

Графический анализ периодических кривых.

При исследовании цепей переменного тока, часто приходится иметь дело с разложением периодических кривых на ряд синусоидальных составляющих разных порядков. При таком анализе кривых возможны три рода методов: аналитические, графические и механические. Первые из них, являясь наиболее точными, требуют производства ряда вычислений, что, при большом количестве анализов, медленно и утомительно. Механические методы очень быстры и удобны, но мало кому доступны, т. к. требуют специальных приборов. Наиболее удобными и легко применимыми являются графические методы анализа, которые, уступая немного в точности аналитическим, гораздо быстрее дают результаты. В этих анализах вычислений нет совершенно, или очень мало, но все они требуют производства точных графических построений, от которых сильно зависят получаемые результаты.

В настоящей статье кратко излагается простой графический метод анализа, не требующий производства точных построений и в котором нет совершенно вычислений. Производство анализа заключается в переносе ординат исследуемой кривой на особую сетку, соединении полученных точек ломаной линией и планиметрировании этой фигуры. Величина площади будет численно равна искомой амплитуде.

В основу настоящего метода положены равенства*)

$$A'_n = \frac{2}{m} \cdot \sum_{k=1}^{k=m} Y_k \cdot \sin \left(n \frac{k}{m} \cdot 2\pi \right)$$

и

$$A''_n = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{k=m} Y_k \cdot \cos \left(n \frac{k}{m} \cdot 2\pi \right) \dots \dots \dots (A).$$

которые с большой точностью заменяют уравнения разложения в ряд Фурье

$$A'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Y_x \cdot \sin (n x) \cdot dx$$

и

$$A''_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Y_x \cdot \cos (n x) \cdot dx$$

*) Описываемый метод является графическим решением для метода Перри. Принятые упрощенные уравнения будут единственным местом неточности обоих методов. О получаемых отклонениях от истинных значений и о сравнении метода Перри с другими см. статью Акимова в журнале „Электричество“ № 8 за 1927 год. Более правильные результаты дает графический метод Клиффорд'а, аналогичный описываемому, но в основу которого положены не упрощенные, а точные уравнения, следствием чего является и большая его сложность.

В этих равенствах A'_n и A''_n — амплитуды кривой n -ого порядка, k — порядковый номер соответствующей ординаты, а m — число частей, на которые разделен период. Полная амплитуда n -ого порядка и ее начальный угол вычисляются по уравнениям

$$A_n = \sqrt{(A'_n)^2 + (A''_n)^2}$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{A''_n}{A'_n} \quad \text{или} \quad \cos \alpha_n = \frac{A'_n}{A_n} \dots \dots \dots (B)$$

Уравнения (A) можно представить в виде

$$A'_n = \sum_{k=1}^{k=m} \left[y_k \cdot \frac{2 \cdot \sin \left(n \frac{k}{m} \cdot 2\pi \right)}{m} \right] = \sum_{k=1}^{k=m} (y_k \cdot a_{nk})$$

и

$$A''_n = \sum_{k=1}^{k=m} \left[y_k \cdot \frac{2 \cos \left(n \frac{k}{m} \cdot 2\pi \right)}{m} \right] = \sum_{k=1}^{k=m} (y_k \cdot b_{nk}) \dots \dots \dots (B)$$

где коэффициенты при ординатах

$$a_{nk} = \frac{2}{m} \cdot \sin \left(n \frac{k}{m} \cdot 2\pi \right)$$

и

$$b_{nk} = \frac{2}{m} \cdot \cos \left(n \frac{k}{m} \cdot 2\pi \right) \dots \dots \dots (C)$$

не зависят от исследуемой кривой. Уравнения (B) можно рассматривать как некоторые площади, составленные из прямоугольников с основаниями a_{nk} или b_{nk} , и с высотами, равными соответствующим ординатам кривой (черт. 1 и 2). Так как значения коэффициентов a_{nk} и b_{nk} могут быть, как положительными, так и отрицательными, то необходимо для каждой составляющей находить две площади и брать их разность.

Построение и планиметрирование ступенчатых фигур несколько неудобно, поэтому их лучше заменить равновеликими площадями, но ограниченными ломаными линиями. Такая замена может быть легко произведена на основании следующих соображений. Если отложить (черт. 3) отрезок BK , равный отрезку AB , и провести ординату KK' , то площадь трапеции $AA'K'K$ будет равна сумме площадей прямоугольников $AA'V'V$ и $BB'K'K$. Откладывая затем отрезок CM , равный KC , найдем, что площадь $KK'M'M$ равна сумме площадей $KK'S'S$ и $SS'M'M$. Разбивая всю фигуру на ряд трапеций, увидим, что полученная площадь, равновеликая прежней, будет ограничена ломаной линией. Ординаты в точках перегиба равны ординатам кривой, а расстояния между ними зависят только от коэффициентов a_{nk} и b_{nk} , т. е. для всех кривых совершенно одинаковы и могут быть отложены заранее. При нанесении площадей для отрицательных и положительных коэффициентов на одну диаграмму, искомая величина представится в виде разности их. На черт. 4 такая разность площадей заштрихована.

Так как в обычных случаях переменного тока в исследуемых кривых отсутствуют составляющие четных порядков, то достаточно производить анализ только для одной половины периода, увеличивая полученный результат в два раза. На чертежах 5—12 построены сетки для откладывания ординат исследуемой кривой для одного полупериода. Для их построения принято деление полупериода на 12 частей ($m = 24$), а коэффициенты a_{nk} и b_{nk} увеличены вдвое

$$a_{nk} = \frac{\sin k \frac{n\pi}{12}}{6} \quad \text{и} \quad b_{nk} = \frac{\cos k \frac{n\pi}{12}}{6}$$

Если их отложить в масштабе — одна единица равна 10 см., то полученная площадь выраженная в квадратных сантиметрах, численно будет равна удвоенной искомой амплитуде, выраженной тоже в сантиметрах, или же прямо равна ей, но выраженной в миллиметрах.

При делении полупериода на 12 частей, анализ возможен до 11-го порядка, причем в каждый результат n -ого порядка будут входить также составляющие всех тех порядков, для которых

$$n' = pm \pm n$$

где p — любое целое положительное число. Обычно эти составляющие очень малы вследствие чего считают полученный результат только одного n -ого порядка.

На всех приложенных сетках имеются линии для откладывания ординат, как для положительных, так и отрицательных площадей. Около каждой линии проставлен номер той ординаты, которая должна быть на ней отложена, при чем числа над чертой относятся к положительной площади, а под чертой к отрицательной. Для определения вторых составляющих 1, 5, 7 и 11 порядков получают одинаковые сетки, отличающиеся только номерами ординат, данных в отдельной табличке (черт. 11). Такая же сетка получается и для 3 и 9 порядков (черт. 12). Стрелками показано направление обвода планиметром (см. также черт. 4, 13, 14, 15 и 16).

Если в полупериоде встретится отрицательная ордината (что бывает очень редко), то такую необходимо откладывать вниз от основной линии. При построении сеток было принято деление полупериода на 12 частей так, что первая и 12-я ординаты совпадали с точками перехода кривой через нуль, т. е. равны тоже нулю (черт. 1). Если же они неравны нулю, причем $Y_0 = -Y_{12}$, то во втором из уравнений (А)

не будет хватать одного члена, равного $\frac{4Y_0}{m}$. Чтобы не изменять для этого случая построенных сеток, нужно, к полученному результату по ним, добавлять алгебраически недостающую величину. Для $m = 24$, эта добавка равна $\frac{Y_0}{6} = -\frac{Y_{12}}{6}$. В уравнения для определения первых составляющих нулевая ордината не войдет, т. е. сетки всегда дадут полный результат.

На чертежах 13—16 приведен пример выделения по сеткам составляющих A'_1 , A''_1 , A'_5 и A''_5 для кривой чертежа 1.

Для анализа кривых, содержащих четные и постоянную слагающие, должны быть построены сетки, подобного же вида, но для целого периода. Можно также применить сложение и вычитание полупериодов, при котором сохраняются все приведенные сетки нечетных

составляющих. Если две половины периода (черт. 17) наложить друг на друга вычитая (алгебраически) ординаты Y_k и $Y_{k+\frac{m}{2}}$, то получен-

ная новая кривая будет содержать только нечетные слагающие, увеличенные в две раза, четные же будут равны нулю (черт. 18). Наоборот при сложении ординат останутся только одни четные, нечетные же сократятся (черт. 19). Подобное исключение четных и нечетных слагающих следует из соотношений

$$A_n \cdot \sin (n x + \alpha_n) = A_n \cdot \sin [n(x + \pi) + \alpha_n]$$

для n четного, и

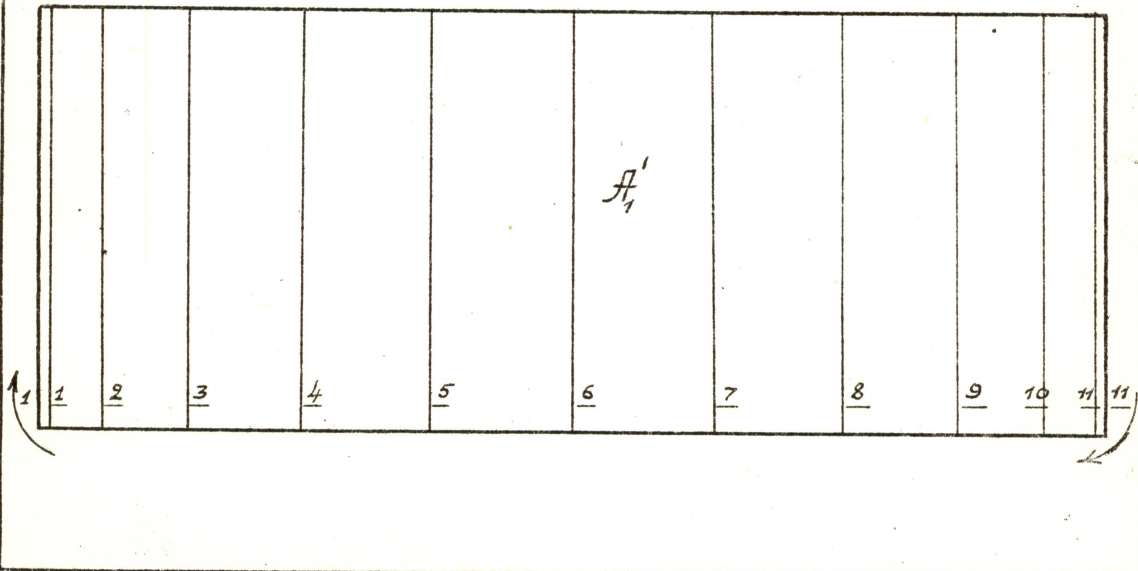
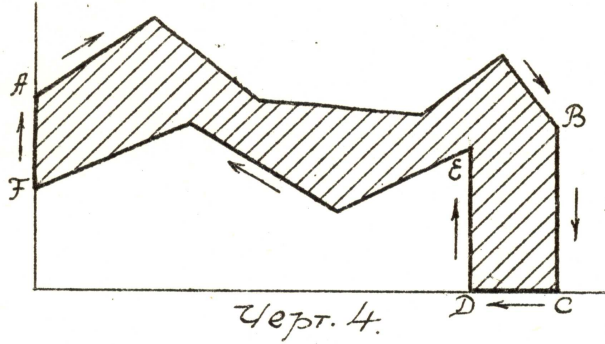
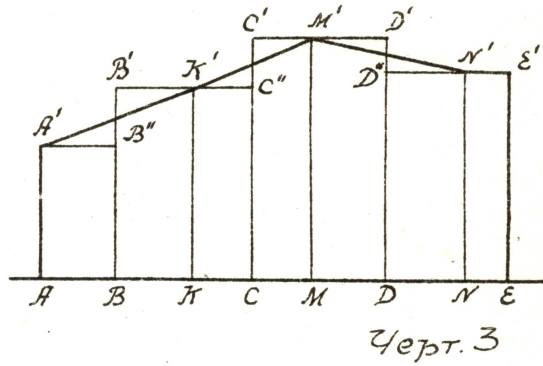
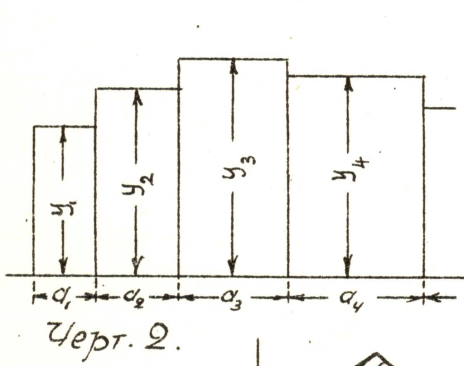
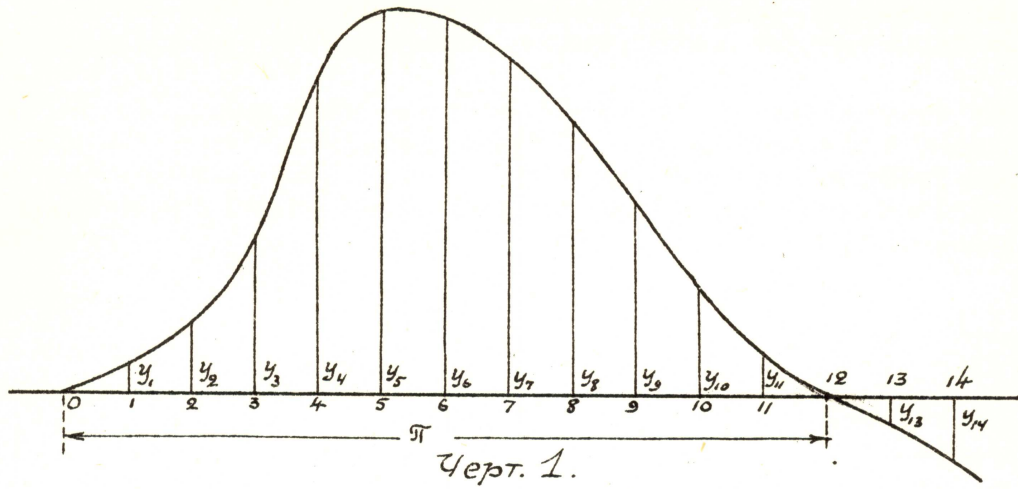
$$A_n \cdot \sin (n x + \alpha_n) = -A_n \cdot \sin [n(x + \pi) + \alpha_n]$$

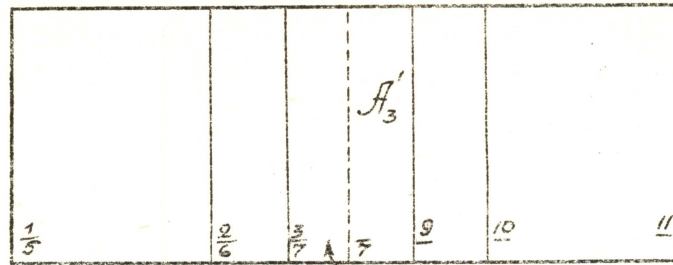
для n нечетного. Первая из полученных кривых анализируется по обычным сеткам, для второй же построены такие же сетки, но включающие и нулевую ординату (черт. 20—23). Полученный результат необходимо уменьшать в два раза. Постоянная слагающая получается простым планиметрированием кривой черт. 17 или 19. Вместо вычерчивания новых кривых возможно непосредственное откладывание разности или суммы ординат на соответствующих линиях сеток.

Простота способа очевидна из его описания, точность же зависит главным образом от планиметрирования. При аккуратной работе она может быть легко доведена до 0,1 кв. см. и даже больше, что соответствует точности амплитуд 0,1 мм. Одна серия сеток обычно служит очень продолжительное время, при условии вычерчивания их на хорошей бумаге и производства всех построений мягким карандашом. Для самостоятельного построения сеток ниже приведены расстояния в миллиметрах от крайней левой линии сеток чертежей 5—12 и 20—23 до всех остальных.

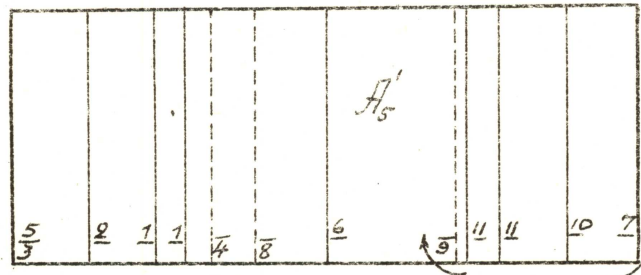
A_1'	A_3'	A_5'	A_7'	A_9'	A_{11}'	$A_1''; A_5''; A_7''; A_{11}''$	$A_3''; A_9''$	$A_2'; A_{10}'; A_2''; A_{10}''$	$A_6'; A_6''$	$A_4'; A_8'$	$A_4''; A_8''$
1,10	23,56	8,62	8,62	23,56	8,62	8,62	5,89	2,23	4,17	7,21	8,33
7,52	32,20	16,66	16,66	32,20	16,66	16,66	17,67	14,43	12,50	21,64	25,00
17,76	39,66	20,41	23,56	47,12	23,56	32,18	29,45	31,09	20,83	36,07	41,66
31,08	47,12	23,56	28,86	55,76	28,86	45,52	41,23	47,75	29,16	50,50	50,00
46,62	55,76	28,86	33,33	63,22	33,33	54,95	52,11	59,95	37,49	57,71	—
63,28	79,32	37,07	40,23	—	40,82	—	—	62,18	45,82	—	—
79,94	—	52,42	40,82	—	45,54	—	—	—	54,15	—	—
95,48	—	53,73	56,89	—	55,76	—	—	—	62,48	—	—
108,80	—	57,48	61,06	—	62,20	—	—	—	66,65	—	—
119,04	—	65,52	69,68	—	64,38	—	—	—	—	—	—
125,46	—	74,14	—	—	—	—	—	—	—	—	—
126,56	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Для большей точности можно увеличивать их в несколько раз, уменьшая получаемый результат в том же отношении. Такое увеличение особенно желательно при больших ординатах кривой. Высота сеток должна быть взята больше откладываемых ординат.

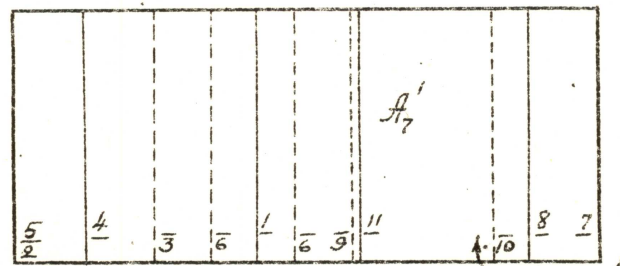




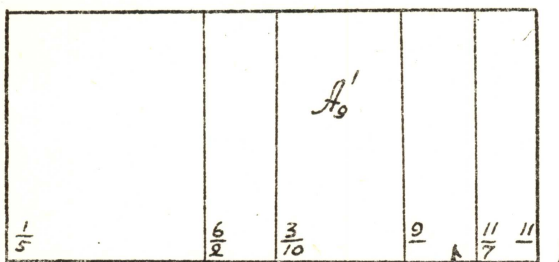
Черт. 6.



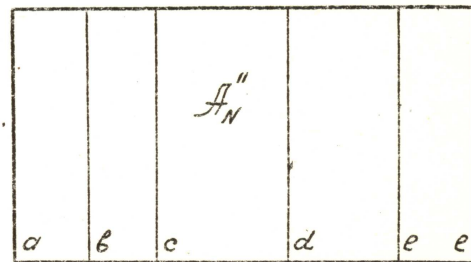
Черт. 7.



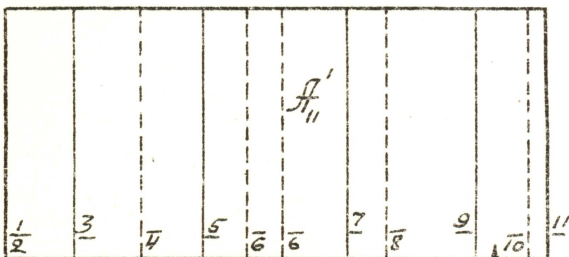
Черт. 8.



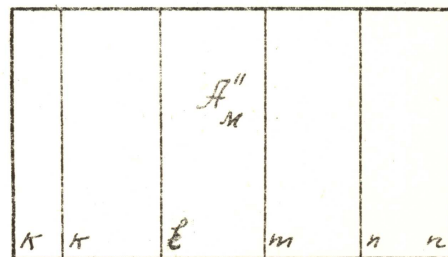
Черт. 9.



Черт. 11.



Черт. 10.

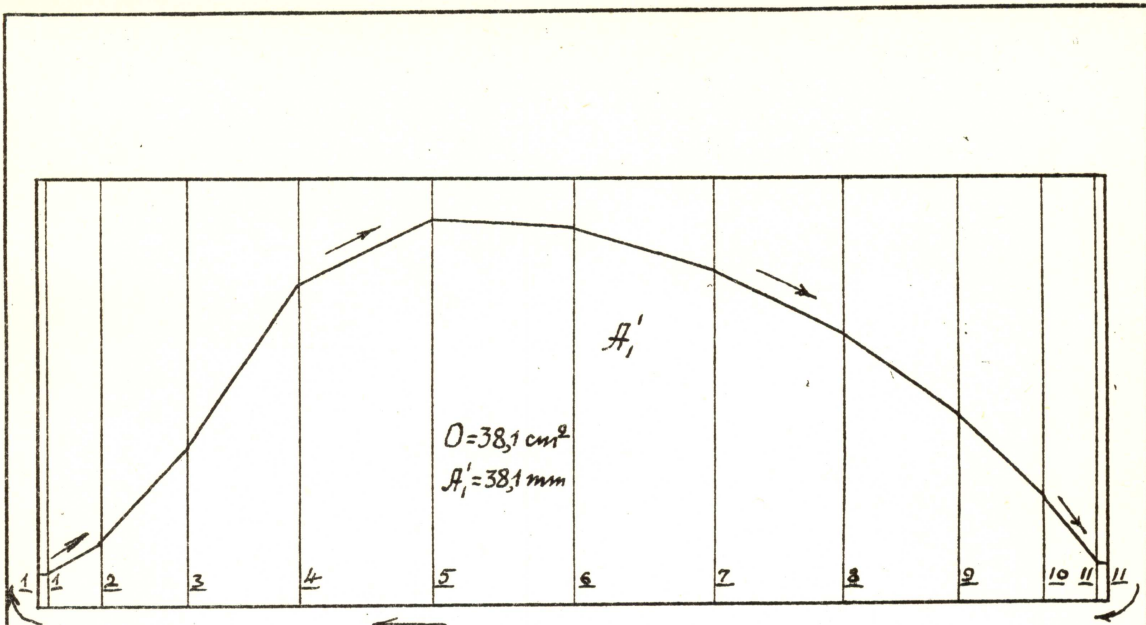


к черт. 12.

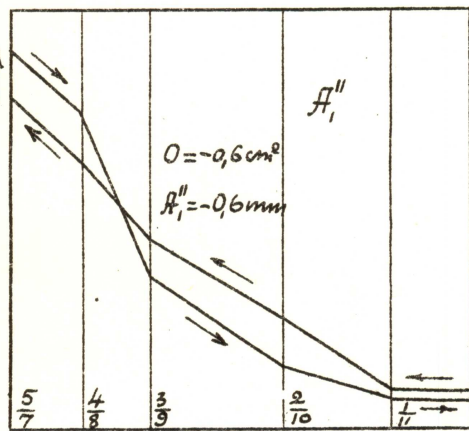
N	a	b	c	d	e
1	5/7	4/8	3/9	2/10	1/11
5	1/11	4/8	9/3	10/2	5/7
7	1/11	4/8	3/9	10/2	7/5
11	7/5	4/8	9/3	2/10	1/11

к черт. 11.

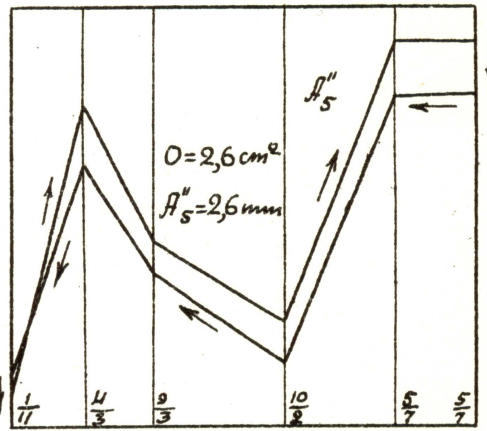
M	k	l	m	n
3	1/11	9/3	7/5	8/4
9	1/11	3/9	5/7	8/4



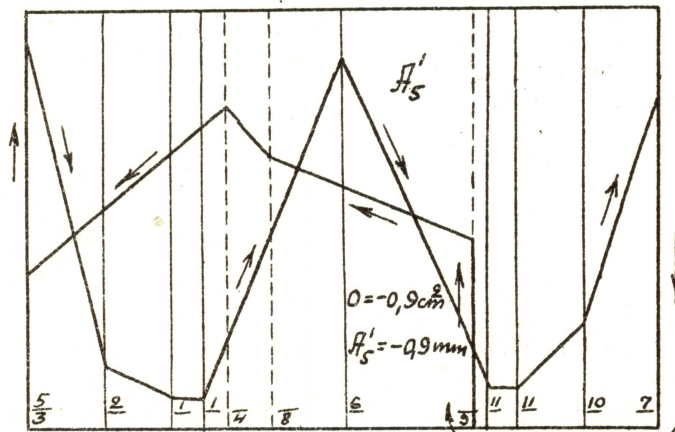
Черт. 13.



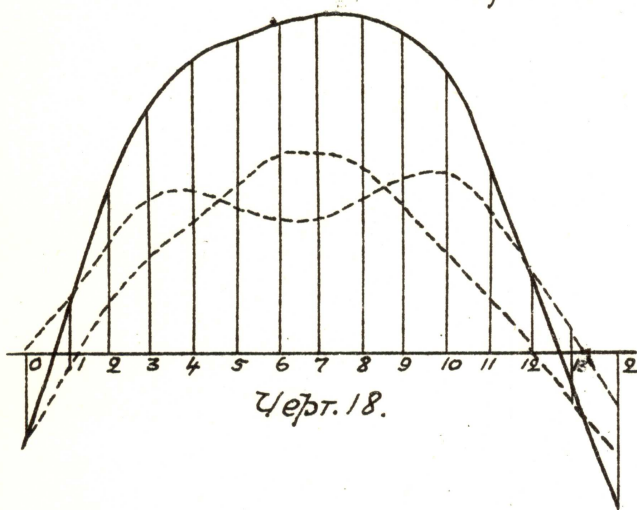
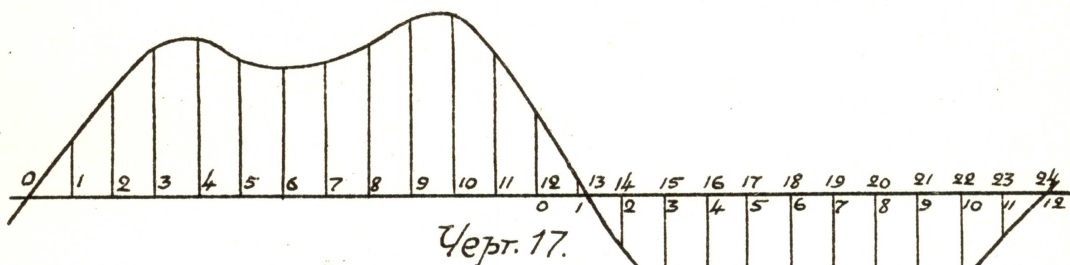
Черт. 14.



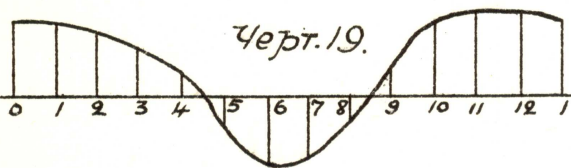
Черт. 15.



Черт. 16.



		$A_6'; A_6''$		
κ	κ	ℓ	m	m



		$A_4'; A_8'$		
κ	κ	ℓ	m	n

		$A_2'; A_2''$	$A_{10}'; A_{10}''$		
κ	κ	ℓ	m	n	p

Черт. 21.

	κ	ℓ	m	n	p
A_2'	$1/11$	$2/10$	$3/9$	$4/8$	$5/7$
A_4'	$1/11$	$2/10$	$3/4$	$7/5$	—
A_6'	$1/11$	$5/7$	$3/3$	—	—
A_8'	$1/11$	$1/2$	$4/8$	$7/5$	—
A_{10}'	$1/11$	$1/2$	$3/9$	$8/4$	$5/7$
A_2''	$2/4$	$1/5$	$0/6$	$1/7$	$10/8$
A_6''	$0/10$	$4/6$	$8/2$	—	—
A_{10}''	$2/4$	$5/1$	$0/6$	$7/11$	$10/8$

κ черт. 20, 21, 22.

		$A_4''; A_8''$					
a	a	b	c	d	e	f	g

Черт. 23

	a	b	c	d	e	f	g	h
A_4''	$1/2$	$5/4$	$0/3$	—	—	$6/9$	$7/8$	$11/10$
A_8''	$0/1$	$1/2$	$1/4$	$3/5$	$6/7$	$1/8$	$1/10$	$9/10$

κ черт. 23.