

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

А.В. Анфилофьев, В.М. Замятин

Томский политехнический университет  
E-mail: zvm@tpu.ru

*Нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода представлены как своеобразные угловые меры дуги растянутого и сжатого эллипса при отображении дуги окружности на наклонные плоскости. В этом представлении установлены элементарные аналитические выражения и диапазон, в котором обеспечивается удовлетворительная точность их значений.*

Различные задачи геометрии, физики, механики в своих решениях приводят к нормальным эллиптическим интегралам Лежандра [1]:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(k \sin \varphi)^2}} = F(\varphi, k),$$

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-(k \sin \varphi)^2} d\varphi = E(\varphi, k). \quad (1)$$

Интегралы первого рода  $F(\varphi, k)$  и второго рода  $E(\varphi, k)$  являются функциями двух переменных: "модуля  $k$ " или "модулярного угла  $\alpha = \arcsin k$ " и "аргумента  $\varphi$ ". Для действительных значений модуля ( $k \leq 1$ ) и аргумента  $\varphi$  в интервале  $(0, \pi/2)$  числовые значения интегралов табулированы [2]. При значении  $\varphi = \pi/2$  интегралы называют полными и обозначают соответственно  $F(\pi/2, k)$  или  $K$  и  $E(\pi/2, k)$  или  $E$ . В теории эллиптических интегралов рассматривается также дополнительный модуль  $k'$ , связанный с основным модулем соотношением:  $k^2 + k'^2 = 1$ . С модулем  $k'$  полные интегралы (1) называют связанными эллиптическими интегралами.

Интеграл первого рода определяет длину дуг лемнискаты Бернулли, интеграл второго рода длину дуг эллипса, но их переменные конкретного геометрического образа не имеют, подобного тому, который имеется у параметров функций связанных с окружностью. С обращением интегралов (1) в другие формы они переопределяются. Так, в тригонометрических эллиптических функциях Якоби "аргумент  $\varphi$ " становится амплитудой  $z = F(\varphi, k)$ , а "модуль  $k$ " является неявным параметром.

Эллиптические интегралы относят к классу специальных дwoякопериодических функций, отношение периодов которых не вещественно, и в решениях задач результат, определённый в параметрах эллиптических интегралов, приобретает в значительной степени формальный характер. Существует неопределённая дистанция между данным представлением эллиптических интегралов и очевидными объектами задач.

Очевидно, значимость решений задач, определённых эллиптическими интегралами, может быть повышена, если они получат конкретное представление, подобное тому, которое имеют элементарные функции. С целью создания таких представлений в работе рассматривается преобразование плоской кривой линии при её отображении на наклонные плоскости.

Линию конечной длины можно спроектировать с одной плоскости на другую по разным направлениям, при этом она получает соответствующие искажения. Выделим направления отображений по нормальям двух расположенных под некоторым углом друг к другу плоскостей. Назовём "прямым" преобразованием отображение с исходной горизонтальной плоскости по нормали наклонной плоскости, "обратным" преобразованием назовём отображение по нормали исходной плоскости на наклонную.

На рис. 1 показаны эти преобразования: прямое – проекция с плоскости  $\Pi_1$  (исходная) на  $\Pi_2$  (наклонная) по нормали плоскости  $\Pi_2$ , обратное – проекция с плоскости  $\Pi_2$  (исходная) на  $\Pi_1$  (наклонная) по нормали плоскости  $\Pi_2$ . Рассмотрим отображение линии с плоскости  $\Pi_1$  на плоскость  $\Pi_2$ . Угол между плоскостями  $\alpha$ .

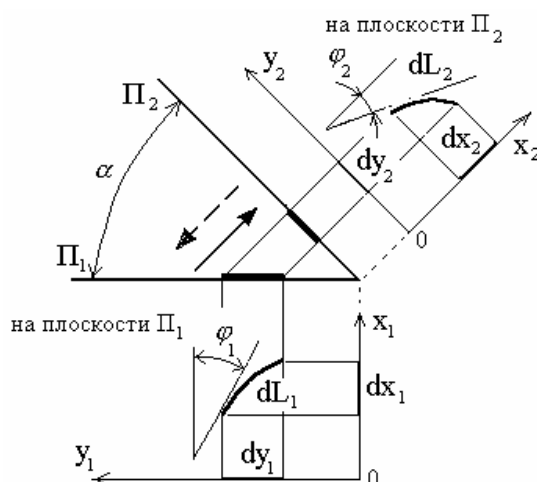


Рис. 1. Отображение линии на наклонную плоскость: прямое  $\Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ , обратное  $\Pi_2 \rightarrow \Pi_1$

На плоскости  $\Pi_1$  проекции дуги  $dL_1$  равны  $dy_1 = dL_1 \sin \varphi_1$ ,  $dx_1 = dL_1 \cos \varphi_1$ , где  $\varphi_1$  – угол наклона касательной к линии  $L_1$  в соответствующей точке.

На плоскости  $\Pi_2$  получаем линию  $L_2$ , дифференциал дуги которой

$$dL_2 = \sqrt{dy_2^2 + dx_2^2}.$$

Так как

$$dy_2 = dy_1 \cos \alpha = dL_1 \sin \varphi_1 \cos \alpha, \quad dx_2 = dx_1 = dL_1 \cos \varphi_1,$$

то 
$$dL_2 = dL_1 \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \alpha}. \quad (2)$$

При отображении линии с плоскости  $\Pi_2$  на плоскость  $\Pi_1$  соответственно:

$$\begin{aligned} dy_1 &= dy_2 / \cos \alpha = dL_2 \frac{\sin \varphi_2}{\cos \alpha}, \\ dx_1 &= dx_2 = dL_2 \cos \varphi_2, \\ dL_1 &= \frac{dL_2}{\cos \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varphi_2$  – угол наклона касательной к линии  $L_2$ .

Из (2) и (3) следует, что, если отображается дуга окружности радиусом  $R$  с центральным углом  $\varphi$ , то длины её проекций на наклонных плоскостях определяются интегралами второго рода (1). При прямом отображении длина дуги

$$L_2 = R \int_0^\varphi \sqrt{1 - (\sin \alpha \sin \varphi)^2} d\varphi = R E(\varphi, k), \quad (4)$$

при обратном

$$L_1 = \frac{R}{\cos \alpha} \int_0^\varphi \sqrt{1 - (\sin \alpha \sin \varphi)^2} d\varphi = R \frac{E(\varphi, k)}{\cos \alpha}. \quad (5)$$

Интегралы (4) и (5) определяют длину дуг сжатого и растянутого эллипса и  $E(\varphi, k)$  можно рассматривать как коэффициент преобразования угловой меры дуги окружности при определении её проекции на наклонной плоскости. По смыслу это угловая мера дуги сжатого эллипса с центральным углом  $\varphi$ , аналогичная угловой мере дуги окружности. Разница между ними в том, что дуга эллипса с одним и тем же центральным углом  $\varphi$  в разных местах линии определяется двумя углами (начало и конец).

Модулярный угол  $\alpha$ , модуль  $k$ , и аргумент  $\varphi$  здесь имеют конкретное представление. Когда  $\alpha=0$  длина дуги окружности также определяется эллиптическим интегралом:  $E(\varphi, 0)=\varphi$ . При вращении наклонной плоскости от 0 до  $\pi/2$ , затем от  $\pi/2$  до  $\pi$  и далее  $E(\varphi, k)$  является периодической функцией угла  $\alpha$ . Дополнительный модуль  $k'=\sin(-\alpha)$  характеризует вращение плоскости в обратном направлении.

Согласно этому представлению, в геометрических задачах приведение решения к эллиптическим интегралам второго рода есть определение поверхности, на которую исследуемая кривая проектируется в дугу окружности соответствующего радиуса.

Покажем это решением задачи спрямления синусоиды  $y=f\sin(\pi x/\ell)$ .

Записав это уравнение в виде  $y=f\sin\varphi$ ,  $x=(\ell/\pi)\varphi$ , определим дифференциал дуги

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(\ell/\pi)^2 + (f \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ &= \frac{\ell}{\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi f}{\ell}\right)^2 \cos^2 \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Так как  $\pi f/\ell=(dy/dx)_{x=0}$ , где  $\alpha$  есть угол наклона касательной к кривой в начале координат,

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\ell}{\pi} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{\ell}{\pi} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sin^2 \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

После преобразования находим:

$$dL = \frac{\ell}{\pi} \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{1 - (\sin \alpha \sin \varphi)^2} d\varphi.$$

Получено выражение аналогичное (5), которое определяет "обратное" преобразование дуги окружности, и, следовательно, проекцией синусоиды на наклонную под углом плоскость является окружность радиусом  $R=\ell/\pi$ , а сама синусоида на исходной поверхности есть растянутый эллипс.

$$\text{Длина её дуги } L = \frac{\ell}{\pi} \frac{E(\varphi, k)}{\cos \alpha}.$$

"Цилиндрическое копыто" (рис. 2) иллюстрирует это преобразование. Здесь синусоида, ось абсцисс которой искривлена по дуге окружности, ограничивает боковую поверхность.

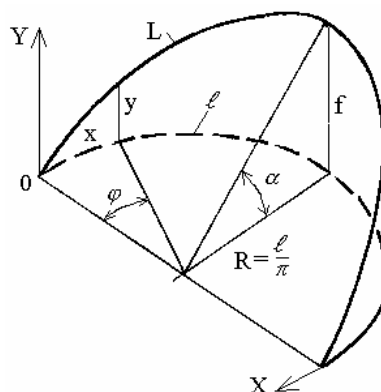


Рис. 2. Окружность → эллипс → синусоида

В представлении эллиптического интеграла второго рода коэффициентом преобразования угловой меры дуги окружности при её отображении на наклонные плоскости можно найти его приближённое выражение.

Осуществим последовательно два прямых преобразования кривой  $L$  расположенной на плоскости  $\Pi_0$  по схеме рис. 3.

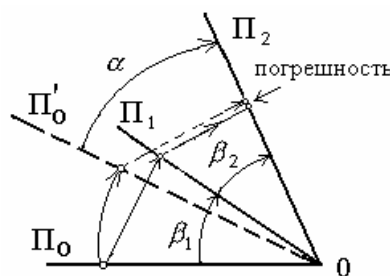


Рис. 3. Схема двойного отображения  $\Pi_0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$  и эквивалентного ему  $\Pi_0' \rightarrow \Pi_2$

При отображении  $\Pi_0 \rightarrow \Pi_1$ , согласно (2), получаем  $dL_1 = dL \sqrt{1 - \sin^2 \beta_1 \sin^2 \varphi}$ . После второго отображения  $\Pi_1 \rightarrow \Pi_2$  имеем  $dL_2 = dL_1 \sqrt{1 - \sin^2 \beta_2 \sin^2 \varphi_1}$ .

При  $\beta_1=\beta_2$  и в допущении  $\sin^2 \varphi \approx \sin^2 \varphi_1$  в результате двойного отображения находим

$$dL_2 \approx dL (1 - \sin^2 \beta \sin^2 \varphi). \quad (6)$$

Допущение соответствует равенству

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi / \cos^2 \beta \approx 1.$$

Одно отображение с плоскости  $\Pi_0'$  на  $\Pi_2$  с углом между ними  $\alpha$  эквивалентно двум последовательным:

$$dL_2 = dL \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}. \quad (7)$$

Согласно рис. 3  $\cos \alpha = \cos \beta_1 \cos \beta_2 = \cos^2 \beta$  и, соответственно, из равенств (6) и (7) следует соотношение

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - (\sin \alpha \sin \varphi)^2} &\approx 1 - (1 - \cos^2 \beta) \sin^2 \varphi = \\ &= \cos^2 \varphi + \cos \alpha \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

С подынтегральной функцией (8) в (1) получаем

$$E(\varphi, k) \approx \int_0^\varphi (\cos^2 \varphi + \cos \alpha \sin^2 \varphi) d\varphi,$$

и после интегрирования интеграл второго рода приобретает вид:

$$E(\varphi, k) \approx \varphi \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right). \quad (9)$$

Из (9) при  $\varphi = \pi/2$  следует выражение полного интеграла:

$$E(\pi/2, k) \approx \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (10)$$

К эллиптическому интегралу первого рода приходим, исследуя изменение интеграла второго рода (1) с изменением угла  $\alpha$ :

$$\frac{dE(\varphi, k)}{d\alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha [F(\varphi, k) - E(\varphi, k)]. \quad (11)$$

Из (11) следует  $F(\varphi, k) = E(\varphi, k) - \operatorname{tg} \alpha \frac{dE(\varphi, k)}{d\alpha}$

и с определением (9) получаем приближённое выражение интеграла первого рода

$$F(\varphi, k) \approx \frac{\varphi}{\cos \alpha} \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right). \quad (12)$$

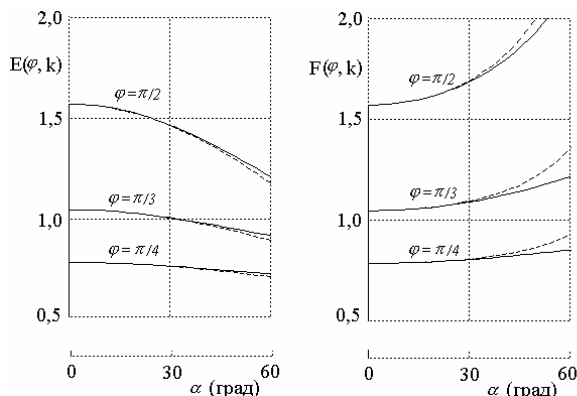


Рис. 4. --- эллиптические интегралы (1), — приближённые выражения (9) и (12)

Соответственно, полный интеграл:

$$F(\pi/2, k) \approx \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}. \quad (13)$$

Сравнительные оценки их приведены на рис. 4.

По этим оценкам можно считать, что приближённые выражения эллиптических интегралов удовлетворительны по точности в диапазоне изменения "модуля"  $k \leq 0,7$  или "модулярного угла"  $\alpha \leq 45^\circ$ . Так, для полных интегралов первого и второго рода при  $\alpha = 45^\circ$  погрешности составляют соответственно 0,73 и 2,3%. Для неполных они меньше.

Выражения полных интегралов (10) и (13) приводят к простой связи между ними:

$$F(\pi/2, k) \approx \frac{E(\pi/2, k)}{\cos \alpha}. \quad (14)$$

Обращаясь к (5), замечаем, что (14) определяет "обратное" преобразование дуги окружности. Соответственно этому, эллиптическому интегралу первого рода можно дать истолкование, аналогичное тому, которое имеет интеграл второго рода (рис. 5). Здесь интегралы первого и второго рода представлены как угловые меры дуги растянутого и сжатого эллипса.

Так, окружность радиуса при "обратном" отображении образует растянутый эллипс, длина которого

$$L \approx 4 F(\pi/2, k) R. \quad (15)$$

Здесь полный интеграл первого рода есть угловая мера четверти длины растянутого эллипса.

Очевидно, это есть приближенное представление интеграла первого рода, поскольку оно следует из приближённого выражения интеграла второго рода, тогда как для интеграла второго рода оно является безукоризненным.

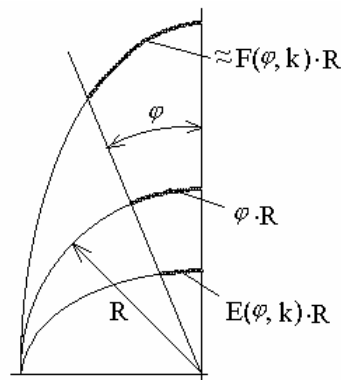


Рис. 5. Графическое представление эллиптических интегралов

Заметим, что приближённое выражение полного интеграла (10) можно также получить, решая задачу деформирования окружности радиусом  $r$  в эллипс.

Так, согласно равенству длин этих кривых линий,

$$L = 2\pi r = 4E(\pi/2, k) R. \quad (16)$$

Здесь  $R$  — радиус некоторой окружности, "прямое" отображение которой на наклонную под углом  $\alpha$  плоскость образует на ней эллипс, главные полуоси которого равны  $a=R$ ,  $b=R \cos \alpha$ .

Обозначим отношение диаметра окружности к суммарной длине полуосей эллипса:

$$v = \frac{2r}{a+b} = \frac{2r}{R(1+\cos \alpha)} = \frac{r}{R \cos^2(\alpha/2)}. \quad (17)$$

Из совокупности (11) и (12) находим:

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = v \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (18)$$

Формула (10) следует из (18) при  $v=1$  и, соответственно можно заключить, что при деформировании окружности на плоскости сумма длин главных полуосей образуемого эллипса не изменяется и равна диаметру окружности, как и при отображении её на плоскость с наклоном  $\alpha \leq 45^\circ$ .

Определение интеграла (13) и его геометрическое представление допускает интерпретируемость изменения периода колебаний математического маятника длиной  $\ell$  с изменением угла отклонения его от вертикали на угол  $\theta$ . При замене эллиптического интеграла его приближённым выражением (13) период колебаний маятника [3] равен:

$$T = \sqrt{\ell/g} 4F(\pi/2, k) \approx \sqrt{\ell/g} \frac{2\pi}{1 - \text{tg}^2(\theta/4)}. \quad (19)$$

Выражение (15) совпадает с (19) и, если ассоциировать период колебаний со временем прохождения маятника по замкнутой кривой, то это движение происходит по растянутому эллипсу, полученному из окружности радиусом  $R = \sqrt{\ell/g}$ . Погрешность в определении периода колебаний по (19) достигает 2,3 % только при отклонении маятника от вертикали на  $90^\circ$ .

Можно заключить, что введённое геометрическое представление нормальных эллиптических интегралов первого и второго рода позволяет их интерпретировать и определить элементарными выражениями с оценкой допущений. Оно оказалось результативным при определении параметров эластичности продольного изгиба стержня [4].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – С. 751–761.
2. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции (формулы, графики, таблицы). – М.: Наука, 1968. – С. 103–108.
3. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика: Т. 1. Механика. – М.: Наука, 1988. – С. 41.
4. Анфилофьев А.В. Стрела прогиба и сближение концов стержня в продольном изгибе // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42. – № 2. – С. 188–193.

УДК 538

## ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ В СТРУКТУРНОНЕУСТОЙЧИВОМ КРИСТАЛЛЕ

Е.Е. Слядников

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН. г. Томск  
Томский научный центр СО РАН  
E-mail: opi@hq.tsc.ru

*Теоретически показано, что в окрестности структурного перехода мартенситного типа внешнее воздействие уменьшает площадь горба, разделяющего минимумы двухъямного потенциала атома. Это приводит к возникновению эффекта квантового туннелирования и уменьшению асимметрии двухъямного потенциала, что открывает возможность переходов из узлов исходной решетки в узлы конечной решетки (конфигурационных смещений) и возникновения предпереходного состояния.*

### 1. Введение

Классические континуальные модели кристаллических сред описывают далеко не все явления, происходящие в твердых телах при изменении внешнего воздействия [1, 2]. К этим явлениям в первую очередь относятся эффекты нелинейной упругости, неупругости, сдвиговой неустойчивости, предпереходные состояния, структурные превращения мартенситного типа. Причина этого в том, что в теории упругости сплошной среды [3] постулируется неизменность ближайшего окружения атома в процессе деформирования, структура решетки и силовые связи при упругой деформации не перестраиваются.

Поэтому для описания подобных явлений необходимо формулировать новые микроскопические модели кристаллов, учитывающие изменения кристаллической структуры реальных тел и возбуждение дополнительных степеней свободы атомной решетки [2, 4].

В этой работе построена микроскопическая модель кристалла, испытывающего структурный переход мартенситного типа, в которой атомная решетка рассматривается как двухуровневая квантовая система (квантовая система псевдоспинов) [4]. В рамках этой модели обосновывается, что средний одночастичный потенциальный рельеф атома имеет двухъямный характер, а сами атомы решетки структурнонеустойчивого кристалла подчиняются законам квантовой механики. К выбору модельного одночастичного потенциального рельефа атома в виде двухъямного можно прийти из анализа связи сдвиговой устойчивости кристалла и ближнего порядка смещений атомов решетки.

Кристаллогеометрические характеристики твердого тела определяются состоянием электрон-атомной системы, в частности, концентрацией, локальной конфигурацией электронов, наличием эффектов ангармонизма в потенциале межатомного