

Определение объема жидкости в цилиндрическом котле.

1. Метод Рейнольдса и Катрелля.

В химической промышленности, нефтяном деле, на железных дорогах иногда встречается надобность определить объем жидкости, содержащейся в горизонтальном цилиндрическом котле, наполненном не до верху. Так как в справочниках нет надлежащих формул для решения этой задачи, то покажем, как ее решить.

Пусть (черт. 1) у нас имеется горизонтальный цилиндрический котел с двумя днищами, очерченными радиусом R . Назовем радиус цилиндрической части котла через r , а длину через l . Далее введем такие обозначения: $ML = x$ (глубина наполнения котла); $НОL = \angle \theta$ и $НО'L = \angle \varphi$. Заметим предварительно, что $НКН'$ представляет поверхность уровня в сегменте котла и что точка O' , представляя проекцию точки O на линию симметрии поверхности уровня, является в тоже время центром, из которого делается засечка для получения дуги круга $НКН'$.

Сейчас же можно написать

$$x = r - r \cos \theta = 2 r \sin^2 \frac{\theta}{2} \dots \dots \dots (1)$$

Если соединить точку C с точкой K , то получим прямоугольный треугольник $CO'K$, у которого $CK = R$, $CO' = OL = r \cos \theta$.

Таким образом,

$$O'K = \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \theta} \dots \dots \dots (2)$$

Но можно также положить

$$O'K = \lambda r \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2}} = \lambda r \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \dots \dots \dots (3)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{\lambda}.$$

Чтобы выявить значение коэффициента λ , обратимся к рассмотрению треугольников $ОНL$ и $О'НL$. Сейчас же можно написать:

$$HL = r \sin \theta; HL = O'L \operatorname{tg} \varphi = CO \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{R^2 - r^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi \dots \dots (4)$$

Следовательно,

$$r \sin \theta = \sqrt{R^2 - r^2} \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \dots (5)$$

Откуда получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \operatorname{Sin} \theta \dots \dots \dots (6)$$

т. е.

$$\lambda = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r} \dots \dots \dots (7)$$

Введем теперь такие условные обозначения

$$X = \theta - \frac{\operatorname{Sin} 2\theta}{2}$$

$$Y = -2L\theta - \frac{4}{3}\lambda^3\theta + \frac{2}{3}\lambda \operatorname{Sin} 2\theta +$$

$$+ \frac{1}{3} \operatorname{Cos} \theta (\operatorname{Cos} 2\theta - 6\lambda^2 - 5) \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Sin} \theta}{\lambda} + \frac{4}{3} (1 + \lambda^2)^{3/2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda} \operatorname{tg} \theta \right).$$

Теперь результат интегрирования получит более компактный вид

$$V = Xr^2l + Yr^3 \dots \dots \dots (14)$$

Вопрос теперь сводится к тому, чтобы найти числовое значение для X и Y.

Когда необходимо произвести более точный подсчет объема жидкости, то в клепаных котлах нужно учитывать наличие заклепочных головок.

В том случае, когда заклепочные головки обращены выпуклостью внутрь котла, у-ние для объема получает вид

$$V = r^2lX - r^3Y \dots \dots \dots (15)$$

Если одна заклепка обращена головкой внутрь, а другая наружу, то

$$V = r^2lX \dots \dots \dots (16)$$

Для удобства скорых подсчетов даются следующие таблицы значений X и Y, найденные путем точных вычислений, принимая во внимание наличие заклепочных головок и котельных швов.

В этих таблицах $p = \frac{X}{2r}$. Значение p взяты в пределах от 1/20/0 диаметра образцового котла, в котором радиус сферического днища равняется диаметру котла или $R = 2r$.

Будем рассматривать теперь площадь уровня жидкости в котле. Она состоит из центрального прямоугольника с площадью $2lr \operatorname{Sin} \theta$ и двух сегментов с центральным углом 2φ и радиусом O'K. Площадь каждого сегмента представляет разность площадей сектора O'HKH'O' и треугольника O'HH'.

Так и выразим эту площадь

$$\begin{aligned}\omega &= (O'K)^2 \varphi - HL \sqrt{R^2 - r^2} = \\ &= r^2 (\lambda^2 + \sin^2 \theta) \varphi - r \sin \theta \sqrt{R^2 - r^2} = \\ &= r^2 (\lambda^2 + \sin^2 \theta) \varphi - r^2 \lambda \sin \theta \dots \dots \dots (8)\end{aligned}$$

Зная площадь сегмента, не трудно найти элементарный объем слоя воды в котле

$$dV = [2r \lambda \sin \theta + 2r^2 (\lambda^2 + \sin^2 \theta) \varphi - 2r^2 \lambda \sin \theta] dx \dots \dots (9)$$

$$\text{Но } x = r(1 - \cos \theta) \quad dx = r \sin \theta d\theta \dots \dots \dots (10)$$

Так как в этом уравнении переменными являются величины x , φ и θ , то для проведения интегрирования необходимо выразить x и φ через θ .

Итак, получаем

$$V = 2r^2 \int_0^\theta \left[(1 - r\lambda) \sin^2 \theta + r(\lambda^2 \sin \theta + \sin^3 \theta) \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \theta}{\lambda} \right) \right] d\theta \dots (11)$$

Проще всего интегрирование производить по частям. В таком случае получаем

$$\begin{aligned}V &= r^2 \left(1 - 2r\lambda - \frac{4}{3} r\lambda^3 \right) \theta + \frac{r^2}{6} (4r\lambda - 3) \sin 2\theta + \\ &+ \frac{r^3}{3} \cos \theta (\cos 2\theta - 6\lambda^2 - 5) \operatorname{arctg} \frac{\sin \theta}{\lambda} + \\ &+ \frac{4}{3} r^3 (\lambda^2 + 1)^{1/2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda} \right) \operatorname{tg} \theta \dots \dots \dots (12)\end{aligned}$$

Аналитически величина θ выражается так

$$\theta = 2 \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{x}{2r}} \dots \dots \dots (13)$$

и изменяется в пределах от 0 до 180°.

Наконец,

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda} \right) \operatorname{tg} \theta$$

изменяется в пределах от 0 до π .

Если положить $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, то

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \theta}{\lambda} \right) = 0.$$

p ^o / _o	χ	Lg χ	Y	Lg Y	p ^o / _o	χ	Lg χ	Y	Lg Y
0.50	0.0022	7.34242-10	—	—	16.50	0.3392	9.53046-10	0.045	8.65321-10
1.00	0.0054	7.73239-10	0.001	7.00000-10	17.00	0.3541	0.54913-10	0.048	8.68124-10
1.50	0.0098	7.99123-10	0.001	7.00000-10	17.50	0.3692	9.56726-10	0.052	8.71600-10
2.00	0.0150	8.17609-10	0.001	7.00000-10	18.00	0.3845	9.58490-10	0.055	8.74036-10
2.50	0.0210	8.32222-10	0.001	7.00000-10	18.50	0.4000	9.60206-10	0.059	8.77085-10
3.00	0.0275	8.43933-10	0.001	7.00000-10	19.00	0.4156	9.61868-10	0.062	8.79239-10
3.50	0.0336	8.52634-10	0.002	7.30103-10	19.50	0.4315	9.63798-10	0.066	8.81754-10
4.00	0.0422	8.62531-10	0.002	7.30103-10	20.00	0.4473	0.65060-10	0.069	8.83885-10
4.50	0.0502	8.70070-10	0.003	7.47712-10	20.50	0.4634	9.66596-10	0.073	8.86332-10
5.00	0.0587	8.76864-10	0.003	7.47712-10	21.00	0.4796	0.68088-10	0.077	8.88649-10
5.50	0.0677	8.83059-10	0.004	7.60206-10	21.50	0.4961	9.69557-10	0.081	8.90849-10
6.00	0.0770	8.86649-10	0.004	7.60206-10	22.00	0.5125	9.70969-10	0.085	8.92942-10
6.50	0.0867	8.93802-10	0.005	7.69897-10	22.50	0.5291	9.72351-10	0.089	8.94739-19
7.00	0.0967	8.98542-10	0.005	7.69897-10	23.00	0.5459	9.73711-10	0.093	8.96848-10
7.50	0.1071	9.02979-10	0.006	7.77815-10	23.50	0.5628	9.75035-10	0.098	8.99123-10
8.00	0.1178	9.07115-10	0.007	7.84510-10	24.00	0.5798	9.76328-10	0.102	9.00860-10
8.50	0.1288	9.10992-10	0.009	7.95424-10	24.50	0.5969	9.77590-10	0.107	9.02938-10
9.00	0.1401	9.14644-10	0.010	8.00000-10	25.00	0.6142	9.78839-10	0.111	9.04532-10
9.50	0.1517	9.18099-10	0.012	8.07918-10	25.50	0.6317	9.80051-10	0.116	9.06745-10
10.00	0.1635	9.21352-10	0.013	8.11394-10	26.00	0.6491	8.81239-10	0.121	9.08279-10
10.50	0.1757	8.24477-10	0.015	8.17609-10	26.50	0.6667	9.82393-10	0.126	9.10037-10
11.00	0.1880	9.17416-10	0.017	8.23045-10	27.00	0.6844	9.83531-10	0.131	9.11727-10
11.50	0.2007	9.30255-10	0.019	8.27875-10	27.50	0.7023	9.84652-10	0.137	9.13672-10
12.00	0.2135	9.32940-10	0.021	8.32222-10	28.00	0.7201	9.85739-10	0.142	9.15229-10
12.50	0.2266	9.35526-10	0.024	8.38021-10	28.50	0.7381	9.86812-10	0.148	9.17026-10
13.00	0.2399	9.38003-10	0.026	8.41497-10	29.00	0.7562	9.87864-10	0.153	9.18469-10
13.50	0.2535	9.40398-10	0.029	8.46240-10	29.50	0.7744	9.88897-10	0.159	9.20140-10
14.00	0.2673	9.42700-10	0.031	8.49136-10	30.00	0.7927	9.89911-10	0.164	9.21484-10
14.50	0.2813	9.44917-10	0.034	8.53148-10	30.50	0.8100	9.90849-10	0.170	9.23045-10
15.00	0.2955	9.47056-10	0.036	8.55630-10	31.00	0.8295	9.91882-10	0.176	9.24553-10
15.50	0.3100	9.49136-10	0.039	8.59106-10	31.50	0.8481	9.92845-10	0.182	9.26007-10
16.00	0.3245	9.51121-10	0.042	8.62325-10	32.00	0.8667	9.93787-10	0.187	9.27184-10

p ^o /o	χ	Lg χ	Y	Lg Y	p ^o /o	χ	Lg χ	Y	Lg Y
32.5	0.8854	9.94714-10	0.193	9.28556-10	48.5	1.5109	0.17924-00	0.411	9.61384-10
33.0	0.9042	9.95626-10	0.199	9.29885-10	49.0	1.5308	0.18492-00	0.418	9.62118-10
33.5	0.9239	9.96563-10	0.206	9.31387-10	49.5	1.5508	0.19056-00	0.426	9.62941-10
34.0	0.9419	9.97400-10	0.212	9.32634-10	50.0	1.5708	0.19612-00	0.433	9.63649-10
34.5	0.9609	9.98268-10	0.218	9.33846-10	50.5	1.5908	0.20162-00	0.441	9.64444-10
35.0	0.9799	0.99118-10	0.224	9.35025-10	51.0	1.6108	0.20704-00	0.448	9.65128-10
35.5	0.9991	9.99961-10	0.231	9.36361-10	51.5	1.6308	0.21240-00	0.456	9.65896-10
36.0	1.0182	0.00783-00	0.237	9.37475-10	52.0	1.6507	0.21767-00	0.463	9.66558-10
36.5	1.0375	0.01599-00	0.244	9.38739-10	52.5	1.6707	0.22290-00	0.470	9.67210-10
37.0	1.0568	0.02349-00	0.250	9.39794-10	53.0	1.6907	0.22807-00	0.477	9.67852-10
37.5	1.0762	0.03189-00	0.257	9.40943-10	53.5	1.7107	0.23317-00	0.484	9.68485-10
38.0	1.0955	0.03961-00	0.263	9.41996-10	54.0	1.7306	0.23820-00	0.491	9.69108-10
38.5	1.1150	0.04727-00	0.270	9.43136-10	54.5	1.7505	0.24316-00	0.498	9.69723-10
39.0	1.1345	0.05480-00	0.276	9.44091-10	55.0	1.7704	0.24807-00	0.505	9.70329-10
39.5	1.1540	0.06221-00	0.283	9.45179-10	55.5	1.7903	0.25293-00	0.513	9.71012-10
40.0	1.1735	0.06948-00	0.290	9.46240-10	56.0	1.8102	0.25773-00	0.520	9.71600-10
40.5	1.1932	0.07671-00	0.297	9.47276-10	56.5	1.8300	0.26245-00	0.527	9.72181-10
41.0	1.2128	0.08379-00	0.304	9.48287-10	57.0	1.8498	0.26712-00	0.534	9.72754-10
41.5	1.2325	0.09079-00	0.312	9.49276-00	57.5	1.8696	0.27175-00	0.541	9.73320-10
42.0	1.2522	0.09767-00	0.318	9.50273-10	58.0	1.8894	0.27632-00	0.548	9.73878-10
42.5	1.2720	0.10449-00	0.325	9.51188-10	58.5	1.9091	0.28083-00	0.555	9.74429-10
43.0	1.2918	0.11120-00	0.332	9.52119-10	59.0	1.9288	0.28529-00	0.562	9.74974-10
43.5	1.3116	0.11780-00	0.339	9.53020-10	59.5	1.9485	0.28970-00	0.569	9.75511-10
44.0	1.3314	0.12431-00	0.346	9.53908-10	60.0	1.9681	0.29405-00	0.576	9.76042-10
44.5	1.3513	0.13075-00	0.354	9.54900-10	60.5	1.9876	0.29833-00	0.583	9.76567-10
45.0	1.3712	0.13710-00	0.361	9.55751-10	61.0	2.0071	0.30257-00	0.590	9.77085-10
45.5	1.3911	0.14336-00	0.368	9.56585-10	61.5	2.0266	0.30677-00	0.597	9.77597-10
46.0	1.4110	0.14953-00	0.375	9.57403-10	62.0	2.0461	0.31093-00	0.603	9.78032-00
46.5	1.4310	0.15564-00	0.382	9.58206-10	62.5	2.0655	0.31503-00	0.610	9.78533-10
47.0	1.4509	0.16164-00	0.389	9.58995-10	63.0	2.0848	0.31906-00	0.616	9.78958-10
47.5	1.4709	0.16758-00	0.396	0.59770-10	63.5	2.1041	0.32307-00	0.623	9.79449-10
48.0	1.4901	0.17345-00	0.403	9.60531-10	64.0	2.1238	0.32703-00	0.629	9.79865-10

p ^o / _o	χ	Lg χ	Y	Lg Y	p ^o / _o	χ	Lg χ	Y	Lg Y
64.5	2.1426	0.33094-00	0.636	9.80346-10	82.5	2.7723	0.44284-00	0.815	9.91116-10
65.0	2.1617	0.33480-00	0.642	9.80754-10	83.0	2.7875	0.44521-00	0.818	9.91275-10
65.5	2.1807	0.33860-00	0.648	9.81158-10	83.5	2.8002	0.44753-00	0.821	0.91434-10
66.0	2.1997	0.34236-00	0.654	9.81558-10	84.0	2.8171	0.44980-00	0.824	9.91593-10
66.5	2.2186	0.34608-00	0.661	9.82020-10	84.5	2.8317	0.45205-00	0.827	9.91751-10
67.0	2.2374	0.34974-00	0.667	9.82413-10	85.0	2.8461	0.45425-00	0.830	9.91908-10
67.5	2.2562	0.35338-00	0.673	9.82802-10	85.5	2.8603	0.45641-00	0.833	9.92065-10
68.0	2.2749	0.35696-00	0.679	9.83187-10	86.0	2.8743	0.45853-00	0.835	9.92169-10
68.5	2.2935	0.36050-00	0.685	9.83569-10	86.5	2.8881	0.46061-00	0.838	9.92324-10
69.0	2.3121	0.36401-00	0.690	9.83885-10	87.0	2.9017	0.46265-00	0.840	9.92428-10
69.5	2.3305	0.36745-00	0.696	9.84261-10	87.5	2.9150	0.46464-00	0.843	9.92583-10
70.0	2.3489	0.37086-00	0.702	9.84634-10	88.0	2.9281	0.46659-00	0.845	9.92686-10
70.5	2.3672	0.37424-00	0.708	9.85003-10	88.5	2.9410	0.46850-00	0.847	9.92788-10
71.0	2.3854	0.37756-00	0.713	9.85309-10	89.0	2.9536	0.47035-00	0.849	9.92891-10
71.5	2.4035	0.38084-00	0.719	9.85673-10	89.5	2.9660	0.47217-00	0.851	9.92943-10
72.0	2.4215	0.38408-00	0.724	9.85774-10	90.0	2.9781	0.47394-00	0.853	9.93095-10
72.5	2.4394	0.38728-00	0.730	9.86332-10	90.5	2.9899	0.47566-00	0.855	9.93197-10
73.0	2.4572	0.39044-00	0.735	9.86619-10	91.0	3.0015	0.47734-00	0.856	9.93247-10
73.5	2.4749	0.39356-00	0.740	9.86923-10	91.5	3.0127	0.47896-00	0.858	9.93349-10
74.0	2.4925	0.39664-00	0.745	9.87216-10	92.0	3.0238	0.48055-00	0.859	9.93399-10
74.5	2.5100	0.39967-00	0.750	9.87506-10	92.5	3.0345	0.48209-00	0.860	9.93450-10
75.0	2.5274	0.40267-00	0.755	9.87245-10	93.0	3.0449	0.48357-00	0.861	9.93500-10
75.5	2.5446	0.40562-00	0.760	9.88081-10	93.5	3.0549	0.48500-00	0.862	9.93551-10
76.0	2.5618	0.40855-00	0.764	9.88309-10	94.0	3.0646	0.48637-00	0.862	9.93551-10
76.5	2.5788	0.41142-00	0.769	9.88593-10	94.5	3.0739	0.48769-00	0.863	9.93601-10
77.0	2.5957	0.41425-00	0.773	9.88818-10	95.0	3.0829	0.48896-00	0.863	9.93601-10
77.5	2.6124	0.41704-00	0.777	9.89042-10	95.5	3.0914	0.49016-00	0.864	9.93651-10
78.0	2.6291	0.41981-00	0.781	9.89265-10	96.0	3.0994	0.49128-00	0.864	9.93651-10
78.5	2.6456	0.42252-00	0.785	9.89487-10	96.5	3.1070	0.49234-00	0.865	9.93702-10
79.0	2.6620	0.42521-00	0.789	9.89708-10	97.0	3.1141	0.49333-00	0.865	9.93702-10
79.5	2.6782	0.42784-00	0.793	9.89922-10	97.5	3.1208	0.49427-00	0.865	9.93702-10
80.0	2.6943	0.43045-00	0.797	9.90146-10	98.0	3.1266	0.49507-00	0.865	9.93702-10
80.5	2.7102	0.43300-00	0.801	9.90363-10	98.5	3.1319	0.49581-00	0.865	9.93702-10
81.0	2.7260	0.43553-00	0.804	9.90526-10	99.0	3.1362	0.49640-00	0.865	9.93702-10
81.5	2.7416	0.43800-00	0.808	9.90741-10	99.5	3.1394	0.49685-00	0.866	9.93752-10
82.0	2.7571	0.44045-00	0.811	9.90902-10	100.0	3.1416	0.49715-00	0.866	9.93752-10

Покажем на примере, как пользоваться сводным числовым материалом.

Пример. Пусть длина котла $e = 24$ фута, а диаметр 8 футов. Глубина жидкости в котле 2 фута. Тогда объем жидкости будет

$$V = 4^2 \cdot 24 x + 4^3 \cdot y = 384 x + 64 y.$$

Сейчас же нужно найти p

$$p = \frac{x}{2r} = \frac{2}{8} = 0,25 \text{ или } 25\%.$$

По таблице находим для $p = 25\%$ значения

$$X = 0,6142 \text{ и } Y = 0,111.$$

Следовательно,

$$V = 384 \cdot 0,6142 + 64 \cdot 0,111 = 235,8528 + 7,104 = 242,96 \text{ куб. фут.}$$

Или можно прибегнуть к логарифмированию.

$$\text{Lq } 384 X = 2,58433 + 9,78831 - 10 = 2,37264$$

$$\text{Lg } 64 Y = 1,80618 + 9,04532 - 10 = 0,85150$$

Следовательно,

$$V = 235,8528 + 7,104 = 242,96 \text{ куб. фут.}$$

Ничто, конечно, не мешает вычислить таблицы для котлов другого размера.

Предварительно нужно вычислить значение

$$\lambda = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r} \dots \dots \dots (17)$$

для каждого котла, а потом находить значение X и Y для последовательных значений θ по уравнению

$$\theta = 2 \text{ arc Sin } \sqrt{\frac{x}{2r}} \dots \dots \dots (18).$$

2. Метод Кеммеля.

Пусть котел наполнен больше, чем на половину высоты (по направлению вертикального диаметра). Объем жидкости можно удобно разбить на три части: 1) центральную, у которой основанием служит сектор SKS (черт. 3), а высотой длина цилиндра E , 2) два нижних шаровых полусегмента, составляющих целый шаровой сегмент, равный по объему днища котла и 3) два верхних неполных шаровых сегмента.

Объем первой части будет такой

$$V_1 = \frac{\pi r^2 n}{360} l + OA \cdot AN \cdot l = \frac{\pi \cdot r^2 n l}{360} + c \cdot b \cdot l \dots \dots \dots (19)$$

Здесь n = число градусов, соответствующих дуге NKN' , $OA = c$ и $AN = b$ (черт. 3).
Объем второй части будет

$$V_2 = \frac{\pi \cdot BD^2 (3R - BD)}{3} \dots \dots \dots (20)$$

Но $BD = OD - OB = R - R \cos \alpha/2 = R (1 - \cos \alpha/2)$

Следовательно,

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\pi R^2 (1 - \cos \alpha/2)^2 (3R - R + R \cos \alpha/2)}{3} = \\ &= \frac{\pi R^3}{3} (2 - 3 \cos \alpha/2 + \cos^3 \alpha/2) \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

Переходим теперь к определению объема третьей части. Если провести сечение $S-S'$ (черт. 3) на расстоянии x от оси котла, то получим уровень жидкости в форме кругового сегмента, проекция которого на горизонтальную плоскость, проходящую через ось котла, изобразится сегментом $SBC'E$ (черт. 4). Площадь этого сегмента будет равна

$$\omega = OSEC' - OCC' = \frac{1}{2} \rho^2 \arccos \frac{x}{\rho} - \rho \cos \frac{\varphi}{2} \rho \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\rho^2}{2} (\arccos \frac{x}{\rho} - \sin \varphi) \dots (22)$$

Элементарный же объем выразится так

$$dV_3 = \omega dx = \frac{\rho^2}{2} (\arccos \frac{x}{\rho} - \sin \varphi) dx \dots \dots \dots (23)$$

$$V_3 = \int_{x=c}^{x=0} \frac{\rho^2}{2} (\arccos \frac{x}{\rho} - \sin \varphi) dx \dots \dots \dots (24)$$

Чтобы можно было произвести интегрирование, выразим ρ и φ через x и известные величины.

$$\rho^2 = R^2 - x^2; \rho^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2; \rho \cos \alpha/2 = R \cos \alpha/2$$

Эти уравнения без труда получаются, пользуясь чертежами 2, 3 и 4.

В таком случае будем иметь

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{R}{\rho} \cos \frac{\alpha}{2}; \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}}{\rho}$$

Значит

$$2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \sin \varphi = \frac{2R \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}}{\rho^2} \dots \dots (25)$$

Подставляя это значение $\sin \varphi$ в интеграл (24), получаем

$$V_3 = \int_{x=0}^{x=c} \frac{\rho^2}{2} \arccos \frac{x}{\rho} dx - \int_{x=0}^{x=c} R \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2} dx \dots \dots (25)$$

Оставляя первый интеграл, заметим, что второй интеграл разрешается без затруднений, так как величины $R \cos \frac{\alpha}{2}$ и $R \sin \frac{\alpha}{2}$ величины постоянные. Напишем этот интеграл

$$\begin{aligned} & R \cos \frac{\alpha}{2} \int_{x=0}^{x=c} \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2} \cdot dx = \\ & = R \cos \frac{\alpha}{2} \left[\frac{x}{2} \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2} + \frac{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2} \arcsin \left(\frac{x}{R \sin \frac{\alpha}{2}} \right) \right] = \\ & = R \cos \frac{\alpha}{2} \left(\frac{C}{2} \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - C^2} + \frac{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2} \arcsin \frac{C}{R \sin \frac{\alpha}{2}} \right) \dots (26) \end{aligned}$$

Займемся теперь нахождением интеграла

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{x=c} \frac{\rho^2}{2} \arccos \varphi dx = \int_{x=0}^{x=c} \rho^2 \arccos \left(\frac{\varphi}{\rho} \right) dx = \\ & = \int_{x=0}^{x=c} \rho^2 \arccos \left(\frac{R \cos \frac{\alpha}{2}}{\rho} \right) dx \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

Для проведения интегрирования необходимо ρ заменить, выразив его в зависимости от x . Тогда получим

$$\int_{x=0}^{x=c} (R^2 - x^2) \arccos \frac{R \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \dots \dots \dots (28)$$

Интегрирование удобнее всего произвести по частям, по известному уравнению

$$\int V dU = UV - \int U dV, \dots \dots \dots (29)$$

полагая

$$dV = (R^2 - x^2) dx \text{ и } U = \arccos \frac{R \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} \dots \dots \dots (30)$$

Отсюда имеем

$$V = R^2 x - \frac{x^3}{3} = \frac{x}{3} (3R^2 - x^2) \dots \dots \dots (31)$$

Значит,

$$\int_0^c (R^2 - x^2) \arccos \frac{R \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{x}{3} (3R^2 - x^2) \arccos \frac{R \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$+ \int_0^c \frac{3R^2x - x^3}{3} \cdot \frac{R \chi \cos \frac{\alpha}{2} d\chi}{(R^2 - x^2) \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} \dots \dots \dots (32)$$

Не трудно усмотреть, что разрешение задачи интегрирования свелось теперь к нахождению интеграла

$$\int_0^c \frac{(3R^2x^2 - x^4) dx}{(R^2 - x^2) \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} \dots \dots \dots (33)$$

Этот интеграл можно разложить, пользуясь тем соображением, что

$$\frac{3R^2x^2 - x^4}{R^2 - R^2} = x^2 - 2R^2 + \frac{2R^4}{R^2 - x^2} = \frac{R^2x^2 - 2R^4 - x^4 + 2R^2x^2 - 2R^4}{R^2 - x^2} \dots (34)$$

В свою очередь можно написать

$$\frac{2}{R^2 - x^2} = \frac{1}{R(R+x)} + \frac{R(R-x)}{1} = \frac{R^2 + Rx + R^2 - Rx}{R^2(R^2 - x^2)} \dots (35)$$

$$\int_0^c \frac{(3R^2x^2 - x^4) dx}{(R^2 - x^2) \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} = \int_0^c \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} - 2R^2 \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} + R^4 \int_0^c \frac{2 dx}{(R^2 - x^2) \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} \dots (36)$$

Займемся теперь разрешением этих интегралов в отдельности

$$\int_0^c \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2} + \frac{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} \dots \dots \dots (37)$$

(см. L. Kiepert II Teil Integral-Rechnung s. 95)

$$- 2R^2 \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} = -2R^2 \arcsin \frac{x}{R \sin \frac{\alpha}{2}} \dots \dots \dots (38)$$

Таким образом, первые два интеграла дают

$$-\frac{x}{2} \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2} + \frac{R^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \right)}{2} \operatorname{arc Sin} \frac{x}{R \sin \frac{\alpha}{2}} \dots (39)$$

Интеграл третий найдем так

$$\begin{aligned} & R^4 \int_0^c \frac{2 dx}{(R^2 - x^2) \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} = \\ & = R^3 \int_0^c \frac{1}{R-x} \frac{dx}{\sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} + R^3 \int_0^c \frac{1}{R+x} \frac{dx}{\sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} \quad (40) \end{aligned}$$

Найдем эти интегралы отдельно. Введем новую переменную, полагая $R-x =$

$$= \frac{1}{u}. \text{ В таком случае 1) } U = \frac{1}{R-x}; \text{ 2) } x^2 = R^2 - \frac{2R}{u} + \frac{1}{u^2}$$

$$\text{и 3) } dx = \frac{du}{u^2} \dots (41)$$

Подставляя эти значения в первый интеграл, получаем

$$\begin{aligned} & R^3 \int_0^c \frac{1}{(R-x)} \frac{dx}{\sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} = R^3 \int \frac{U dU}{U^2 \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - R^2 - \frac{1}{u^2} + \frac{2R}{U}}} \\ & = \int \frac{dU}{\sqrt{U^2 R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - U^2 R^2 - 1 + 2RU}} = \int \frac{dU}{\sqrt{2RU - 1 - R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} R^2 U^2}} \end{aligned}$$

Этот интеграл разрешим (см. Kiepert, II Teil Integrale Rechnung S. 703).

$$\int \frac{dU}{\sqrt{2RU - 1 - R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = -\frac{1}{R \cos \frac{\alpha}{2}} \operatorname{arc Sin} \frac{R \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x}{(R-x) \sin \frac{\alpha}{2}} + C_1 \quad (44)$$

Подобным же образом найдем интеграл второй, полагая

$$1) R+x = \frac{1}{s}; \text{ 2) } x^2 = \frac{1}{s^2} + R^2 - \frac{2R}{s}; \text{ 3) } dx = -\frac{ds}{s^2}$$

Тогда будем иметь

$$\int \frac{dx}{(R+x) \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} = -\frac{1}{R \cos \frac{\alpha}{2}} \operatorname{arc Sin} \frac{R \sin^2 \frac{\alpha}{2} + x}{(R+x) \sin \frac{\alpha}{2}} + C_2 \quad (45)$$

Собирая вместе результаты интегрирования, получаем такое уравнение для выражения объема.

$$\begin{aligned}
 V_3 &= \int_0^c \rho^2 \operatorname{arcc} \varphi \, dx - \int_0^c R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2} \sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - x^2} \, dx = \\
 &= \frac{c}{3} \cdot (3R^2 - c^2) \operatorname{arcc} \operatorname{Cos} \frac{R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - c^2}} - \frac{2Rc}{3} \operatorname{Cos} \sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - c^2} + \\
 &+ \frac{R^3}{3} \left(\operatorname{arcc} \operatorname{Sin} \frac{R \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} + c}{(R+c) \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}} - \frac{\operatorname{arcc} \operatorname{Sin} R \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - c}{(R-c) \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}} \right) + \\
 &+ \frac{R^3}{2} \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2} \operatorname{arcc} \operatorname{Sin} \frac{c}{R \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}} \left[\frac{1}{3} \left(\operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \right) - \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} \right]. \quad (46)
 \end{aligned}$$

После небольших преобразований будем иметь

$$\begin{aligned}
 V_3 &= \frac{c}{3} (3R^2 - c^2) \operatorname{arcc} \operatorname{Cos} \frac{R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - c^2}} - \frac{R^3}{3} \left(3 \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{Cos}^3 \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{arcc} \operatorname{Sin} \frac{c}{R \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}} - \\
 &- \frac{2}{3} R c \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2} \sqrt{R^2 - \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - c^2} + \frac{R^2}{3} \left[\operatorname{arcc} \operatorname{Sin} \frac{R \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} + c}{(R+c) \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}} - \right. \\
 &\left. - \operatorname{arcc} \operatorname{Sin} \frac{R \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - c}{(R-c) \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}} \right] \dots \dots \dots (47)
 \end{aligned}$$

Это и есть конечная формула для определения V_3 . Проверим ее.

Пусть котел наполнен совершенно. Тогда $c = R \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}$. В уравнении (47) отпадут первый член и третий, так как

$$1) \operatorname{arcc} \operatorname{Cos} \frac{R \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2}}} = 0, \quad 2) \sqrt{R^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - c^2} = 0$$

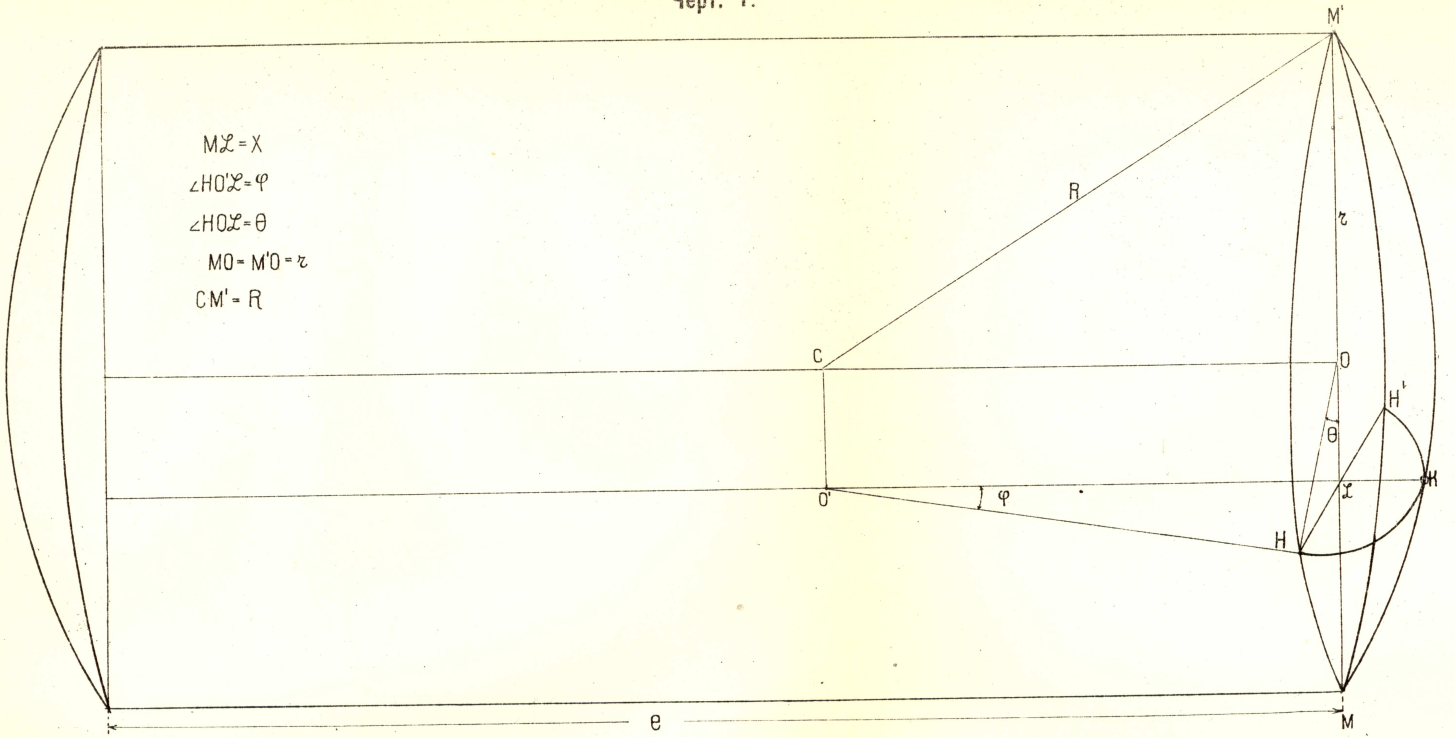
Самое уравнение примет упрощенный вид

$$V = \frac{\pi R^3}{3} - \frac{\pi R^3}{6} \left(3 \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{Cos}^3 \frac{\alpha}{2} \right) \dots \dots \dots (48)$$

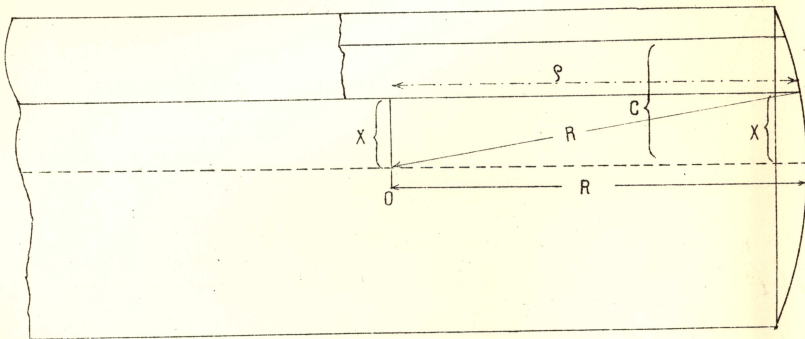
$$\frac{\pi R^3}{6} \left(2 + \operatorname{Cos}^3 \frac{\alpha}{2} - 3 \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2} \right) \dots \dots \dots (49)$$

т. е. как раз половина объема шарового сегмента.

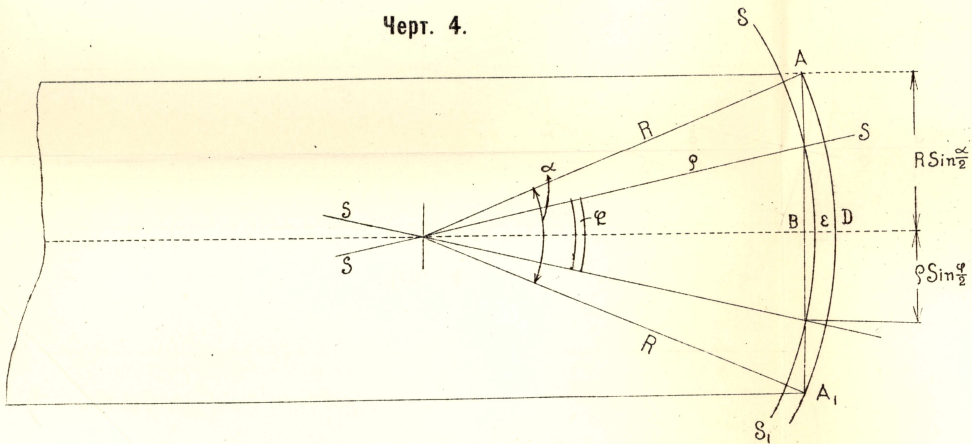
Черт. 1.



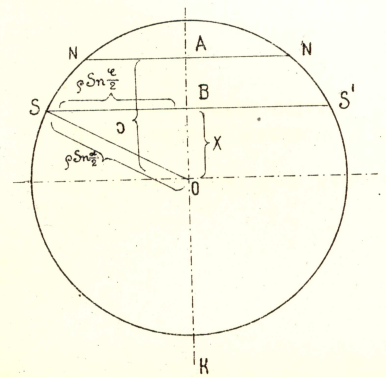
Черт. 2.



Черт. 4.



Черт. 3.



К статье проф. С. Н. Конюхова

„Опред. объема жидкости в цилиндрическом котле“.