

Проф. Г. В. ТРАПЕЗНИКОВ.

О НАПРЯЖЕНИЯХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ.



Томск — 1929.

О напряжениях при растяжении.

I. Остаточные деформации-шейки.

Настоящая работа была задумана мною зимой 1924—25 г., когда и были произведены некоторые предварительные опыты и выполнена зимою следующего года в Механической Лаборатории СТИ.

Мыслью, натолкнувшей меня на необходимость такой работы, было сомнение в том, что цилиндрический или, общее, брусок постоянного поперечного сечения, при упругой деформации, сохраняет ту же форму контура осевого сечения, при соответственном, конечно, изменении ее линейных размеров, какая была до деформации. Иначе говоря, у меня возник вопрос о том, одинаково ли изменяются поперечные размеры упруго—растягиваемого бруска в различных поперечных сечениях.

Относительная поперечная деформация, выраженная через относительную продольную и коэффициент Пуассона, пишется так:

$$\epsilon = m i,$$

причем считается, что во всех сечениях нормальные напряжения распределяются совершенно равномерно, если, конечно, растягивающая сила приложена строго по оси бруска.

Отсюда вытекает условие одинаковости, для всех сечений, поперечной деформации, а, значит, и коэффициента Пуассона. Но повседневный лабораторный опыт и те цифровые данные, которые мы имеем для значения коэффициента Пуассона у различных экспериментаторов, указывают на крайнюю изменчивость его, даже для одного и того же материала. Для большой наглядности привожу таблицу значений коэффициента для некоторых металлов.

Металл	m	Экспериментатор
Сталь закаленная	0.294	Кирхгоф
Сталь отожженная	0.253	Кирхгоф
” ”	0.304	Окатов
” ”	0.393	Юинг
Железо	0.243	Юинг
”	0.310	Бах
Латунь	0.226	Юинг
”	0.469	Окатов
Медь красная	0.250	Войт
” ”	0.348	Бах
Свинец	0.375	Войт
”	0.456	Окатов

Такие разноречивые данные указывают на то, что, несмотря на тщательно и точно поставленный опыт, каждый из экспериментаторов имел какие то свои условия опыта. Оставив в стороне вопрос о чистоте металлов—элементов и те же ошибки, которые могли иметь место при употреблении различных измерительных приборов (для этого мы имеем слишком большое расхождение в значениях m , для одного и того же материала), мы должны признать, что причина такого расхождения в цифрах для m находится в распределении напряжений в испытуемом бруске.

При обычных лабораторных испытаниях металлических образцов на разрыв, на них предварительно наносится ряд тонких поперечных рисок, через 1 ст. На рис. 1 такой образец с рисками, зачерненными

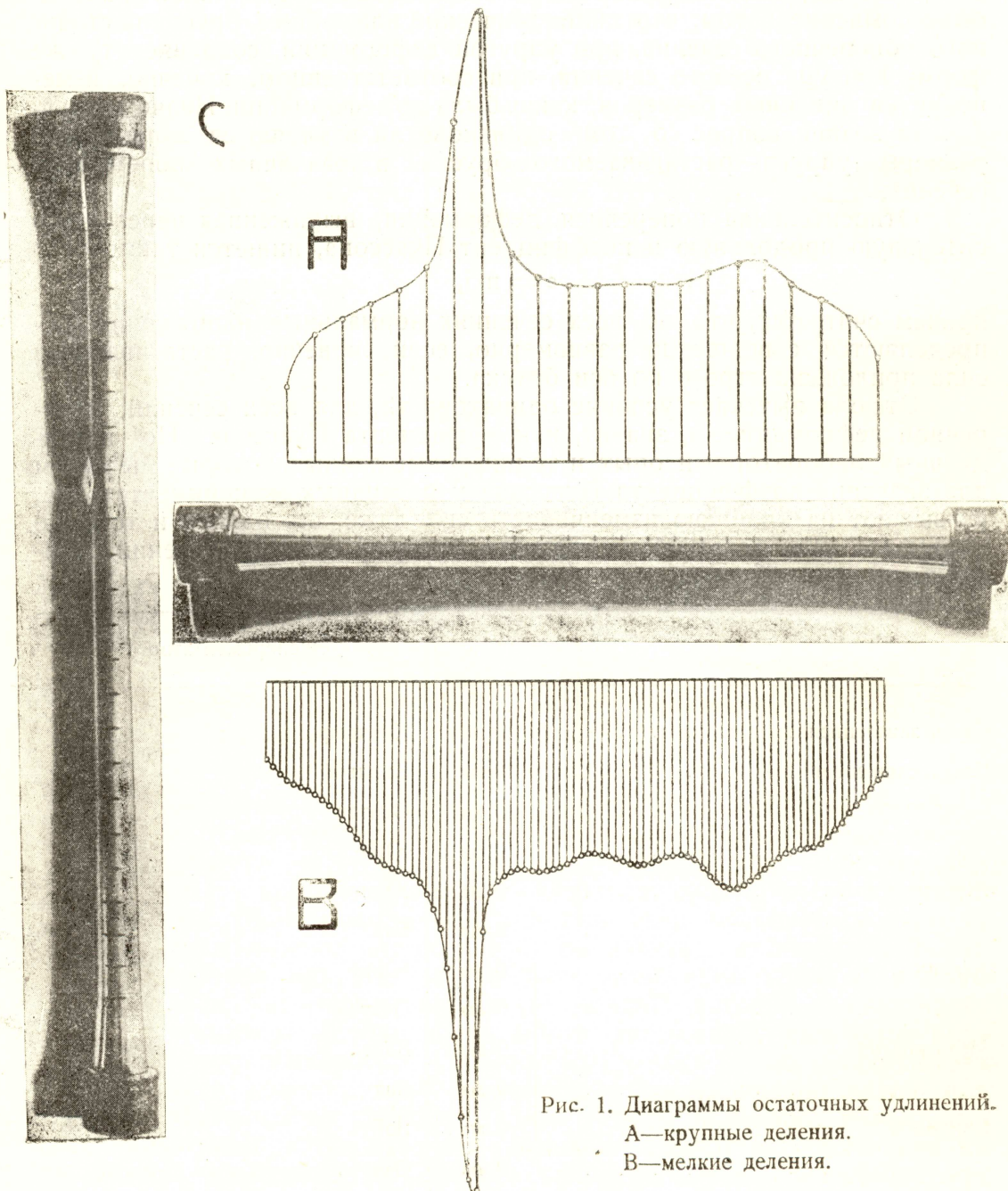


Рис. 1. Диаграммы остаточных удлинений.
А—крупные деления.
В—мелкие деления.

тушью, для лучшего рассмотрения на снимке, показан между диаграммами А и В. После разрыва образца, находится удлинение каждого сантиметрового участка и выстраивается, для них, диаграмма относительных удлинений. Диаграмма строится таким образом, что ордината, выражающая удлинение каждого сантиметра, откладывается из середины его, на неизменной деформацией длине образца. Одна из таких диаграмм приведена на рис. 1, под буквой А. Она построена для образца, растянутого до появления шейки; снимок образца обозначен—С. На этой диаграмме шейке соответствует наибольшая ордината. На диаграмме, кроме одного резко выраженного максимума, обычно, имеются и другие, значительно меньших размеров (см. на диаграмме А правую ее часть). Известная угловатость кривой объясняется относительной крупностью таких делений (нормальный диаметр образца—20 мм). На этом же растянутом образце С, до его вытяжки, были нанесены с противоположной сантиметровым участкам стороне риски через 2,5 мм. Нижняя диаграмма—В построена для этих, более коротких участков. Кроме, гораздо большей плавности, по сравнению

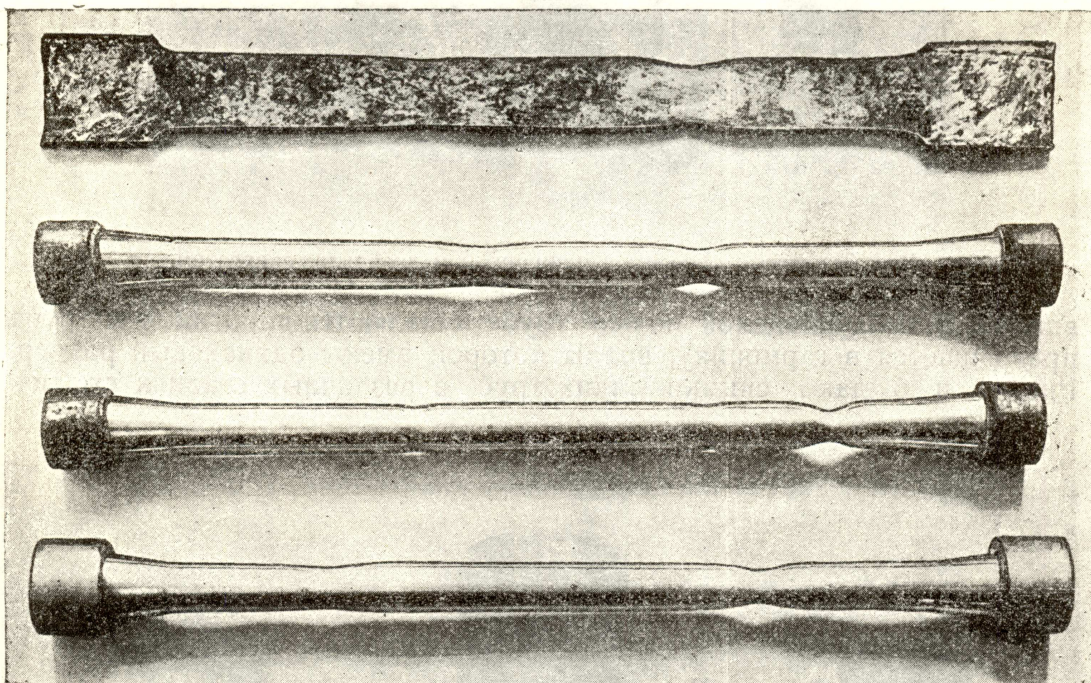


Рис. 2. Растянутые образцы с двойными и тройными шейками.

с кривой А, мы видим здесь вполне определенно и резко выявившиеся шейки, распределенные по всей длине образца; вместе с максимальной—их семь. Это обстоятельство указывает на то, что по длине растянутого за пределом упругости материала образца устанавливается не одна, а несколько шеек, при чем разрыв происходит по одной из них. В большинстве случаев все шейки, кроме главной (максимальной), малы и не могут быть легко заметны на глаз, при непосредственном рассмотрении образца. Правда, мы можем увидеть все шейки на нем, если установим образец так, чтобы какой нибудь точечный источник света (лампа, свеча), глаз и ось образца образовали плоскость и чтобы луч света, падающий на образующую бруска перед отражением в глаз, давал „бреющий угол“ с нею. Довольно часто, некоторые шейки получаются настолько большими, что становятся заметными, даже при поверхностном рассмотрении. На рис. 2 приводится снимок нескольких образцов, обладающих двойными и тройными шейками.

При сжатии мы также наблюдаем появление не одного, а двух, иногда трех, утолщений в цилиндрических образцах, в том случае, если отношение длины к диаметру не особенно мало. Рис. 3 представляет из себя снимок цилиндров из железа, красной меди и свинца, сжатых до появления резко заметных чередующихся утолщений и

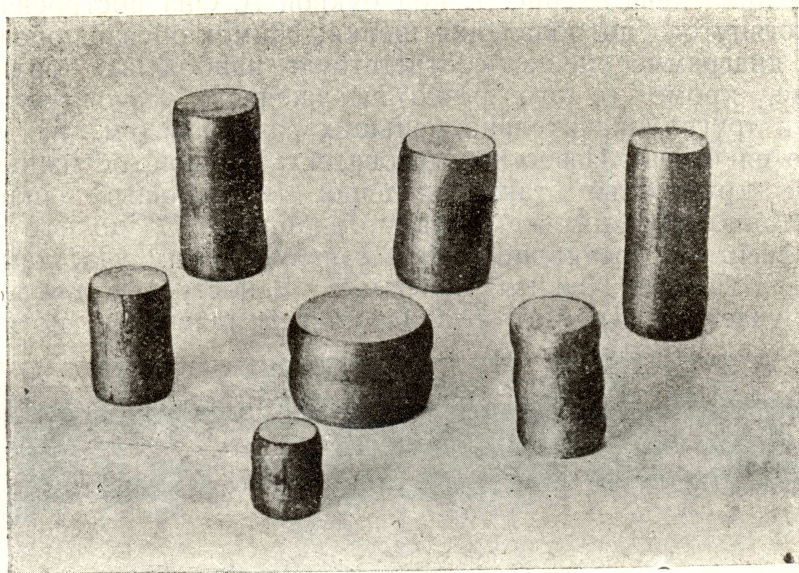


Рис. 3. Сжатые образцы с одинарным и двойным перехватом.

впадин. В сплющиваемой по оси трубе появляются воротники и труба превращается в гармонику, волны которой имеют одинаковый размер. Рис. 4 и 5 дают снимки таких труб в различных стадиях сжатия.



Рис. 4. Сжатые трубы в различных стадиях сжатия.

У некоторых труб, имеющих относительно тонкие стенки, эти волны не кольцевые, а образуют гармонику подобно меху фотоаппарата, т. е. окружность превращается в правильный многоугольник, с четным числом сторон, причем половина последних соответствует впадинам и половина—выпучинам.

Нормальный цилиндрический круглый образец на растяжение имеет отношение длины к диаметру—10; проследить, поэтому, появление многих шеек, при значительной близости опорных головок друг от друга, довольно затруднительно, ввиду сильного задерживающего действия головок на появление поперечных деформаций. Необходимо иметь образцы, с отношением длины к диаметру, гораздо большим.

Такие длинные образцы, в виде простых круглых стержней или прутьев, с головками и без них были изготовлены мною из различных металлов. Красная медь, железо, сталь, мягкая латунь и алюминий—были взяты из круглого прокатного материала; олово и свинец—в литье и никкель в виде толстой реостатной проволоки.

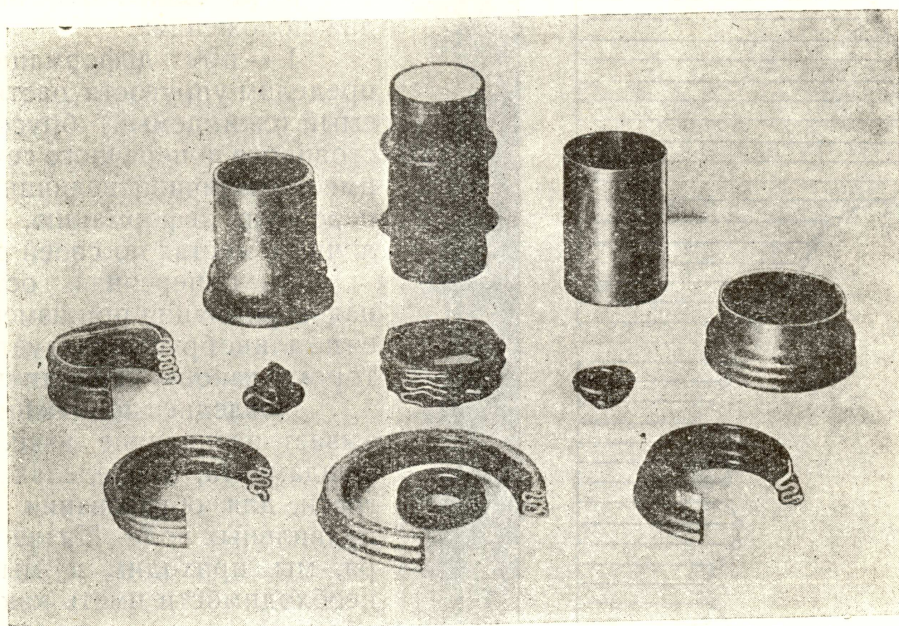


Рис. 5. Сжатые тонкостенные трубы.

Центральная труба на заднем плане была до сжатия заполнена цементом.

На образцах, до растяжения, наносились риски на компараторе фирмы „Societe Genevoise pour la construction d'Instruments de Physique“, через целое число миллиметров, с точностью до 0.001 mm. Длина промежутка у рисков бралась с таким расчетом, чтобы она находилась в пределах—0.1 d.

По растяжении образца до того момента, когда основная шейка, дающая, при дальнейшем растяжении, место разрыва, уже резко намечалась и нагрузка машины начинала падать, он разгружался. На компараторе, при помощи микроскопа, определялась длина каждого промежутка, с тою же точностью, как и при нанесении рисков. Рис. 6 дает представление об образце и построенной для него диаграмме удлинений отдельных участков. Здесь мы видим чрезвычайно правильное чередование шеек, которыми заполнена вся длина образца. Определение длины волн для всех испытанных металлов с различными диаметрами образцов (от 6 mm до 65 mm), дает постоянное отноше-

ние между длиной волны — L и диаметром — d : как среднее из наблюдений над 73 образцами:

$$\frac{L}{d} = 1.59.$$

Такая правильность и однообразие (монотонность) в чередовании гребней и впадин на образующей цилиндрического бруска при его растяжении, без сомнения должна иметь место и при сжатии, но не может быть проверена для сплошных длинных цилиндров, так как невозможно сжать достаточно длинный брусок, без искривления его оси. Постоянная величина отношения $L : d$ указывает на неслучайный характер явления образования волн.

Устанавливаются опытом два положения:

1 — при деформации за пределом упругости растягиваемый (сжимаемый) брусок постоянного поперечного сечения, имеет различной величины поперечную деформацию, в различных местах по своей длине.

2 — поперечная остаточная деформация при изменении ее по длине бруска, следует некоторому закону периодичности.

Последнее положение указывает на наличие известного фундамента, в пределах упругости, для образования таких правильных волн. Иначе говоря, мы приходим к мысли о необходимости иметь какое-то, обязательное для круглого цилиндрического бруска, распределение напряжений, которое должно дать периодические упругие шейки. Если опыт подтвердит эти выводы, то следует признать, что цилиндрическая форма растянутого или сжатого бруска — не является формой устойчивой.

Такой окончательный вывод далек от парадоксальности. Мы знаем, в теории упругости, 2 простейших задачи, где, кажущаяся на первый взгляд, равно-

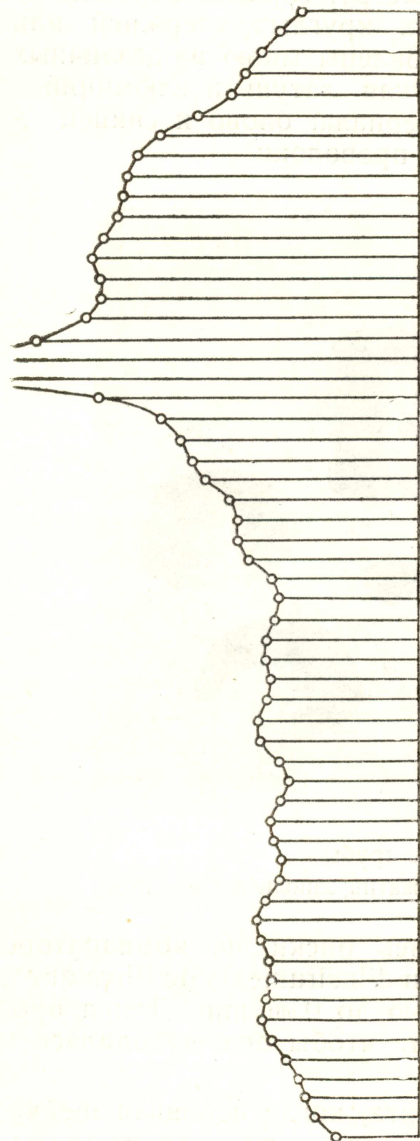


Рис. 6. Диаграмма остаточных удлинений.
(Растянута по оси)

весно — устойчивая форма, при анализе задач и при проверке их на опыте, таковой не будет. Рассмотрение явления продольного изгиба и кручения длинного вала дает, за известным пределом силы и крутящего момента, для устойчивой формы оси брусков не прямые, которые, как

будто бы следовало ожидать, а кривые, соответственно плоскую и пространственную.

С другой стороны мы имеем некоторые намеки на необходимость появления правильно—чередующихся упругих шеек в работе Рейтö: „Die innere Reibung der Festen Körper“ (1897).

Схема деформации растяжения (сжатия), по Рейтö, такова: (рис. 7). На круглый цилиндрический брусок, долевое сечение которого показано на рисунке, действует растягивающая сила, равномерно распределенная по концевым сечениям ab и $a'b'$ таким образом, что

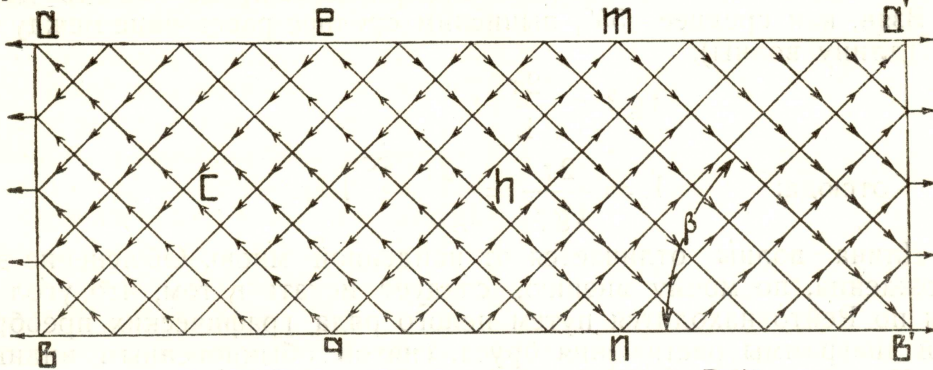


Рис. 7. Распределение внутренних сил по Рейтö.

на каждую молекулу этих сечений приходится одинаковая элементарная сила, Рейтö делает предположение, что молекулы могут передавать действие сил только по линиям, соединяющим центры соседних молекул. Поэтому каждая торцевая элементарная сила должна быть разложена на две составляющие по линии центров. Ввиду правильности структурной сетки, линии центров или линии действия сил образуют также правильную сетку параллельных линий, по которым происходит передача силы от молекулы к молекуле: $a-g$, $g-m$, $b-e$, $e-p$ и т. д. Эти линии образуют, с осью бруска некоторый постоянный, для данного материала, угол, который Рейтö называет „углом действия“ и обозначает через β . В такой силовой сетке, молекулы, расположенные в конических участках бруска: $a-c-b$, $c-e-h-g$ и пр., подвергаются действию одинаковых элементарных сил, симметрично расположенных относительно оси бруска и, поэтому, равнодействующие этих сил будут направлены по оси же. Иначе говоря эти молекулы будут находиться в зоне чистого равномерного растяжения. В кольцевых участках треугольного сечения, как напр.: $c-a-e-c-g-b-c$, действуют только одни составляющие, в направлении угла действия.

Результатом такого „косого“ действия элементарных сил должно явиться стремление молекул этих участков приблизиться к оси бруска.

На рис. 8 штриховкой показаны зоны чистого растяжения долевой штриховкой и зоны „косого“—поперечной. Оставляя в стороне

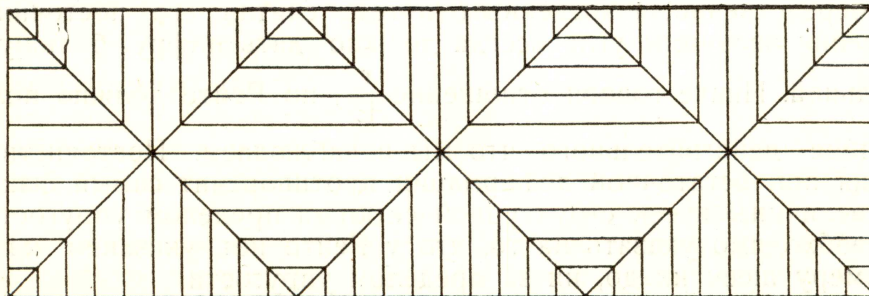


Рис. 8. Разделение тела деформированного бруска на зоны долевой и поперечной деформации (по Рейтö).

вопрос о делении Рейто всех материалов на группы и подгруппы, по закону связи между коэффициентом междучастичного трения и силой сцепления частиц, мы приходим к выводу об обязательности появления правильно—чередующихся шеек, в пределах упругости.

Угол действия находится Рейто опытным путем, как результат обработки диаграмм, полученных при испытании брусков на растяжение. По Рейто, он изменяется в довольно узких пределах, от 48° до 61° , и находится в зависимости от рода металла. Для большинства металлов он остается почти неизменен, оставаясь в пределах от 53° до 56°_{5} .

Взяв, как среднее— 55° , вычислим среднее расстояние между шейками (длину волны).

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2r}{L}$$

отсюда:
$$L = \frac{2r}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{2r}{\operatorname{tg} 55^\circ} = 1.4r.$$

Длина волны отличается от найденной мною. Объяснение этого расхождения, по моему мнению, следует искать в том, что угол действия по Рейто находится путем целого ряда графических преобразований диаграммы растяжения бруса, снятой обыкновенным индикатором. Малый масштаб диаграммы и обязательные погрешности при графических построениях безусловно должны дать большую ошибку, нежели простой, непосредственный промер длины шеек. Кроме того, что гораздо важнее, Рейто бездоказательно принимает постоянство угла действия от момента перехода материала за предел упругости вплоть до его разрушения. Рис. 9 дает представление о том, как Рейто понимает передачу элементарных сил молекулами друг другу, при образовавшейся шейке. Как видно из рисунка, угол действия остается

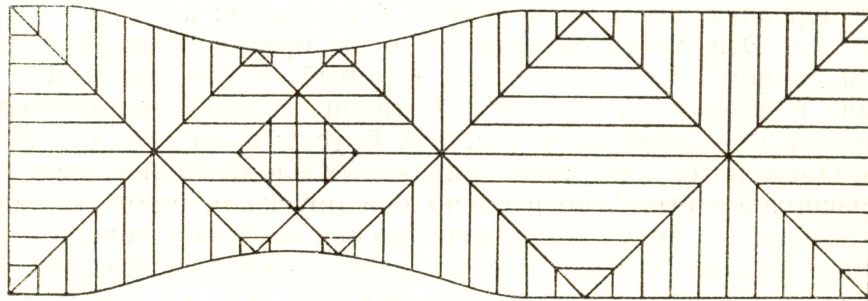


Рис. 9. Постоянство угла действия по Rejtó.

неизменным как в мало,—так и в сильно—деформированной части бруска. При этом должны образоваться шейки в шейках же, т. е. мы будем наблюдать укорочение длины волны у места наибольшей деформации. Опыт этого не дает. Т. к. Рейто определяет угол действия не непосредственно, а косвенным путем, считая его постоянным, то вычисления величины угла всегда должно дать цифру большую действительной. Иначе говоря отношение $\frac{r}{L}$, по Рейто должно получить-

ся меньше действительного, что мы и наблюдаем. Постоянству угла действия при остаточной деформации противоречит самый факт изменения величины ячеек структурной сетки за пределом упругости.

Необходимо указать на то, что у Рейто нет указаний на опыты по промеру шеек ни до, ни за пределом упругости.

Придя к выводу о необходимости иметь представление о том, появляются ли правильно—чередующиеся волны шеек до предела

упругости и какова амплитуда таких волн, я определил величину минимальной деформации, с которой, при постановке опытов по примеру шеек, пришлось бы иметь дело.

II. Определение упругих деформаций.

Для определения упругих деформаций поперечников испытываемых образцов, был необходим прибор, который давал бы возможность измерить амплитуду колебания размера поперечника, в различных сечениях, если бы таковое имели место в пределах упругости материала. Примем предел напряжения, за который мы не будем переходить в опыте, в две трети от предела упругости данного металла, чтобы избежать явления упругого последствия.

Абсолютная поперечная деформация диаметра выразится так:

$$\varepsilon = m \frac{2k}{3E} d$$

где k — предел упругости
и E — Модуль Юнга.

Пусть амплитуда волн будет составлять n — ую часть среднего изменения диаметра.

$$\Delta \varepsilon = \frac{\varepsilon}{n};$$

тогда

$$\Delta \varepsilon = \frac{2mkd}{3En}$$

Поставим требование точности измерения этой величины до 5%. Получим минимальный отсчет деформации:

$$\Delta \Delta \varepsilon = \frac{\Delta \varepsilon}{20} = \frac{mkd}{30En}$$

Для того чтобы иметь представление о минимальной величине деформации, которая должна быть еще учтена нашим прибором, мы подставим цифры. Берем железный образец, диаметра: $d = 30$ mm (как среднего): тогда при

$$m = \frac{1}{3}$$

$$E = 20000 \text{ kg/mm}^2$$

$$k = 20 \text{ kg/mm}^2,$$

имеем

$$\Delta \Delta \varepsilon = \frac{1}{3000n} \text{ mm}$$

Если амплитуда волн будет составлять только 5% от средней деформация диаметра, то: ($n = 20$)

$$\Delta \Delta \varepsilon = \frac{1}{60000} \text{ mm}$$

Такую долю mm прибор должен был отметить. В Механической Лаборатории СТИ прибора такой чувствительности не имелось и, поэтому, мне пришлось сконструировать и сделать прибор, дающий точность отсчета не меньшую, чем то требовали условия опыта. (Описание прибора и работы с ним см. в Изв СТИ 1928 Т. 49 в. 2).

Для определения упругих деформаций брались бруски круглого сечения, с размерами диаметра от 15 до 65 mm и длиной от 400 до

1500 mm. Нагрузка образцов велась: меньших—на прессе Амслера на колоннах и больших—на 100t машине Ольсена. Рис. 10 показывает установку прибора во время опыта.

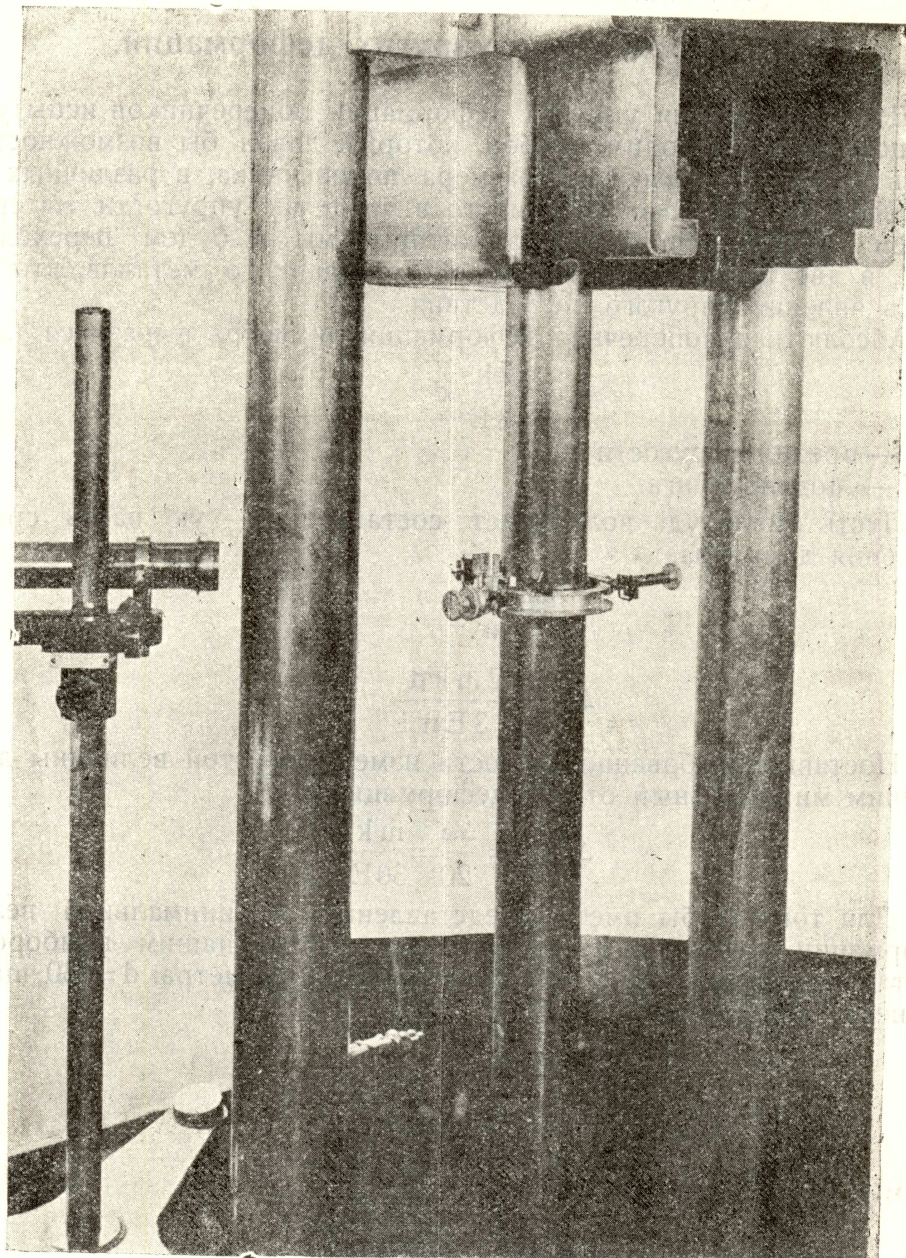


Рис. 10. Установка приборов при определении упругих деформаций.

Ход работы заключался в следующем. На образце наносились, как и прежде, поперечные риски, через целое число миллиметров, с длиной промежутка между ними, примерно, в десятую долю диаметра. Образец устанавливался в испытательную машину и, посредине 1-го крайнего промежутка между рисками закреплялся прибор для определения поперечных деформаций.

Кроме этого прибора, на том же участке, устанавливался прибор Мартенса, с короткими шинами для одновременного определения продольных деформаций; последнее было необходимо, так как было основание предполагать, что если будут упругие шейки вдоль оси

образца, то следует ожидать, что и продольные деформации отдельных участков будут различны.

Нагрузка, до ее максимума, подавалась в 12 равных интервалах, причем 2 первых из них проходились без отсчета на приборах, для того, чтобы можно было гарантировать приобретение всей системой установки (прибор-образец-машина) определенного режима работы. На остальных десяти интервалах делались отсчеты (11 отсчетов) и выстраивались диаграммы хода деформаций: $P-\lambda$ и $P-\varepsilon$, чтобы иметь уверенность в линейной зависимости между силой и деформациями, а значит в правильности установки и отсчетов.

За отчетные цифры для данного участка брались средние арифметические из 10 разностей, полученных для λ и ε , при последовательно возрастающей нагрузке. По разгрузке машины, приборы устанавливались на соседний участок и вся установка „отдыхала“ не менее получаса для того, чтобы выравнять температурные разности ее

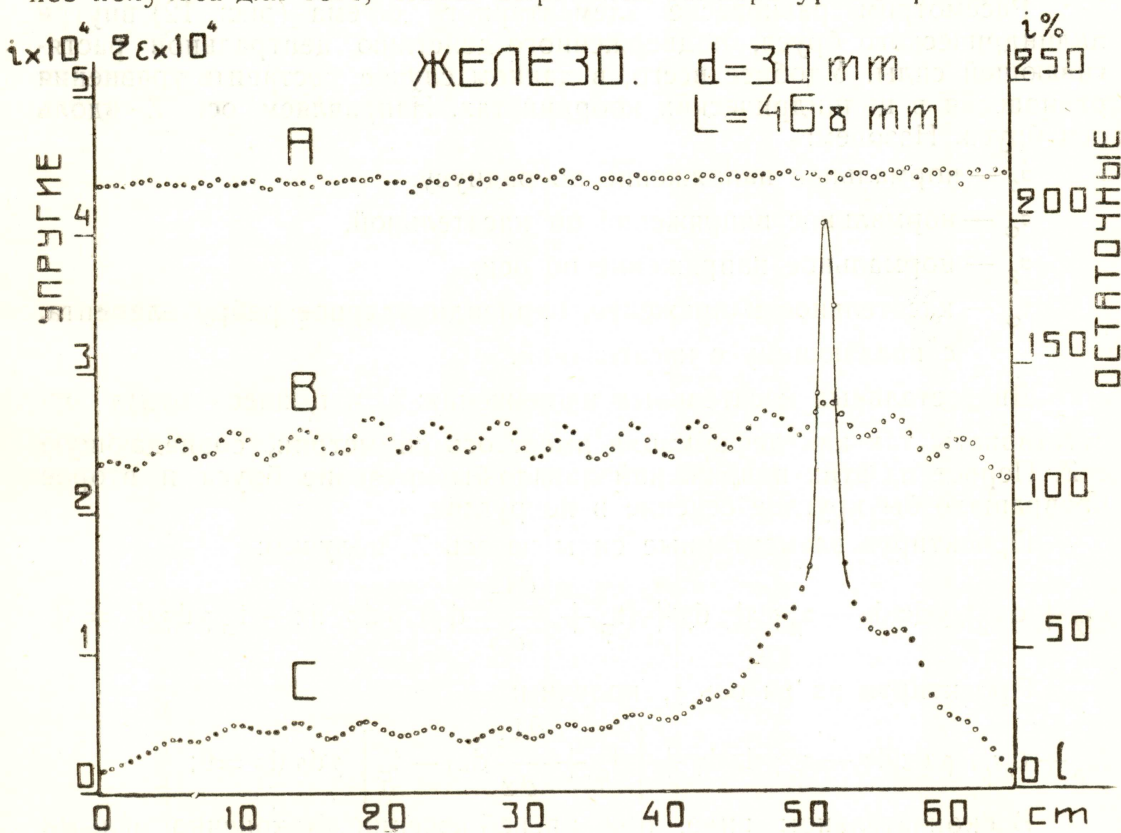


Рис. 11. Комплексная диаграмма деформаций железного бруска.

Ввиду малого масштаба чертежа точки нанесены через одну.

частей; затем опыт повторялся. По полученным средним разностям отсчетов по шкалам, выстраивались две диаграммы: поперечных сжатий и продольных удлинений, точно таким же образом, как ранее выстраивалась диаграмма остаточных удлинений.

После измерения продольных и поперечных упругих деформаций во всех участках образца, последний растягивался, уже без приборов, почти до разрыва, т. е. до образования видимой на глаз шейки. Для остаточных удлинений промежутков выстраивалась диаграмма на прежней оси.

Первый же опыт дал картину, которая подтвердила сделанное мною предположение о наличии упругих волн на образующей бруска. С другой стороны получился результат, который оказался для меня неожиданным. а именно: упругие удлинения, во всех участках по дли-

не образца было совершенно одинаковы. На рис. 11 мы имеем одну из диаграмм, построенную для комплектного опыта с железным образцом. Волнообразная линия С представляет своими ординатами остаточные удлинения. Линия В—упругие изменения диаметра. Линия А—упругие изменения длины участка. Полное совпадение максимумов и минимумов на диаграммах С и В прекрасно видно, равно как и постоянство по длине бруска, долевой упругой деформации.

Опыт, таким образом, оправдал предположения о закономерности распределения шеек, с одной стороны и, с другой, выявил новую данность, новый факт, в виде постоянства долевой деформации. Как то, так и другое потребовало теоретического разбора явления и его обоснования.

III. Теоретические обоснования.

Рассмотрим равновесие элементарного объема (рис. 12) внутри цилиндрического бруса, подверженного действию центральной растягивающей силы. Удобнее всего, в данном случае, составить уравнения равновесия в цилиндрических координатах. Направляем ось Z вдоль оси бруса. Назовем:

- σ_ρ — нормальное напряжение по радиусу.
- σ_φ — нормальное напряжение по касательной,
- σ_z — нормальное напряжение по оси,
- t_φ — касательное напряжение, перпендикулярное ребру элемента, совпадающему с касательной.

Два остальных касательных напряжения: t_ρ и t_z здесь будут отсутствовать, так как деформация имеет ось симметрии, совпадающую с Z. Первое из этих напряжений давало бы кручение бруса и второе превращало бы круглое сечение в некруглое.

Проектируя элементарные силы на ось Z, получим:

$$(\sigma_z + d\sigma_z) \rho d\varphi d\rho - \sigma_z \rho d\varphi d\rho + \left(t_\varphi + \frac{\partial t_\varphi}{\partial \rho} d\rho\right) \rho d\varphi dz - t_\varphi \rho d\varphi dz = 0;$$

Проектируя их на ось ρ , получим:

$$(\sigma_\rho + d\sigma_\rho) \rho dz d\varphi - \sigma_\rho \rho dz d\varphi + \left[\left(t_\varphi + \frac{\partial t_\varphi}{\partial z} dz\right) - t_\varphi\right] \rho d\rho d\varphi = 0;$$

В окончательном виде, при пренебрежении бесконечно малыми второго порядка, уравнения представляется так:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial t_\varphi}{\partial z} + \frac{\sigma_z - \sigma_\rho}{\rho} = 0 \dots \dots \dots (*)$$

$$\frac{\partial t_\varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{t_\varphi}{\rho} = 0 \dots \dots \dots (**)$$

Крме этих двух уравнений равновесия, должны быть выполнены, при симметричной деформации, еще два условия на поверхности:

$$p_\rho = \sigma_\rho \cos(\rho v) + t_\varphi \cos(z v)$$

$$p_z = t_\varphi \cos(\rho v) + \sigma_z \cos(z v),$$

где v — направление нормали к поверхности в данной точке.

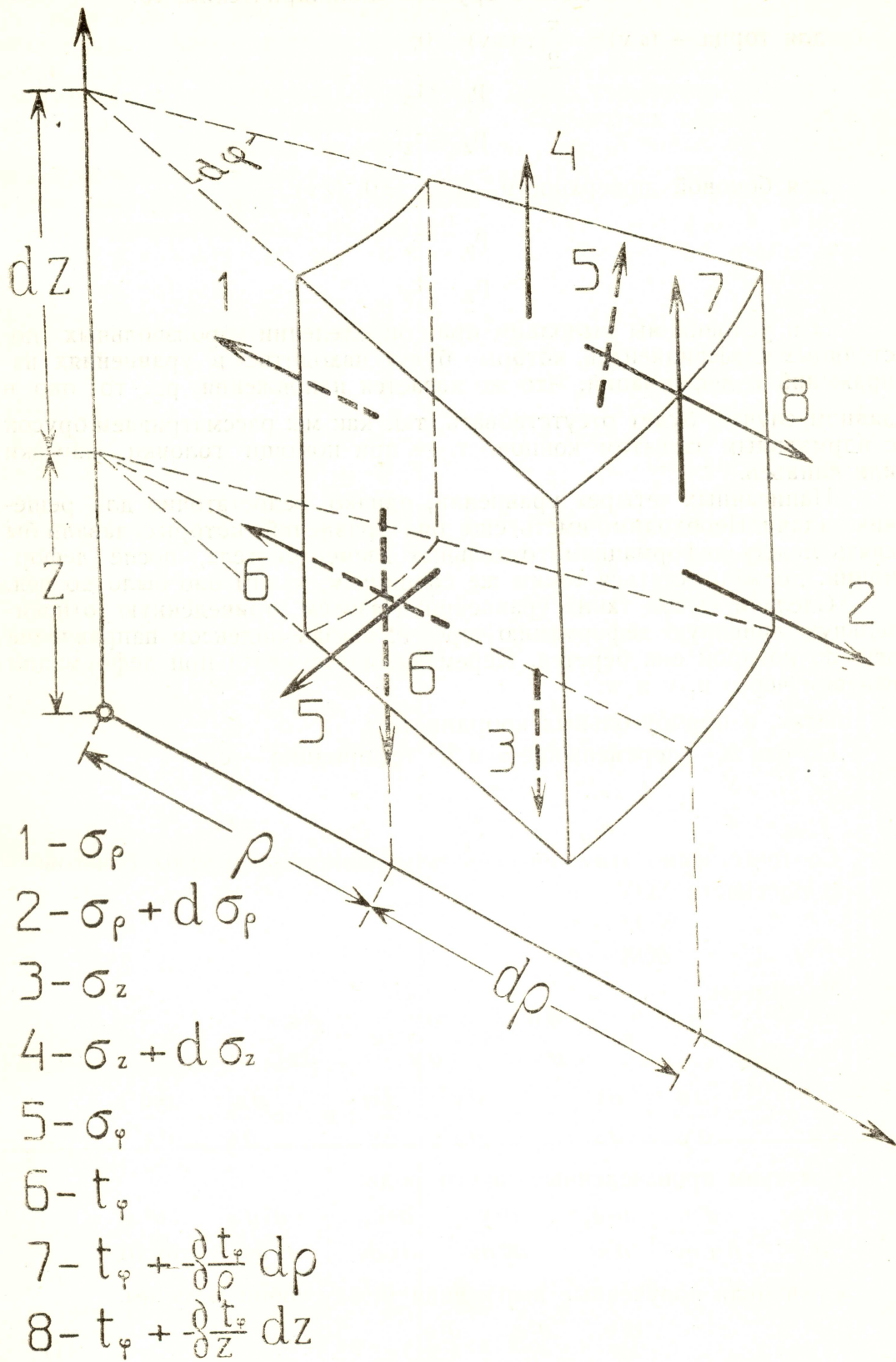


Рис. 12. Распределение напряжений в элементе растянутого цилиндрического бруса.

Но так мы имеем дело с бруском цилиндрическим, то:

$$\text{для торца — } (\rho v) = \frac{\pi}{2}, (z v) = 0;$$

$$P_\rho = t_\varphi$$

$$P_z = \sigma_z$$

$$\text{для боковой поверхности — } (\rho v) = 0; (z v) = \frac{\pi}{2}$$

$$P_\rho = \sigma_\rho$$

$$P_z = t_\varphi$$

Эти условия мы выполним при определении произвольных постоянных коэффициентов, которые будут находиться в уравнениях напряжений и деформаций. Что же касается напряжения p_φ , то оно в данном случае, будет отсутствовать, так как мы рассматриваем брусок с нормальным захватом концов, т. е. при помощи головки, нарезки или клиньев.

Написанных четырех уравнений, однако, недостаточно для решения задачи. Необходимо иметь еще ряд уравнений, которые давали бы связь между деформациями отдельных элементов тела, после деформации, должно остаться таким же сплошным, каким оно было до нея.

Сделаем вывод таких уравнений. Назовем приведенную относительно линейную деформацию через e , указав индексом направление оси, по которой она берется. Перемещения элемента при деформации назовем через u , v и w .

Итак, в прямоугольных координатах:

По оси X — перемещение — u и деформация — e_x

” ” Y ” — v ” — e_y

” ” Z ” — w ” — e_z

Соответственно этим обозначениям напишутся и углы сдвигов:

В плоскости XOY — e_{xy}

” YOZ — e_{yz}

” ZOX — e_{zx}

Мы имеем:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}; e_y = \frac{\partial v}{\partial y}; e_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z};$$

Составим произведенные такого рода:

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}; \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Сравнивая полученные выражения между собой получим:

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \dots \dots \dots (1)$$

Путем круговой перестановки букв, мы будем иметь еще два таких уравнения.

Затем составим производные такого рода:

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}; \quad \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}$$

Сопоставляя их, получим:

$$2 \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[- \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right] \dots \dots \dots (2)$$

Круговая перестановка букв и здесь дает еще два уравнения, того же типа.

Теперь мы имеем 6 дополнительных уравнений для решения задачи. Для того, чтобы эти уравнения можно было решать совместно с ранее полученными, необходимо, во первых, выразить в них деформации через напряжения, а, во вторых, заменить Декартовы координаты—цилиндрическими. Для замены деформаций напряжениями воспользуемся уравнениями Коши:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial z} + \frac{\partial t_z}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial x} + \frac{\partial t_x}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots b)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial t_x}{\partial y} + \frac{\partial t_y}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots c)$$

Приведенная деформация, выраженная через действительные напряжения, будет:

$$e_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - m \sigma_y - m \sigma_z)$$

Введем, для удобства преобразований, такую новую величину:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \Theta;$$

тогда:

$$e_x = \frac{1}{E} [(1 + m) \sigma_x - m \Theta]$$

$$e_y = \frac{1}{E} [(1 + m) \sigma_y - m \Theta]$$

$$e_{zy} = \frac{2(1 + m)}{E} t_z$$

Подставка в уравнение (1) дает:

$$(1+m) \left[\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right] - m \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right] = 2(1+m) \frac{\partial^2 t_z}{\partial x \partial y} \quad (A)$$

Определим из уравнений (a) и (b):

$$\frac{\partial t_z}{\partial x} = - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial t_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial t_z}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial t_y}{\partial z}$$

Дифференцируя первое по y второе по x и складывая полученные выражения, будем иметь:

$$2 \frac{\partial^2 t_z}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial t_x}{\partial y} + \frac{\partial t_y}{\partial x} \right]$$

Имея из уравнения (c):

$$\frac{\partial t_x}{\partial y} + \frac{\partial t_y}{\partial x} = - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

Можем написать:

$$2 \frac{\partial^2 t_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

Делаем подстановку в (A):

$$\begin{aligned} (1+m) \left[\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right] - m \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right] \\ = (1+m) \left[\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

Вводим оператор:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Последнее уравнение примет вид:

$$(1+m) \left[\nabla^2 \Theta - \nabla^2 \sigma_x - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right] - m \left[\nabla^2 \Theta - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right] = 0;$$

Произведя, указанные в уравнении, операции, мы увидим, что оно приобретает очень простой вид:

$$(1+m) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0;$$

Два других уравнения, того же типа, получаются путем круговой перестановки индексов.

Три последних уравнения, при помощи, только что приведенного преобразования, будут такого рода:

$$(1 + m) \nabla^2 t_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0$$

Итак последние шесть уравнений, связывающих деформаций отдельных элементов тела, будут написаны в напряжениях следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} (1 + m) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= 0 \\ (1 + m) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= 0 \\ (1 + m) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0 \\ (1 + m) \nabla^2 t_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= 0 \\ (1 + m) \nabla^2 t_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} &= 0 \\ (1 + m) \nabla^2 t_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A')$$

Напишем эти уравнения в цилиндрических координатах для того, чтобы: во первых, их можно было решать совместно с уравнениями равновесия, а, во вторых, упростить само решение, так как при наличии оси симметрии деформации, некоторые компоненты полных напряжений должны исчезнуть.

Для перехода к цилиндрическим координатам придется независимые переменные x , y и z , заменить новыми: ρ , φ и z .

Связь между старыми и новыми координатами устанавливается уравнениями:

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

пишем:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\rho}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{\rho}$$



Операция получения вторых производных будет дана уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \cdot \cos^2 \varphi - \frac{\partial^2}{\rho \partial \rho \partial \varphi} \cdot \operatorname{sn} 2\varphi + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \cdot \operatorname{sn}^2 \varphi + \\ &+ \frac{\partial}{\rho^2 \partial \varphi} \cdot \operatorname{sn} 2\varphi + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial^2 \varphi} \operatorname{sn}^2 \varphi; \\ \frac{\partial}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho^2} \cdot \operatorname{sn}^2 \varphi + \frac{\partial^2}{\rho \partial \rho \partial \varphi} \cdot \operatorname{sn} 2\varphi + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \cdot \cos^2 \varphi - \\ &- \frac{\partial}{\rho^2 \partial \varphi} \cdot \operatorname{sn} 2\varphi + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \varphi^2} \cdot \cos^2 \varphi; \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \cdot \frac{\operatorname{sn} 2\varphi}{2} + \frac{\partial^2}{\rho \partial \rho \partial \varphi} \cdot \cos 2\varphi - \frac{\partial}{\rho^2 \partial \varphi} \cdot \cos 2\varphi - \\ &- \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \cdot \frac{\operatorname{sn} 2\varphi}{2} - \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \varphi^2} \cdot \frac{\operatorname{sn} 2\varphi}{2}; \end{aligned}$$

Напряжения связаны уравнениями:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\rho \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \operatorname{sn}^2 \varphi & t_y &= t_\varphi \cos \varphi \\ \sigma_y &= \sigma_\rho \operatorname{sn}^2 \varphi + \sigma_\varphi \cos^2 \varphi \\ \sigma_z &= \sigma_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_\rho \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \operatorname{sn}^2 \varphi) = \\ &= \nabla^2 (\sigma_\rho \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \operatorname{sn}^2 \varphi) - \frac{2}{\rho^2} (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) \cos 2\varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_y &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_\rho \operatorname{sn}^2 \varphi + \sigma_\varphi \cos^2 \varphi) = \\ &= \nabla^2 (\sigma_\rho \operatorname{sn}^2 \varphi + \sigma_\varphi \cos^2 \varphi) + \frac{2}{\rho^2} (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) \cos 2\varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 t_\varphi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) t_\varphi \cos \varphi = \\ &= \left(\nabla^2 t_\varphi - \frac{t_\varphi}{\rho^2} \right) \cos \varphi \end{aligned}$$

Имея:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial \Theta}{\rho \partial \rho} \operatorname{sn}^2 \varphi \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2} \operatorname{sn}^2 \varphi + \frac{\partial \Theta}{\rho \partial \rho} \cos^2 \varphi \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho \partial z} \cos \varphi \end{aligned}$$

Мы подставим полученные величины в уравнения системы (A') Так как эти уравнения должны удовлетворяться при любом значении угла φ , то последний, в преобразованных уравнениях будет отсутствовать.

Третье уравнение системы (A') переписывается без изменения и вместо трех последних, мы будем иметь только одно. Итак, в цилиндрических координатах, уравнения сплошности будут:

$$\left. \begin{aligned} (1+m) \left[\nabla^2 \sigma_\rho - \frac{2}{\rho^2} (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) \right] + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2} &= 0 \\ (1+m) \left[\nabla^2 \sigma_\varphi + \frac{2}{\rho^2} (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) \right] + \frac{\partial \Theta}{\rho \partial \rho} &= 0 \\ (1+m) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0 \\ (1+m) \left[\nabla^2 t_\varphi - \frac{t_\varphi}{\rho^2} \right] + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho \partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (B)$$

Для решения задачи, в общем виде, мы получили шесть уравнений. Воспользуемся способом A. Love. Подберем такую функцию φ , через которую можно было бы выразить все, входящие в уравнения, напряжения, с таким обязательным условием, чтобы были удовлетворены, в общем виде, как уравнения равновесия (*) и (**), так и уравнения сплошности (B). По Love функциональный состав напряжений должен заключаться в первых производных по z от такого рода функций:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\rho \partial \rho}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial z}.$$

Пишем с неопределенными постоянными коэффициентами такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{\partial}{\partial z} \left(a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + b \frac{\partial \varphi}{\rho \partial \rho} + c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial z} \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial}{\partial z} \left(e \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + f \frac{\partial \varphi}{\rho \partial \rho} + g \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial z} \right) \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + k \frac{\partial \varphi}{\rho \partial \rho} + l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial z} \right) \\ t_\varphi &= \frac{\partial}{\partial z} \left(n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + o \frac{\partial \varphi}{\rho \partial \rho} + p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (C)$$

Сделав подстановку этих значений напряжений в оба уравнения равновесия (*) и (**), мы получим значение части этих коэффициентов и установим связь между остальными. Подстановка дает:

$$a = d = f = h = l = m = n = o = p = 0;$$

$$b = e = A$$

$$c = g = i = k = -r = B$$

Уравнения получают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial \varphi}{\rho \partial \rho} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \\ \sigma_z &= B \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \varphi}{\rho \partial \rho} \right) \\ t_\varphi &= -B \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (D)$$

Полученные выражения для напряжений подставим в уравнения сплошности (B). Последнее подставляется так:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[(1+m) \left\{ A \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \nabla^2 \varphi + B \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 \varphi \right\} + (A+B) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \nabla^2 \varphi + (B-A) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \rho^2 \partial z^2} \right] = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[(1+m) \left\{ A \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \nabla^2 \varphi + B \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 \varphi \right\} + (A+B) \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \nabla^2 \varphi + (B-A) \frac{\partial^3 \varphi}{\rho \partial \rho \partial z^2} \right] = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[(1+m) B \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \nabla^2 \varphi \right\} + (A+B) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 \varphi + (B-A) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} \right] = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[(A-mB) \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \nabla^2 \varphi + (B-A) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \rho \partial z^3} \right] = 0;$$

Решая совместно полученные четыре уравнения, будем иметь:

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + M \frac{\partial \varphi}{\rho \partial \rho} + N \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Где коэффициенты M и N имеют значение:

$$M = - \frac{(c-v)(ac-v^2)}{(c^2-v^2)(c-v) - (c-a)(ac-2v^2+c^2)}$$

$$N = - \frac{(c-v)(c-a)}{(c^2-v^2)(c-v) - (c-a)(ac-2v^2+c^2)}$$

Здесь, для краткости письма обозначены, через:

$$\begin{aligned} a &= (1+m) A \\ v &= (1+m) B \\ c &= A+B \end{aligned}$$

Найдем сначала частный интеграл этого уравнения, т. е. решим уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + M \frac{\partial \varphi}{\rho \partial \rho} + N \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Решение его находим в виде:

$$\varphi = R \operatorname{sn} \beta z$$

где R — функция одного только ρ и β — постоянный коэффициент.

Производя дифференцирование φ и подстановку значений производных в (4), получим:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + M \frac{\partial R}{\rho \partial \rho} - \beta^2 N R = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Это уравнение Бесселя. Решение его не может быть найдено в виде конечной алгебраической или простой трансцендентной функции [A. R. Forsyth. of Differential Equations“. 1902].

Функция R может быть представлена бесконечным рядом:

$$R = a_1 + a_2 \rho^2 + a_3 \rho^4 + a_4 \rho^6 + \dots \dots \dots$$

После дифференцирования R и подстановки произведенных в уравнение (5), получим:

$$\begin{aligned} & 2 a_2 + 12 a_3 \rho^2 + 30 a_4 \rho^4 + \dots \dots \dots \\ & + 2 M a_2 + 4 M a_3 \rho^2 + 6 M a_4 \rho^4 + \dots \dots \dots \\ & - \beta^2 N a_1 - \beta^2 N a_2 \rho^2 - \beta^2 N a_3 \rho^4 - \dots \dots \dots = 0; \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при ρ , с одинаковыми степенями:

$$\begin{aligned} 2 (1 + M) a_2 - \beta^2 N a_1 &= 0 \\ 4 (3 + M) a_3 - \beta^2 N a_2 &= 0 \\ 6 (5 + M) a_4 - \beta^2 N a_3 &= 0 \\ \vdots & \vdots \end{aligned}$$

Коэффициенты оказываются связанными между собою и могут быть все выражены через один, а именно — a_1 .

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\beta^2 N}{2 (1 + M)} a_1 \\ a_3 &= \frac{\beta^2 N}{4 (3 + M)} a_2 = \frac{\beta^4 N^2}{2 \cdot 4 (1 + M) (3 + M)} a_1 \\ a_4 &= \frac{\beta^4 N}{6 (5 + M)} a_3 = \frac{\beta^6 N^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 (1 + M) (3 + M) (5 + M)} a_1 \\ & \vdots \quad \vdots \\ a_n &= \frac{\beta^{2(n-1)} N^{n-1}}{2 (n-1)! (1 + M) (3 + M) \dots [(2n-3) + M]} a_1 \end{aligned}$$

Коэффициенты быстро уменьшаются, по мере удлинения ряда; поэтому приближенном решении, можно ограничиться только несколькими первыми членами ряда.

Возьмем три первых члена. Функция напряжений выразится:

$$\varphi = (a_1 + a_2 \rho^2 + a_3 \rho^4) \operatorname{sn} \beta z$$

Но это лишь частный интеграл уравнения (3). Полный интеграл может быть представлен функцией:

$$\varphi = (a_1 + a_2 \rho^2 + a_3 \rho^4) \operatorname{sn} \beta z + C \rho^2 z + D z^3 + F$$

Производя дифференцирование φ , делаем подстановку производных в уравнения (D).

$$\sigma_\rho = \beta [(2 A a_2 - \beta^2 B a_1) + (4 A a_3 - \beta^2 B a_2) \rho^2 - \beta^2 B a_3 \rho^4] \cos \beta z + \\ + 2 (A C + 2 B D)$$

$$\sigma_\varphi = \beta [(2 A a_2 - \beta^2 B a_1) + (12 A a_3 - \beta^2 B a_2) \rho^2 - \beta^2 B a_3 \rho^4] \cos \beta z + \\ + 2 (A C + 3 B D)$$

$$\sigma_z = 4 \beta B [a_2 + 4 a_3 \rho^2] \cos \beta z + 4 C$$

$$t_\varphi = 2 \beta^2 B [a^2 \rho + 2 a^3 \rho^3] \operatorname{Sn} \beta z$$

Для определения постоянных коэффициентов напомним ряд условий.

На боковой поверхности цилиндрического бруска отсутствуют радиальные нормальные и касательные напряжения, т. е.

$$\text{при } \rho = r \quad \sigma_\rho = 0 \dots \dots \dots \text{ а)}$$

$$\sigma_\varphi = 0 \dots \dots \dots \text{ в)}$$

Сумма элементарных нормальных сил, в любом поперечном сечении должна равняться растягивающей силе.

$$2 \pi \int_F \rho \sigma_z d \rho = P = \pi r^2 k_0 \dots \dots \dots \text{ с)}$$

Здесь, через k_0 — обозначено среднее растягивающее напряжение.

За счет наличия оси симметрии деформации и совпадения ее с осью бруска, мы обязаны иметь в центре любого поперечного сечения равенство нормальных напряжений, по радиусу и касательной. Кроме того, касательное напряжение должно равняться нулю, т. к. в центре сдвиговой угол меняет свое направление на обратное

$$\text{при } \rho = 0 \quad \sigma_\rho = \sigma_\varphi \dots \dots \dots \text{ д)}$$

$$t_\varphi = 0 \dots \dots \dots \text{ л)}$$

Образующая цилиндра, при деформации, переходит в волновую линию, которую, ввиду ее периодичности мы принимаем за синусоиду (косинусоиду). Поэтому деформация произвольного радиуса может быть выражена:

$$u = u_0 + u_1 \cos \beta z \dots \dots \dots \text{ ф)}$$

где u_0 — средняя линейная деформация радиуса, и u_1 — полуамплитуда ее изменения по длине цилиндра.

Опыт дает для величины долевой деформации наружных волокон постоянную величину

$$\text{при } \rho = r \quad e_z = \text{const} = i_0 = \frac{k_0}{E} \dots \dots \dots (g)$$

Выполним, все написанные, условия.

Условие (a) дает:

$$\beta [(2 A a_2 - \beta^2 B a_1) + (4 A a_3 - \beta^2 B a_2) r^2 - \beta^2 B a_3 r^4] \cos \beta z + \\ + 2 (A C + 3 B D) = 0.$$

Так как это условие должно выполняться при любом значении z , то мы имеем, отдельно:

$$(2 A a_2 - \beta^2 B a_1) + (4 A a_3 - \beta^2 B a_2) r^2 - \beta^2 B a_3 r^4 = 0 \dots \dots (1)$$

$$\text{и } A C + B D \dots \dots \dots (2)$$

Уравнение (b) дает:

$$2 \beta^2 B [a_2 r + 2 a_3 r^3] \text{Sn } \beta z = 0$$

т. е.

$$a_2 + 2 a_3 r^2 = 0$$

Условие (c) даст:

$$8 \pi \beta B \left[\frac{a_2 r^2}{2} + a_3 r^4 \right] \cos \beta z + 4 \pi C r^2 = \pi r^2 k_0,$$

или, по условию независимости от положения поперечного сечения, отдельно.

$$a_2 + 2 a_3 r^2 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

т. е. условие, полученное ранее—(3)!,

$$\text{и } 4 C = k_0 \dots \dots \dots (5)$$

Условия (d) и (e), как видно из уравнений, удовлетворяются в общем виде.

Условие (f) дает:

$$u = u_0 + u_1 \cos \beta z = (\rho e_\varphi)_{\rho=r} = \\ = \frac{r}{E} [\sigma_\varphi - m \sigma_\rho - n \sigma_z]_{\rho=r} = \frac{r \beta}{E} [(1-m) (2 A a_2 - \beta^2 B a_1) - 4 m B a_2 + \\ + \{ (12 A a_3 - \beta^2 B a_2) - m (4 A a_3 - \beta^2 B a_2 - 16 m B a_3) \} r^2 - \\ - (1-m) \beta^2 B a_3 r^4] \cos \beta z + \frac{2 r}{E} (1-m) (A C + 2 B D) - 4 \frac{m r}{E} C.$$

Отсюда, обратив внимание на условие (2), имеем:

$$u_0 = -4 \frac{m r}{E} C = -m r \frac{k_0}{E} \dots \dots \dots (6)$$

т. е. ту линейную деформацию радиуса, которая находится при условии неизменности цилиндрической формы бруска при деформации.

$$\text{Сложный коэффициент при } \cos \beta z \text{ равен } u_1 \dots \dots \dots (7)$$

Условие (g) дает:

$$i_0 = e_z = \frac{1}{E} [\tau_z - m \sigma_\rho - m \sigma_\varphi] = \frac{\beta}{E} [4 B a_2 - \\ - 2 m (2 A a_2 - \beta^2 B a_1) + \{16 B a_3 - 2 m (9 A a_3 - \beta^2 B a_1)\} r^2 + \\ + 2 m \beta^2 B a_3 r^4] \cos \beta z + \frac{4}{E} [C - m (A C + 3 B D)] = \text{const}$$

i_0 не зависит от z , поэтому, приняв (1), имеем:

$$4 B a_1 - 2 m (2 A a_2 - \beta^2 B a_1) + \{16 B a_3 - 2 m (8 A a_3 - \beta^2 B a_2)\} r^2 + \\ + 2 m \beta^2 B a_3 r^4 = \dots \dots \dots (8)$$

$$\text{и } i_0 = \frac{4 C}{E} = \frac{k_0}{E} \dots \dots \dots (9)$$

что уже имело место в (5).

Для упрощения полученных уравнений определим значение коэффициента β .

Мы приняли деформированную образующую цилиндра за синусоиду. У \cos полный период равен 2π ; поэтому:

$$\cos \beta z = \cos (2\pi + \beta z) = \cos \beta (L + z)$$

где L — длина волны.

Значит

$$2\pi = \beta L$$

или

$$\beta = \frac{2\pi}{L}$$

Из опытов, как это было уже упомянуто выше, длина волны найдена, как:

$$L = 1.59 d = 3.18 r.$$

Очевидно, что опытный коэффициент, связывающий длину волны с радиусом есть:

Отсюда:

$$\pi.$$

$$\beta = \frac{2}{r}.$$

Делаем подстановку полученного значения β и значений интегральных коэффициентов a_2 и a_3 в полученные уравнения, от (1) до (9), мы определим постоянные.

Подстановка в (3) и (1), соответственно дает:

$$3 + M + 2N = 0$$

$$1 + M + N = 0$$

Решая их совместно, находим:

$$M = 1 \text{ и } N = -2.$$

Подставим их значения в выражения интегральных коэффициентов:

$$a_2 = -\frac{2}{r^2} a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{r^4} a_1$$

из (7) определяется:

$$u_1 = \frac{16 a_1}{E r^2} (A - m B)$$

Зная буквенное (в А и В) выражение коэффициентов М и N и зная теперь их числовую величину, мы определим из уравнений (***) и (***) зависимость между А и В.

Получаем:

$$m A = B$$

Это отношение позволяет определить, из (2):

$$D = -\frac{1}{3m} = C \frac{k_0}{12m}$$

Наконец делая постановку в (1) и (8), мы увидим что эти уравнения тождественно удовлетворяются:

В окончательном виде полуамплитуда колебания волны (шейки), выразится:

$$u_1 = \frac{16 A a_1}{E r^2} (1 - m^2) \dots \dots \dots (10)$$

При подстановке постоянных во все уравнения напряжений (D) мы получим одинаковый, во всех уравнениях, сложный коэффициент

$$A a_1,$$

который может быть определен только опытным путем:

Называя:

$$A a_1 = \alpha,$$

определим его через u_1 и u_0

Из (10) имеем:

$$\alpha = \frac{E r^2 u_1}{(16(1-m^2))} = -\frac{m u_1}{16(1-m^2)} k_0 r^3$$

Назвав отношение:

$$\frac{u_1}{u_0} = \gamma,$$

Перепишем теперь выраженных для напряжений и деформации радиуса в их окончательной форме.

$$\sigma_\rho = \frac{\gamma m k_0}{2(1-m^2)r^4} [(1+m)r^4 - (1+2m)r^2\rho^2 + m\rho^4] \cos \frac{2z}{r}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\gamma m k_0}{2(1-m^2)r^4} [(1+m)r^4 - (3+2m)r^2\rho^2 + m\rho^4] \cos \frac{2z}{r}$$

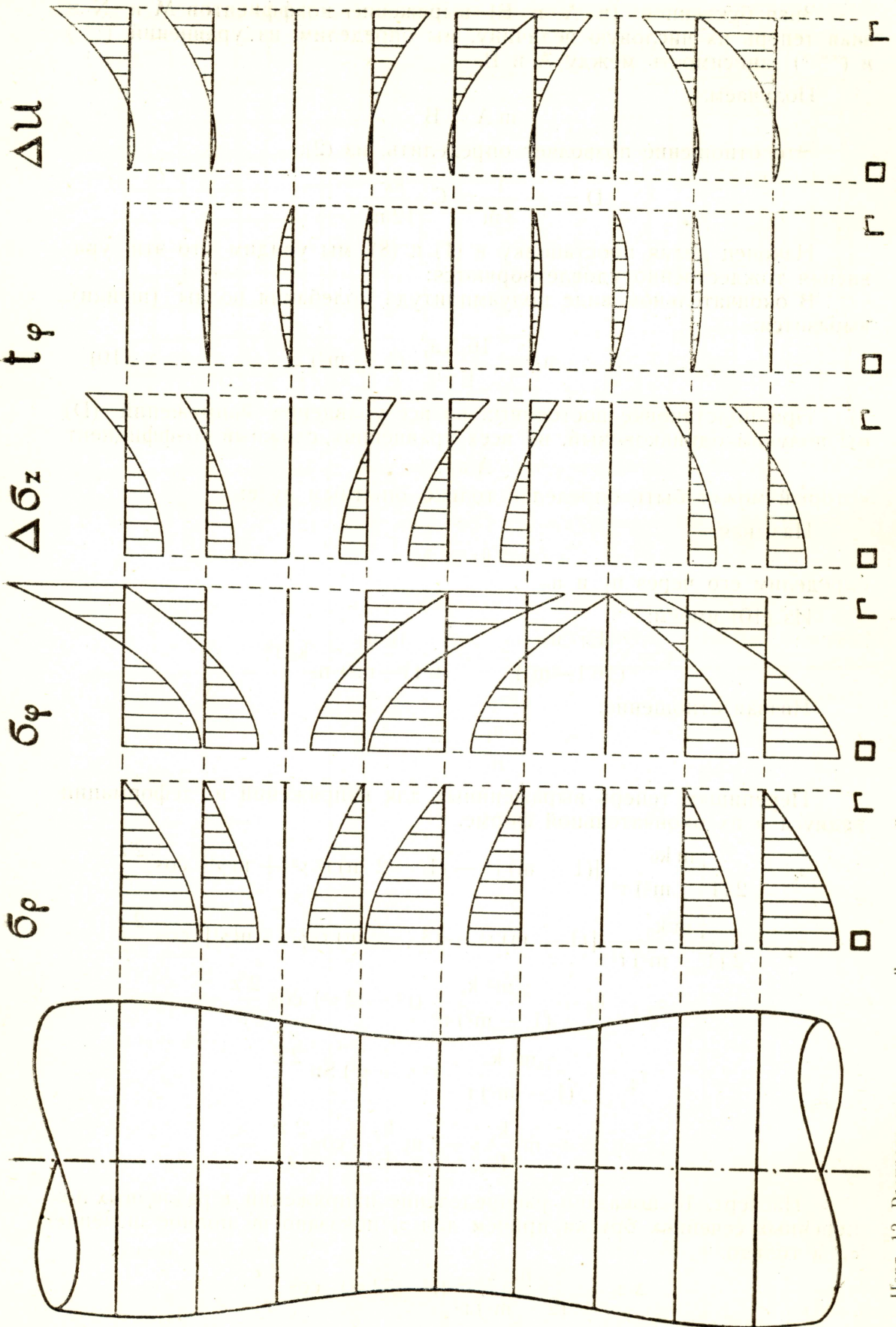
$$\sigma_z = k_0 + \frac{\gamma m^2 k_0}{(1-m^2)r^2} (r^2 - 2\rho^2) \cos \frac{2z}{r}$$

$$r_\varphi = \frac{\gamma m^2 k_0}{(1-m^2)r^3} r^2 \rho - \rho^3 \operatorname{Sn} \frac{2z}{r}$$

$$u = -m \frac{k_0}{E} \rho - \gamma m \frac{k_0}{E} \rho \cos \frac{2z}{r}$$

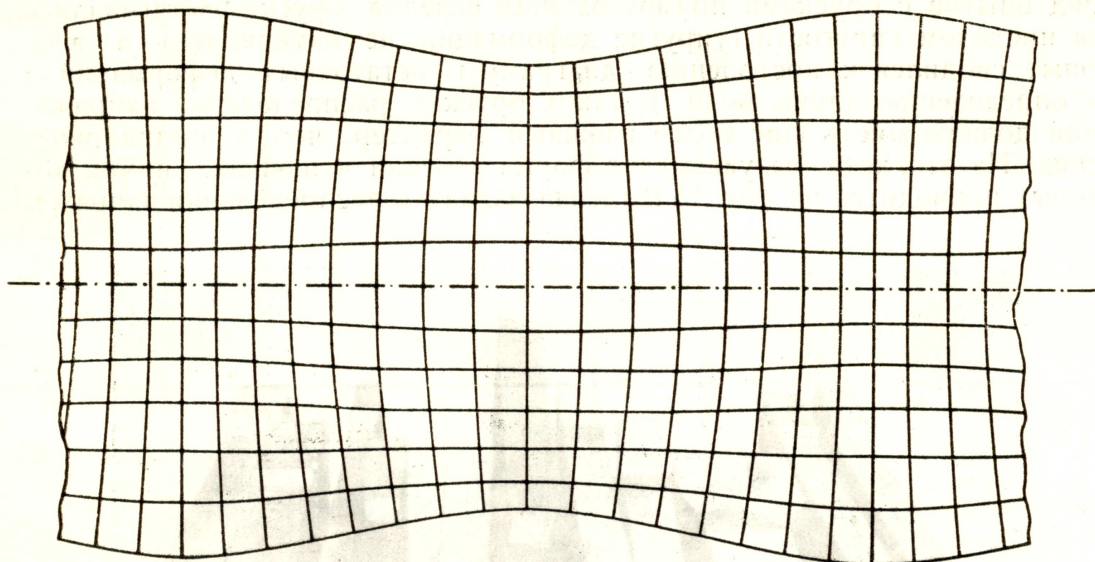
На черт. 13 показано распределение напряжений в различных поперечных сечениях бруска, причем для σ_z показано не полное значение σ_z , а только:

$$\Delta \sigma_z = \frac{\gamma m^2 k_0}{(2-m^2)r^2} (r^2 - 2\rho^2) \cos \frac{2z}{r}$$



Черт. 13. Распределение напряжений и перемещений радиуса в различных сечениях круглого образца. Масштабы σ_r , σ_ϕ и t_ϕ одинаковы. Масштаб $\Delta\sigma_z$ увеличен.

На черт. 14 показаны те формоизменения внутренних волокон, которые имеют место при растяжении (масштаб изменений взят большим).



Черт. 14. Утрированное формоизменение отдельных волокон растянутого круглого образца.

Опытный коэффициент γ является величиной постоянной. Из вышеуказанных опытов получена его средняя величина.

$$\alpha = 0.0829 \cong \frac{1}{12}$$

Для оценки максимальных значений напряжений и деформаций приведем таблицу, приняв для m , как среднее значения: $m = \frac{1}{3}$

Отношение	Место в сечении ρ	Место по длине бруска Z	Величина отношения	Примечание: (где происходит поперечн. сечение)
$\frac{\sigma_\rho}{k_0}$	{ 0	0	$\frac{1}{48}$	Долины волны.
		$\frac{L}{2}$	$-\frac{1}{48}$	Гребень волны.
$\frac{\varepsilon_\varphi}{k_0}$	{ 0	0	$\frac{1}{48}$	д. в.
		$\frac{L}{2}$	$-\frac{1}{48}$	г. в.
		г	$-\frac{1}{24}$	д. в.
		$\frac{L}{2}$	$\frac{1}{24}$	г. д.
$\frac{\nabla \sigma_2}{k_0}$	{ 0	0	$\frac{1}{96}$	д. г.
		$\frac{L}{2}$	$-\frac{1}{96}$	г. в.
		г	$-\frac{1}{96}$	д. в.
$\frac{r_\varphi}{k_0}$	{ 0.577 г	$\frac{L}{2}$	$\frac{1}{96}$	г. в.
		$\frac{L}{4}$	$\frac{1}{250}$	На подъеме волны.
		$\frac{3L}{4}$	$-\frac{1}{250}$	На скате волны.
$\frac{u_0}{u^1}$	{ г	0	$-\frac{1}{12}$	д. в.
		$\frac{L}{2}$	$\frac{1}{12}$	г. в.

Кроме опытов с цилиндрическими брусками, мною был проделан ряд опытов с брусками прямоугольного сечения. Бруски растягивались за пределом упругости (упругие деформации не измерялись) и весь опыт сводился к построению диаграммы остаточных деформаций и к определению длины волн. В таких брусках распределение напряжений должно иметь еще более сложный характер, чем в цилиндрических. На это, хотя бы, указывает форма сечений в шейках, снимок которых приводится на рис. 15 Выделяя задачу о распределении напряже-

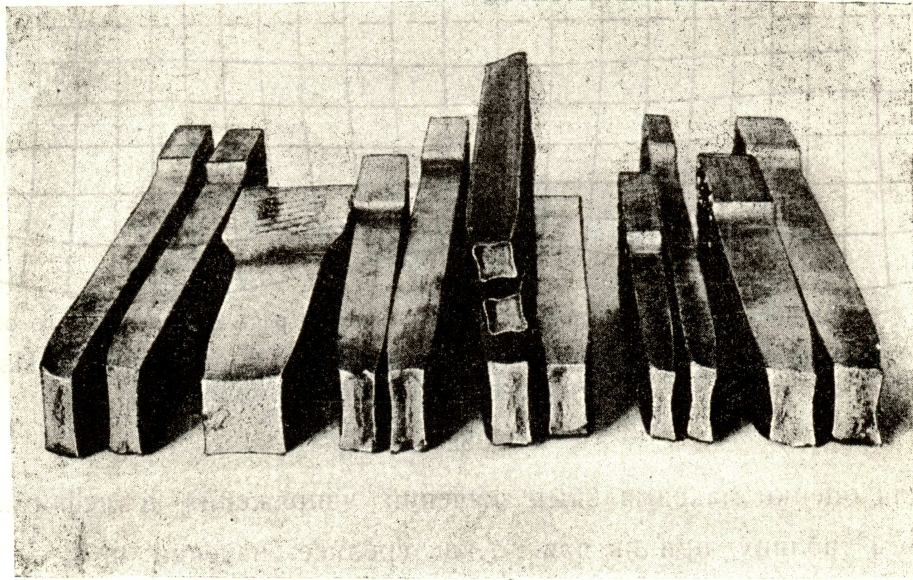


Рис. 15 Изменение прямоугольного поперечного сечения в шейках образцов, при разрыве.

ний в брусках некруглого сечения, как совершенно самостоятельную, я не могу обойти молчанием тот интересный факт, что длина волны в брусках прямоугольного сечения, имевших место в моих опытах (14 брусков) получается:

$$L = \frac{\pi}{2} d,$$

где d — диаметр некоторого круглого сечения, равного, по площади — площади образца с прямоугольным поперечным сечением.

В указанных опытах отношение сторон сечения доходило до 1:4.

РЕЗЮМЕ.

1. Предположение, что цилиндрическая форма тела, при деформации растяжения (сжатия) не является формой устойчивой подтверждается косвенным опытом с остаточными деформациями.

Опыт указывает на периодичность распределения шеек при растяжении (сжатий).

2. То же самое подтверждается и прямым опытом с упругими деформациями.

3. Теоретическая разработка задачи приводит к выводу об обязательной периодичности шеек, в пределах упругости материала, подтверждая, тем самым как начальное предложение, так и опыт.

4. Распределение напряжений в нормально-растянутом (сжатом) цилиндрическом бруске имеет сложный характер, причем в поперечных сечениях имеются касательные напряжения.

5. Волны, образуемые правильно-чередующимися шейками имеют амплитуду, пропорциональную коэффициенту Пуассона данного материала и составляющую $\frac{1}{12}$ среднего изменения диаметра бруска, для всех испытанных металлов.

Механическая Лаб. СТИ.
