УДК 519.2

ТЕОРЕМА РАЗДЕЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ НАБЛЮДЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ

Н.С. Демин, С.В. Рожкова*

Томский государственный университет
*Томский политехнический университет
E-mail: svrhm@rambler.ru

Приводится доказательство теоремы разделения в задаче оптимального управления стохастическими системами для случая, когда наблюдаемый процесс обладает памятью произвольной кратности относительно вектора состояния системы.

1. Введение

Теорема разделения [1] является базовым результатом в теории управления неполностью (частично) наблюдаемыми стохастическими системами. Являясь фундаментальным теоретическим результатом, она позволила решить ряд важных практических задач в различных предметных областях [2–4]. В данной работе с использованием результатов [5] на основе метода достаточных координат [6] получено обобщение теоремы разделения на случай, когда наблюдения обладают памятью произвольной кратности, то есть зависят не только от текущих, но и от произвольного числа прошлых значений вектора состояния системы, что характерно для случая наличия инерционных измерителей, либо задержек в каналах передачи информации.

Используемые обозначения: $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $\mathbf{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $\mathbf{N}\{y;b,B\}$ – гауссовское распределение с параметрами b и B; $\mathrm{tr}[A]$ – след матрицы; $B>0$ ($B\geq 0$) – положительно (неотрицательно) определенная матрица; «T» – транспонирование вектора или матрицы, если используется как правый верхний индекс.

2. Постановка задачи

На вероятностном пространстве $(\Omega,F,\mathbf{F}=(F_t)_{t\geq 0},\mathbf{P})$ ненаблюдаемый n-мерный процесс x_t, являющийся вектором состояния, и наблюдаемый l-мерный процесс z_t определяются стохастическими дифференциальными уравнениями (в смысле Ито, [7, 8])

$$dx_t = f(t,x_t,u_t)dt + \Phi_1(t,x_t)dw_t,\ t\in[0,T], \quad (2.1)$$

$$dz_t = h(t,x_t,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_N})dt + \Phi_2(t)dv_t, \quad (2.2)$$

где $0<\tau_N<\ldots<\tau_1<t$, $\tau_k=\mathrm{const}$, $k=\overline{1;N}$.

Предполагается:

1) w_t и v_t являются стандартными винеровскими процессами размеров r_1 и r_2 [7, 8];
2) x_0, w_t, v_t – статистически независимы;
3) $f(\cdot)$, $h(\cdot)$, $\Phi_1(\cdot)$, $\Phi_2(\cdot)$ непрерывны по всем аргументам;
4) $Q(\cdot)=\Phi_1(\cdot)\Phi_1^T(\cdot)>0$, $R(\cdot)=\Phi_2(\cdot)\Phi_2^T(\cdot)>0$;
5) задана начальная плотность $p_0(x)=\mathbf{N}\{x;\mu_0,\Gamma_0\}$.

Ставится задача: на классе F_t^z – измеримых функционалов $u_t=u_t[z_0^t]$, $z_0^t=\{z_s;0\leq s\leq t\}$, найти управление u_t^0, обеспечивающее условие оптимальности ($u_{t_0}^T=\{u_s;t_0\leq s\leq T\}$)

$$J = M\left\{ b(t_T,x_T) + \int_{t_0}^{T} \Lambda(t,x_t,u_t)dt \right\} \to \min_{\{u_{t_0}^T\}}. \quad (2.3)$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом достаточных координат [6], предполагая, что существует F_t^z – измеримый процесс $\lambda_t=\lambda_t[z_0^t]$, с одной стороны, полностью характеризующий апостериорную плотность

$$p_t(x) = \partial\mathbf{P}\{x_t\leq x \mid z_0^t\}/\partial x \quad (2.4)$$

вектора состояния x_t системы, а с другой стороны, который может быть найден на основе $p_t(x)$.

Замечание 1. Считаем, что процесс оптимального управления начинается с момента времени $t_0>\tau_1$. На интервале $t\in[0,t_0]$ в качестве u_t используется произвольный F_t^z – измеримый процесс.

3. Предварительные результаты

В соответствии с методом достаточных координат вводим функцию Беллмана

$$S(t,\lambda) = \min_{\{u_t^T\}} M\left\{ b(T,x_T) + \int_t^T \Lambda(t,x_{t'},u_{t'})dt' \,\middle|\, \lambda_{t'}=\lambda \right\}. \quad (3.1)$$

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1^0) процесс λ_t является диффузионным марковским процессом с вектором коэффициентов сноса $a(t,\lambda)$ и матрицей коэффициентов диффузии $D(t,\lambda)$, то есть

$$a(t,\lambda)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}M\{\Delta\lambda_t\big|\lambda_t=\lambda\},$$
$$D(t,\lambda)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}M\{[\Delta\lambda_t][\Delta\lambda_t]^T\big|\lambda_t=\lambda\},\qquad(3.2)$$

где $\Delta\lambda_t=\lambda_{t+\Delta t}-\lambda_t$;

2^0) пусть процесс $\{x_t;\lambda_t\}$ является марковским процессом с переходной плотностью $p(t',x',\lambda'|t,x,\lambda)=$ $=\partial^2\mathrm{P}\{x_{t'}\le x',\lambda_{t'}\le\lambda|x_t=x,\lambda_t=\lambda'\}/\partial x'\partial\lambda'$.

Тогда уравнение Беллмана для $S(t,\lambda)$ имеет вид

$$\min_{\{u\}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial S(t,\lambda)}{\partial t}+L^*_{t,\lambda}[S(t,\lambda)]+\\ +M\{\Lambda(t,x_t,u_t)\big|\lambda_t=\lambda\}\end{array}\right\}=0,\qquad(3.3)$$

$$S(t,\lambda)\big|_{t=T}=M\{b(T,x_T)\big|\lambda_T=\lambda\}.\qquad(3.4)$$

Оператор $L^*_{t,\lambda}[\cdot]$ является обратным оператором Колмогорова, соответствующий процессу λ_t, то есть [7, 8]

$$L^*_{t,\lambda}[S(t,\lambda)]=a^T(t,\lambda)\frac{\partial S(t,\lambda)}{\partial\lambda}+$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[D(t,\lambda)\frac{\partial^2 S(t,\lambda)}{\partial\lambda^2}\right],\qquad(3.5)$$

а минимальное значение критерия качества J^0 имеет вид $J^0=S(t_0,\lambda)$.

Доказательство. Пусть

$$p_t(x\,|\,\lambda)=\partial\mathbf{P}\{x_t\le x\,|\,\lambda_t=\lambda\}/\partial x.\qquad(3.6)$$

Тогда, раскрывая оператор $M\{\cdot\}$ в (3.1), получаем с учетом условия 2^0), что

$$S(t,\lambda)=$$
$$=\min_{\{u_t^T\}}\left\{\begin{array}{l}\int p_t(x\,|\,\lambda)\times\\ \times\left\{\begin{array}{l}\int_t^T\Lambda(t',x',u)\times\\ \times p(t',x',\lambda'\,|\,t,x,\lambda)dx'd\lambda'dt'+\\ +\int b(T,x')\times\\ *p(t',x',\lambda'\,|\,t,x,\lambda)dx'd\lambda'\end{array}\right\}dx\end{array}\right\}.\qquad(3.7)$$

Лемма 1. С точностью до $o(\Delta t)$ функция $S(t,\lambda)$ удовлетворяет по Δt рекуррентному уравнению

$$S(t,\lambda)=$$
$$=\min_{\{u\}}\left\{\begin{array}{l}\int S(t+\Delta t,\lambda'')p(t+\Delta t,\lambda''\,|\,t,\lambda)d\lambda''+\\ +(\Delta t)\int\Lambda(t,x,u)p(x\,|\,\lambda)dx+o(\Delta t)\end{array}\right\},\qquad(3.8)$$

где

$$p(t+\Delta t,\lambda''\,|\,t,\lambda)=\partial\mathbf{P}\{\lambda_{t+\Delta t}\le\lambda''\,|\,\lambda_t=\lambda\}/\partial\lambda''\qquad(3.9)$$

есть переходная плотность марковского процесса λ_t.

Доказательство Леммы 1. Разбивая интервал $[t,T]$ в виде $[t,T]=[t,t+\Delta t]\cup[t+\Delta t,T]$, из (3.7) получаем

$$S(t,\lambda)=\min_{\{u_t^{t+\Delta t}\}}\min_{\{u_{t+\Delta t}^T\}}\{S_1(t,t+\Delta t)+S_2(t+\Delta t,T)\},\qquad(3.10)$$

$$S_1(t,t+\Delta t)=$$
$$=\int p_t(x\,|\,\lambda)\left\{\begin{array}{l}\int_t^{t+\Delta t}\Lambda(t',x',u)\times\\ \times p(t',x',\lambda'\,|\,t,x,\lambda)dx'd\lambda'dt'\end{array}\right\}dx,\qquad(3.11)$$

$$S_2(t+\Delta t,T)=$$
$$=\int p_t(x\,|\,\lambda)\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\int_{t+\Delta t}^T\Lambda(t',x',u)\times\\ \times p(t',x',\lambda'\,|\,t,x,\lambda)dx'd\lambda'dt'dx+\\ +\int b(T,x')\times\\ \times p(t',x',\lambda'\,|\,t,x,\lambda)dx'd\lambda'\end{array}\right\}dx.\qquad(3.12)$$

Так как $p(t',x',\lambda'|t,x,\lambda)=\delta(x'-x,\lambda'-\lambda)$ при $\Delta t\downarrow 0$, то из (3.11) следует ($\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака)

$$S_1(t,t+\Delta t)=(\Delta t)\int\Lambda(t,x,u)p_t(x\,|\,\lambda)dx+o(\Delta t).\qquad(3.13)$$

Для переходной плотности марковского процесса $\{x_t;\lambda_t\}$ (см. условие 2^0)) имеет место уравнение Колмогорова-Чепмена [7]

$$p(t',x',\lambda'\,|\,t,x,\lambda)=$$
$$=\int p(t',x',\lambda'\,|\,t+\Delta t,x'',\lambda'')\times$$
$$\times p(t+\Delta t,x'',\lambda''\,|\,t,x,\lambda)dx''d\lambda''.\qquad(3.14)$$

Так как, с учетом (3.6, 3.9)

$$\int p(t+\Delta t,x'',\lambda''\,|\,t,x,\lambda)p_t(x\,|\,\lambda)dx=$$
$$=p_{t+\Delta t}(x''\,|\,\lambda'')p(t+\Delta t,\lambda''\,|\,t,\lambda),\qquad(3.15)$$

то из (3.12, 3.14, 3.15) следует, что

$$S_2(t+\Delta t,T)=\int p(t+\Delta t,\lambda''\,|\,t,\lambda)\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\int p_{t+\Delta t}(x''\,|\,\lambda'')\times\\ \times\left\{\begin{array}{l}\int_{t+\Delta t}^T\Lambda(t',x',u)\times\\ \times p\left(\begin{array}{l}t',x',\lambda'\,|\,t+\\ +\Delta t,x'',\lambda''\end{array}\right)dx'd\lambda'dt'+\\ \int b(T,x')\times\\ \times p\left(\begin{array}{l}t',x',\lambda'\,|\,t+\\ +\Delta t,x'',\lambda''\end{array}\right)dx'd\lambda'\end{array}\right\}dx''\end{array}\right\}d\lambda''.\qquad(3.16)$$

Из (3.10) с учетом (3.13) следует

$$S(t,\lambda)=$$
$$=\min_u\left\{\begin{array}{l}\min_{\{u_{t+\Delta t}^T\}}[S_2(t+\Delta t,T)]+\\ +(\Delta t)\int\Lambda(t,x,u)p_t(x\,|\,\lambda)dx+o(\Delta t)\end{array}\right\}.\qquad(3.17)$$

Подстановка (3.16) в (3.17) с учетом (3.7) приводит к (3.8). Лемма 1 доказана.

Раскладываем $S(t+\Delta t,\lambda^{//})$ в ряд в окрестности точки $\lambda^{//}=\lambda$:

$$S(t+\Delta t,\lambda^{//})=S(t+\Delta t,\lambda)+$$
$$+\left(\frac{\partial S(t+\Delta t,\lambda)}{\partial\lambda}\right)^T\Delta\lambda+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta\lambda^T\frac{\partial^2 S(t+\Delta t,\lambda)}{\partial\lambda^2}\Delta\lambda+o([\Delta\lambda]^2). \qquad (3.18)$$

Далее с учетом (3.2, 3.9) следует:

$$\int S(t+\Delta t,\lambda)p(t+\Delta t,\lambda^{//}\,|\,t,\lambda)d\lambda^{//}=S(t+\Delta t,\lambda);$$
$$\int\left(\frac{\partial S(t+\Delta t,\lambda)}{\partial\lambda}\right)^T\Delta\lambda\, p(t+\Delta t,\lambda^{//}\,|\,t,\lambda)d\lambda^{//}=$$
$$=\left(\frac{\partial S(t+\Delta t,\lambda)}{\partial\lambda}\right)^T M\{\Delta\lambda_t\,|\,\lambda_t=\lambda\}=$$
$$=(\Delta t)\left(\frac{\partial S(t+\Delta t,\lambda)}{\partial\lambda}\right)^T a(t,\lambda)+o(\Delta t);$$
$$\int\Delta\lambda^T\frac{\partial^2 S(t+\Delta t,\lambda)}{\partial\lambda^2}\Delta\lambda\, p(t+\Delta t,\lambda^{//}\,|\,t,\lambda)d\lambda^{//}=$$
$$=\mathrm{tr}\left[\frac{\partial^2 S(t+\Delta t,\lambda)}{\partial\lambda^2}M\{[\Delta\lambda_t][\Delta\lambda_t]^T\big|\lambda(t)=\lambda\}\right]=$$
$$=(\Delta t)\mathrm{tr}\left[\frac{\partial S(t+\Delta t,\lambda)}{\partial\lambda}D(t,\lambda)\right]+o(\Delta t);$$
$$\int o([\Delta\lambda]^2)p(t+\Delta t,\lambda^{//}\,|\,t,\lambda)d\lambda^{//}=$$
$$=M\{o([\Delta\lambda_t]^2)\,|\,\lambda_t=\lambda\}=o(\Delta t).$$

Подстановка (3.18) в (3.8) с учетом последних формул и (3.5) приводит к соотношению ($b^Tg=g^Tb$, $\mathrm{tr}[BD]=\mathrm{tr}[DB]$)

$$S(t,\lambda)=$$
$$=\min_u\left\{\begin{aligned}&S(t+\Delta t,\lambda)+(\Delta t)L^*_{t,x}[S(t+\Delta t,\lambda)]+\\&+(\Delta t)\int\Lambda(t,x,u)p_t(x\,|\,\lambda)dx+o(\Delta t)\end{aligned}\right\}. \qquad (3.19)$$

Переходя в (3.19) к пределу при $\Delta_t\to0$, приходим с учетом (3.6) к уравнению (3.3). Граничное условие (3.4) и выражение для J^0 следуют из (2.3, 3.1). Теорема 1 доказана.

Утверждение 1. Пусть

$$f(\cdot)=F(t)x_t+B(t)u_t,\ \Phi_1(\cdot)=\Phi_1(t),$$
$$p_0(x)=\mathbf{N}\{x;\,\mu_0,\Gamma_0\},$$
$$h(\cdot)=H_0(t)x_t+\sum_{k=1}^N H_k(t)x_{\tau_k}, \qquad (3.20)$$
$$\mu(t)=M\{x_t\,|\,z_0^t\},\ \mu(\tau_k,t)=M\{x_{\tau_k}\,|\,z_0^t\},\ k=\overline{1;N},$$
$$\Gamma(t)=M\{[x_t-\mu(t)][\cdot]^T\big|z_o^t\},$$
$$\Gamma_{kk}(\tau_k,t)=M\{[x_{\tau_k}-\mu(\tau_k,t)]\,[\cdot]^T\big|z_o^t\},$$
$$\Gamma_{0k}(\tau_k,t)=M\{[x_t-\mu(t)][x_{\tau_k}-\mu(\tau_k,t)]^T\big|z_o^t\},$$
$$\Gamma_{ik}(\tau_i,\tau_k,t)=M\{[x_{\tau_i}-\mu(\tau_i,t)][x_{\tau_k}-\mu(\tau_k,t)]^T\big|z_o^t\}. \qquad (3.21)$$

Тогда для апостериорной плотности (2.4) справедливо свойство

$$p_t(x)=\mathbf{N}\{x;\,\mu(t),\Gamma(t)\}, \qquad (3.22)$$

а параметры этой плотности определяются уравнениями

$$d\mu(t)=[F(t)\mu(t)+B(t)u_t]dt+\tilde H_0^T(t)R^{-1}(t)d\tilde z_t,$$
$$d\mu(\tau_k,t)=\tilde H_k^T(t)R^{-1}(t)d\tilde z_t, \qquad (3.23)$$
$$d\Gamma(t)/dt=F(t)\Gamma(t)+\Gamma(t)F^T(t)-$$
$$-\tilde H_0^T(t)R^{-1}(t)\tilde H_0(t)+Q(t), \qquad (3.24)$$
$$d\Gamma_{kk}(\tau_k,t)/dt=-\tilde H_k^T(t)R^{-1}(t)\tilde H_k(t), \qquad (3.25)$$
$$d\Gamma_{0k}(\tau_k,t)/dt=$$
$$=F(t)\Gamma_{0k}(\tau_k,t)-\tilde H_0^T(t)R^{-1}(t)\tilde H_k(t), \qquad (3.26)$$
$$d\Gamma_{ik}(\tau_i,\tau_k,t)/dt=-\tilde H_i^T(t)R^{-1}(t)\tilde H_k(t), \qquad (3.27)$$
$$d\tilde z_t=z(t)-[H_0(t)\mu(t)-\sum_{k=1}^N H_k(t)\mu(\tau_k,t)]dt, \qquad (3.28)$$
$$\tilde H_0(t)=H_0(t)\Gamma(t)+\sum_{k=1}^N H_k(t)\Gamma_{0k}^T(\tau_k,t), \qquad (3.29)$$
$$\tilde H_k(t)=H_k(t)\Gamma_{kk}(\tau_k,t)+\sum_{j\neq k}^N H_j(t)\Gamma_{kj}^T(\tau_k,\tau_j,t). \qquad (3.30)$$

Данное Утверждение следует из [5].

Лемма 2. Вектором достаточных координат является оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\mu(t)$ процесса x_t, то есть $\lambda_t[z_0^t]=\mu(t)$, которая является марковским диффузионным процессом, локальные характеристики которого, см. (3.2), имеют вид

$$a(t,\mu)=F(t)\mu+B(t)u,$$
$$D(t,\mu)=\tilde H_0^T(t)R^{-1}(t)\tilde H_0(t). \qquad (3.31)$$

Доказательство. Так как $\Gamma(t)$, согласно (3.24), не зависит от z_t, то из (3.22) следует, что $\lambda_t=\mu(t)$. Согласно [8] процесс $\tilde z_t$, дифференциал которого имеет вид (3.28), такой, что $\tilde Z_t=(\tilde z_t,F_t^z)$ есть винеровский процесс с

$$M\{\tilde z_t\tilde z_t^T\big|F_t^z\}=\int_0^t R(\tau)d\tau. \qquad (3.32)$$

Тогда свойство марковости $\{x_t;\mu(t)\}$ и формулы (3.31) следуют из (3.23, 3.32).

Утверждение 2. Совместный процесс является марковским диффузионным процессом.

Справедливость данного Утверждения следует непосредственно из (2.1, 3.20, 3.23) с учетом Леммы 2.

Замечание 2. Поскольку условия Теоремы 1 выполняются для $\lambda_t=\mu(t)$, то $S(t,\lambda)=S(t,\mu)$, и из (3.3–3.5) следует

$$\min_u\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial t}+L^*_{t,\mu}[S(t,\mu)]+\\&+M\{\Lambda(t,x_t,u_t)\big|z_0^t\}\end{aligned}\right\}=0, \qquad (3.33)$$

$$S(t,\mu)\big|_{t=T}=M\{b(T,x_T)\big|z_0^T\}, \qquad (3.34)$$

$$L^*_{t,\mu}[S(t,\mu)] = a^T(t,\mu)\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial \mu} +$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[D(t,\mu)\frac{\partial^2 S(t,\mu)}{\partial \mu^2}\right], \qquad (3.35)$$

где $a(t,\mu)$ и $D(t,\mu)$ имеют вид (3.31). Замена $M\{\cdot|\mu_t=\mu\}$ на $M\{\cdot|z_0^t\}$ следует из F_t^z – измеримости процесса $\mu(t)$, см. (3.21).

4. Теорема разделения

Теорема 2. Пусть, кроме (3.20), выполняются условия

$$\Lambda(\cdot) = x_t^T L(t)x_t + u_t^T N(t)u_t,\, b(\cdot) = x_T^T S_T x_T, \qquad (4.1)$$

где $L(t)$, $N(t)$, S_T – симметричные матрицы, причем $L(t)\geq 0$, $S_T\geq 0$, $N(t)>0$.

Тогда уравнение Беллмана (3.33) и граничное условие (3.34) принимают вид

$$\min_u \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial t} + [F(t)\mu + B(t)u]^T\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial \mu} + \\ &+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\tilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_0(t)\frac{\partial^2 S(t,\mu)}{\partial \mu^2}\right] + \\ &+\mu^T L(t)\mu + u^T N(t)u + \operatorname{tr}[L(t)\Gamma(t)] \end{aligned} \right\} = 0, \qquad (4.2)$$

$$S(t,\mu)\big|_{t=T} = \operatorname{tr}[S_T\Gamma(T)] + \mu^T S_T \mu. \qquad (4.3)$$

Доказательство. Из (4.1) с учетом (3.21) и F_t^z – измеримости u_t получаем

$$M\{\Lambda(t,x_t,u_t)\,|\,z_0^t\} =$$
$$= M\{x_t^T L(t)x_t + u_t^T N(t)u_t\,|\,z_0^t\} =$$
$$= M\{x_t^T L(t)x_t\,|\,z_0^t\} + u_t^T N(t)u_t =$$
$$= \mu^T L(t)\mu + \operatorname{tr}[L(t)\Gamma(t)] + u_t^T N(t)u_t. \qquad (4.4)$$

Аналогично

$$M\{b(T,x_T)\big|z_0^T\} = M\{x_T^T S_T x_T\,|\,z_0^T\} =$$
$$= \mu^T(T)S_T\mu(T) + \operatorname{tr}[S_T\Gamma(T)]. \qquad (4.5)$$

Подстановка (3.31, 3.35, 4.4) в (3.33) приводит к (4.2), а подстановка (4.5) в (3.34) приводит к (4.3). Теорема доказана.

Далее точка сверху будет обозначать производную по t.

Теорема 3 (Теорема разделения). Оптимальное управление u_t^0 имеет вид

$$u_t^0 = -N^{-1}(t)B^T(t)S(t)\mu(t), \qquad (4.6)$$

где оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\mu(t)$ вектора состояния x_t определяется уравнениями фильтра (3.23–3.30) при $u_t=u_t^0$, матрица $S(t)$ – матричным дифференциальным уравнением Риккати

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) = &-F^T(t)S(t) - S(t)F(t) + \\ &+S(t)B(t)N^{-1}(t)B^T(t)S(t) - L(t) \end{aligned} \qquad (4.7)$$

с граничным условием

$$S(t)\big|_{t=T} = S_T, \qquad (4.8)$$

а минимальное значение J^0 критерия качества имеет вид

$$J^0 = \mu^T(t_0)S(t_0)\mu(t_0) + \operatorname{tr}[S_T\Gamma(T)] +$$
$$\int_{t_0}^{T}\operatorname{tr}[L(t)\Gamma(t)]dt + \int_{t_0}^{T}\operatorname{tr}[\tilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_0(t)S(t)]dt. \qquad (4.9)$$

Доказательство. Беря производную по u от левой части (4.2) получаем уравнение для нахождения оптимального управления

$$B^T(t)\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial \mu} + 2N(t)u = 0. \qquad (4.10)$$

Отсюда получаем выражение для оптимального управления через функцию Беллмана в виде

$$u^0(t) = -\frac{1}{2}N^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial \mu}. \qquad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.2), получаем уравнение в частных производных второго порядка для функции Беллмана в виде

$$\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial t} + \mu^T F^T(t)\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial \mu} -$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial \mu}\right)^T B(t)N^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial \mu} +$$
$$+\mu^T L(t)\mu + \operatorname{tr}[L(t)\Gamma(t)] +$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\tilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_0(t)\frac{\partial^2 S(t,\mu)}{\partial \mu^2}\right] = 0. \qquad (4.12)$$

Решение уравнения (4.12) находим по методу разделения переменных в виде [9]

$$S(t,\mu) = l(t) + \mu^T S(t)\mu, \qquad (4.13)$$

где $l(t)$ – неизвестная скалярная функция, а $S(t)$ – неизвестная матричная $(n\times n)$ – функция, на которую накладываем условие симметричности. Тогда

$$\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial t} = \dot{l}(t) + \mu^T\dot{S}(t)\mu,$$
$$\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial \mu} = 2S(t)\mu,\ \frac{\partial^2 S(t,\mu)}{\partial \mu^2} = 2S(t). \qquad (4.14)$$

Поскольку на $S(t)$ накладывается условие симметричности, то с учетом (4.14) и того, что для скаляра b справедливо $b=b^T=(1/2)(b+b^T)$, получаем

$$\mu^T F^T(t)\frac{\partial S(t,\mu)}{\partial \mu} = 2\mu^T F^T(t)S(t)\mu =$$
$$= \mu^T F^T(t)S(t)\mu + \mu^T S(t)F(t)\mu. \qquad (4.15)$$

Подстановка (4.14, 4.15) в (4.12) приводит к соотношению

$$\dot{l}(t) + \mu^T\dot{S}(t)\mu + \mu^T F^T(t)S(t)\mu +$$
$$+\mu^T S(t)F(t)\mu - \mu^T S(t)B(t)N^{-1}(t)B^T(t)S(t)\mu +$$
$$+\mu^T L(t)\mu + \operatorname{tr}[L(t)\Gamma(t)] +$$
$$+\operatorname{tr}[\tilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_0(t)S(t)] = 0. \qquad (4.16)$$

Далее в соответствии с методом разделения переменных приравниваем в (4.16) коэффициенты при одинаковых степенях μ. Тогда для $S(t)$ получаем уравнение (4.7), а для $l(t)$ уравнение

$$\dot{l}(t) = -\mathrm{tr}[L(t)\Gamma(t)] - \mathrm{tr}[\tilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)\tilde{H}_0(t)S(t)]. \quad (4.17)$$

Согласно (4.13)

$$S(t,\mu)\big|_{t=T} = l(T) + \mu^T S(T)\mu. \quad (4.18)$$

Из сопоставления (4.3) и (4.18) для уравнения (4.7) следует граничное условие (4.8), а (4.18) для уравнения (4.17) – граничное условие

$$l(t)\big|_{t=T} = \mathrm{tr}[S_T\Gamma(T)]. \quad (4.19)$$

Так как, согласно Теореме 1, $J^0=S(t_0,\lambda(t_0))$, а $\lambda=\mu$, то из (4.13) следует, что

$$J^0 = \mu^T(t_0)S(t_0)\mu(t_0) + l(t_0). \quad (4.20)$$

Решение уравнения (4.17) с граничным условием (4.19) имеет вид

$$l(t) = \mathrm{tr}[S_T\Gamma(T)] + \int_t^T \mathrm{tr}[L(\tau)\Gamma(\tau)]\, d\tau + \int_t^T \mathrm{tr}[\tilde{H}_0^T(\tau)R^{-1}(\tau)\tilde{H}_0(\tau)S(\tau)]\, d\tau. \quad (4.21)$$

Подстановка (4.21) в (4.20) при $t=t_0$ приводит к (4.9). Использование (4.14) в (4.11) приводит к (4.6). Теорема доказана.

5. Заключение

1. Из сравнения результатов Теоремы 3 с Теоремой разделения в классическом случае [1], когда наблюдения без памяти, следует, что выражение для оптимального управления u_t^0 имеет один и тот же вид (4.6). При этом матрица $S(t)$, определяющая регулятор, также определяется одними и теми же соотношениями (4.7, 4.8). Различие заключается в том, что в классическом случае оценка $\mu(t)$ вырабатывается фильтром Калмана, а в случае наблюдений с памятью – фильтром (3.23–3.30), который вырабатывает не только оценку фильтрации $\mu(t)$ для текущего значения вектора состояния x_t, но и оценки интерполяции $\mu(\tau_k,t)$ для прошлых значений вектора состояния x_{τ_k}, $k=\overline{1;N}$. Соответственно изменяется выражение для минимального значения критерия качества J^0.
2. Обобщение результатов на случай, когда процесс управления начинается с начального момента $t=0$, очевидно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wonham W.M. On the separation theorem of stochastic control // SIAM J. Control. – 1965. – V. 6. – P. 312–326.
2. Богуславский А.И. Методы навигации и управления по неполной статистической информации. – М.: Машиностроение, 1970. – 256 с.
3. Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
4. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
5. Абакумова О.Л., Демин Н.С., Сушко Т.В. Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью. II. Синтез фильтров // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 10. – С. 36–49.
6. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. – М.: Изд-во МГУ, 1966. – 319 с.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
8. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
9. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.