

Определение суммы скалывающих сил на участке железобетонного стержня с переменной высотой через изгибающие моменты.

Читая новейшую литературу по железо-бетону, рассматривающую вопрос о нахождении скалывающих сил через моменты¹⁾, я пришел к некоторым новым, точным и простым выводам при стержнях с переменной высотой, которые предлагаю вниманию. Для ясности и цельности изложения начнем с известных уже трудами Lösger'a положений для стержней с постоянной высотой h , упрощая и уточняя во многом вопрос.

1) Связь между M и Q .

Из теории сооружений известно, что в сечении изогнутого стержня

$$\frac{dM}{dx} = Q, \dots \dots \dots (1)$$

т. е. $dM = Q \cdot dx$, где Q — перерезывающая сила.

Взяв какой либо участок стержня с абсциссами a и b , длиной $b - a = c$, мы найдем, что (черт. 1)

$$\int_a^b dM = \int_a^b Q dx,$$

т. е.

$$M_b - M_a = \Delta M = \int_a^b Q \cdot dx = \Omega_Q, \dots \dots \dots (2)$$

так как $\int_a^b Q \cdot dx$ есть площадь эпюры Q в пределах участка. Таким образом площадь эпюры перерезывающих сил на участке равна приращению момента в пределах этого участка.

2) Скалывающие силы и касательные напряжения в стержне постоянного сечения.

В любом сечении сумма растягивающих напряжений, или так называемая внутренняя растягивающая сила (черт. 2).

$$Z = \frac{M}{Z}, \dots \dots \dots (3)$$

1) 1. B. Lösger. Bemessungsverfahren. 1925. S. 66—94.
2. E. Mörsch. Der Eisenbetonbau. 1922.
3. P. Злигер. Железобетон (перевод) 1927 г., стр. 344—382.
4. Taschenbuch für Bauingenieure. 4. Aufl.
5. F. Weil. Tabellen für raschen Ermittlung der Schubbewehrung. Beton und Eisen 1926. H. ft. 11.
6. Н. А. Буданов. Железо-бетон 1925. стр. 119—160.

где z есть расстояние между центром растяжения и центром сжатия, или так наз. плечо внутренних сил. При неучете бетона на растяжение это есть расстояние до центра арматуры от центра сжатия. Величина z зависит от формы сечения и степени насыщения арматурой. При постоянном сечении она постоянна.

Беря производную по абсциссе x , получаем:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{z} \cdot \frac{dM}{dx};$$

откуда

$$dZ = \frac{1}{z} \cdot dM.$$

Но приращение растягивающей силы равно скалывающей силе по нейтральному слою на длине dx (черт. 3), т. е.

$$T \cdot dx = dZ \cdot \frac{dM}{z}.$$

Касательное напряжение будет равно

$$\tau = \frac{T}{b} = \frac{dM}{b \cdot z \cdot dx} = \frac{Q}{b \cdot z} \dots \dots \dots (4)$$

По этой формуле оно обычно и определяется.

В ж. б. стержнях важно бывает найти сумму скалывающих сил на участке. Она будет равна

$$\sum_a^b T = \int_a^b T \cdot dx = \int_a^b dZ \cdot \frac{1}{z} \int_{M_a}^{M_b} dM,$$

откуда

$$\sum_a^b T = Z_b - Z_a = \frac{1}{z} (M_b - M_a) = \frac{\Delta M}{z} \dots \dots \dots (5)$$

Таким образом, сумма скалывающих сил по нейтральному слою, на участке изогнутого стержня постоянного сечения, равна приращению внутренних сил на участке или, что тоже, приращению момента, деленному на плечо внутренних сил.

Это положение, выведенное Löser'ом для стержней постоянного сечения, значительно облегчает труд по расчету ж/бет. конструкций, т. к. сумма скалывающих сил, нужная для расчета хомутов и отогнутых стержней, вычисляется непосредственно из изгибающих моментов без вычисления перерезывающих сил, т. е. работа значительно сокращается. Величины же M все равно нужно находить для подбора сечений.

Зная $\sum T$, легко найти потребную площадь хомутов и отогнутых стержней. Если не учитывать работу бетона на скалывание, как это требуется нашими нормами по ж/бет., то

$$\frac{\sum T}{\sigma_c} = F_b + F_s \cdot \cos \beta \cdot 0,707 \dots \dots \dots (6)$$

1) B. Löser. Bemessungsverfahren... 1925. S. 72.

Здесь F_b — площадь поперечного сечения хомутов на участке; F_s — площадь отогнутых стержней в пределах его, σ_s — допускаемое напряжение железа на растяжение, а β — угол между осью отогнутого стержня и линией идущей под 45° . Чаще всего стержни отгибаются под $\angle 45^\circ$, т. е. $\angle \beta = 0$, $\cos \beta = 1$. Задаваясь количеством хомутов, т. е. площадью их F_b , находим требуемую площадь отогнутых стержней.

Для облегчения подсчетов F. Weil составил таблицы¹⁾.

3) Скальвающие напряжения в стержнях с переменной высотой.

У ж/бет. стержня по его длине может меняться высота h , ширина b и количество железа F_s . В отношении подсчета скальвающих сил, нам важно только изменение величины z — плеча внутренних сил.

В стержне прямоугольного сечения z от b не зависит. Оно зависит, главным образом, только от высоты h и слабее от F_s . При чем количество железа всегда меняется скачками по участкам и, таким образом, вообще говоря, всегда можно выбрать участок с $F_s = \text{const}$. Можно принять $z = kh$, где k колеблется от 0,67 — 1,00, как крайние пределы; обычно же $k \approx 7/8$.

Для любого сечения будем иметь:

$$Z = \frac{M}{z} = \frac{M}{kh} \dots \dots \dots (7)$$

Если считать коэффициент k в пределах исследуемого участка постоянным, то дифференцируя выражение (7) получим:

$$T \cdot dx = dZ = \frac{k \cdot h \cdot dM - M \cdot k \cdot dh}{k^2 \cdot h^2} = \frac{dM}{k \cdot h} - \frac{M \cdot dh}{k \cdot h^2} \dots \dots \dots (8)$$

Отсюда прямо получаем известную формулу для скальвающих напряжений:

$$\tau = \frac{T \cdot dx}{b \cdot dx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{k \cdot h \cdot b} - \frac{M \cdot dh}{k \cdot h^2 \cdot b \cdot dx}; \text{ т. е.}$$

$$\tau = \frac{Q}{b \cdot z} - \frac{M \cdot \text{tg} \alpha}{h \cdot z \cdot b} \dots \dots \dots (9)$$

Потому что

$$\frac{dM}{dx} = Q, \text{ а } \frac{dh}{dx} = \text{tg} \alpha \dots \dots \dots (10)$$

тангенс угла между касательными к контуру полезной высоты стержня (черт. 4) или, что тоже, к контуру полной высоты, т. к. арматура почти всегда укладывается параллельно грани стержня. При прямой вуте это (черт. 5) будет уклон ее, так как

$$h = h_0 + x \cdot \text{tg} \alpha$$

¹⁾ См. его статью в *Beton u. Eisen*, 1926 Heft 11.

²⁾ „Taschenbuch für Bauingenieure“ 4 Aufl. S. 987.

и

$$\frac{dh}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h_a - h_0}{a} \dots \dots \dots (11)$$

В формулу (9) для τ все величины Q , M и $\operatorname{tg} \alpha$ вставляются со своими знаками.

Если h растет, считая всегда слева направо, то производная $\frac{dh}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ будет положительна и наоборот. Кроме того из форм. (11) для прямой вуты сразу видно, что если $h_a \succ h_0$, т. е. высота растет, то $\operatorname{tg} \alpha$ положителен и т. д.

Например, для левого защемленного конца балки (черт. 6) высота будет убывающей, т. е. $\operatorname{tg} \alpha$ — отрицателен и если M тоже отрицателен, то в численных величинах, в форм. (9) во втором члене знак (—) сохранится. Для аналогичного правого конца (черт. 7) высота будет возрастающей, т. е. $\operatorname{tg} \alpha$ положителен и если момент отрицателен, то в форм. (9), во втором члене получим знак (+). Но так как перерезывающая сила будет при этом отрицательна, то, вынося знак (—) за скобки, получим в скобках разность между величинами и т. д. В случае вутного утолщения не снизу, а сверху, или сверху и снизу одновременно (черт. 4), рассуждения не меняются. При изменении высоты по кривой, $\operatorname{tg} \alpha$ получается по уравнению

$$\frac{dh}{dx} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Например (черт. 8), параболическая вута. Высота h меняется по уравнению:

$$h = h_0 - \frac{s}{a^2} \cdot x (2a - x) .$$

Тогда $\frac{dh}{dx} = - \frac{2s}{a^2} \cdot (a - x)$ и, положим при $x = 0$, будем иметь

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{2s}{a} \quad (\text{величина отрицательная}).$$

Я нарочно остановился на вопросе о знаках в форм. (9) более подробно, т. к. в литературе нет исчерпывающих указаний, и поэтому в практической работе выявляется зачастую неясность.

4) Нахождение ΣT на участке с произвольным изменением высоты (по исследованиям автора).

Определим зависимость между суммой скальвающих усилий на участке с переменной высотой и изгибающими моментами. Существующая для этого формула Lösger'a (см. указанный его труд стр. 72) неудовлетворительна, так как она приближенна и сложна. Попытаемся найти точную зависимость. Для этого нужно проинтегрировать наше уравнение (8) в пределах участка, от 0 до a .

Получаем:

$$\Sigma T = \int_0^a T \cdot dx = \int_{M_0}^{M_a} \frac{dM}{k \cdot h} - \int_{h_0}^{h_a} \frac{M \cdot dh}{k \cdot h^2}$$

или, считая $k = \text{const.}$ (см. выше),

$$\sum_0^a T = \frac{1}{k} \int_{M_0}^{M_a} \frac{dM}{h} = \frac{1}{k} \int_{h_0}^{h_a} \frac{M \cdot dh}{h^2} \dots \dots \dots (12)$$

К сожалению мы лишены приятной возможности решить эти интегралы в самом общем виде, так как M и h , каждая порознь, имеют свои функциональные зависимости от x . Кроме того M зависит еще от характера распределения нагрузки. Поэтому зададимся этими зависимостями, т. е. решим задачу и для частного к общему.

а) В случае стержня равного сопротивления (более общий случай) высоту h можно выразить при $b = \text{const.}$

$$h = c \cdot \sqrt{M},$$

при чем $c = \text{const.}$

Далее $dh = c \cdot \frac{dM}{2\sqrt{M}}$; подставляя в уравнение (12) имеем:

$$\sum T = \frac{1}{k} \int_{h_0}^{h_a} \frac{2\sqrt{M}}{c^2\sqrt{M}} dh = \frac{1}{k} \int_{h_0}^{h_a} \frac{h^2}{c^2 h^2} dh = \frac{h_a}{kc^2} - \frac{h_0}{kc^2}.$$

Но т. к. $c = \frac{h}{\sqrt{M}}$; $c^2 = \frac{h^2}{M} = \frac{h_a^2}{M_a} = \frac{h_0^2}{M_0}$.

Произведя подстановку, получаем

$$\sum_0^a T = \frac{h_a \cdot M_a}{k \cdot h_a^2} - \frac{h_0 \cdot M_0}{k \cdot h_0^2} = \frac{M_a}{kh_a} - \frac{M_0}{kh_0}.$$

Но у нас $kh_a = z_a$; $kh_0 = z_0$, т. е.

$$\sum_0^a T = \frac{M_a}{z_a} - \frac{M_0}{z_0} \dots \dots \dots (13)$$

Получилось очень важное соотношение, что сумма скалывающих сил на участке переменной высоты равна разности между моментами на границах его, деленными на свои плечи внутренних сил, т. е. равна приращению внутренних сил в каждой зоне. При чем она совершенно не зависит от промежуточного изменения h и M .

Проверим это положение на других более частных случаях.

в) Пусть M меняется по параболе 2 й степени, а h по прямой (чер. 9).

В этом случае момент в любом сечении может быть представлен в виде

$$M = \frac{x}{a} (M_a - M_0) + M_0 + \frac{4m}{a^2} \cdot x(a-x).$$

Обозначая $M_a - M_0 = \Delta M_1$; $\frac{4m}{a^2} = c$, получаем

$$M = \frac{\Delta M_1}{a} \cdot x + M_0 + c(a-x) \cdot x,$$

а дифференциал M будет

$$dM = \frac{\Delta M_I}{a} \cdot dx + c(a - 2x) dx.$$

Далее, в случае изменения h по прямой,

$$h = h_0 + x \operatorname{tg} \alpha ;$$

откуда

$$dh = \operatorname{tg} \alpha \cdot dx, \text{ а } x = \frac{h - h_0}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Подставляя полученные величины в основное выражение (12) для ΣT и решая каждый интеграл отдельно, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \int_{M_0}^{M_a} \frac{dM}{h} &= \frac{1}{\kappa} \int_0^a \frac{\frac{\Delta M_I}{a} + c(a - 2x)}{h} dx = \\ &= \frac{\Delta M_I}{\kappa a} \int_{h_0}^{h_a} \frac{dh}{\operatorname{tg} \alpha \cdot h} + \frac{c}{\kappa} \int_{h_0}^{h_a} a - \frac{2(h - h_0)}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{dh}{h}. \end{aligned}$$

Заменяя $a \cdot \operatorname{tg} \alpha = s = h_a - h_0$,

$$\begin{aligned} \text{будем иметь } \frac{1}{\kappa} \int_{M_0}^{M_a} \frac{dM}{h} &= \frac{\Delta M_I}{\kappa \cdot s} \ln \frac{h_a}{h_0} + \frac{c \cdot a^2}{\kappa \cdot s^2} \int_{h_0}^{h_a} \frac{h_a}{h} - \frac{h_0 - 2h}{h} dh = \\ &= \frac{\Delta M_I}{\kappa \cdot s} \ln \frac{h_a}{h_0} + \frac{4m}{\kappa \cdot s^2} \left[(h_a + h_0) \ln \frac{h_a}{h_0} - 2s \right]. \end{aligned}$$

Переходим ко 2-му члену уравнения (12).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \int_{h_0}^{h_a} \frac{M dh}{h^2} &= \frac{1}{\kappa} \int_{h_0}^{h_a} \left[\frac{\Delta M_I}{a} \cdot x + M_0 + c \cdot x(a - x) \right] \frac{dh}{h^2} = \\ &= \frac{\Delta M_I}{\kappa \cdot a} \int_{h_0}^{h_a} \frac{(h - h_0)}{\operatorname{tg} \alpha \cdot h^2} dh + \frac{M_0}{\kappa} \int_{h_0}^{h_a} \frac{dh}{h^2} + \frac{c}{\kappa} \int_{h_0}^{h_a} \frac{(h - h_0)}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \left(a - \frac{h - h_0}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \cdot \frac{dh}{h^2} = \\ &= \frac{\Delta M_I}{\kappa \cdot s} \left(\int_{h_0}^{h_a} \frac{dh}{h} - h_0 \cdot \int_{h_0}^{h_a} \frac{dh}{h^2} \right) + \frac{M_0}{\kappa} \int_{h_0}^{h_a} \frac{dh}{h^2} + \frac{c \cdot a^2}{\kappa \cdot s^2} \int_{h_0}^{h_a} \frac{(h - h_0)(h_a - h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Все интегралы легко разрешимы.

$$\begin{aligned} \text{Получаем } \frac{1}{\kappa} \int_{h_0}^{h_a} \frac{M \cdot dh}{h^2} &= \frac{\Delta M_I}{\kappa \cdot s} \left(\ln \frac{h_a}{h_0} - \frac{s}{h_a} \right) + \frac{M_0 \cdot s}{\kappa \cdot h_a \cdot h_0} + \\ &+ \frac{c \cdot a^2}{\kappa \cdot s^2} \left[h_a \cdot \int_{h_0}^{h_a} \frac{dh}{h} - \int_{h_0}^{h_a} dh - h_a \cdot h_0 \cdot \int_{h_0}^{h_a} \frac{dh}{h^2} + h_0 \cdot \int_{h_0}^{h_a} \frac{dh}{h} \right] = \\ &= \frac{\Delta M_I}{\kappa \cdot s} \left(\ln \frac{h_a}{h_0} - \frac{s}{h_a} \right) + \frac{M_0 \cdot s}{\kappa \cdot h_a \cdot h_0} + \frac{c \cdot a^2}{\kappa \cdot s^2} \left[(h_a + h_0) \ln \frac{h_a}{h_0} - 2s \right] = \\ &= \frac{\Delta M_I}{\kappa \cdot s} \ln \frac{h_a}{h_0} - \frac{1}{\kappa \cdot h_a} \left(\Delta M_I - M_0 \cdot \frac{s}{h_0} \right) + \frac{4m}{\kappa \cdot s^2} \left[(h_a + h_0) \ln \frac{h_a}{h_0} - 2s \right]. \end{aligned}$$

Полная сумма скалывающих сил на участке от o до a

$$\begin{aligned} \sum_0^a T &= \frac{1}{\kappa} \int_{M_0}^{M_a} \frac{dM}{h} - \frac{1}{\kappa} \int_{h_0}^{h_a} \frac{Mdh}{h^2} = \frac{\Delta M_1}{\kappa \cdot s} \ln \frac{h_a}{h_0} + \\ &+ \frac{4m}{\kappa \cdot s^2} \left[(h_a + h_0) \ln \frac{h_a}{h_0} - 2s \right] - \frac{\Delta M_1}{\kappa \cdot s} \ln \frac{h_a}{h_0} + \\ &+ \frac{1}{\kappa \cdot h_a} \left(\Delta M_1 - M_0 \frac{s}{h_0} \right) - \frac{4m}{\kappa s^2} \left[(h_a + h_0) \ln \frac{h_a}{h_0} - 2s \right] = \\ &= \frac{1}{\kappa h_a} \left(M_a - M_0 - M_0 \frac{s}{h_0} \right) = \frac{M_a}{\kappa h_a} - \frac{M_0}{\kappa h_0}. \end{aligned}$$

Но $\kappa \cdot h_a = z_a$, $\kappa \cdot h_0 = z_0$, т. е.

$$\boxed{\sum_0^a T = \frac{M_a}{z_a} - \frac{M_0}{z_0}} = Z_a - Z_0 \dots \dots (13).$$

Получили тоже, что и в случае (а).

с) Прделавав аналогичное интегрирование для случая, например, изменения M по прямой, получим тоже самое¹⁾. Можно, пожалуй, сказать, что при всяком изменении M и h , для ΣT будет иметь место полученное выражение (13).

Для стержня, положим, состоящего из двух, различных по изменению h , участков (чер. 10) получаем²⁾

$$\sum_0^b T = \sum_0^a T_1 + \sum_a^b T_{II} = \frac{M_a}{z_a} - \frac{M_0}{z_0} + \frac{M_b}{z_b} - \frac{M_a}{z_a}.$$

$$\boxed{\sum_0^b T = \frac{M_b}{z_b} - \frac{M_0}{z_0}} \dots \dots \dots (14).$$

5) Общий вывод.

Обобщая полученные выводы, выскажем правило:

В изогнутом ж.-б. стержне сумма скалывающих сил по нейтральному слою на каком-либо участке, с произвольным изменением сечения, равна разности между моментами на границах участка, деленными на свои плечи внутренних сил. Или иначе—Сумма скалывающих сил равна приращению внутренних сил, на участке любой длины и формы.

В общем виде это будет:

$$\boxed{\sum_1^2 T = \frac{M_2}{z_2} - \frac{M_1}{z_1}} \dots \dots \dots (15)$$

¹⁾ Для краткости не приводится.

²⁾ Формула Löser'a $\Sigma T = \frac{\Delta M}{z}$ для постоянной высоты, есть, как видно, только частный случай форм. (13).

При чем для получения ΣT_{\max} необходимо брать такое распределение нагрузки, т. е. величин M на границах участка, где их разность будет наибольшая. Если моменты на границах будут разных знаков, то, конечно, разность численно превращается в сумму величин $\frac{M_2}{z_2}$ и $\frac{M_1}{z_1}$.

Полученное нами соотношение обладает простотой для вычисления и имеет полную точность, чего нельзя сказать, положим, про приближенную формулу Lösger'a или аналогичные ей формулы, полученные из площади диаграммы скалывающих напряжений ¹⁾.

Поясним пользование формулой (15) числовым примером.

6) Пример.

а) Условие.

Балка с прямыми вутами, упруго заземленная по концам, имеет пролет $l = 8,0$ м., полезную высоту на опорах $h_A = h_B = 1,20 - 0,05 = 1,15$ м., в пролете $h_0 = 0,75 - 0,05 = 0,70$ м. (черт. 11).

На концах действуют моменты:

$$M_A = - 6,0 \text{ т. м.}$$

$$M_B = - 12,0 \text{ т. м.}$$

Нагрузка сосредоточенная $P = 12$ т. на расст. $c = 3$ м., при этом $M_{\max} = + 12,64$ т.м. Определить наиб. суммы скалывающих сил?

б) Решение по фор. (15).

Имеем два участка с границей в сечении с M_{\max} .

Взяв приближенно $z = 7/8 h$ (можно и точно), получаем по форм. (15):

$$\Sigma T_I = \frac{M_{\max}}{z_0} - \frac{M_A}{z_A} = \frac{12,64}{7/8 \cdot 0,70} + \frac{6,0}{7/8 \cdot 1,15} = + 26,60 \text{ т.}$$

$$\Sigma T_{II} = \frac{M_B}{z_B} - \frac{M_{\max}}{z_0} = \frac{12,0}{7/8 \cdot 1,15} - \frac{12,64}{7/8 \cdot 0,70} = - 32,57 \text{ т.}$$

Полученные разные знаки указывают на различность направления отгиба стержней в участках.

в) Решение по Lösger'y

Для сопоставления решим этот пример по форм. Lösger'a. При этом сначала необходимо определить нижеследующие дополнительные данные.

Разность между высотами в пролете и на опоре

$$s = h_A - h_0 = 1,15 - 0,70 = 0,45 \text{ м.}$$

Длина вуты при уклоне $\text{tg} \alpha = 1/3$

$$a = \frac{s}{\text{tg} \alpha} = 0,45 \cdot 3 = 1,35 \text{ м.}$$

Высота по середине вуты

$$h_m^A = h_m^B = \frac{h_A + h_0}{2} = \frac{1,15 + 0,70}{2} = 0,925 \text{ м.}$$

¹⁾ При вычислении ΣT из площади диаграммы скалыв. напряж. τ , обычно считают изменение τ в пределах переменной высоты по прямой, что конечно не всегда верно (см. фор. 9).

Момент в начале левой вуты

$$M_a^A = \frac{P(l-c)}{l} \cdot a + M_A + M_A \cdot \frac{a}{l} = \frac{12(8-3)}{8} \cdot 1,35 - 6 - 12 \cdot \frac{1,35}{8} = +2,18 \text{ т. м.}$$

Момент в начале правой вуты

$$M_a^B = \frac{P \cdot c}{l} \cdot a + M_B + M_A \cdot \frac{a}{l} = \frac{12 \cdot 3 \cdot 1,35}{8} - 12 - 6 \cdot \frac{1,35}{8} = -6,95 \text{ т. м.}$$

Момент по середине левой вуты

$$M_m^A = \frac{M_A + M_a^A}{2} = \frac{-6 + 2,18}{2} = -1,91 \text{ т. м.}$$

И, наконец, момент по сред. правой вуты

$$M_m^B = \frac{M_B + M_a^B}{2} = \frac{-12 - 6,95}{2} = -9,475 \text{ т. м.}$$

Далее по форм. Löser'a находим:

в левом участке

$$\begin{aligned} \Sigma T_I &= \frac{M_{\max} - M_a^A}{z_0} + \frac{M_a^A - M^A + M_m^A}{z_m} \cdot \frac{s}{h_m} = \\ &= \frac{12,64 - 2,18}{\sqrt{s} \cdot 0,70} + \frac{2,18 + 6 - 1,91}{\sqrt{s} \cdot 0,925} \cdot \frac{0,45}{0,925} = +26,05 \text{ т.;} \end{aligned}$$

в правом участке

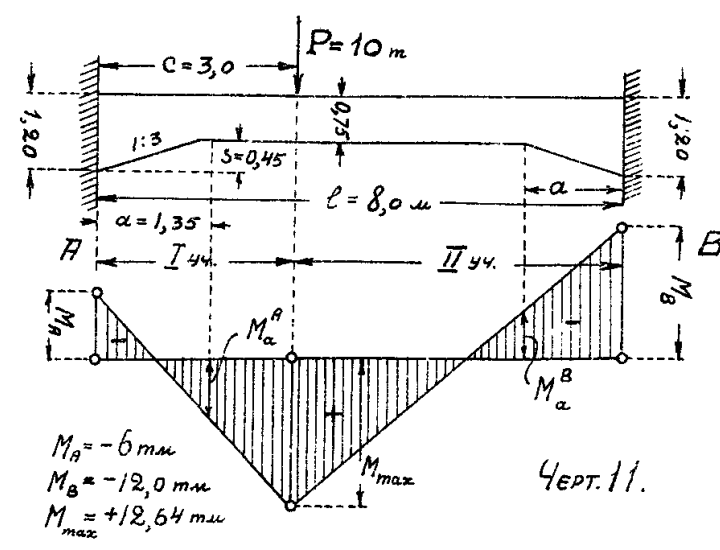
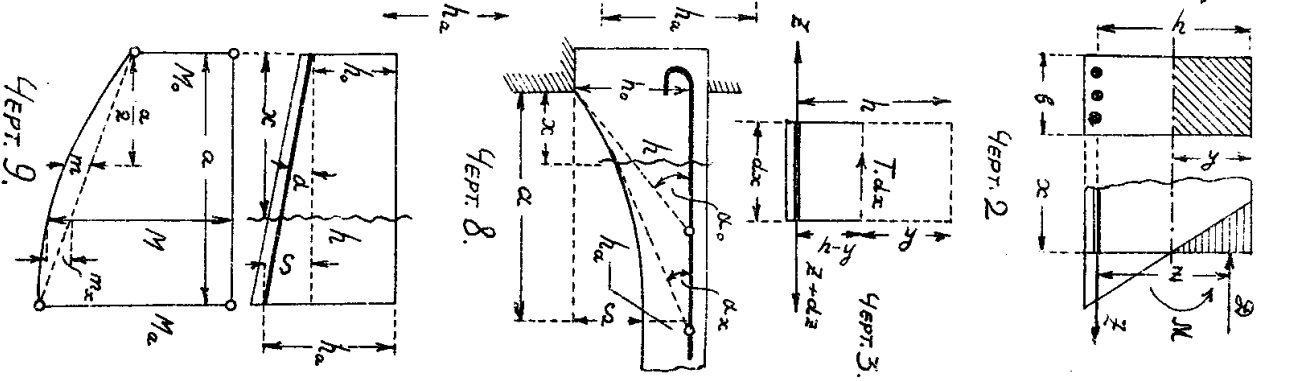
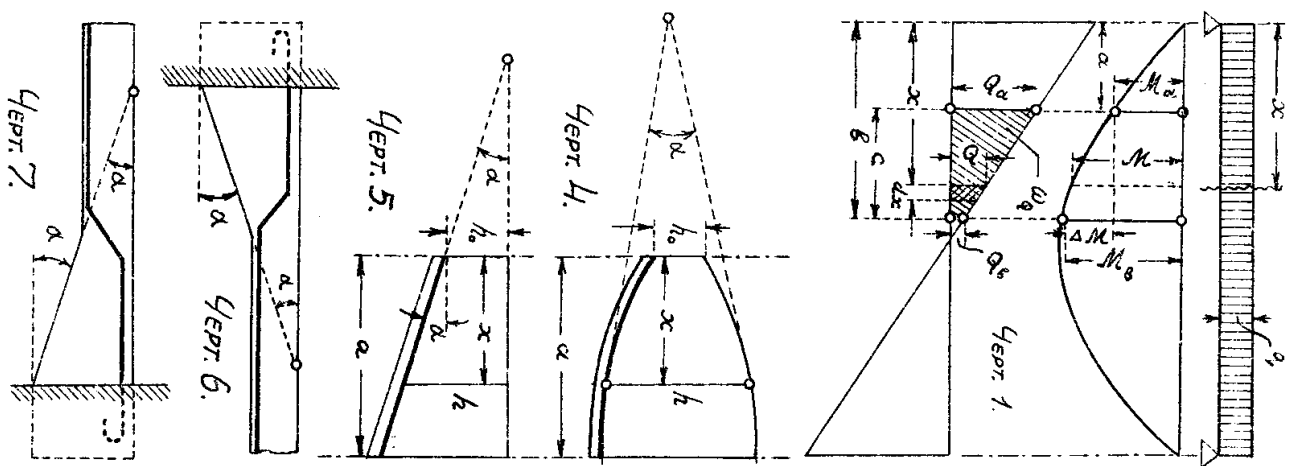
$$\begin{aligned} \Sigma T_{II} &= - \left[\frac{M_{\max} - M_a^B}{z_0} + \frac{M_a^B - M^B + M_m^B}{z_m} \cdot \frac{s}{h_m} \right] = \\ &= - \left[\frac{12,64 + 6,95}{\sqrt{s} \cdot 0,70} + \frac{-6,95 + 12 - 9,475}{\sqrt{s} \cdot 0,925} \cdot \frac{0,45}{0,925} \right] = -32,54 \text{ т.;} \end{aligned}$$

d) Сравнение решений.

Получили результаты очень близкие к результатам, вычисленным по нашей форм. (15), но зато само вычисление по Löser'у, как видно, гораздо сложнее.

Таким же сравнит. сложным по количеству выкладок будет в данном случае и вычисление ΣT из площади диаграммы скальвающих напряжений, как это часто делается, т. к. там надлежало бы еще, вычислять перерез. силы Q и напряжения τ в нескольких сечениях, затем определить площадь диаграммы τ и т. д.

Таким образом, *практическая полезность* предлагаемой выше форм. (15) становится очевидной.



$M_A = -6 \text{ mm}$
 $M_B = -12.0 \text{ mm}$
 $M_{max} = +12.64 \text{ mm}$

