10
33.5	0.9239	9.96563—10	0.206	9.31387—10	49.5	1.5508	0.19056—00	0.426	9.62941—10
34.0	0.9419	9.97400—10	0.212	9.32634—10	50.0	1.5708	0.19612—00	0.433	9.63649—10
34.5	0.9609	9.98268—10	0.218	9.33846—10	50.5	1.5908	0.20162—00	0.441	9.64444—10
35.0	0.9799	0.99118—10	0.224	9.35025—10	51.0	1.6108	0.20704—00	0.448	9.65128—10
35.5	0.9991	9.99961—10	0.231	9.36361—10	51.5	1.6308	0.21240—00	0.456	9.65896—10
36.0	1.0182	0.00783—00	0.237	9.37475—10	52.0	1.6507	0.21767—00	0.463	9.66558—10
36.5	1.0375	0.01599—00	0.244	9.38739—10	52.5	1.6707	0.22290—00	0.470	9.67210—10
37.0	1.0568	0.02349—00	0.250	9.39794—10	53.0	1.6907	0.22807—00	0.477	9.67852—10
37.5	1.0762	0.03189—00	0.257	9.40943—10	53.5	1.7107	0.23317—00	0.484	9.68485—10
38.0	1.0955	0.03961—00	0.263	9.41996—10	54.0	1.7306	0.23820—00	0.491	9.69108—10
38.5	1.1150	0.04727—00	0.270	9.43136—10	54.5	1.7505	0.24316—00	0.498	9.69723—10
39.0	1.1345	0.05480—00	0.276	9.44091—10	55.0	1.7704	0.24807—00	0.505	9.70329—10
39.5	1.1540	0.06221—00	0.283	9.45179—10	55.5	1.7903	0.25293—00	0.513	9.71012—10
40.0	1.1735	0.06948—00	0.290	9.46240—10	56.0	1.8102	0.25773—00	0.520	9.71600—10
40.5	1.1932	0.07671—00	0.297	9.47276—10	56.5	1.8300	0.26245—00	0.527	9.72181—10
41.0	1.2128	0.08379—00	0.304	9.48287—10	57.0	1.8498	0.26712—00	0.534	9.72754—10
41.5	1.2325	0.09079—00	0.312	9.49276—00	57.5	1.8696	0.27175—00	0.541	9.73320—10
42.0	1.2522	0.09767—00	0.318	9.50273—10	58.0	1.8894	0.27632—00	0.548	9.73878—10
42.5	1.2720	0.10449—00	0.325	9.51188—10	58.5	1.9091	0.28083—00	0.555	9.74429—10
43.0	1.2918	0.11120—00	0.332	9.52119—10	59.0	1.9288	0.28529—00	0.562	9.74974—10
43.5	1.3116	0.11780—00	0.339	9.53020—10	59.5	1.9485	0.28970—00	0.569	9.75511—10
44.0	1.3314	0.12431—00	0.346	9.53908—10	60.0	1.9681	0.29405—00	0.576	9.76042—10
44.5	1.3513	0.13075—00	0.354	9.54900—10	60.5	1.9876	0.29833—00	0.583	9.76567—10
45.0	1.3712	0.13710—00	0.361	9.55751—10	61.0	2.0071	0.30257—00	0.590	9.77085—10
45.5	1.3911	0.14336—00	0.368	9.56585—10	61.5	2.0266	0.30677—00	0.597	9.77597—10
46.0	1.4110	0.14953—00	0.375	9.57403—10	62.0	2.0461	0.31093—00	0.603	9.78032—00
46.5	1.4310	0.15564—00	0.382	9.58206—10	62.5	2.0655	0.31503—00	0.610	9.78533—10
47.0	1.4509	0.16164—00	0.389	9.58995—10	63.0	2.0848	0.31906—00	0.616	9.78958—10
47.5	1.4709	0.16758—00	0.396	0.59770—10	63.5	2.1041	0.32307—00	0.623	9.79449—10
48.0	1.4901	0.17345—00	0.403	9.60531—10	64.0	2.1238	0.32703—00	0.629	9.79865—10

$p^0/_0$	χ	Lg χ	Y	Lg Y	$p^0/_0$	χ	Lg χ	Y	Lg Y
64.5	2.1426	0.33094—00	0.636	9.80346—10	82.5	2.7723	0.44284—00	0.815	9.91116—10
65.0	2.1617	0.33480—00	0.642	9.80754—10	83.0	2.7875	0.44521—00	0.818	9.91275—10
65.5	2.1807	0.33860—00	0.648	9.81158—10	83.5	2.8002	0.44753—00	0.821	0.91434—10
66.0	2.1997	0.34236—00	0.654	9.81558—10	84.0	2.8171	0.44980—00	0.824	9.91593—10
66.5	2.2186	0.34608—00	0.661	9.82020—10	84.5	2.8317	0.45205—00	0.827	9.91751—10
67.0	2.2374	0.34974—00	0.667	9.82413—10	85.0	2.8461	0.45425—00	0.830	9.91908—10
67.5	2.2562	0.35338—00	0.673	9.82802—10	85.5	2.8603	0.45641—00	0.833	9.92065—10
68.0	2.2749	0.35696—00	0.679	9.83187—10	86.0	2.8743	0.45853—00	0.835	9.92169—10
68.5	2.2935	0.36050—00	0.685	9.83569—10	86.5	2.8881	0.46061—00	0.838	9.92324—10
69.0	2.3121	0.36401—00	0.690	9.83885—10	87.0	2.9017	0.46265—00	0.840	9.92428—10
69.5	2.3305	0.36745—00	0.696	9.84261—10	87.5	2.9150	0.46464—00	0.843	9.92583—10
70.0	2.3489	0.37086—00	0.702	9.84634—10	88.0	2.9281	0.46659—00	0.845	9.92686—10
70.5	2.3672	0.37424—00	0.708	9.85003—10	88.5	2.9410	0.46850—00	0.847	9.92788—10
71.0	2.3854	0.37756—00	0.713	9.85309—10	89.0	2.9536	0.47035—00	0.849	9.92891—10
71.5	2.4035	0.38084—00	0.719	9.85673—10	89.5	2.9660	0.47217—00	0.851	9.92943—10
72.0	2.4215	0.38408—00	0.724	9.85774—10	90.0	2.9781	0.47394—00	0.853	9.93095—10
72.5	2.4394	0.38728—00	0.730	9.86332—10	90.5	2.9899	0.47566—00	0.855	9.93197—10
73.0	2.4572	0.39044—00	0.735	9.86619—10	91.0	3.0015	0.47734—00	0.856	9.93247—10
73.5	2.4749	0.39356—00	0.740	9.86923—10	91.5	3.0127	0.47896—00	0.858	9.93349—10
74.0	2.4925	0.39664—00	0.745	9.87216—10	92.0	3.0238	0.48055—00	0.859	9.93399—10
74.5	2.5100	0.39967—00	0.750	9.87506—10	92.5	3.0345	0.48209—00	0.860	9.93450—10
75.0	2.5274	0.40267—00	0.755	9.87245—10	93.0	3.0449	0.48357—00	0.861	9.93500—10
75.5	2.5446	0.40562—00	0.760	9.88081—10	93.5	3.0549	0.48500—00	0.862	9.93551—10
76.0	2.5618	0.40855—00	0.764	9.88309—10	94.0	3.0646	0.48637—00	0.862	9.93551—10
76.5	2.5788	0.41142—00	0.769	9.88593—10	94.5	3.0739	0.48769—00	0.863	9.93601—10
77.0	2.5957	0.41425—00	0.773	9.88818—10	95.0	3.0829	0.48896—00	0.863	9.93601—10
77.5	2.6124	0.41704—00	0.777	9.89042—10	95.5	3.0914	0.49016—00	0.864	9.93651—10
78.0	2.6291	0.41981—00	0.781	9.89265—10	96.0	3.0994	0.49128—00	0.864	9.93651—10
78.5	2.6456	0.42252—00	0.785	9.89487—10	96.5	3.1070	0.49234—00	0.865	9.93702—10
79.0	2.6620	0.42521—00	0.789	9.89708—10	97.0	3.1141	0.49333—00	0.865	9.93702—10
79.5	2.6782	0.42784—00	0.793	9.89922—10	97.5	3.1208	0.49427—00	0.865	9.93702—10
80.0	2.6943	0.43045—00	0.797	9.90146—10	98.0	3.1266	0.49507—00	0.865	9.93702—10
80.5	2.7102	0.43300—00	0.801	9.90363—10	98.5	3.1319	0.49581—00	0.865	9.93702—10
81.0	2.7260	0.43553—00	0.804	9.90526—10	99.0	3.1362	0.49640—00	0.865	9.93702—10
81.5	2.7416	0.43800—00	0.808	9.90741—10	99.5	3.1394	0.49685—00	0.866	9.93752—10
82.0	2.7571	0.44045—00	0.811	9.90902 10	100.0	3.1416	0.49715—00	0.866	9.93752—10

Покажем на примере, как пользоваться сводным числовым материалом.

Пример. Пусть длина котла $e = 24$ фута, а диаметр 8 футов. Глубина жидкости в котле 2 фута. Тогда объем жидкости будет

$$V = 4^2 \cdot 24\,x + 4^3 \cdot y = 384\,x + 64\,y.$$

Сейчас же нужно найти p

$$p = \frac{x}{2\,r} = \frac{2}{8}\, 0{,}25 \text{ или } 25\%.$$

По таблице находим для $p = 25\%$ значения

$$X = 0{,}6142 \text{ и } У = 0{,}111.$$

Следовательно,

$$V = 384 \cdot 0{,}6142 + 64 \cdot 0{,}111 = 235{,}8528 + 7{,}104 = 242{,}96 \text{ куб. фут.}$$

Или можно прибегнуть к логарифмированию.

$$\mathrm{Lq}\, 384\, X = 2{,}58433 + 9{,}78831 - 10 = 2{,}37264$$

$$\mathrm{Lg}\ \ 64\, T = 1{,}80618 + 9{,}04532 - 10 = 0{,}85150$$

Следовательно,

$$V = 235{,}8528 + 7{,}104 = 242{,}96 \text{ куб. фут.}$$

Ничто, конечно, не мешает вычислить таблицы для котлов другого размера.

Предварительно нужно вычислить значение

$$\lambda = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (17)$$

для каждого котла, а потом находить значение X и У для последовательных значений — Θ по уравнению

$$\Theta = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2\,r}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (18).$$

2. Метод Кеммеля.

Пусть котел наполнен больше, чем на половину высоты (по направлению вертикального диаметра). Объем жидкости можно удобно разбить на три части: 1) центральную, у которой основанием служит сектор SKS (черт. 3), а высотой длина цилиндра E, 2) два нижних шаровых полусегмента, составляющих целый шаровой сегмент, равный по объему днища котла и 3) два верхних неполных шаровых сегмента.

Объем первой части будет такой

$$V_1 = \frac{\pi r^2 n}{360} l + OA.AN.l = \frac{\pi . r^2 n l}{360} + c.b.l \quad \dots\dots \quad (19)$$

Здесь n = число градусов, соответствующих дуге NKN′, OA = c и AN = b (черт. 3).
Объем второй части будет

$$V_2 = \frac{\pi . BD^2 (3R - BD)}{3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

Но $BD = OD - OB = R - R \operatorname{Cos} \alpha/_2 = R (1 - \operatorname{Cos} \alpha/_2$

Следовательно,

$$V_2 = \frac{\pi R^2 (1 - \operatorname{Cos} \alpha/_2)^2 (3R - R + R \operatorname{Cos} \alpha/_2)}{3} =$$

$$= \frac{\pi R^3}{3} (2 - 3 \operatorname{Cos} \alpha/_2 + \operatorname{Cs}^3 \alpha/_2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

Переходим теперь к определению объема третьей части. Если провести сечение S — S′ (черт. 3) на расстоянии x от оси котла, то получим уровень жидкости в форме кругового сегмента, проекция которого на горизонтальную плоскость, проходящую через ось котла, изобразится сегментом CBC′E (черт. 4). Площадь этого сегмента будет равна

$$\omega = OCEC' - OCC' = \frac{1}{2} \rho^2 \operatorname{arc} \varphi - \rho \operatorname{Cos} \frac{\varphi}{2} \rho \operatorname{Sin} \varphi/_2 = \frac{\rho^2}{2} (\operatorname{arc} \varphi - \operatorname{Sin} \varphi) \ldots (22)$$

Элементарный же объем выразится так

$$d V_3 = \omega d x = \frac{\rho^2}{2} (\operatorname{arc} \varphi - \operatorname{Sin} \varphi) d x \ldots \ldots \ldots (23)$$

$$V_3 = \int_{x=c}^{x=c} \frac{\rho^2}{2} (\operatorname{arc} \varphi - \operatorname{Sin} \varphi) d x \ldots \ldots \ldots (24)$$

Чтобы можно было произвести интегрирование, выразим ρ и φ через x и известные величины.

$$\rho^2 = R^2 - x^2; \; \rho^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} = R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} = x^2; \; \rho \operatorname{Cos} \alpha/_2 = R \operatorname{Cos} \alpha/_2$$

Эти уравнения без труда получаются, пользуясь чертежами 2, 3 и 4.
В таком случае будем иметь

$$\operatorname{Cos} \frac{\varphi}{2} = \frac{R}{\rho} \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}; \quad \operatorname{Sin} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{R^2 \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2} - x^2}}{\rho}.$$

Значит

$$2 \operatorname{Sin} \frac{\varphi}{2} \operatorname{Cos} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{Sin} \varphi = \frac{2 R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2} \sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}}{\rho^2} \quad \ldots (25$$

Подставляя это значение $\operatorname{Sin} \varphi$ в интеграл (24), получаем

$$V_3 = \int_{x=0}^{x=c} \frac{\rho^2}{2} \operatorname{arc} \varphi d x - \int_{x=0}^{x=c} R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2} \sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - x^2 d x} \quad \ldots (25$$

Оставляя первый интеграл, заметим, что второй интеграл разрешается без затруднений, так как величины $R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}$ и $R \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}$ величины постоянные. Напишем этот интеграл

$$R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2} \int_{x=0}^{x=c} \sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - x^2} \cdot dx =$$

$$= R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2} \left[\frac{x}{2} \sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - x^2} + \frac{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2}}{2} \operatorname{arc} \operatorname{Sin} \left(\frac{x}{R \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}} \right) \right] =$$

$$= R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{C}{2} \sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - C^2} + \frac{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2}}{2} \operatorname{arc} \operatorname{Sin} \frac{C}{R \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}} \right) \quad \ldots (26)$$

Займемся теперь нахождением интеграла

$$\int_{x=0}^{x=c} \frac{\rho^2}{2} \operatorname{arc} \varphi \, dx = \int_{x=0}^{x=c} \rho^2 \operatorname{arc} \left(\frac{\varphi}{2} \right) dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=c} \rho^2 \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \left(\frac{R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}}{\rho} \right) dx \quad \ldots \ldots \ldots (27)$$

Для проведения интегрирования необходимо ρ заменить, выразив его в зависимости от X. Тогда получим

$$\int_{x=0}^{x=c} (R^2 - x^2) \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} \, dx \quad \ldots \ldots \ldots (28)$$

Интегрирование удобнее всего произвести по частям, по известному уравнению

$$\int V \, dU = UV - \int U \, dV \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (29)$$

полагая

$$dV = (R^2 - x^2) \, dx \text{ и } U = \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad \ldots \ldots \ldots (30)$$

Отюда имеем

$$V = R^2 x - \frac{x^3}{3} = \frac{x}{3} (3 R^2 - x^2) \quad \ldots \ldots \ldots (31)$$

Значит,

$$\int_0^c (R^2 - x^2) \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} \, dX = \frac{x}{3} (3 R^2 - x^2) \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$+\int_0^c \frac{3R^2\chi-\chi^3}{3}\cdot\frac{R\chi\cos\frac{\alpha}{2}\,d\chi\cdot}{(R^2-x^2)\sqrt{R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-x^2}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(32)$$

Не трудно усмотреть, что разрешение задачи интегрирования свелось теперь к нахождению интеграла

$$\int_0^c \frac{(3R^2x^2-x^4)\,dx}{(R^2-x)\sqrt{R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-x^2}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(33)$$

Этот интеграл можно разложить, пользуясь тем соображением, что

$$\frac{3R^2x^2-\chi^4}{R^2-R^2}=\chi^2-2R^2+\frac{2R^4}{R^2-x^2}=\frac{R^2x^2-2R^4-x^4+2R^2x^2-2R^4}{R^2-x^2}.\;(34)$$

В свою очередь можно написать

$$\frac{2}{R^2-x^2}=\frac{1}{R(R+x)}+\frac{R(R-x}{1}=\frac{R^2+Rx+R^2-Rx}{R^2(R^2-x^2)}\;.\;.\;(35)$$

$$\int_0^c \frac{(3R^2x^2-x^4)\,dx}{(R^2-x^2)\sqrt{R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-x^2}}=\int_0^c\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}-2R^2$$

$$\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-x^2}}+R^4\int_0^c\frac{2\,dx}{(R^2-x^2)\sqrt{R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-x^2}}\;.\;.\;(36)$$

Займемся теперь разрешением этих интегралов в отдельности

$$\int_0^c \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-x^2}+\frac{R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-x^2}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(37)$$

(см. L. Kiepert II Teil Integral-Rechnung s. 95)

$$-2R^2\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-x^2}}=-2R^2\arcsin\frac{x}{R\sin\frac{\alpha}{2}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(38)$$

Таким образом, первые два интеграла дают

$$-\frac{x}{2}\sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - x^2} + \frac{R^2\left(\operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - 4\right)}{2} \operatorname{arc\,Sin} \frac{x}{R \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; (39)$$

Интеграл третий найдем так

$$R^4 \int_0^c \frac{2\,dx}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2} - x^2}} =$$

$$= R^3 \int_0^c \frac{1}{R - x} \frac{dx}{\sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} + R^3 \int_0^c \frac{1}{R + x} \frac{dx}{\sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} \qquad (40)$$

Найдем эти интегралы отдельно. Введем новую переменную, полагая $R - x = \frac{1}{u}$. В таком случае 1) $U = \frac{1}{R - x}$; 2) $x^2 = R^2 - \frac{2R}{u} + \frac{1}{u^2}$

и 3) $dx = \frac{du}{u^2}$ . . . . (41)

Подставляя эти значения в первый интеграл, получаем

$$R^3 \int_0^c \frac{1}{(R - x)} \frac{dx}{\sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} = R^3 \int \frac{U\,dU}{U^2\sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - R^2 - \frac{1}{u^2} + \frac{2R}{U}}}$$

$$= \int \frac{dU}{\sqrt{U^2 R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - U^2 R^2 - 1 + 2RU}} = \int \frac{dU}{\sqrt{2Ru - 1 \operatorname{Cos}^2 \frac{\alpha}{2} R^2 U^2}}$$

Этот интеграл разрешим (см. Kiepert, II Teil Integrale Rechnung S. 703).

$$\int \frac{dU}{\sqrt{2RU - 1 - R^2 \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}}} = -\frac{1}{R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}} \operatorname{arc\,Sin} \frac{R \cdot \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - x}{(R - x) \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}} + C_1 \; . \; (44)$$

Подобным же образом найдем интеграл второй, полагая

1) $R + x = \frac{1}{s}$; 2) $x^2 = \frac{1}{s^2} + R^2 - \frac{2R}{s}$; 3) $dx = -\frac{ds}{s^2}$

Тогда будем иметь

$$\int \frac{dx}{(R + x)\sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} = -\frac{1}{R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}} \operatorname{arc\,Sin} \frac{R \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} + x}{(R + x) \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}} + C_2 \; . \; (45)$$

Собирая вместе результаты интегрирования, получаем такое уравнение для выражения объема

$$V_3 = \int_0^c \rho^2 \operatorname{arc}\varphi \, dx - \int_0^c R \operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2} \sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2} - x^2}\, dx =$$

$$= \frac{c}{3} \cdot (3R^2 - c^2) \operatorname{arc Cos}\frac{R \operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - c^2}} - \frac{2Rc}{3} \operatorname{Cos} \sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2} - c^2} +$$

$$+ \frac{R^3}{3}\left(\operatorname{arc Sin}\frac{R \operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2} + c}{(R+c)\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}} - \frac{\operatorname{arc Sin} R \operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2} - c}{(R-c)\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}} \right) +$$

$$+ \frac{R^3}{2} \operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2} \operatorname{arc Sin}\frac{c}{R \operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{1}{3}\left(\operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2} - 4 \right) - \operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2} \right]. \quad (46)$$

После небольших преобразований будем иметь

$$V^3 = \frac{c}{3}(3R^2 - c^2) \operatorname{arc Cos}\frac{R \operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - c^2}} - \frac{R^3}{3}\left(3 \operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{Cos}^3\frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{arc Sin}\frac{c}{R \operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}} -$$

$$- \frac{2}{3} R c \operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2} \sqrt{R^2 - \operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2} - c^2} + \frac{R^2}{3}\left[\operatorname{arc Sin}\frac{R \operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2} + c}{(R+c)\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc Sin}\frac{R \operatorname{Siu}^2\frac{\alpha}{2} - c}{(R-c)\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}} \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

Это и есть конечная формула для определения V_3. Проверим ее.

Пусть котел наполнен совершенно. Тогда $C = R \operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}$. В уравнении (47) отпадут первый член и третий, так как

$$1)\ \operatorname{arc Cos}\frac{R \operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2}}} = 0,\ 2)\ \sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2} - c^2} = 0$$

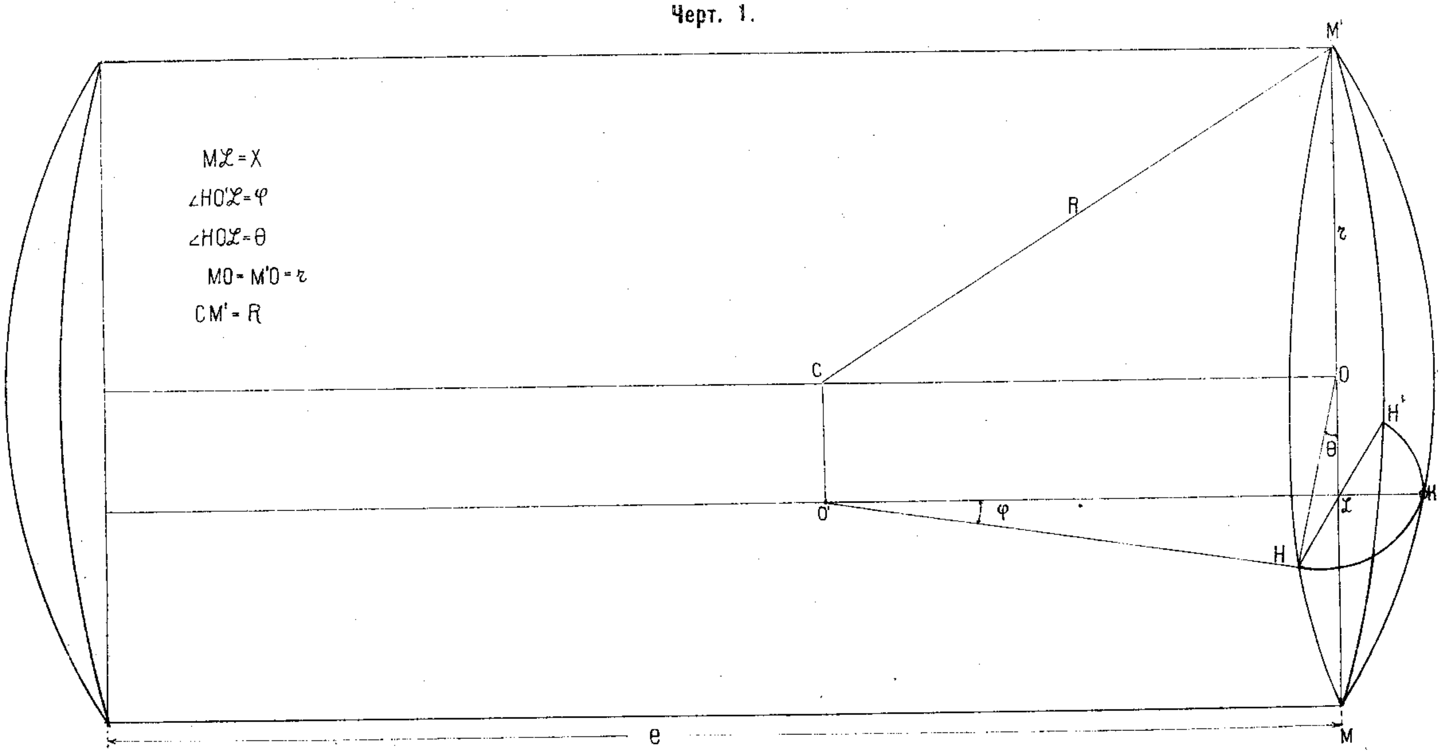
Самое уравнение примет упрощенный вид

$$V = \frac{\pi R^3}{3} - \frac{\pi R^3}{6}\left(3 \operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{Cos}^3\frac{\alpha}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

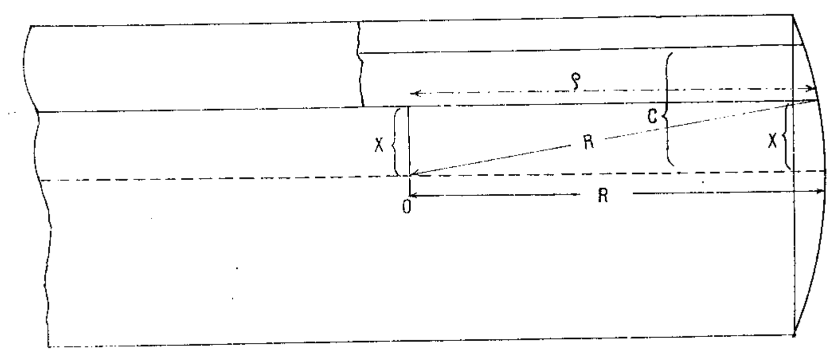
$$\frac{\pi R^3}{6}\left(2 + \operatorname{Cos}^3\frac{\alpha}{2} - 3 \operatorname{Cos}\frac{\alpha}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

т. е. как раз половина объема шарового сегмента.

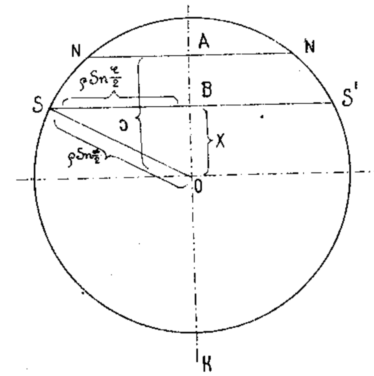
Черт. 1.



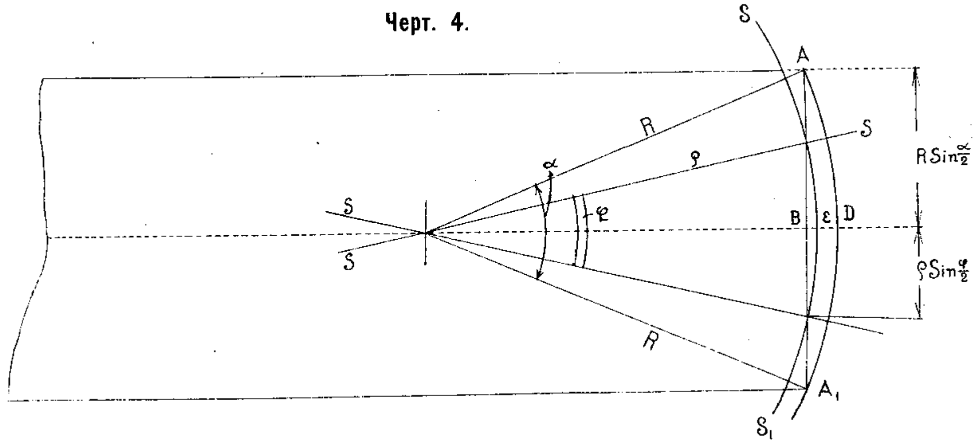
Черт. 2.



Черт. 3.



Черт. 4.



К статье проф. С. К. Конюхова

„Опред. объема жидкости в цилиндрическом котле“.