

Н. Э. СТРЕБЕЙКО

---

НОВЫЙ ПОДХОД  
К РАСЧЕТУ РАМ  
ПО МЕТОДУ ФОКУСОВ

---

(НОВЫЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ  
ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ)

---

---

ТОМСК

1929

## **Новый подход к расчету рам по методу фокусов.**

(Новый способ построения линий влияния).

Требования строительной промышленности последних лет вызвали к жизни весьма многочисленные способы расчета рамных конструкций.

Общая задача о расчете статически-неопределимых систем, как известно, уже давно получила исчерпывающее принципиальное разрешение (теоремы Бетти, Максвелла, Мора, Кастильяно и Менабреа). Таким образом, на долю исследователей последнего времени оставалась только практическая сторона решения рамной проблемы, т.е. изыскание таких практических удобных приемов расчета рам, которые при *minimum*'е времени и работы давали бы точный и простой путь к решению, доступный к тому же широким кругам инженеров-расчетчиков.

Огромную работу, проделанную в этом направлении до сих пор, ни коим образом нельзя считать доведенной до конца, и всякий новый прием, если только он систематизирует, облегчает и ускоряет работу расчетчика, должен иметь в наши дни практический интерес.

Настоящая статья, посвященная методу фокусов, представляет собой содержание доклада, сделанного автором 18 ноября 1928 года для членов Мостовой Секции Научно-Технического Кружка Строителей СТИ.

Доклад имел основной целью предложить новый способ для построения линий влияния в рамных системах, при чем некоторые выводы и формулы, явившиеся следствием новой интерпретации линий влияния (линия влияния, как упругие линии), оказывались применимыми и к частным случаям расчета рам под фиксированной нагрузкой — именно к нахождению смещений рамы без определения смещающих сил, что вносило упрощения в Расчетную часть II метода фокусов. Кроме того, давалось попутное освещение вопроса об угловых фокусах и их связи с фокусами для моментов.

### **Основные положения.**

Применявшийся до сего времени способ построения линий влияния при пользовании методом фокусов весьма полно освещен в основном труде E. Suter'a „*Die Methode der Festpunkte*“. На русском языке — в труде проф. Г. В. Ульянинского „*Расчет рамных конструкций*“ (изд. 3-е и 4-е, г. Томск) мы имеем изложение этого вопроса с исчерпывающей полнотой, при наличии подробно разработанного примера расчета.

В известной статье инж. Л. А. Самойлова „*Расчет рам по методу фокусов*“ (Труды МИИТ'а вып. III) мы также встречаемся с примером построения линий влияния.

Отсылая интересующихся к перечисленным источникам, напомним только, что сущность применявшегося способа заключалась в построении т. н. основной диаграммы моментов в предположении

наличия фиктивной опоры, в последующем вычислении для каждого положения подвижного груза смещающих сил и в определении по смещающим силам дополнительных моментов от смещения (при удалении фиктивной опоры).

В излагаемом ниже новом способе построения линий влияния общий ход расчета остается без изменения. Как обычно в методе фокусов, вначале предполагается, что введением лишних связей (фиктивных опор), рама приведена в неподвижное состояние\*) — т.е. никаких линейных смещений узлов не может быть. Вычисление моментов при этом предположении составляет предмет I-й части расчета.

Во II-й расчетной части определяются линейные смещения узлов рамной конструкции при различных положениях подвижного груза (после освобождения рамы от фиктивных опор), и по смещениям вычисляются дополнительные моменты, которые должны быть просуммированы с одноименными моментами из I-й расчетной части. Определение смещающих сил в предлагаемом способе отпадает.

## I. Построение линий влияния для рамных конструкций с неподвижными узлами.

§ 1. Обозначения. В дальнейшем изложении во всех выводах применяются следующие обозначения\*\*):

- $\alpha_1$  и  $\beta$  (фиг. 1)—углы вращения на опорах простой балки АВ вследствие загрузки моментом  $M^A = 1$ ;  $\beta$ —угол поворота незагруженного конца.
- $\alpha_2$  и  $\beta$  (фиг. 2)—соответственные углы поворота той же простой балки АВ при загрузке опорным моментом  $M^B = 1$ . По началу взаимности деформаций угол  $\beta$  (фиг. 2), очевидно, равен углу  $\beta$  (фиг. 1).
- $\alpha^A$  и  $\alpha^B$  (фиг. 3)—углы вращения на опорах той же простой балки АВ при одновременном загрузке опорными моментами  $M^A = 1$  и  $M^B = 1$ . При этом, очевидно,  $\alpha^A = \alpha_1 + \beta$  и  $\alpha^B = \alpha_2 + \beta$ .
- $\alpha_0^A$  и  $\alpha_0^B$  (фиг. 4)—углы поворота оси простой балки АВ на опорах (А) и (В) при загрузке любой внешней нагрузкой.
- $\gamma_n^A$  (фиг. 5)—угол поворота на опоре (А) оси  $n$ -го стержня рамной конструкции при загрузке моментом  $M^A = 1$ , при чем предполагается, что стержень  $n$ -ый на опоре (А) разобщен с левой частью конструкции и свободно вращается (без перемещения), а на опоре (В) сохраняет прежнюю связь с остальной конструкцией.
- $\gamma_n^B$  — соответствующий предыдущему угол поворота конца (В)  $n$ -го стержня рамной конструкции при действии  $M^B = 1$ .
- $\varphi_n^A$  (фиг. 6)—угол поворота узла (А) рамы, служащего левой опорой для стержня  $n$ , при загрузке моментом  $M_n^A = 1$ .
- $\varphi_n^B$  (фиг. 6)—угол поворота узла (В), служащего правой опорой для стержня  $n$ , под действием момента  $M_n^B = 1$ .
- $\tau^N$  — угол поворота узла  $N$  рамной конструкции под действием любой нагрузки.

\*) Изменением длины стержней вследствие осевого сжатия и растяжения, как обычно, пренебрегается.

\*\*\*) Буквенные обозначения соответствуют принятым в „Расчете рамных конструкций“ проф. Г. В. Ульянинского (1929 г., г. Томск).

$a_n$  и  $b_n$  — левое и правое фокусные расстояния  $n$ -го стержня.

$$K_a = \frac{M^a}{M^b} = \frac{a}{l-a} \text{ — левое моментное фокусное отношение.}$$

$$K_b = \frac{M^b}{M^a} = \frac{b}{l-b} \text{ — правое моментное фокусное отношение.}$$

$\mu_{n-m}$  — коэффициент „распределения“ = коэффициент передачи опорного момента от  $n$ -го стержня на  $m$ -ый.

$\delta$  или  $\Delta$  — линейное взаимное смещение узлов.

$$\vartheta = \frac{\delta}{l} \text{ или } \frac{\Delta}{l} \text{ — угол поворота стержня вследствие смещения узлов.}$$

$U_a$  и  $U_b$  — т. н. „перекрестные отрезки“ на опорах загруженного стержня, обозначаемые Suter'ом  $k_a$  и  $k_b$ .

Прочие обозначения, не включенные в этот перечень, будут объяснены в соответствующих местах дальнейшего изложения.

Правило знаков для опорных изгибающих моментов — обычное в методе фокусов: положительным считается момент, под действием которого выпуклость изгибаемого им стержня направлена вправо, считая по ходу (фиг. 7).

## § 2. Зависимость между инфлюэнтными линиями углов $\tau$ поворота узлов и инфлюэнтными линиями опорных моментов.

Сущность нового способа построения линий влияния будет заключаться в использовании тех угловых величин  $\gamma$  и  $\varphi$  (см. § 1), которые до настоящего времени играли в методе фокусов только вспомогательную роль при определении фокусных расстояний и коэффициентов распределения и после вычисления этих основных величин теряли всякое значение.

Пусть имеем некоторую рамную конструкцию (фиг. 8) без замкнутых контуров. Введением фиктивных опор в узлах I и VI обеспечена неподвижность узлов рамы.

Рассмотрим узел IV. Пусть подвижной груз  $P_m = 1$  находится где-либо в точке  $m$  ригеля рамы — правее узла IV.

Если при этом узел IV, участвуя в общей деформации конструкции, повернулся на некоторый угол  $\tau^{IV}$ , то из определения угловых величин  $\gamma$  и  $\varphi$  (см. § 1) имеем следующие зависимости:

$$\tau^{IV} = \overline{M}_5^{IV} \varphi_5^{IV} \quad \text{или} \quad \overline{M}_5^{IV} = \tau^{IV} \cdot \frac{1}{\varphi_5^{IV}}$$

$$\tau^{IV} = \overline{M}_4^{IV} \gamma_4^{IV} \quad \text{или} \quad \overline{M}_4^{IV} = \tau^{IV} \cdot \frac{1}{\gamma_4^{IV}}$$

$$\tau^{IV} = \overline{M}_8^{IV} \gamma_8^{IV} \quad \text{или} \quad \overline{M}_8^{IV} = \tau^{IV} \cdot \frac{1}{\gamma_8^{IV}}$$

$$\tau^{IV} = \overline{M}_{12}^{IV} \gamma_{12}^{IV} \quad \text{или} \quad \overline{M}_{12}^{IV} = \tau^{IV} \cdot \frac{1}{\gamma_{12}^{IV}}$$

Черта над символом моментов указывает, что пока имеем дело с абсолютными величинами.

Чтобы выяснить знаки этих равенств, нужно задаться положительным направлением для угла вращения  $\tau^{IV}$ . Условимся всегда принимать углы  $\tau$  положительными, если узел повернулся по ходу часовой стрелки.

При этом условии, сохраняя правило знаков для моментов (§ 1) и при направлении обхода стержней, показанном на фиг. 8, будем иметь:

$$\begin{aligned} M_5^{IV} &= -\tau^{IV} \cdot \frac{1}{\varphi_5^{IV}} = \tau^{IV} \left( -\frac{1}{\varphi_5^{IV}} \right) \\ M_4^{IV} &= -\tau^{IV} \cdot \frac{1}{\gamma_4^{IV}} = \tau^{IV} \left( -\frac{1}{\gamma_4^{IV}} \right) \dots \dots \dots (1) \\ M_8^{IV} &= -\tau^{IV} \cdot \frac{1}{\gamma_8^{IV}} = \tau^{IV} \left( -\frac{1}{\gamma_8^{IV}} \right) \\ M_{12}^{IV} &= +\tau^{IV} \cdot \frac{1}{\gamma_{12}^{IV}} = \tau^{IV} \left( +\frac{1}{\gamma_{12}^{IV}} \right) \end{aligned}$$

В этом легко убедиться, если представить себе схему воздействия правой (загруженной) части конструкции на узел IV и левую часть и возникающее при этом противодействие левой части конструкции — как это изображено на фиг. 9.

Далее, предположим, что подвижной груз  $P=1$  переместился в некоторую точку  $n$  ригеля—*левее* узла IV.

Совершенно аналогично предыдущему получим зависимости:

$$\begin{aligned} \tau^{IV} &= \overline{M}_4^{IV} \cdot \varphi_4^{IV} \quad \text{или} \quad \overline{M}_4^{IV} = \tau^{IV} \cdot \frac{1}{\varphi_4^{IV}} \\ \tau^{IV} &= \overline{M}_5^{IV} \cdot \gamma_5^{IV} \quad \overline{M}_5^{IV} = \tau^{IV} \cdot \frac{1}{\gamma_5^{IV}} \\ \tau^{IV} &= \overline{M}_8^{IV} \cdot \gamma_8^{IV} \quad \overline{M}_8^{IV} = \tau^{IV} \cdot \frac{1}{\gamma_8^{IV}} \\ \tau^{IV} &= \overline{M}_{12}^{IV} \cdot \gamma_{12}^{IV} \quad \overline{M}_{12}^{IV} = \tau^{IV} \cdot \frac{1}{\gamma_{12}^{IV}} \end{aligned}$$

Для выяснения знаков этих равенств обратимся к схеме взаимодействия левой и правой части конструкции для этого случая (фиг. 10). При повороте узла IV в положительном направлении (по часовой стрелке) имеем знаки моментов:

$$\begin{aligned} M_4^{IV} &= +\tau^{IV} \cdot \frac{1}{\varphi_4^{IV}} = \tau^{IV} \cdot \left( +\frac{1}{\varphi_4^{IV}} \right) \\ M_5^{IV} &= +\tau^{IV} \cdot \frac{1}{\gamma_5^{IV}} = \tau^{IV} \cdot \left( +\frac{1}{\gamma_5^{IV}} \right) \dots \dots \dots (2) \\ M_8^{IV} &= -\tau^{IV} \cdot \frac{1}{\gamma_8^{IV}} = \tau^{IV} \cdot \left( -\frac{1}{\gamma_8^{IV}} \right) \\ M_{12}^{IV} &= +\tau^{IV} \cdot \frac{1}{\gamma_{12}^{IV}} = \tau^{IV} \cdot \left( +\frac{1}{\gamma_{12}^{IV}} \right) \end{aligned}$$

Совершенно подобного вида зависимости получим для случаев положения подвижного груза на стойках (8) и (12), при чем знаки моментов без всяких затруднений могут быть получены из соответствующих схем.

Общим следствием рассмотренных соотношений является, что имея значения величин угла вращения  $\tau$  некоторого узла конструкции при различных положениях подвижного груза  $P$ , мы всегда можем непосредственно перейти к величинам защемляющих моментов всех стержней, сходящихся в этом узле, путем простого умножения величин  $\tau$  на коэффициенты  $\left(\pm \frac{1}{\varphi}\right)$  или  $\left(\pm \frac{1}{\gamma}\right)$ , соответствующие рассматриваемым моментам.

Величины  $\varphi$  и  $\gamma$  являются известными, т. к. вычисляются заранее, при определении основных фокусных величин. Что же касается знаков, то они, как сказано выше, чрезвычайно просто определяются по обычному правилу знаков для опорных моментов, если задаться положительным направлением для углов  $\tau$ .

Из только что изложенного вытекает следующее положение: имея инфлюэнтную линию для угла поворота  $\tau$  некоторого узла, мы пропорциональным изменением ординат этой инфлюэнты в отношении  $\frac{1}{\gamma}$  и  $\frac{1}{\varphi}$  (с соответствующим знаком) получим инфлюэнтные линии для защемляющих моментов всех стержней, сходящихся в этом узле.

Таким образом, инфлюэнтная линия для угла  $\tau$  будет исходной линией для построения инфлюэнт опорных моментов, при чем ординаты последних будут отличаться от ординат инфлюэнты для  $\tau$  только масштабными числами  $\left(\pm \frac{1}{\varphi}\right)$  и  $\left(\pm \frac{1}{\gamma}\right)$ .

Вернемся к примеру на фиг. 8. Рассмотрим опорный момент  $M_5^{IV}$ . При положении подвижного груза  $P=1$  на ригеле вправо от узла IV масштабное число для перехода от инфлюэнты  $\tau$  к инфлюэнте момента  $M_5^{IV}$  будет  $\left(-\frac{1}{\varphi_5^{IV}}\right)$ , при перемещении груза  $P=1$  влево от узла IV масштабное число будет  $\left(+\frac{1}{\gamma_5^{IV}}\right)$ . Для опорного момента  $M_4^{IV}$  будем иметь соответственно  $\left(-\frac{1}{\gamma_4^{IV}}\right)$  и  $\left(+\frac{1}{\varphi_4^{IV}}\right)$ . Нетрудно будет прийти к общему заключению: каждому опорному моменту соответствуют в общем случае два масштабных числа  $\frac{1}{\varphi}$  и  $\frac{1}{\gamma}$  (каждое из них со своим знаком), при чем в отношении их применения рамная конструкция как бы разделяется на две части: к первой части (масшт. число  $\frac{1}{\varphi}$ ) относится сам стержень, опорный момент которого определяется, и вся та группа стержней, которую он связывает с рассматриваемым узлом. Ко второй части (масшт. число  $\frac{1}{\gamma}$ ) относятся все без исключения остальные стержни конструкции.

В частных случаях, когда перемещение подвижного груза предполагается лишь на определенной группе стержней (напр., вдоль ригелей), может случиться, что инфлюэнтная линия опорных моментов для стержней, не относящихся к этой группе (напр., для стоек), потребует на всем своем протяжении применения только одного масштабного числа

$\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ . В примере на фиг. 8. в таком положении оказываются опорные моменты стоек  $M_8^{IV}$  и  $M_{12}^{IV}$ , если перемещение подвижного груза осуществляется только вдоль ригеля рамы. Действительно, при любом положении груза на ригеле

$$M_8^{IV} = \tau^{IV} \left( -\frac{1}{\gamma_8^{IV}} \right); M_{12}^{IV} = \tau^{IV} \left( +\frac{1}{\gamma_{12}^{IV}} \right).$$

Практически это означает, что в раме без смещения узлов построение инфлюэнтных линий для подобных моментов становится излишним, если построена инфлюэнта для угла поворота  $\tau$ .

Последняя и будет общей инфлюэнтной для этих моментов. При пользовании ею нужно только иметь в виду масштабные числа с их знаками для перехода к конечному результату.

На фиг. 11 дается пример построения инфлюэнтных линий для заземляющих моментов в случае одноярусного виадука. Инфлюэнта угла  $\tau^{III}$  предполагается известной. Пропорциональным изменением величины ее ординат в отношении масштабных чисел построены инфлюэнтные линии для опорных моментов  $M_3^{III}$ ,  $M_4^{III}$  и  $M_8^{III}$ .

Подвижная нагрузка перемещается только вдоль ригелей конструкции.

При этом ограничении, как указано выше, построение особой инфлюэнты для опорного момента  $M_8^{III}$  является излишним, т. к. на всем своем протяжении инфлюэнты для  $M_8^{III}$  отличается от инфлюэнты для  $\tau^{III}$  одним и тем же масштабным числом  $\left(-\frac{1}{\gamma_8^{III}}\right)$ .

В заключение обзора зависимостей между инфлюэнтными линиями укажем на использование фокусных отношений  $K_a$  и  $K_b$  в некоторых случаях нахождения инфлюэнтных линий для опорных моментов.

Рассмотрим (фиг. 11) нижний опорный момент  $M_8^{VIII}$  стойки (8). При всех положениях подвижного груза на ригелях рамы верхний и нижний опорные моменты стойки (8) связаны фокусным отношением

$$M_8^{VIII} = -K_{a8} \cdot M_8^{III}.$$

Совершенно очевидно поэтому, что если инфлюэнта  $M_8^{III}$  построена, то для нахождения инфлюэнты  $M_8^{VIII}$  достаточно ординаты первой увеличить в отношении  $(-K_{a8})$ .

Далее, так как  $M_8^{III} = \tau^{III} \left( -\frac{1}{\gamma_8^{III}} \right)$ , то, очевидно,  $M_8^{VIII} = \tau^{III} \left( +\frac{K_{a8}}{\gamma_8^{III}} \right)$ , то-есть инфлюэнтная линия для  $M_8^{VIII}$  может быть получена из инфлюэнты для  $\tau^{III}$ , при чем масштабное число будет  $\left( +\frac{K_{a8}}{\gamma_8^{III}} \right)$ . Таким образом, инфлюэнта для  $\tau^{III}$  будет служить исходной линией не только при построении инфлюэнт для  $M_3^{III}$ ,  $M_4^{III}$ ,  $M_8^{III}$ , но и для нахождения инфлюэнты  $M_8^{VIII}$ .

### § 3. Построение инфлюэнтных линий для углов $\tau$ поворота узлов.

Для решения этой задачи воспользуемся общим методом из теории статически-неопределимых систем, основанным на применении теоремы Бетти. Пусть имеем раму (фиг. 12), для которой требуется по-

строить инфлюэнтную линию угла поворота  $\tau^I$  узла I. Если момент  $M^I = 1$ , приложенный извне к узлу I, вызывает в точке  $x$  прогиб  $y_x$ , а груз  $P = 1$ , находясь в точке  $x$ , вызывает вращение узла I на угол  $\tau^I$ , то по теореме Бетти:

$$M^I \cdot \tau^I = P_x \cdot y_x,$$

или, для  $M^I = 1$  и  $P_x = 1$ ,

$$\tau^I = y_x \dots \dots \dots (3)$$

То-есть, *инфлюэнтная линия для угла поворота  $\tau^I$  узла I есть упругая линия стержней рамы при действии на раму момента  $M^I = 1$ , приложенного в узле I.*

Отдельные участки инфлюэнтной линии на протяжении одного стержня, очевидно, представляют собой упругую линию простой балки на двух опорах, загруженной только двумя опорными моментами (мы рассматриваем раму, где смещения узлов не имеют места).

Опорные (зашемляющие) моменты для всех стержней могут быть легко найдены, пользуясь обычными приемами метода фокусов—применением фокусных отношений и коэффициентов распределения—как только будут определены опорные моменты стержней, сходящихся в рассматриваемом узле. Вычисление последних моментов, т.-е. распределение приложенного извне к узлу момента  $M = 1$  на стержни, сходящиеся в этом узле, не представляет ни малейшей трудности и производится помощью коэффициентов распределения, которые, конечно, отличаются от обычных коэффициентов распределения в методе фокусов, т. к. там момент распределяется с одного из стержней, сходящихся в узле на остальные, тогда как здесь момент, приложенный извне, подлежит распределению на все стержни. Но способ вычисления этих коэффициентов по угловым величинам  $\gamma$  стержней остается совершенно таким же, как обычно (чтобы сделать аналогию вполне очевидной, нужно только предположить, что внешний момент  $M = 1$  передается узлу через некоторый фиктивный дополнительный стержень, жестко связанный с узлом).

Например, для узла IV фиг. 8, коэффициент распределения внешнего момента на стержень 5-й будет выражаться по общей формуле:

$$\mu_5 = \frac{1}{\gamma_5^{IV}} \Big/ \left( \frac{1}{\gamma_5^{IV}} + \frac{1}{\gamma_4^{IV}} + \frac{1}{\gamma_8^{IV}} + \frac{1}{\gamma_{12}^{IV}} \right)$$

В дальнейшем будет дана формула, чрезвычайно упрощающая определение подобных коэффициентов распределения (гл. III).

Для построения упругой линии стержней рамы мы в общем случае должны иметь опорные моменты для всех стержней, которые и могут быть определены обычными приемами метода фокусов.

Но практически, как будет показано ниже (гл. III), достаточно будет найти моменты (правый и левый) только для стержней, сходящихся в данном узле.

Выяснив, таким образом, что инфлюэнтная линия для углов поворота может быть построена, как упругая линия стержней рамы, перейдем к способу построения подобных упругих линий.



#### § 4. Построение упругой линии простой балки на двух опорах, нагруженной опорными моментами.

Общий случай (фиг. 13), когда свободно-лежащая балка АВ нагружена опорными моментами  $M^A$  и  $M^B$ , по закону независимости действия сил легко может быть разложен на два отдельных случая (фиг. 13, а и в) одностороннего действия опорного момента  $M^A$  и момента  $M^B$ , при чем прогиб в любой точке от совместного действия моментов будет равен сумме отдельных прогибов, т.-е.

$$y = y_A + y_B \dots \dots \dots (4)$$

Рассмотрим одностороннее действие левого опорного момента  $M^A$ .

Ординаты прогибов  $y_A$  для этого случая, очевидно, будут легко получены, если мы будем иметь ординаты  $\lambda_A$  для частного случая  $M^A = 1$  (фиг. 14) уже вычисленными. Именно, из пропорциональной зависимости имеем:

$$y_A = M^A \cdot \lambda_A \dots \dots \dots (5)$$

Поэтому, задача может быть сведена к определению ординат прогибов  $\lambda_A$  от нагружения свободно лежащей балки АВ левым опорным моментом  $M^A = 1$  (фиг. 14)

Вычисление ординат может быть сделано обычными приемами сопротивления материалов: аналитически или графо-аналитически (по Mohr'у).

Аналитический прием дает решение путем двойного интегрирования основного уравнения изгиба

$$\lambda_A = - \int \int \frac{M_x}{E J_x} \cdot dx^2, \text{ где } x = \text{расстояние от левой опоры.}$$

Для нашего случая момент  $M_x = \frac{l-x}{l}$ , т.-е. прогиб

$$\lambda_A = - \int \int \frac{l-x}{E J_x \cdot l} dx^2.$$

Имея закон изменения момента инерции  $J_x$  по длине балки  $J_x = f(x)$ , можем получить решение в общем виде.

Для балки с постоянной жесткостью, то-есть при  $J_x = \text{const}$ , интегрирование дает формулу для вычисления прогиба

$$\lambda_A = \frac{1}{6 E J l} x (2l-x)(l-x) = \frac{l^2}{6 E J} \cdot \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) = \frac{l^2}{6 E J} \cdot \eta_A \cdot (6)$$

Коэффициент  $\eta_A = \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right)$  или  $\eta_A = m(2-m)(1-m)$ ,

где  $m = \frac{x}{l}$ , может быть легко вычислен для случая деления бруса на определенное число равных участков и значения его можно найти в большинстве справочников.

Приводим значения коэффициентов  $\eta_A$  для деления бруса на 10 и 12 равных частей:

при делении на 10 частей

$m = \frac{x}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\eta_A$	0	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099	0

при делении на 12 частей

$m = \frac{x}{l}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	1
$\eta_A$	0	0,146	0,255	0,328	0,370	0,385	0,375	0,344	0,296	0,234	0,162	0,083	0

Небезынтересно будет указать, что максимальное значение коэффициента  $\eta_A$  соответствует абсциссе

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} l = 0,422 l, \text{ при чем } \max \eta_A = 0,385.$$

Нетрудно видеть, что желая воспользоваться приведенными в таблице коэффициентами для построения упругой линии при действии момента  $M^A = 1$  на правой опоре, мы должны брать табличные величины в обратном порядке, т.-е. читать таблицу с конца.

В случае, когда момент инерции  $J_x$  не постоянен по всей длине бруса—имеются втулы или очертание стержня непрерывно меняется по всей длине—аналитический метод решения в виду возникающих трудностей становится невыгодным и должен уступить место графоаналитическим приемам. Способ построения упругой линии бруса с переменной жесткостью по Mohr'у общеизвестен, и касаться его здесь не будем. Он может быть положен в основу вычисления коэффициентов  $\eta_A$  для наиболее употребительных на практике случаев стержней с переменным моментом инерции.

Однако, подобные вычисления становятся излишними, если принять во внимание, что интересующие нас величины  $\eta$  могут быть непосредственно взяты из таблиц Suter'a\*) (в его „Methode der Festpunkte“) для т. н. „перекрестных“ отрезков  $Y_A$  и  $Y_B$  (см. § 1)

В возможности пользования указанными таблицами легко убедиться путем несложных рассуждений.

Пусть (фиг. 15) имеем балку АВ, прогиб которой под действием опорного момента  $M^A = 1$  требуется определить.

По теореме Бетти, предполагая балку сначала загруженной опорным моментом  $M^A = 1$ , под действием которого в некоторой точке  $x$  получается прогиб  $\eta_A$ , а во втором случае—грузом  $P_x = 1$ , в точке  $x$ , влиянием которого вызывается поворот конца балки на опоре А на угол  $\alpha_0^A$ , имеем равенство:

$$M^A \cdot \alpha_0^A = P_x \cdot \lambda, \text{ то-есть, } 1 \cdot \alpha_0^A = 1 \cdot \lambda \text{ или } \lambda_A = \alpha_0^A \dots (7)$$

\*) Аналогичные таблицы даются также Strassner'ом в „Neuere Methoden“. Таблицы Suter'a приводятся в „Расчете рамных конструкций“ проф. Г. В. Ульянинского. Изд. 3-е и 4-е.

По теории фокусов „перекрестный“ отрезок  $Y_B = -\frac{\alpha_0^A}{\beta}$ .

В таблице Suter'a для „перекрестных“ отрезков  $Y_B = -l v_2$ , где  $v_2$  — коэффициент в нижней строке одного из горизонтальных рядов таблицы.

Из последних 2-х равенств  $\alpha_0^A = -Y_B \cdot \beta = l \beta v_2$

Следовательно  $\lambda_A = \alpha_0^A = l \beta v_2$  . . . . . (8)

Для стержня с постоянной жесткостью нами ранее было получено

$$\lambda_A = \frac{l^2}{6 E J} \cdot \eta_A.$$

Принимая во внимание, что при  $J_x = \text{const.}$   $\frac{l}{6 E J} = \beta$ , и это равенство может быть представлено в виде

$$\lambda_A = l \beta \eta_A, \dots \dots \dots (9)$$

замечаем, что для случая переменного момента инерции формула (8) совершенно идентична формуле для постоянного момента инерции (9), при чем коэффициент  $v_2 = \eta_A$ .

Таким образом, формула для прогиба

$$\lambda_A = l \beta \eta_A \dots \dots \dots (10)$$

является универсальной для всех случаев, как постоянного так и переменного  $J$ , при чем  $\eta_A = v_2$  из таблиц Suter'a.

Совершенно подобными рассуждениями выведем, что для прогиба под действием правого опорного момента  $M^B = 1$  существует универсальная формула

$$\lambda_B = l \beta \eta_B, \dots \dots \dots (10')$$

где  $\eta_B = v_1$  — коэффициенту в верхней строке таблиц Suter'a.

В общем случае, для любых опорных моментов  $M^A$  и  $M^B$ , по формуле (5) этого §-а имеем

$$y_A = M^A \lambda_A = M^A l \beta \eta_A$$

$$y_B = M^B \lambda_B = M^B l \beta \eta_B$$

При совместном действии моментов прогиб

$$y = y_A + y_B = M^A l \beta \eta_A + M^B l \beta \eta_B = l \beta (M^A \eta_A + M^B \eta_B) \dots (11)$$

Эта формула является общей для определения прогибов простой балки на двух опорах при загрузке ее опорными моментами.

Она справедлива как для постоянной, так и для переменной жесткости бруса, при чем ее коэффициенты  $\eta_A = v_2$  и  $\eta_B = v_1$  могут быть взяты из таблиц Suter'a.

Угловая величина  $\beta$  для случаев переменной жесткости берется также по соответствующим таблицам Suter'a.

Моменты  $M^A$  и  $M^B$  должны быть взяты со своими знаками (см. § 1).

Если между моментами  $M^A$  и  $M^B$  существует фокусная зависимость  $M^B = -K_B \cdot M^A$ , общая формула принимает вид

$$y = M^A \beta l (\eta_A - K_B \eta_B) \dots \dots \dots (12)$$

При расчете рам по линиям влияния всегда имеем дело также с учетом равномерно-распределенной нагрузки (собственный вес или эквивалентная нагрузка), для чего, конечно, должны быть определены площади участков инфлюэнтной линии.

Покажем, что в предлагаемом способе построения инфлюэнт, как упругих линий, чрезвычайно легко могут быть определены площади отдельных участков инфлюэнтных линий, при чем вычисление будет произведено с полной математической точностью.

Определим площадь, ограниченную упругой линией балки, нагруженной опорным моментом  $M^A = 1$ .

Ранее в этом параграфе применением теоремы Бетти было показано, что эта упругая линия представляет собой инфлюэнту для угла поворота левого конца балки на опоре А —  $\alpha_0^A$ .

Поэтому, загружая балку равномерной нагрузкой интенсивностью  $\frac{p}{m}$  мы должны получить угол  $\alpha_0^A$  равным

$$\alpha_0^A = p \cdot \Omega_A, \dots \dots \dots (13)$$

где  $\Omega_A$  — площадь, ограниченная упругой линией.

По таблицам Suter'a для „перекрестных“ отрезков при загрузке и стержня равномерно-распределенной нагрузкой\*) имеем

$$Y_B = - \frac{\alpha_0^A}{\beta} = - p l^2 \cdot \nu_2, \text{ откуда} \\ \alpha_0^A = p \beta l^2 \nu_2 \dots \dots \dots (14)$$

Здесь  $\nu_2$ , как и ранее, коэффициент в нижней строке таблиц. Из сравнения равенств (13) и (14) имеем

$$\Omega_A = \beta l^2 \nu_2^{**}).$$

Примем для коэфф-та  $\nu_2$  в этой формуле иное обозначение, чтобы не путать его с соответствующим коэфф-том в формуле для прогиба, именно, примем  $\nu_2 = \nabla_A$ ; тогда получим формулу для площади

$$\Omega_A = \beta l^2 \nabla_A \dots \dots \dots (15)$$

Для любого момента  $M^A$ , очевидно, получим общую формулу

$$\Omega_A = M^A \beta l^2 \nabla_A.$$

Совершенно аналогичными рассуждениями для упругой линии от действия правого опорного момента получим выражение для площади

$$\Omega_B = M^B \beta l^2 \nabla_B,$$

где  $\nabla_B = \nu_1$  из таблиц Suter'a.

\*) См. эту таблицу в „Расчете рамных конструкций“ проф. Г. В. Ульянинского изд. 4-е, г. Томск, стр. 182 и 184.

\*\*) В частном случае для стержня с постоянной жесткостью площадь  $\Omega_A$  может быть легко определена простой квадратурой

$$\Omega_A = \int_0^l \lambda_A dx = \int_0^l \frac{l^2}{6EJ} \cdot \eta_A \cdot dx,$$

При  $\eta_A = \frac{x}{l} \left( 2 - \frac{x}{l} \right) \left( 1 - \frac{x}{l} \right)$ , выполняя интегрирование, имеем

$$\Omega_A = \frac{l^2}{6EJ} \cdot \frac{l}{4} = \frac{l^3}{6EJ} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \beta l^2.$$

Площадь упругой линии при совместном действии правого и левого опорных моментов выразится

$$\Omega = \Omega_A + \Omega_B = M^A \beta l^2 \nabla_A + M^B \beta l^2 \nabla_B = \beta l^2 (M^A \nabla_A + M^B \nabla_B) \dots \dots \dots (16)$$

Это есть общая формула для определения площади упругой линии простой балки, изгибаемой опорными моментами  $M^A$  и  $M^B$ .

Коэффициенты  $\nabla_A$  и  $\nabla_B$  берутся из таблиц Suter'a для „перекрестных“ отрезков в случае равномерно-распределенной нагрузки, причем  $\nabla_A = \nu_2$  и  $\nabla_B = \nu_1$ .

Моменты должны быть взяты с их знаками (см. § 1).

Для наиболее часто встречающихся в практике стержней симметричного очертания (напр., стержни с равными двухсторонними вутами, стержни постоянной жесткости)

коэффициенты  $\nabla_A = \nabla_B = \nu_2 = \nu_1 = 0,25 = \frac{1}{4}$ .

Общая формула в этом случае весьма упрощается и имеет вид

$$\Omega = \frac{1}{4} \beta l^2 (M^A + M^B) \dots \dots \dots (17)$$

Эта формула имеет применение в большинстве случаев, встречающихся в практике.

Совершенно очевидно, что при изменении всех ординат упругой линии в известном отношении, площадь, ограниченная упругой линией изменится в том же отношении, т. е. например, если измененная ордината

$$y' = y \cdot \frac{1}{\gamma},$$

то новая площадь

$$\Omega' = \Omega \cdot \frac{1}{\gamma}.$$

Подведем итоги всему изложенному о построении линий влияния в рамах с неподвижными узлами.

1. Предлагаемый метод может быть применен ко всем видам рамных конструкций без замкнутых контуров, в частности, очевидно, к неразрезным балкам,

2. Линии влияния защемляющих моментов стержней, сходящихся в некотором узле конструкции, могут быть получены из линии влияния для угла поворота этого узла путем пропорционального измерения ординат этой последней в отношении коэффициентов  $\left(\pm \frac{1}{\phi}\right)$  и

$\left(\pm \frac{1}{\gamma}\right)$ , соответствующих рассматриваемым моментам, при чем знак устанавливается по общему правилу знаков для моментов в теории фокусов. В известных случаях линия влияния угла поворота узла может служить линией влияния для некоторых защемляющих моментов.

3. Линия влияния для угла поворота узла рамной конструкции строится, как упругая линия стержней при действии на раму момента  $M = 1$ , приложенного в рассматриваемом узле.

Указанный момент  $M = 1$  распределяется по конструкции помощью коэффициентов распределения и фокусных отношений обычными приемами метода фокусов.

4. Упругие линии отдельных стержней, как в случае постоянной, так и в случае переменной жесткости, строятся по заземляющим моментам помощью коэффициентов из таблиц Suter'a для нахождения т. н. „перекрестных“ отрезков.

5. Площади, ограниченные упругой линией стержней, (т.е. площади участков линии влияния) могут быть попутно определены с полной математической точностью при помощи чрезвычайно простой формулы, как для случая постоянной жесткости стержней так и в случае переменной, при чем коэффициенты, входящие в формулу площади берутся из тех же вышеупомянутых таблиц Suter'a для „перекрестных“ отрезков“.

## II. Построение линий влияния в рамных конструкциях с подвижными узлами.

Как уже было указано во введении, построение линий влияния для общего случая рамы с подвижными узлами при пользовании предлагаемым в настоящей статье способом, разделяется на 2 самостоятельных расчетных части. В первой расчетной части введением фиктивных опор, по числу ярусов системы, обеспечивают узлам рамы линейную неподвижность, после чего определяют основные заземляющие моменты, т.е. строят линии влияния для основных заземляющих моментов в предположении неподвижности узлов конструкции.

Во второй расчетной части, совершенно независимой от первой, строятся линии влияния для дополнительных моментов, возникающих вследствие смещения узлов рамы при различных положениях подвижной нагрузки.

Линии влияния полных заземляющих моментов получаются путем суммирования соответствующих ординат линий влияния для основных и для дополнительных моментов.

### § 1. Построение линий влияния для дополнительных заземляющих моментов, возникающих вследствие смещения узлов рамы.

Для понимания дальнейших выводов и формул уместно в кратком виде напомнить сущность II-й расчетной части общего метода фокусов.

Будем придерживаться способа изложения, принятого проф. Г. В. Ульянинским в „Расчете рамных конструкций“ (изд. 3-е 1928 г. и изд. 4-е 1929 г.)

Рассмотрим рамную систему с 3-мя независимыми перемещениями, т.е. 3-х ярусную систему, в которой для придания неподвижности узлам требуется введение 3-х фиктивных опор.

Придаем 1-й фиктивной опоре смещение  $\Delta x = 0,001$  м., сохраняя неподвижность двух других опор\*). Реакции фиктивных опор для этого случая обозначим  $Z_{I-I}$ ,  $Z_{II-I}$  и  $Z_{III-I}$ . Заземляющие моменты, исчисленные для этого случая, назовем  $\mathfrak{M}_I$ .

Совершенно таким же образом\*), придавая 2-й фиктивной опоре смещение  $\Delta x = 0,001$  м., находим реакции фиктивных опор  $Z_{I-II}$ ,  $Z_{II-II}$  и  $Z_{III-II}$  для этого случая. Заземляющие моменты обозначаем  $\mathfrak{M}_{II}$ .

Придавая смещение  $\Delta x = 0,001$  м. 3-й фиктивной опоре, в свою очередь, имеем реакции  $Z_{I-III}$ ,  $Z_{II-III}$  и  $Z_{III-III}$  и моменты  $\mathfrak{M}_{III}$ .

\*) Отдельные, независимые фазы смещения могут иметь и иную интерпретацию, что ничуть не отражается на дальнейших выводах. См. об этом теорию метода фокусов.

Если под влиянием некоторой внешней нагрузки действительные смещения 1-го, 2-го и 3-го ярусов выразятся величинами

$$\delta_I^I = K_I \cdot \Delta x, \quad \delta_I^{II} = K_{II} \cdot \Delta x, \quad \delta_I^{III} = K_{III} \cdot \Delta x,$$

то по принципу независимости действия сил и в виду пропорциональности между силовыми воздействиями и перемещениями, дополнительные защемляющие моменты вследствие смещения узлов будут иметь величину

$$M' = K_I \cdot \mathfrak{M}_I + K_{II} \cdot \mathfrak{M}_{II} + K_{III} \cdot \mathfrak{M}_{III} \dots \dots \dots (18)$$

Таким образом, для определения дополнительных защемляющих моментов нужно знать смещения 1-го, 2-го и 3-го ярусов или, что то же, коэффициенты  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $K_{III}$ . Эти коэффициенты смещения вычисляются для каждого отдельного случая внешней нагрузки путем составления и решения системы линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} K_I Z_{I-I} + K_{II} Z_{I-II} + K_{III} Z_{I-III} &= V_I \\ K_I Z_{II-I} + K_{II} Z_{II-II} + K_{III} Z_{II-III} &= V_{II} \\ K_I Z_{III-I} + K_{II} Z_{III-II} + K_{III} Z_{III-III} &= V_{III} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

где  $V_I$ ,  $V_{II}$  и  $V_{III}$  — смещающие силы для 1-й, 2-й и 3-й фиктивных опор, вычисленные для данного случая внешней нагрузки.

В статическом отношении эти уравнения, после перенесения величин  $V$  в 1-ю часть, означают, что полные реакции фиктивных опор, после совместного осуществления смещений  $K_I \Delta x$ ,  $K_{II} \Delta x$  и  $K_{III} \Delta x$ , равны нулю, что конечно, и должно быть, т. к. в действительности никаких фиктивных опор нет.

Таким образом, при наличии в системе  $n$  независимых перемещений мы для каждого случая нагрузки должны решать  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными.

В случае одноярусной системы нужно решать только одно уравнение с одним неизвестным, т.е. фактически решение уравнений отпадает: именно,

$$K Z = V,$$

откуда  $K = \frac{V}{Z}$ , и дополнительные моменты от смещения

$$M' = K \mathfrak{M} = \frac{V}{Z} \cdot \mathfrak{M} = V \cdot \frac{\mathfrak{M}}{Z} = V \cdot m, \dots \dots \dots (20)$$

где  $m = \frac{\mathfrak{M}}{Z}$  — моменты от действия смещающей силы  $V = 1$ .

Переходим к вопросу о построении инфлюэнтных линий для дополнительных моментов от смещения узлов.

Общее выражение для дополнительных защемляющих моментов

$$M' = K_I \cdot \mathfrak{M}_I + K_{II} \mathfrak{M}_{II} + K_{III} \mathfrak{M}_{III} \dots \dots \dots (18)$$

Моменты  $\mathfrak{M}_I$ ,  $\mathfrak{M}_{II}$  и  $\mathfrak{M}_{III}$  известны. Коэффициенты  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $K_{III}$ , пропорциональные смещениям, являются величинами переменными, зависящими от положения подвижного груза  $P = 1$ .

Следовательно, для построения инфлюэнтных линий дополнительных моментов должны быть предварительно построены инфлюэнтные линии для коэффициентов  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $K_{III}$  или для смещений  $\delta_I^I = K_I \Delta x$ ,  $\delta_I^{II} = K_{II} \Delta x$  и  $\delta_I^{III} = K_{III} \Delta x$ .

Имея последние инфлюэнтные линии, мы умножением их ординат на известные величины  $\mathfrak{M}_I$ ,  $\mathfrak{M}_{II}$  и  $\mathfrak{M}_{III}$  и соответствующим сложением получим ординаты для дополнительных моментов  $M'$ .

Таким образом, нужно уметь строить линии влияния для смещений.

Пусть имеем (фиг. 16) некоторую рамную систему, для смещения 2-го яруса которой требуется построить линию влияния.

Воспользуемся теоремой Бетти. Если смещающая сила  $V_{II} = 1$ , вызвав общую деформацию рамы, создает в точке  $x$  прогиб  $y_x$ , а груз  $P_x = 1$ , приложенный в точке  $x$ , вызывает смещение 2-го яруса  $\delta_I^{II} = K_{II} \Delta x$ , то должно выполняться равенство

$$P_x \cdot \delta_I^{II} = V_{II} \cdot y_x,$$

откуда, при  $P_x = 1$  и  $V_{II} = 1$ ,

$$\delta_I^{II} = y_x, \dots \dots \dots (21)$$

иными словами, для построения инфлюэнтной линии смещения  $\delta_I^{II}$  нужно приложить к раме (по направлению этого смещения) смещающую силу  $V_{II} = 1$  и построить для этой нагрузки упругую линию стержней рамы, которая и будет искомой инфлюэнтной линией.

Построение этой упругой линии не встречает затруднений. Деформация каждого отдельного стержня при загрузении рамы только внешней смещающей силой в общем случае (фиг. 17) состоит из:

- 1) смещения узлов, служащих опорами стержня; линия, соединяющая узлы АВ, после деформации принимает новое положение А'В'.
- 2) изгиба стержня относительно линии А'В' под влиянием опорных моментов  $m^A$  и  $m^B$ .

В некоторых частных случаях, когда линия АВ, соединяющая узлы после деформации, сохраняет свое первоначальное положение (например, горизонтальные ригеля рам с вертикальными стойками), первая часть деформации отсутствует, и упругая линия рамы для этих стержней может быть построена непосредственно по указаниям главы I этой статьи.

Для всех же других стержней сначала нужно построить картину смещения узлов рамы, т.е. схему рамы с измененным положением узлов после деформации (на фиг. 16 показано пунктиром) и уже после этого по указаниям главы I этой статьи построить кривые прогибов отдельных стержней под действием опорных моментов.

Порядок построения линии влияния для смещения будет таков.

- 1) Предварительно нужно определить защемляющие моменты и реакции фиктивных опор  $\mathfrak{M}$ ,  $Z_I$ ,  $Z_{II}$  и  $Z_{III}$  от смещения на  $\Delta x = 0,001$  м. 1-й, 2-й и 3-ей фиктивных опор.

- 2) Прикладываем в направлении смещения, линию влияния которого требуется построить (напр.  $\delta_I^{II}$ ), смещающую силу  $V = 1$ .



Составляем систему линейных уравнений (19):

$$\left. \begin{aligned} K_I'' Z_{I-I} + K_{II}'' Z_{I-II} + K_{III}'' Z_{I-III} &= 0 \\ K_I'' Z_{II-I} + K_{II}'' Z_{II-II} + K_{III}'' Z_{II-III} &= 1 \\ K_I'' Z_{III-I} + K_{II}'' Z_{III-II} + K_{III}'' Z_{III-III} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Значек (')} \text{ означает, что} \\ \text{смещения определяются} \\ \text{для случая смещающей си-} \\ \text{лы } V_{II} = 1 \text{ во 2-м ярусе.} \end{array}$$

и решаем ее относительно неизвестных коэффициентов смещения  $K''$ :

$$\begin{aligned} K_I'' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & Z_{I-II} & Z_{I-III} \\ 1 & Z_{II-II} & Z_{II-III} \\ 0 & Z_{III-II} & Z_{III-III} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{I-I} & Z_{I-II} & Z_{I-III} \\ Z_{II-I} & Z_{II-II} & Z_{II-III} \\ Z_{III-I} & Z_{III-II} & Z_{III-III} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} Z_{I-II} & Z_{I-III} \\ Z_{III-II} & Z_{III-III} \end{vmatrix}}{D} \\ K_{II}'' &= \frac{\begin{vmatrix} Z_{I-I} & 0 & Z_{I-III} \\ Z_{II-I} & 1 & Z_{II-III} \\ Z_{III-I} & 0 & Z_{III-III} \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} Z_{I-I} & Z_{I-III} \\ Z_{III-I} & Z_{III-III} \end{vmatrix}}{D} \dots \dots (22) \\ K_{III}'' &= \frac{\begin{vmatrix} Z_{I-I} & Z_{I-II} & 0 \\ Z_{II-I} & Z_{II-II} & 1 \\ Z_{III-I} & Z_{III-II} & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} Z_{I-I} & Z_{I-II} \\ Z_{III-I} & Z_{III-II} \end{vmatrix}}{D} \end{aligned}$$

Как видим, решение уравнений для случая одной смещающей силы (при 2-х других, равных нулю) облегчается тем, что числители обращаются в миноры определителя системы (Д).

Имея коэффициенты  $K_I''$ ,  $K_{II}''$  и  $K_{III}''$ , получаем величины защемляющих моментов при действии смещающей силы  $V_{II} = 1$

$$m_{II} = K_I'' \cdot \mathfrak{M}_I + K_{II}'' \mathfrak{M}_I + K_{III}'' \mathfrak{M}_{III}.$$

Смещения ярусов системы при этом будут

$$\delta_{I-II} = K_I'' \Delta x, \quad \delta_{II-II} = K_{II}'' \Delta x, \quad \delta_{III-II} = K_{III}'' \Delta x.$$

3) По полученным смещениям узлов и защемляющим моментам строим упругую линию рамы, каковая и будет искомой линией влияния для смещения.

Совершенно таким же путем могут быть построены инфлюэнтные линии для смещений остальных ярусов.

Нетрудно видеть, что при решении соответствующих систем линейных уравнений для определения коэффициентов  $K$ , мы при одном и том же определителе системы (Д) в знаменателе формул,

будем иметь в числителе, как и в разобранным случае, миноры определителя (Д).

Поэтому вычисления при решении уравнений не составят большого труда.

Построив линии влияния для смещений отдельных ярусов, мы по формуле (18) этого §-а можем построить линию влияния для дополнительных моментов  $M'$  от смещения узлов рамы.

*В одноярусных системах построение линий влияния для дополнительных моментов от смещения весьма упрощается.*

Дополнительные моменты

$$M' = K \cdot \mathfrak{M} \dots \dots \dots (20)$$

Величина  $\mathfrak{M}$  — равная моменту при смещении фиктивной опоры на  $\Delta x = 0,001$  м. — определяется предварительным вычислением и является величиной постоянной для каждого рассматриваемого защемляющего момента.

Коэффициент  $K$  смещения; общий для всех моментов, есть величина переменная, для которой требуется построить линию влияния.

*Линия влияния для  $K$  или для смещения  $\delta_i = K \Delta x$  может служить общей инфлюэнтной линией для всех дополнительных защемляющих моментов.*

Чтобы построить линию влияния для  $\delta_i = K \cdot \Delta x$ , прикладываем в направлении возможного смещения смещающую силу  $V = 1$  и по защемляющим моментам для этого случая  $m = \frac{\mathfrak{M}}{Z}$  (см. выше) и величине смещения  $\delta_{v=1} = \frac{\Delta x}{Z} = \frac{0,001}{Z}$  строим упругую линию рамы.

Она и явится искомой линией влияния для  $\delta_i = K \cdot \Delta x$

Имея линию влияния для смещения  $\delta_i$ , мы, умножая ее ординаты на величины  $\frac{\mathfrak{M}}{\Delta x}$ , получим величины дополнительных защемляющих моментов, т. к.  $\delta_i \cdot \frac{\mathfrak{M}}{\Delta x} = K \Delta x \cdot \frac{\mathfrak{M}}{\Delta x} = K \cdot \mathfrak{M} = M'$ .

Практические примеры построения линий влияния дополнительных моментов даются в приложении к настоящей статье.

## § 2. Применение изложенного способа построения линий влияния дополнительных моментов к расчету рам под фиксированной нагрузкой.

Изложенный способ построения линий влияния для дополнительных моментов справедлив для всех возможных случаев рамных конструкций, т. к. основан на применении общей теоремы Бетти.

Общеизвестно, что при расчете рам (особенно с замкнутыми контурами) по методу фокусов наибольшую трудность и сложность представляет определение дополнительных моментов от смещения, так как для каждого случая внешней нагрузки мы должны вычислять смещающие силы и, после подстановки найденных величин в линейные уравнения для смещений  $K$ , каждый раз должны решать систему из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными, если  $n =$  числу ярусов системы.

Вычисление смещающих сил является особенно громоздкой работой.

В предложенном способе построения линий влияния определение смещающих сил отпадает; что же касается решения линейных уравнений, то оно чрезвычайно упрощается, если, как указано выше, воспользоваться методом детерминантов: все элементы детерминантов представляют собой величины  $Z$ , знаменатель формул для  $K$  одинаков для всех



где  $\beta$  и  $l$  — величины относящиеся к данному ригелю,  $m^A$  и  $m^B$  левый и правый защемляющие моменты,  $\eta_A$  и  $\eta_B$  коэффициенты, соответствующие положению груза на ригеле, т.е. его расстоянию от опор А и В.

При действии равномерно-распределенной нагрузки  $P \frac{\text{тонн}}{\text{пог. метр}}$ :

$$\begin{aligned} K_I &= P \cdot \frac{\beta l^2}{\Delta x} \left( m_I^A \eta_A + m_I^B \eta_B \right) \\ K_{II} &= P \cdot \frac{\beta l^2}{\Delta x} \left( m_{II}^A \eta_A + m_{II}^B \eta_B \right) \dots \dots \dots (24) \\ K_{III} &= P \cdot \frac{\beta l^2}{\Delta x} \left( m_{III}^A \eta_A + m_{III}^B \eta_B \right) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Любой дополнительный момент от смещений при известных К может быть получен по формуле (18)

$$M' = K_I \mathfrak{M}_I + K_{II} \mathfrak{M}_{II} + K_{III} \mathfrak{M}_{III} \dots \dots \dots$$

Таким образом, для любого случая загрузки ригелей рамы мы можем получить дополнительные моменты, не определяя смещающих сил и не решая для каждого отдельного случая системы уравнений.

Легко видеть, что при горизонтальной нагрузке в узлах стоек мы можем получить значения дополнительных моментов непосредственно, путем пропорционального увеличения моментов  $m_I, m_{II}, m_{III} \dots$ , соответствующих узловой нагрузке  $V_I = 1, V_{II} = 1, V_{III} = 1$  и т. д.

Отсюда следует, что для случаев, когда кроме нагрузки ригелей должна учитываться также горизонтальная узловая нагрузка стоек, предлагаемый способ использования инфлюэнтных линий при расчете рам под фиксированной нагрузкой не встречает в своем применении каких-либо затруднений.

Общие формулы (23) и (24) для определения коэффициентов К значительно упрощаются для случая, когда ригель принимается балкой с постоянной жесткостью. В виду практического интереса дадим эти формулы с численными коэффициентами для случаев часто встречающихся в практике. Смещение  $\Delta x$  принимается равным 0,001 м.

Если сосредоточенный груз Р находится в расстоянии  $a$  от левой опоры А, то:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } a &= \frac{l}{4} & K &= P \beta l (328 m^A + 234 m^B) \\ \text{при } a &= \frac{l}{3} & K &= P \beta l (370 m^A + 296 m^B) \\ \text{при } a &= \frac{l}{2} & K &= 375 P \beta l (m^A + m^B) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

Если весь пролет ригеля загружен равномерно-распределенной нагрузкой  $P \frac{\text{тонн}}{\text{пог. метр}}$ ,

$$K = 250 P \beta l^2 (m^A + m^B) \dots \dots \dots (26)$$

В заключение можно указать, что как и обычно в методе фокусов, наличие в системе 2-х—3-х ярусов следует считать пределом практической применимости изложенного приема. При числе ярусов  $> 3$ , вычисления становятся настолько громоздкими, что пользование методом фокусов делается практически невыгодным, т. к. аналитические методы (напр. метод фиктивных шарниров, метод Гелера) дают более быстрое и изящное решение.

Подведем краткие итоги всему изложенному во 2-й главе.

1) Построение линий влияния для защемляющих моментов в рамах с подвижными узлами разделяется на 2 самостоятельных расчетных части: в 1-й части расчета вводятся фиктивные опоры и строятся линии влияния для рамы с неподвижными узлами—т.е. линии влияния для основных защемляющих моментов. Во второй части строят линии влияния для дополнительных моментов, возникающих вследствие смещения узлов рамы.

2) Способ построения линий влияния для дополнительных моментов, изложенный в настоящей главе, применим ко всем без исключения случаям рам.

3) Для построения линий влияния дополнительных моментов нужно предварительно построить линии влияния для каждого независимого перемещения системы (напр., в 3-х ярусной системе потребуется построить 3 отдельных инфлюэнты для смещений каждого яруса). В случае одноярусной рамы линия влияния для смещения может служить общей инфлюэнтной для всех защемляющих моментов, т. к. линии влияния моментов отличаются от линии влияния для смещения только масштабным числом  $\frac{M}{\Delta x}$ , известным для каждого момента.

4) Для построения линии влияния для смещения нужно приложить к раме в направлении этого смещения смещающую силу  $V = 1$  и построить для этого случая линию прогиба рамы. Для возможности такого построения должны быть определены все независимые смещения и защемляющие моменты. Если груз перемещается только по определенной группе стержней, защемляющие моменты вычисляются только для этих стержней.

5) Для получения, по линиям влияния для смещений, линий влияния дополнительных моментов, ординаты первых умножаются на коэффициенты  $\frac{M_1}{\Delta x}$ ,  $\frac{M_{II}}{\Delta x}$ ,  $\frac{M_{III}}{\Delta x}$  . . . . (которые представляют собой соответствующие защемляющие моменты при смещении 1-й, 2-й и т. д. фиктивных опор на  $\Delta x$ , разделенные на величину  $\Delta x$  в мт.) и алгебраически складываются.

6) При расчете рам с горизонтальными ригелями при вертикальных стойках под фиксированной нагрузкой применение изложенного способа построения линий влияния может оказать существенное облегчение при вычислении дополнительных моментов от смещения, если можно будет избежать построения самих линий влияния для смещения и для вычисления смещений воспользоваться готовыми формулами. Это условие выполняется, когда нагрузка отсутствует в пределах стоек и имеется только на ригелях и в узлах стоек.

### III. Практическое применение изложенного способа построения линий влияния.

§ 1. Использование свойств угловых фокусов. Наличие в упруго-зашемленном стержне фокусных точек для моментов имеет непосредственным следствием существование совершенно аналогичных фокусных точек для углов поворота опорных узлов данного стержня.

Действительно, пусть некоторый стержень АВ (фиг. 18) рамной конструкции (с неподвижными узлами) подвергается изгибу вследствие поворота узла В, вызываемого загрузением пролетов правее стержня АВ.

Назовем углы поворота узлов А и В через  $\tau^A$  и  $\tau^B$ , при чем будем считать эти углы положительными в случае поворота узла по ходу часовой стрелки.

Если конец В стержня АВ, жестко связанный с узлом В, повернулся на угол  $\tau^B$ , то мы должны рассматривать этот поворот, как результат действия опорного момента  $M^B$ . Из определения угловой величины  $\gamma^B$  (§ 1 гл. I) следует равенство  $\tau^B = \overline{M^B} \gamma^B$ . Далее, рассуждая совершенно также как в § 2 гл. I и пользуясь обычным правилом знаков для моментов, из схемы воздействия правой части конструкции на стержень АВ (подобно фиг. 9) получим знак этого равенства

$$\tau^B = - M^B \gamma^B \dots \dots \dots (27)$$

Затем, поворот узла А на угол  $\tau^A$ , является результатом действия на узел момента  $M^A$ , противоположного по направлению защемляющему моменту  $M^A$ . Из определения угловой величины  $\varphi^A$  имеем  $\tau^A = M^A \cdot \varphi^A$ .

Представляя себе схему взаимодействия левой части конструкции и стержня АВ (подобно фиг. 9), можем приписать этому последнему равенству нужный знак

$$\tau^A = - M^A \varphi^A \dots \dots \dots (28)$$

Для нашего случая защемляющие моменты связаны фокусным отношением

$$\frac{M^A}{M^B} = - K_a \dots \dots \dots (29)$$

Деля равенство (28) на (27) и пользуясь (29), получаем

$$\frac{\tau^A}{\tau^B} = + \frac{M^A}{M^B} \cdot \frac{\varphi^A}{\gamma^B} = - K_a \cdot \frac{\varphi^A}{\gamma^B} = \text{const} \dots \dots \dots (30)$$

Таким образом, между углами поворота узлов существует постоянное фокусное отношение, совершенно аналогичное моментному фокусному отношению.

Обозначим величину  $K_a \frac{\varphi^A}{\gamma^B}$  через  $\chi_a$  и назовем её по аналогии с  $K_a$  левым угловым фокусным отношением. Тогда

$$\frac{\tau^A}{\tau^B} = - \chi_a .$$

$$\text{Равенство} \quad \chi_a = K_a \frac{\varphi^A}{\gamma^B} \dots \dots \dots (31)$$

является общей формулой для вычисления левого углового фокусного отношения  $\chi_a$  по левому моментному фокусному отношению  $K_a$ .

Для случая, когда загруженные пролеты находятся левее стержня АВ, точно такими же рассуждениями убедимся в существовании правого углового фокусного отношения  $x_b$

$$\frac{\tau^B}{\tau^A} = -K_b \frac{\varphi^B}{\gamma^A} = -x_b = \text{const.}$$

Равенство  $x_b = K_b \frac{\varphi^B}{\gamma^A} \dots \dots \dots (32)$

является общей формулой для вычисления правого углового фокусного отношения по известному правому моментному фокусному отношению.

Угловые величины  $\varphi$  и  $\gamma$  бывают известны из предварительного расчета рамы. Поэтому, практическое применение формул (32) и (31) не встречает никаких затруднений. Формулы крайне просты.

При желании формулам (31) и (32) может быть придан иной вид. Именно, из теории фокусов известно, что

$K_a = \frac{\beta}{\alpha_1 + \varphi^A}$ , или  $\varphi^A = \frac{\beta - \alpha_1 K_a}{K_a}$ ;  $\gamma^B = \alpha_2 - K_a \beta$ . Подставляя в формулу (31) получаем,

$$x_a = \frac{\beta - \alpha_1 K_a}{\alpha_2 - \beta K_a} \dots \dots \dots (31^a)$$

для правого углового фокусного отношения получаем аналогично

$$x_b = \frac{\beta - \alpha_2 K_b}{\alpha_1 - \beta K_b} \dots \dots \dots (32^a)$$

Для стержней с постоянной жесткостью, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\beta,$$

формулы (31<sup>a</sup>) и (32<sup>a</sup>) упрощаются и получают вид

$$x_a = \frac{1 - 2K_a}{2 - K_a} \dots \dots \dots (31^b)$$

$$x_b = \frac{1 - 2K_b}{2 - K_b} \dots \dots \dots (32^b)$$

Решая формулы (31<sup>b</sup>) и (32<sup>b</sup>) относительно  $K_a$  и  $K_b$ , получим

$$K_a = \frac{1 - 2x_a}{2 - x_a} \dots \dots \dots (33)$$

$$K_b = \frac{1 - 2x_b}{2 - x_b} \dots \dots \dots (34)$$

Дадим еще одну формулу для вычисления угловых фокусных отношений для стержней с постоянной жесткостью.

Подставляя выражение для моментного фокусного отношения

$$K_a = \frac{1}{2 + \frac{\varphi^A}{\beta}}$$

в формулу (31<sup>b</sup>), получим после преобразований

$$x_a = \frac{1}{2 + \frac{3\beta}{\varphi^A}} \dots \dots \dots (35)$$

Совершенно подобным путем получим для правого фокуса

$$x_b = \frac{1}{2 + \frac{3\beta}{\varphi^B}} \dots \dots \dots (36)$$

Повторяя обычный ход рассуждений теории моментных фокусов, легко приходим к выводу, что наличие угловых фокусных отношений  $\frac{\tau^A}{\tau^B} = -x_a$  и  $\frac{\tau^B}{\tau^A} = -x_b$  со знаком минус указывает, что угловые фокусные точки лежат в пределах стержня АВ. Отношения  $x_a = \frac{a'}{l-a'}$  и  $x_b = \frac{b'}{l-b'}$  (где  $a'$  и  $b'$  угловые фокусные расстояния), вытекающие из этого положения и аналогичные известным формулам теории моментных фокусов:  $K_a = \frac{a}{l-a}$  и  $K_b = \frac{b}{l-b}$ , позволяют получить из формул (35) и (36) формулы для вычисления угловых фокусных расстояний

$$a' = \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\varphi^A}}; \quad b' = \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\varphi^B}} \dots \dots \dots (37)$$

При полном защемлении конца А, т.е. при  $\varphi^A = 0$ ,  $a' = 0$  и  $x_a' = 0$ ; при шарнирном закреплении ( $\varphi^A = \infty$ )  $a' = \frac{l}{3}$  и  $x_a = \frac{1}{2}$ . Таким образом, получаем картину обратную тому, что имеет место для моментных фокусов.

При частичном защемлении (напр. пята стойки опирается на упругое основание) имеем для моментных фокусов\*):

$$K = \frac{1}{2\nu} \quad a = \frac{1}{1 + 2\nu} \cdot l, \quad \text{где } \nu = 1 + \frac{3}{l} \text{ и } l \text{ — длина}$$

элемента (высота стойки) в метрах.

Из формул (31<sup>b</sup>) и (32<sup>b</sup>) после подстановки получаем

$$x = \frac{2(\nu-1)}{4\nu-1} = \frac{\left(1 + \frac{3}{l} - 1\right) 2}{4\left(1 + \frac{3}{l}\right) - 1} = \frac{2}{l+4} \dots \dots (37)$$

Принимая среднее значение для коэффициента  $\nu = 1,50$ , имеем

$$x = \frac{1}{5} \quad a' = \frac{l}{6} = 0,167 l.$$

\*) См. „Расчет рамных конструкций“ проф. Г. В. Ульянинского, изд. 3-е и 4-е.



На этом закончим обзор общих свойств угловых фокусов и перейдем к их практическому применению при построении линий влияния.

Существование фокусной зависимости между углами поворота узлов незагруженного стержня помогает нам облегчить построение линии влияния углов поворота  $\tau$ . Действительно, если подвижной груз  $P=1$  находится правее стержня АВ, то ввиду зависимости

$$\tau^A = -x_a \tau^B,$$

мы избавляемся от необходимости строить (т.е. вычислять ординаты по способу упругих линий—§ 4 гл. I) инфлюэнт для  $\tau^A$ , если построена инфлюэнта для  $\tau^B$  для пролетов правее узла В. Достаточно помножить ординаты линии  $\tau^B$  в этих пролетах на левое угловое фокусное отношение ( $-x_a$ ), чтобы мы имели ординаты для  $\tau^A$ .

Совершенно также для пролетов левее стержня АВ, мы по известным ординатам инфлюэнты  $\tau^A$  можем получить ординаты инфлюэнты  $\tau^B$  путем умножения первых на ( $-x_b$ ).

Применяя подобное рассуждение к последовательному ряду узлов, легко прийти к выводу, что *вычисление ординат линии влияния угла поворота некоторого узла, как ординат упругой линии от действия на узел момента  $M=1$ , достаточно сделать только на участках стержней, сходящихся в данном узле*, так как для участков рамы за пределами этих стержней (за узлами, соседними с рассматриваемым) инфлюэнта для угла поворота данного узла может быть получена из инфлюэнт для углов поворота  $\tau$  соседних узлов, путем умножения ординат последних на соответствующие угловые фокусные отношения.

Вычисления ординат упругих линий представляют собой наиболее сложную часть работы при нахождении линий влияния для углов поворота  $\tau$ , поэтому указанное использование угловых фокусных отношений значительно облегчает работу.

Следует заметить, что использование угловых фокусов для указанной цели возможно только в том случае, когда вращение одного узла передается другому только через один стержень, т.е. когда рама не включает в себе замкнутых секций. Но такое же ограничение мы имели и в гл. I, при рассмотрении нового способа построения линий влияния вообще в рамах с неподвижными узлами.

В решении дальнейших примеров можно видеть практическое использование угловых фокусных отношений.

Из приведенных только что соображений о построении инфлюэнт  $\tau$  можно заключить, что *определение защемляющих моментов от действия на раму момента  $M=1$  в рассматриваемом узле должно быть проведено только для стержней, сходящихся в этом узле* (в практике обычно только для 2-х стержней, т.е. всего 4 защемляющих момента), т. к. только на протяжении этих стержней инфлюэнтная линия строится как упругая линия по указаниям § 4 гл. I этой статьи.

Нетрудно видеть, насколько это соображение упрощает и сокращает вычислительную работу по распределению моментов.

## § 2. Коэффициенты распределения для момента приложеного к узлу извне.

В изложенном способе построения линий влияния мы практически встречаемся несколько раз с операцией распределения момента  $M=1$ , приложеного к узлу извне, на стержни, сходящиеся в этом узле.

Пусть имеем (фиг. 19) узел А, в котором сходятся 4 элемента. Если к этому узлу приложен извне момент М, который требуется распределить на стержни (1), (2), (3) и (4), то мы легко можем себе представить,

что этот момент передается узлу через некоторый фиктивный (5) стержень, при каком-либо предположении остаются в силе все формулы общей теории фокусов для вычисления коэффициентов распределения. То-есть, будем иметь

$$\mu_1 = \mu_{5-1} = \frac{\frac{1}{\gamma_1^A}}{\frac{1}{\gamma_1^A} + \frac{1}{\gamma_2^A} + \frac{1}{\gamma_3^A} + \frac{1}{\gamma_4^A}}$$

$$\mu_2 = \mu_{5-2} = \frac{\frac{1}{\gamma_2^A}}{\frac{1}{\gamma_1^A} + \frac{1}{\gamma_2^A} + \frac{1}{\gamma_3^A} + \frac{1}{\gamma_4^A}}, \text{ или } \mu_{5-2} = \mu_{5-1} \frac{\gamma_1^A}{\gamma_2^A}$$

$$\mu_3 = \mu_{5-3} = \frac{\frac{1}{\gamma_3^A}}{\frac{1}{\gamma_1^A} + \frac{1}{\gamma_2^A} + \frac{1}{\gamma_3^A} + \frac{1}{\gamma_4^A}}, \text{ или } \mu_{5-3} = \mu_{5-1} \frac{\gamma_1^A}{\gamma_3^A}$$

$$\mu_4 = \mu_{5-4} = \frac{\frac{1}{\gamma_4^A}}{\frac{1}{\gamma_1^A} + \frac{1}{\gamma_2^A} + \frac{1}{\gamma_3^A} + \frac{1}{\gamma_4^A}}, \text{ или } \mu_{5-4} = \mu_{5-1} \frac{\gamma_1^A}{\gamma_4^A}$$

Преобразовывая формулу для  $\mu$ , имеем:

$$\mu_1 = \frac{\frac{1}{\gamma_1^A}}{\frac{1}{\gamma_1^A} + \left( \frac{1}{\gamma_2^A} + \frac{1}{\gamma_3^A} + \frac{1}{\gamma_4^A} \right)}, \text{ но } \frac{1}{\gamma_2^A} + \frac{1}{\gamma_3^A} + \frac{1}{\gamma_4^A} = \frac{1}{\varphi_1^A},$$

$$\text{следовательно } \mu_1 = \frac{\frac{1}{\gamma_1^A}}{\frac{1}{\gamma_1^A} + \frac{1}{\varphi_1^A}},$$

$$\text{или } \mu_1 = \frac{\varphi_1^A}{\varphi_1^A + \gamma_1^A}$$

$$\text{Совершенно так же } \mu_2 = \frac{\varphi_2^A}{\varphi_2^A + \gamma_2^A}$$

$$\mu_3 = \frac{\varphi_3^A}{\varphi_3^A + \gamma_3^A}$$

$$\mu_4 = \frac{\varphi_4^A}{\varphi_4^A + \gamma_4^A}$$

} ..... (38)

Величины  $\gamma_1^A$ ,  $\varphi_1^A$  и т. д. бывают вычислены при предварительном расчете, следовательно пользование формулами (38) чрезвычайно упрощает вычисление коэффициентов распределения.

Практически более удобным оказывается вычислить по формулам (38) только один какой-либо коэффициент распределения, напр.  $\mu_1$ , а остальные получить из зависимостей

$$\mu_2 = \mu_1 \cdot \frac{\gamma_1^A}{\gamma_2^A}; \quad \mu_3 = \mu_1 \cdot \frac{\gamma_1^A}{\gamma_3^A}; \quad \mu_4 = \mu_1 \cdot \frac{\gamma_1^A}{\gamma_4^A} \dots \dots \dots (39)$$

Уместно будет упомянуть здесь о практическом приеме при вычислении угловых величин  $\varphi$  по угловым величинам  $\gamma$ . Как известно, величины  $\varphi$  получаются из уравнений  $\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3} \dots$  и вычисления их представляет одну из самых громоздких операций при предварительном подсчете основных величин. Для облегчения этих калькуций может быть предложен следующий графический прием, заключающийся в построении масштаба для определения величин  $\varphi$ . Если в узле сходятся только три элемента, то

$$\frac{1}{\varphi_{1-2}} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}.$$

Начертим угол  $= 120^\circ$  и проведем его биссектрису (фиг. 20).

Если на сторонах угла отложить отрезки  $\overline{OA} = \gamma_1$  и  $\overline{OB} = \gamma_2$  (в известном масштабе) и провести секущую АВ, то на биссектрисе получим отрезок  $\overline{OX}$ , который будет равен  $\varphi_{1-2}$ , в том же масштабе как  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Доказательство чрезвычайно просто и может быть основано на элементарных положениях аналитической геометрии: приняв стороны угла за оси  $Ox$  и  $Oy$  косоугольных координат, имеем

уравнение прямой АВ „в отрезках“:

$$\frac{x}{\gamma_2} + \frac{y}{\gamma_1} = 1,$$

уравнение биссектриссы  $OX$   $x = y$ .

Кроме того, для координатного угла  $120^\circ$ , радиус вектор  $\overline{OX} = x_0 = y_0$ , что можно видеть из равностороннего  $\triangle OXN$ , в котором все углы  $= 60^\circ$ .

Для точки X, пересечения прямой АВ с биссектриссой  $OX$ , имеем

$$\frac{\overline{OX}}{\gamma_2} + \frac{\overline{OX}}{\gamma_1} = 1 \text{ или } \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_1} = \frac{1}{\overline{OX}}, \text{ а т. к. } \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_1} = \frac{1}{\varphi_{1-2}}.$$

то  $\overline{OX} = \varphi_{1-2}$ , что и требовалось доказать.

Таким образом, начертив угол  $= 120^\circ$  и проведя его биссектрису, будем иметь масштаб для непосредственного измерения величины  $\varphi_{1-2}$  при известных  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Если в узле сходятся не 3 элемента, а более, то вычисления следует производить по частям, группируя по 2 величины  $\gamma$ .

Именно, если  $\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3} + \frac{1}{\gamma_4}$ , то найдя отдельно  $\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} = \frac{1}{\varphi_{1-2}}$  и  $\frac{1}{\gamma_3} + \frac{1}{\gamma_4} = \frac{1}{\varphi_{3-4}}$  при помощи масштаба, получаем окончательно  $\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_{1-2}} + \frac{1}{\varphi_{3-4}}$ , пользуясь тем же масштабом.

Построение масштаба настолько элементарно, как и пользование им, что при частом пользовании методом фокусов для расчета рам

употребление его может оказать существенную пользу, если не для самих вычислений, то для их проверки.

### § 3. Упрощения при вычислении ординат упругих линий.

Общая формула для вычисления ординат упругой линии (гл. I § 4)

$$y = \beta l (M^A \eta_A + M^B \eta_B) \dots \dots \dots (11)$$

для случая рам с неподвижными узлами и неразрезных балок, когда между моментами  $M^A$  и  $M^B$  существует фокусная зависимость

$$\frac{M^B}{M^A} = -K_b$$

принимает вид

$$y = \beta l M^A (\eta_A - K_b \eta_B) \dots \dots \dots (12)$$

В этой форме выражение для  $y$  наиболее удобно для вычислений.

Вычислив для каждой точки пролета множитель

$$(\eta_A - K_b \eta_B),$$

мы умножением его на  $\beta l M^A$  получим ординаты  $y$ .

Совершенно также, если фокусная зависимость будет  $\frac{M^A}{M^B} = -K_a$

(для пролета левее узла, инфлюэнтную линию  $\tau$  которого определяем)

$$y = \beta l M^A (\eta_B - K_a \eta_A), \dots \dots \dots (12-a)$$

то-есть, требуется вычисление множителя

$$(\eta_B - K_a \eta_A).$$

Для частного случая стержней с постоянной жесткостью — случая, соответствующего обычным приемам расчетной практики — может быть рекомендовано построение графика для быстрого получения значений множителя  $(\eta_A - K_b \eta_B)$ .

Полагая для отдельных точек стержня (напр. через  $\frac{1}{12}$  длины пролета)  $\eta_A$  и  $\eta_B$  равными соответствующим числовым значениям из таблиц, легко увидим, что величина множителя  $(\eta_A - K_b \eta_B)$  будет каждый раз связана с фокусным отношением  $K_b$  линейной зависимостью, что на графике даст прямую линию.

Откладывая по оси абсцисс величины  $K_b$ , а по оси ординат значения множителя  $(\eta_A - K_b \eta_B)$ , очевидно, получим серию прямых линий, в которой каждая линия соответствует определенной точке стержня.

Пользование графиком значительно сократит вычисления ординат упругих линий.

### § 4. Нахождение линий влияния для опорных моментов в неразрезных балках.

Применение изложенного способа построения линий влияния к неразрезным балкам — простейшему виду рамных конструкций — получает ряд существенных упрощений. О них следует упомянуть.

Пусть имеем (фиг. 21) многопролетную неразрезную балку. Найдем линию влияния для момента  $M_c$  на опоре  $C$ .

Коэффициенты распределения для внешнего момента по формулам (38).

$$\text{будут } \mu_n = \frac{\varphi_n^c}{\varphi_n^c + \gamma_n^c} = \frac{\gamma_{n+1}^c}{\gamma_{n+1}^c + \gamma_n^c}; \quad M_{n+1} = \frac{\varphi_{n+1}^c}{\varphi_{n+1}^c + \gamma_{n+1}^c} = \frac{\gamma_n^c}{\gamma_n^c + \gamma_{n+1}^c},$$

т. к., очевидно,  $\varphi_n^c = \gamma_{n+1}^c$  и  $\varphi_{n+1}^c = \gamma_n^c$ . Учитывая знак, получим от внешнего момента  $M = 1$  опорные моменты

$$M_n^c = -\frac{\gamma_{n+1}^c}{\gamma_{n+1}^c + \gamma_n^c} \quad M_{n+1}^c = +\frac{\gamma_n^c}{\gamma_{n+1}^c + \gamma_n^c}$$

Ординаты инфлюэнтной линии для угла поворота  $\tau^c$  опорного сечения С получим по формулам (12):

$$\text{для } n\text{-го пролета } \tau^c = M_n^c \beta_n l_n (\eta_b - K_{an} \eta_a) = -\frac{\gamma_{n+1}^c}{\gamma_{n+1}^c + \gamma_n^c} \beta_n l_n (\eta_b - K_{an} \eta_a)$$

$$\begin{aligned} \text{для } (n+1)\text{-го пролета } \tau^c &= M_{n+1}^c \beta_{n+1} l_{n+1} (\eta_a - K_{b(n+1)} \eta_b) = \\ &= +\frac{\gamma_n^c}{\gamma_{n+1}^c + \gamma_n^c} \beta_{n+1} l_{n+1} (\eta_a - K_{b(n+1)} \eta_b) \end{aligned}$$

Для перехода от инфлюэнты для  $\tau^c$  к инфлюэнте для  $M_c$  имеем масштабные числа (с их знаками):

$$\begin{aligned} \text{для } n \text{ пролета } \left( +\frac{1}{\gamma_{n+1}^c} \right) \text{ или } \left( +\frac{1}{\varphi_n^c} \right); \text{ для } (n+1)\text{-го пролета} \\ \left( -\frac{1}{\varphi_{n+1}^c} \right) \text{ или } \left( -\frac{1}{\gamma_n^c} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, ординаты инфлюэнтной линии для опорного момента  $M_c$  будут в  $n$ -ом пролете  $y = \tau_c \cdot \frac{1}{\gamma_{n+1}^c}$ ; в  $(n+1)$ -м  $y = -\tau_c \cdot \frac{1}{\gamma_n^c}$ .

Подставляя выведенные для  $\tau_c$  выражения, получим формулы для ординат линии влияния опорного момента  $M_c$ :

$$\left. \begin{aligned} \text{для } n\text{-го пролета } y &= -\frac{\beta_n}{\gamma_{n+1}^c + \gamma_n^c} \cdot l_n (\eta_b - K_{an} \eta_a) \\ \text{для } (n+1)\text{-го пролета } y &= -\frac{\beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}^c + \gamma_n^c} \cdot l_{n+1} (\eta_a - K_{b(n+1)} \eta_b) \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

В этих формулах коэфф-ты  $\eta_a$  и  $\eta_b$  должны быть взяты свои для каждого пролета.

Формулы (40) служат для непосредственного вычисления ординат линий влияния какого-либо опорного момента для левого и правого пролетов, смежных с рассматриваемой опорой.

Для пролетов, не смежных с рассматриваемой опорой, ординаты линии влияния получаются из ординат линий влияния соседних опорных моментов, путем умножения таковых на фокусные отношения  $K_{bn}$  и  $K_{a(n+1)}$  для моментов в пролетах  $n$ -ом и  $(n+1)$ -ом.

Пользование графиком для множителей  $(\eta_a - K_b \eta_b)$  (см. § 3 этой главы) может значительно сократить вычисления.

Общая формула для площади участка инфлюэнтной линии (формула 17) приобретает вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{для } n\text{-го пролета } \Omega_{(n)} &= -\frac{\beta_n l_n^2 (1 - K_{an})}{4 (\gamma_{n+1}^c + \gamma_n^c)} \\ \text{для } (n+1)\text{-го пролета } \Omega_{(n+1)} &= -\frac{\beta_{n+1} l_{n+1}^2 (1 - K_{b(n+1)})}{4 (\gamma_{n+1}^c + \gamma_n^c)} \end{aligned} \right\} \dots (41)$$

### § 5. Построение линий влияния изгибающих моментов для сечений в пролете стержней.

Для сечений в пролете стержней нахождение линий влияния производится по общеизвестной формуле

$$M_x = M_{ox} + \frac{M^a (l-x)}{l} + \frac{M^b x}{l} \dots \dots \dots (42)$$

Величины  $M_{ox}$  — ординаты инфлюэнтной линии изгибающего момента в сечении ( $x$ ) простой балки на двух опорах — могут быть легко вычислены. Значения их можно найти во многих справочниках.

$M^a$  и  $M^b$  — ординаты инфлюэнтных линий опорных моментов.

Вычисление ординат  $M_x$  удобно сводить в таблицы.

Ординаты линий влияния перерезывающих сил вычисляются по формуле

$$Q_x = Q_{ox} + \frac{M^b - M^a}{l} \dots \dots \dots (43)$$

Величины ординат  $Q_{ox}$  легко вычисляются или берутся готовыми из справочников. Вычисления  $Q_x$  также удобнее сводить в таблицы.

При вычислении ординат  $M_x$  и  $Q_x$ , одновременно в тех же таблицах могут быть определены площади отдельных участков инфлюэнтных линий, т. к. значения этих площадей для моментов  $M^a$  и  $M^b$  будут известны, что же касается величины соответствующих площадей для  $M_{ox}$  и  $Q_{ox}$ , то в виду элементарной формы их инфлюэнтных линий вычисление бывает весьма легким.

### § 6. Практические замечания общего характера.

1. Чтобы не иметь дела с очень малыми величинами при вычислении ординат линий влияния для углов  $\tau$  и смещений  $\delta_l$ , удобнее находить линии влияния для углов  $E\tau$  и смещений  $E\delta_l$ , подобно тому как в практике расчетов по методу фокусов пользуются угловыми величинами  $E\beta$ ,  $E\gamma$ ,  $E\varphi$  и т. д.

При переходе от инфлюэнтных линий  $E\tau$  и  $E\delta_l$  к инфлюэнтным линиям моментов пользуемся формулами

$$M = \pm \frac{\tau}{\gamma} \quad \text{или} \quad M = \pm \frac{\tau}{\varphi}$$

$$\text{и} \quad M = \delta_l^I \cdot \frac{\mathfrak{M}_I}{\Delta x} + \delta_l^{II} \cdot \frac{\mathfrak{M}_{II}}{\Delta x} + \delta_l^{III} \cdot \frac{\mathfrak{M}_{III}}{\Delta x} \dots \dots \dots$$

которые тогда будут иметь вид:

$$M = \pm \frac{E\tau}{E\gamma} \quad \text{или} \quad M = \pm \frac{E\tau}{E\varphi} \quad (\text{множитель } E \text{ сокращается})$$

$$M = E\delta_l^I \cdot \frac{\mathfrak{M}_I}{E\Delta x} + E\delta_l^{II} \cdot \frac{\mathfrak{M}_{II}}{E\Delta x} + E\delta_l^{III} \cdot \frac{\mathfrak{M}_{III}}{E\Delta x} + \dots \dots \dots (44)$$

в последнем случае смещения нужно будет multiply на моменты  $\mathfrak{M}$ , уменьшенные в  $E\Delta x$  раз (при  $\Delta x = 0,001$  м. и  $E = 21 \cdot 10^5 \frac{\text{т}}{\text{м}^2}$ ,  $E\Delta x = 2100 \frac{\text{т}}{\text{м}}$ ).

2. Все вычисления ординат сводятся в таблицы. Для практики вычислений имеет известное значение рациональный выбор типа таблиц. Последовательность отдельных действий для получения конечного результата должна быть выбрана возможно удачнее.

Общую формулу для вычисления ординат (11):

$$y = \beta l (M^A \eta_A + M^B \eta_B),$$

если не имеется графика для определения множителей ( $\eta_A - K_B \eta_B$ ) или ( $\eta_B - K_A \eta_A$ ) (см. § 3 этой главы), удобнее для практического пользования представить в виде

$$y = M^A \beta l \eta_A + M^B \beta l \eta_B = A \cdot \eta_A + B \eta_B, \dots \dots \dots (45)$$

где  $A = M^A \beta l$  и  $B = M^B \beta l$  — множители, общие для всех значений  $\eta_A$  и  $\eta_B$  на участке отдельного стержня. Они вычисляются в особой графе таблицы, после чего на них множатся коэффициенты  $\eta_A$  и  $\eta_B$ . Заключительным действием будет сложение произведений  $A \eta_A$  и  $B \eta_B$ .

При таком порядке вычислений облегчается и нахождение площадей линии влияния.

Именно, формула (16) может быть представлена в виде

$$\Omega = M^A \beta l^2 \nabla_A + M^B \beta l^2 \nabla_B = A l \nabla_A + B l \nabla_B, \dots \dots \dots (46)$$

Для симметричных же стержней получаем совсем простую формулу

$$\Omega = \frac{1}{4} \beta l^2 (M^A + M^B) = \frac{A + B}{4} \cdot l \dots \dots \dots (47)$$

## Примеры расчетов.

**Пример I.** Найти линии влияния защемляющих моментов и изгибающего момента в середине 2-го пролета для железобетонной рамной четырехпролетной эстакады (фиг. 22).

Основные данные.

Длина ригелей  $l_1 = 6,00$  м.,  $l_2 = l_3 = 8,00$  м.,  $l_4 = 6,00$  м.

Высота стоек  $h_5 = 9,00$  м.,  $h_6 = 8,00$  м.,  $h_7 = 7,00$  м.,  $h_8 = 6,00$  м.

В пятах стоек (8), (7) и (6) — частичное защемление (башмаки стоек опираются на упругое основание). В узле (0) — подвижная опора, в узле (V) — шарнирное закрепление.

Моменты инерции: ригелей в пролете  $J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 0,12$  м.<sup>4</sup>, причем: —

для 1-го пролета — момент инерции на опоре  $J_{01} = 0,60$  м.<sup>4</sup>, длина вуты

$$1,50 \text{ м.}, \text{ отношение } \lambda = \frac{1,50}{6,00} = \frac{1}{4}; \quad \frac{J_1}{J_{01}} = \frac{0,12}{0,60} = 0,20;$$

для 2-го пролета — момент инерции на опоре  $J_{02} = 1,20$  м.<sup>4</sup>, длина вуты

$$1,60 \text{ м.}, \lambda = \frac{1,60}{8,00} = \frac{1}{5}; \quad \frac{J_2}{J_{02}} = \frac{0,12}{1,20} = 0,10;$$

для 3-го пролета — те же величины, как и для 2-го пролета;

для 4-го пролета — момент инерции на опоре  $J_{04} = 1,20$  м.<sup>4</sup> Длина вуты

$$1,50 \text{ м.}, \lambda = \frac{1,50}{6,00} = \frac{1}{4}; \quad \frac{J_4}{J_{04}} = \frac{0,12}{1,20} = 0,10.$$

Момент инерции стоек  $J_8 = J_7 = 0,03$  м.<sup>4</sup>;  $J_6 = J_5 = 0,04$  м.<sup>4</sup>, причем стойки принимаются стержнями с постоянной жесткостью.

### Определение основных величин и фокусных отношений.

Формулы для вычислений:

$$\alpha_n = \frac{l_n \cdot E \beta_n}{E \alpha_n^A + E \varphi_n^A}; \quad b_n = \frac{l_n \cdot E \beta_n}{E \alpha_n^B + E \varphi_n^B};$$

$$E \alpha_n^A = \frac{l_n}{2 J_n} \cdot C_1; \quad E \alpha_n^B = \frac{l_n}{2 J_n} \cdot C_2; \quad E \beta_n = \frac{l_n}{6 J_n} \cdot C_3,$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ —коэффициенты из таблиц Suter'a.

$$E \gamma_n^B = E \alpha_n^B - (1 + K_{an}) E \beta_n; \quad E \gamma_n^A = E \alpha_n^A - (1 + K_{bn}) E \beta_n;$$

$$K_{an} = \frac{a_n}{l_n - a_n}; \quad K_{bn} = \frac{b_n}{l_n - b_n}; \quad E \varphi = \frac{1}{\sum \frac{1}{E \gamma}}$$

А. Определение левых фокусных отношений:

1-й стержень:  $a_1 = 0$ ,  $K_{a1} = 0$

$$E \beta_1 = \frac{l_1}{6 J_1} \cdot C_3 = \frac{6,00}{6 \cdot 0,12} \cdot 0,933 = 7,77$$

$$E \alpha_1^B = \frac{l_1}{2 J_1} \cdot C_1 = \frac{6,00}{2 \cdot 0,12} \cdot 0,758 = 18,89. \quad \text{Здесь } C_3 \text{ и } C_1 \text{ коэффици-}$$

циенты из таблиц Suter'a для левосторонней прямолинейной вуты при

$$\lambda = \frac{1}{4} \text{ и } \mu = \frac{J}{J_0} = 0,20.$$

$$E \gamma_1^B = E \alpha_1^B - E \beta_1 (1 + K_{a1}) = E \alpha_1^B - E \beta_1 = 11,12.$$

8-й стержень: для случая частичного защемления имеем (см. „Расчет рамных конструкций“ проф. Г. В. Ульянинского, Изд. 4-е стр. 188—189)

$$a_8 = \frac{1}{1 + 2 \nu_8} \cdot l_8; \quad \text{где } \nu_8 = 1 + \frac{3}{l_8} = 1 + \frac{3}{6,00} = 1,50; \quad K_{a8} = \frac{1}{2 \nu_8};$$

подставляя значение числовых величин, получаем

$$a_8 = \frac{1}{1 + 3} \cdot 6,00 = 1,50 \text{ м.}; \quad K_{a8} = \frac{1}{3} = 0,333;$$

$$E \beta_8 = \frac{l_8}{6 J_8} = \frac{6,00}{6 \cdot 0,03} = 33,33;$$

$$E \gamma_8^B = E \beta_8 (2 - K_{a8}) = 33,33 (2 - 0,333) = 55,6$$

(стойка 8 является стержнем с постоянной жесткостью);

$$E \varphi_2^I = \frac{E \gamma_8^B \cdot E \gamma_1^B}{E \gamma_8^B + E \gamma_1^B} = \frac{55,6 \cdot 11,12}{55,6 + 11,12} = 9,26.$$



$$\begin{aligned} \text{2-й стержень. } E\beta_2 &= \frac{l_2}{6J_2} \cdot C_2 = \frac{8,00}{6 \cdot 0,12} \cdot 0,885 = 9,84; \quad E\alpha_2^B = \\ &= E\alpha_2^A = \frac{l_2}{2J_2} \cdot C_1 = \frac{8,00}{2 \cdot 0,12} \cdot 0,734 = 24,48. \end{aligned}$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  коэффициенты из таблиц для случая двухсторонних вут при  $\lambda = \frac{1}{5}$  и  $\frac{J}{J_0} = 0,10$ .

$$a_2 = l_2 \frac{E\beta_2}{E\alpha_2^A + E\varphi_2^I} = 8,00 \frac{9,84}{24,48 + 9,26} = \frac{8 \cdot 9,84}{33,74} = 2,33 \text{ м.};$$

$$K_{a_2} = \frac{2,33}{8,00 - 2,33} = 0,411;$$

$$E\gamma_2^B = E\alpha_2^B - (1 + K_{a_2})E\beta_2 = 24,48 - 1,411 \cdot 9,84 = 24,48 - 13,91 = 10,57.$$

7-й стержень. По аналогии со стержнем (8)—частичное защемление—имеем:  $\nu_7 = 1 + \frac{3}{l_7} = 1 + \frac{3}{7,00} = 1,43$ ,

$$a_7 = \frac{1}{1 + 2\nu_7} l_7 = \frac{1}{1 + 2,86} \cdot 7,00 = \frac{7,00}{3,86} = 1,814 \text{ м.}; \quad K_{a_7} = \frac{1}{2\nu_7} = \frac{1}{2,86} = 0,35;$$

$$E\beta_7 = \frac{l_7}{6J_7} = \frac{7,00}{6 \cdot 0,03} = 38,90; \quad E\gamma_7^B = E\beta_7(2 - K_{a_7}) = 38,9(2 - 0,35) = 64,10.$$

$$E\varphi_3^{II} = \frac{E\gamma_7^B \cdot E\gamma_2^B}{E\gamma_7^B + E\gamma_2^B} = \frac{64,10 \cdot 10,57}{64,10 + 10,57} = \frac{64,10 \cdot 10,57}{74,67} = 9,06.$$

3-й стержень одинаков по размерам со стержнем (2):

$$E\beta_3 = E\beta_2 = 9,84; \quad E\alpha_3 = E\alpha_3^A = 24,48;$$

$$a_3 = l_3 \frac{E\beta_3}{E\alpha_3^A + E\varphi_3^{II}} = 8,00 \frac{9,84}{24,48 + 9,06} = \frac{8,00 \cdot 9,84}{33,54} = 2,35 \text{ м.}$$

$$K_{a_3} = \frac{a_3}{l_3 - a_3} = \frac{2,35}{8 - 2,35} = 0,416;$$

$$E\gamma_3^B = E\alpha_3^B - (1 + K_{a_3})E\beta_3 = 24,48 - 1,416 \cdot 9,84 = 24,48 - 13,94 = 10,54.$$

6-й стержень. По аналогии со стойками (7) и (8) имеем

$$\nu_6 = 1 + \frac{3}{l_6} = 1 + \frac{3}{8,00} = 1,375; \quad a_6 = \frac{l_6}{1 + 2,75} = \frac{8,00}{3,75} = 2,135 \text{ м.}$$

$$K_{a_6} = \frac{1}{2\nu_6} = \frac{1}{2,75} = 0,366; \quad E\beta_6 = \frac{l_6}{6J_6} = \frac{8,00}{6 \cdot 0,04} = 33,35;$$

$$E\gamma_6^B = E\beta_6(2 - K_{a_6}) = 33,35(2 - 0,366) = 33,35 \cdot 1,634 = 54,40;$$

$$E\varphi_4^{III} = \frac{E\gamma_6^B \cdot E\gamma_3^B}{E\gamma_6^B + E\gamma_3^B} = \frac{54,40 \cdot 10,54}{54,40 + 10,54} = 8,82$$

$$\text{4-й стержень. } E\beta_4 = \frac{l_4}{6J_4} \cdot C_2 = \frac{6,00}{6 \cdot 0,12} 0,827 = 6,89$$

$$E\alpha_4^A = E\alpha_4^B = \frac{l_4}{2J_4} \cdot C_1 = \frac{6,00}{2 \cdot 0,12} \cdot 0,669 = 16,72.$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  коэффициенты из таблиц для двухсторонних вут при  $\lambda = \frac{1}{4}$  и  $\frac{J}{J_0} = 0,10$ .

$$a_4 = l_4 \frac{E\beta_4}{E\alpha_4^A + E\varphi_4^{III}} = 6,00 \cdot \frac{6,89}{16,72 + 8,82} = \frac{6,00 \cdot 6,89}{25,54} = 1,62 \text{ м.}$$

$$K_{a4} = \frac{a_4}{l_4 - a_4} = \frac{1,62}{6,00 - 1,62} = 0,369;$$

$$E\gamma_4^B = E\alpha_4^B - E\beta_4(1 + K_{a4}) = 16,72 - 6,89 \cdot 1,369 = 7,30.$$

5-й стержень. При принятом основном направлении для стоек—снизу вверх—нижнее фокусное расстояние  $a_5 = 0$ ,  $K_{a5} = 0$ , т. к. имеем шарнирное закрепление пяты стойки (5).

В. Определение правых фокусных расстояний:

$$\text{5-й стержень. } E\beta_5 = \frac{l_5}{6J_5} = \frac{9,00}{6 \cdot 0,04} = 37,5; \quad E\gamma_5^B = 2E\beta_5 = 75,0;$$

$$b_5 = \frac{l_5}{3 + \frac{E\varphi_5^{IV}}{E\beta_5}} = \frac{9,00}{3 + \frac{7,30}{37,50}} = \frac{9,00}{3 + 0,1947} = \frac{9,00}{3,1947} = 2,82 \text{ м.,}$$

$$\text{т. к. } E\varphi_5^{IV} = E\gamma_4^B = 7,30;$$

$$K_{b5} = \frac{b_5}{l_5 - b_5} = \frac{2,82}{9,00 - 2,82} = 0,456. \quad E\gamma_5^A = E\beta_5(2 - K_{b5})$$

$$\text{4-й стержень. } E\varphi_4^{IV} = E\gamma_5^B = 2E\beta_5 = 75,0;$$

$$b_4 = l_4 \frac{E\beta_4}{E\alpha_4^B + E\varphi_4^{IV}} = 6,00 \frac{6,89}{16,72 + 75,0} = \frac{6,00 \cdot 6,89}{91,72} = 0,45 \text{ м.};$$

$$K_{b4} = \frac{0,45}{6,00 - 0,45} = \frac{0,45}{5,55} = 0,081;$$

$$E\gamma_4^A = E\alpha_4^A - (1 + K_{b4})E\beta_4 = 16,72 - 1,081 \cdot 6,89 = 16,72 - 7,44 = 9,28.$$

$$\text{6-й стержень. } E\varphi_6^{III} = \frac{E\gamma_4^A \cdot E\gamma_3^B}{E\gamma_4^A + E\gamma_3^B} = \frac{9,28 \cdot 10,54}{9,28 + 10,54} = \frac{9,28 \cdot 10,54}{19,82} = 4,92;$$

$$b_6 = \frac{l_6}{3 + \frac{E\varphi_6^{III}}{E\beta_6}} = \frac{8,00}{3 + \frac{4,92}{33,35}} = \frac{8,00}{3 + 0,148} = 2,54 \text{ м.};$$

$$K_{b6} = \frac{1}{2 + 0,148} = 0,466$$

3-й стержень.

$$E_{\varphi_3^{III}} = \frac{E_{\gamma_4^A} \cdot E_{\gamma_6^B}}{E_{\gamma_4^A} + E_{\gamma_6^B}} = \frac{9,28 \cdot 54,40}{9,28 + 54,40} = \frac{9,28 \cdot 54,40}{63,68} = 7,91;$$

$$b_3 = l_3 \frac{E_{\beta_3}}{E_{\alpha_3^B} + E_{\varphi_3^{III}}} = 8,00 \frac{9,84}{24,48 + 7,91} = \frac{8,00 \cdot 9,84}{32,39} = 2,428 \text{ м.};$$

$$K_{b_3} = \frac{2,428}{8,00 - 2,428} = 0,436$$

$$E_{\gamma_3^A} = E_{\alpha_3^A} - (1 + K_{b_3}) E_{\beta_3} = 24,48 - 1,436 \cdot 9,84 = 24,48 - 14,13 = 10,35.$$

7-й стержень.

$$E_{\varphi_7^{II}} = \frac{E_{\gamma_3^A} \cdot E_{\gamma_2^B}}{E_{\gamma_3^A} + E_{\gamma_2^B}} = \frac{10,35 \cdot 10,57}{10,35 + 10,57} = 5,23;$$

$$b_7 = \frac{l_7}{3 + \frac{E_{\varphi_7^{II}}}{E_{\beta_7}}} = \frac{7,00}{3 + \frac{5,23}{38,90}} = \frac{7,00}{3 + 0,1343} = \frac{7,00}{3,134} = 2,238 \text{ м.};$$

$$K_{b_7} = \frac{2,238}{7,00 - 2,238} = 0,468.$$

2-й стержень.

$$E_{\varphi_2^{II}} = \frac{E_{\gamma_3^A} \cdot E_{\gamma_7^B}}{E_{\gamma_3^A} + E_{\gamma_7^B}} = \frac{10,35 \cdot 64,10}{10,35 + 64,10} = \frac{10,35 \cdot 64,10}{74,45} = 8,91;$$

$$b_2 = l_2 \frac{E_{\beta_2}}{E_{\alpha_2^B} + E_{\varphi_2^{II}}} = 8,00 \frac{9,84}{24,48 + 8,91} = \frac{8 \cdot 9,84}{33,39} = 2,36 \text{ м.};$$

$$K_{b_2} = \frac{2,36}{8,00 - 2,36} = 0,418;$$

$$E_{\gamma_2^A} = E_{\alpha_2^A} - (1 + K_{b_2}) E_{\beta_2} = 24,48 - 1,418 \cdot 9,84 = 24,48 - 13,96 = 10,52.$$

8-й стержень.

$$E_{\varphi_8^{II}} = \frac{E_{\gamma_2^A} \cdot E_{\gamma_1^B}}{E_{\gamma_2^A} + E_{\gamma_1^B}} = \frac{10,52 \cdot 11,12}{10,52 + 11,12} = \frac{10,52 \cdot 11,12}{21,64} = 5,40;$$

$$b_8 = \frac{l_8}{3 + \frac{E_{\varphi_8^{II}}}{E_{\beta_8}}} = \frac{6,00}{3 + \frac{5,40}{33,33}} = \frac{6,00}{3 + 0,162} = 1,897 \text{ м.};$$

$$K_{b_8} = \frac{1}{2 + 0,162} = 0,463.$$

1-й стержень.

$$E_{\varphi_1^I} = \frac{E_{\gamma_2^A} \cdot E_{\gamma_8^B}}{E_{\gamma_2^A} + E_{\gamma_8^B}} = \frac{10,52 \cdot 55,6}{10,52 + 55,6} = \frac{10,52 \cdot 55,6}{66,12} = 8,836;$$

$$b_1 = l_1 \frac{E_{\beta_1}}{E_{\alpha_1^B} + E_{\varphi_1^I}} = 6,00 \frac{7,77}{18,90 + 8,836} = \frac{6 \cdot 7,77}{27,736} = 1,682 \text{ м.};$$

$$K_{b_1} = \frac{1,682}{6,00 - 1,682} = 0,389.$$

Сводная таблица предварительных данных.

№ п/п	Eβ	a	K <sub>a</sub>	b	K <sub>b</sub>	Eγ		Eφ		Коэффициенты распределения							
						Eγ <sup>A</sup>	Eγ <sup>B</sup>	Eφ <sup>A</sup>	Eφ <sup>B</sup>	μ <sub>1-8</sub>	μ <sub>2-7</sub>	μ <sub>3-6</sub>	μ <sub>4-5</sub>	μ <sub>5-4</sub>	μ <sub>6-3</sub>	μ <sub>7-2</sub>	μ <sub>8-1</sub>
1	6,0	7,77	0	1,682	0,389	—	γ <sub>1</sub> <sup>I</sup> = 11,12	∞	φ <sub>1</sub> <sup>I</sup> = 8,836	μ <sub>1-2</sub> = + 0,84	μ <sub>1-8</sub> = - 0,16	—	—	—	—	—	—
2	8,0	9,84	2,33	0,411	2,36	0,418	γ <sub>2</sub> <sup>II</sup> = 10,57	φ <sub>2</sub> <sup>I</sup> = 9,26	φ <sub>2</sub> <sup>II</sup> = 8,91	μ <sub>2-1</sub> = + 0,833	μ <sub>2-3</sub> = + 0,861	μ <sub>2-7</sub> = - 0,139	μ <sub>2-8</sub> = + 0,167	—	—	—	—
3	8,0	9,84	2,35	0,416	2,428	0,436	γ <sub>3</sub> <sup>III</sup> = 10,35	φ <sub>3</sub> <sup>II</sup> = 9,06	φ <sub>3</sub> <sup>III</sup> = 7,91	μ <sub>3-7</sub> = + 0,14	μ <sub>3-2</sub> = + 0,86	μ <sub>3-4</sub> = + 0,854	μ <sub>3-6</sub> = - 0,145	—	—	—	—
4	6,0	6,89	1,62	0,369	0,45	0,081	γ <sub>4</sub> <sup>IV</sup> = 7,30	φ <sub>4</sub> <sup>III</sup> = 8,82	φ <sub>4</sub> <sup>IV</sup> = 75,0	μ <sub>4-6</sub> = + 0,163	μ <sub>4-3</sub> = + 0,837	μ <sub>4-5</sub> = - 1	—	—	—	—	—
5	9,0	37,50	0	2,82	0,456	—	γ <sub>5</sub> <sup>IV</sup> = 75,00	—	φ <sub>5</sub> <sup>IV</sup> = 7,30	μ <sub>5-4</sub> = - 1	—	—	—	—	—	—	—
6	8,0	33,35	2,135	0,366	2,54	0,466	γ <sub>6</sub> <sup>III</sup> = 54,40	—	φ <sub>6</sub> <sup>III</sup> = 4,92	μ <sub>6-4</sub> = + 0,533	μ <sub>6-3</sub> = - 0,467	—	—	—	—	—	—
7	7,0	38,90	1,814	0,35	2,238	0,468	γ <sub>7</sub> <sup>II</sup> = 64,10	—	φ <sub>7</sub> <sup>II</sup> = 5,23	μ <sub>7-3</sub> = + 0,505	μ <sub>7-2</sub> = - 0,495	—	—	—	—	—	—
8	6,0	33,33	1,50	0,333	1,897	0,463	γ <sub>8</sub> <sup>I</sup> = 55,60	—	φ <sub>8</sub> <sup>I</sup> = 5,40	μ <sub>8-2</sub> = + 0,515	μ <sub>8-1</sub> = - 0,485	—	—	—	—	—	—

Коэффициенты распределения, которые будут нужны нам в дальнейшем только при нахождении эпюры моментов от смещения, вычисляем по формулам

$$\mu_{1-2} = \frac{\varphi_1^I}{\gamma_2^I}, \quad \mu_{2-1} = \frac{\varphi_2^I}{\gamma_1^I} \text{ и т. д.}$$

Вычисления эти произведены в таблице предварительных данных, при чем для удобства коэффициентам распределения присвоены надлежащие знаки. (см. стр. 35)

Нахождение эпюры моментов от смещения верхних узлов рамы вправо на  $\Delta x = 0,001$  м. При смещении вправо на  $\Delta x = 0,001$  м. будем иметь углы поворота стоек

$$\vartheta_8 = \frac{0,001}{6,00} = 1,667 \cdot 10^{-4}; \quad \vartheta_7 = \frac{0,001}{7,00} = 1,428 \cdot 10^{-4};$$

$$\vartheta_6 = \frac{0,001}{8,00} = 1,25 \cdot 10^{-4}; \quad \vartheta_5 = \frac{0,001}{9,00} = 1,111 \cdot 10^{-4}.$$

Моменты в стойках от смещения, при  $E = 21 \cdot 10^5 \frac{\text{т.}}{\text{м}^2}$  (для железобетона)

$$M_8^{\text{VIII}} = - \frac{E \vartheta_8}{E \beta_8} \cdot \frac{a_8}{l_8 - a_8 - b_8} =$$

$$= - \frac{21 \cdot 10^5 \cdot 1,667 \cdot 10^{-4}}{33,33} \cdot \frac{1,50}{6,00 - 1,50 - 1,897} = - 10,51 \frac{1,50}{2,603} =$$

$$= - 6,05 \text{ тм.}$$

$$M_8^I = - (-6,05) \frac{1,897}{1,50} = + 7,65 \text{ тм.}$$

$$M_7^{\text{VII}} = - \frac{E \vartheta_7}{E \beta_7} \cdot \frac{a_7}{l_7 - a_7 - b_7} =$$

$$= - \frac{21 \cdot 10^5 \cdot 1,428 \cdot 10^{-4}}{38,90} \cdot \frac{1,814}{7,00 - 1,814 - 2,238} = - 7,70 \frac{1,814}{2,947} =$$

$$= - 4,74 \text{ тм.}$$

$$M_7^{\text{II}} = - (-4,74) \frac{2,238}{1,814} = + 5,84 \text{ тм.}$$

$$M_6^{\text{VI}} = - \frac{21 \cdot 10^5 \cdot 1,25 \cdot 10^{-4}}{33,35} \cdot \frac{2,135}{8,00 - 2,135 - 2,54} =$$

$$= - 7,87 \frac{2,135}{3,325} = - 5,05 \text{ тм.}$$

$$M_6^{\text{III}} = - (-5,05) \frac{2,54}{2,135} = + 6,01 \text{ тм.}$$

$$M_5^{\text{V}} = 0$$

$$M_5^{\text{IV}} = + \frac{21 \cdot 10^5 \cdot 1,111 \cdot 10^{-4}}{37,50} \cdot \frac{2,82}{9 - 2,82} = + 6,22 \text{ тм.}$$

## Распределение и суммирование моментов производим в таблице.

Моменты	Опорный момент от поворота					$m = \frac{\mathcal{M}}{Z}$	Вычисление удерживающей силы Z при смещении $\Delta x = 0,001$ м.
	Стой- ки (5)	Стой- ки (6)	Стой- ки (7)	Стой- ки (8)	Суммар- ные $\mathcal{M}$		
$M_1^I$	+0,2355	-0,344	+0,987	-3,710	-2,83	-0,468	Реакция опоры 8-го стержня.
$M_2^I$	+ 0,283	-0,413	+1,188	+3,940	+ 5,00	+0,827	$B_8^I = \frac{\mathcal{M}_8^I - \mathcal{M}_8^{VIII}}{l_8} = \frac{7,83 + 6,11}{6,00} = + 2,32$ т.
$M_2^{II}$	- 0,689	+1,005	-2,890	-1,647	- 4,22	-0,698	
$M_3^{II}$	- 0,800	+1,170	+2,950	-1,420	+ 1,90	+0,314	То-же 7-го стержня.
$M_3^{III}$	+ 1,925	-2,810	-1,285	+0,618	- 1,55	-0,256	$B_7^{II} = \frac{\mathcal{M}_7^{II} - \mathcal{M}_7^{VII}}{l_7} = \frac{6,12 + 4,84}{7,00} = + 1,56$ т.
$M_4^{III}$	+ 2,300	+3,200	-1,098	+0,528	+ 4,93	+0,815	
$M_4^{IV}$	- 6,220	-0,259	+0,089	-0,043	- 6,43	-1,062	То-же 6-го стержня.
$M_5^{IV}$	+ 6,220	+0,259	-0,089	+0,043	+ 6,43	+1,062	$B_6^{III} = \frac{\mathcal{M}_6^{III} - \mathcal{M}_6^{VI}}{l_6} = \frac{6,48 + 5,22}{8,00} = + 1,46$ т.
$M_6^{III}$	+ 0,375	+6,010	+0,187	-0,090	+ 6,48	+1,070	
$M_6^{VI}$	- 0,137	-5,050	-0,069	+0,033	- 5,22	-0,864	То-же 5-го стержня.
$M_7^{II}$	- 0,111	+0,165	+ 5,84	+0,227	+ 6,12	+1,012	$B_5^{IV} = \frac{\mathcal{M}_5^{IV}}{l_5} = \frac{6,43}{9,00} = + 0,714$ т.
$M_7^{VII}$	+ 0,039	-0,058	- 4,74	-0,079	- 4,84	-0,800	
$M_8^I$	+ 0,047	-0,069	+0,199	+7,650	+ 7,83	+1,295	Удержив. сила $Z = B_8^I + B_7^{II} + B_6^{III} + B_5^{IV} =$ $= 2,32 + 1,56 + 1,46 + 0,714 = + 6,05$ т.
$M_8^{VIII}$	- 0,016	+0,023	-0,066	- 6,050	- 6,11	-1,010	

Удерживающая сила получилась положительной, т.е. направлена слева направо. Моменты  $m$  соответствуют смещающей силе  $V = 1$  т.

Все вычисления и подсчеты, произведенные до сих пор, являются равно необходимыми, как при прежнем так и при новом способе построения линий влияния.

При прежнем способе первой операцией, ведущей к нахождению линий влияния, было бы построение основной диаграммы.

В предлагаемом способе предварительной операцией является нахождение линий влияния для углов поворота узлов  $E\tau$  и линии влияния для смещения  $E\delta_1$ .

## Нахождение линий влияния.

1. Построение линии влияния для угла поворота  $E\tau^1$  узла I.

Каждый стержень (ригель) разбиваем на 6 равных участков, так что в каждом пролете будем иметь по 5 точек. Общее число точек по всей длине рамы, включая узловые точки, будет  $20 + 5 = 25$ .

Предполагаем, что в узле IV введена фиктивная опора, препятствующая смещению узлов.

Прикладываем к узлу I извне момент  $M=1$  тм. (по часовой стрелке).

Коэффициенты распределения (формулы 38 и 39) будут

$$\mu_1 = \frac{E\varphi_1^I}{E\varphi_1^I + E\gamma_1^I} = \frac{8,836}{8,836 + 11,12} = 0,443;$$

$$\mu_2 = \mu_1 \cdot \frac{E\gamma_1^I}{E\gamma_2^I} = 0,443 \cdot \frac{11,12}{10,52} = 0,468.$$

Принимая во внимание знаки, получаем моменты:

$$M_1^I = -0,443 \text{ тм.}; M_1^O = -K_{a1} \cdot M_1^I = 0$$

$$M_2^I = +0,468 \text{ тм.}; M_2^{II} = -K_{b2} \cdot M_2^I = -0,418 \cdot 0,468 = -0,196 \text{ тм.}$$

Вычисление ординат линии влияния  $E\tau^I$  производим в таблице № 1.

Таблица построена для применения формул (45), (46) и (47).

Коэффициенты  $\eta_a$  и  $\eta_b$  для 1-го стержня взяты из таблиц Suter'a для случая односторонней прямолинейной вуты при  $\lambda = \frac{1}{4}$  и  $\frac{J}{J_0} = 0,20$ .

Коэффициент  $\nabla_b$  площади взят также из этих таблиц, но для случая равномерно-распределенной нагрузки (в „Расчете рамных конструкций“, изд. 4-е, эта таблица дается на стр. 184).

При этом учтено, что таблица составлена для левосторонней вуты, тогда как в нашем случае вута находится справа.

Для 2-го пролета  $\eta_a$  и  $\eta_b$  взяты из таблицы Suter'a для симметричных стержней с прямолинейными вутами при  $\lambda = \frac{1}{5}$  и  $\frac{J}{J_0} = 0,10$ .

Для 3-го и 4-го стержней вычисление ординат подобным порядком становится излишним, т. к. при нахождении подвижного груза справа от узла II имеет место фокусная зависимость

$$E\tau^I = -x_{a2} \cdot E\tau^{II},$$

где  $x_{a2} = K_{a2} \frac{E\varphi_2^I}{E\gamma_2^{II}} = 0,411 \cdot \frac{9,26}{10,57} = 0,361$  — левое угловое фокусное отношение\*).

Поэтому ординаты  $E\tau^I$  получаются из ординат  $E\tau^{II}$  из таблицы № 2 путем умножения последних на множитель ( $-0,361$ ).

Все остальное ясно из таблицы № 1.

2. Построение линии влияния для угла поворота  $E\tau^{II}$  узла II.

Прикладываем к узлу II извне момент  $M=1$  тм.

\*) Угловые фокусные отношения вычисляем по формулам (31) и (32) гл. III.

Коэффициенты распределения:

$$\mu_2 = \frac{E\varphi_2^{II}}{E\varphi_2^{II} + E\gamma_2^{II}} = \frac{8,91}{8,91 + 10,57} = 0,458;$$

$$\mu_3 = \mu_2 \frac{E\gamma_2^{II}}{E\gamma_3^{II}} = 0,458 \frac{10,57}{10,35} = 0,467.$$

Моменты:

$$M_2^{II} = -0,458 \text{ тм.}; \quad M_2^I = -K_{a2} \cdot M_2^{II} = +0,411 \cdot 0,458 = +0,188 \text{ тм.}$$

$$M_3^{II} = +0,467 \text{ тм.}; \quad M_3^{III} = -K_{b3} \cdot M_3^{II} = -0,436 \cdot 0,467 = -0,204 \text{ тм.}$$

Все вычисления ординат линии влияния  $E\tau^{II}$  произведены в таблице № 2.

Коэффициенты  $\eta_a$  и  $\eta_b$  для пролетов 2-го и 3-го одинаковы.

На участках 1-го и 4-го стержней вычисления отпадают, т. к. можем воспользоваться угловыми фокусными отношениями.

$$\text{Для 1-го пролета } E\tau^{II} = -x_{b2} \cdot E\tau^I, \text{ где } x_{b2} = K_{b2} \frac{E\varphi_2^{II}}{E\gamma_2^I} =$$

$$= -0,418 \frac{8,91}{10,52} = 0,354; \text{ поэтому ординаты } E\tau^{II} \text{ получаем, умножая ординаты } E\tau^I$$

из таблицы № 1 на множитель  $(-0,354)$ .

$$\text{Для 4-го пролета имеем: } E\tau^{II} = -x_{a3} \cdot E\tau^{III}, \text{ где } x_{a3} = K_{a3} \frac{E\varphi_3^{II}}{E\gamma_3^{III}} =$$

$$= 0,416 \frac{9,06}{10,54} = 0,358. \text{ Поэтому ординаты } E\tau^{II} \text{ получаем путем умноже-$$

ния ординат  $E\tau^{III}$  из таблицы № 3 на множитель  $(-0,358)$ .

3. Построение линии влияния угла поворота  $E\tau^{III}$  узла III.

Прикладываем к узлу III извне момент  $M = 1$  тм.

Коэффициенты распределения:

$$\mu_3 = \frac{E\varphi_3^{III}}{E\varphi_3^{III} + E\gamma_3^{III}} = \frac{7,91}{7,91 + 10,54} = 0,429;$$

$$\mu_4 = \mu_3 \frac{E\gamma_3^{III}}{E\gamma_4^{III}} = 0,429 \frac{10,54}{9,28} = 0,487.$$

Моменты:

$$M_3^{III} = -0,429 \text{ тм.}; \quad M_3^{II} = -K_{a3} \cdot M_3^{III} = +0,416 \cdot 0,429 = +0,178 \text{ т. м.}$$

$$M_4^{III} = +0,487 \text{ тм.}; \quad M_4^{IV} = -K_{b4} \cdot M_4^{III} = -0,081 \cdot 0,487 = -0,039 \text{ т. м.}$$

Вычисление ординат произведено в таблице № 3.



Коэффициенты  $\eta_a$  и  $\eta_b$  для 4-го стержня взяты из таблиц Suter'a для стержней с двухсторонними прямолинейными вутами для случая

$$\lambda = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \frac{J}{J_0} = 0,10.$$

Вычисление ординат отпадает для пролетов 1-го и 2-го, т. к. можем воспользоваться угловым фокусным отношением:

$$E\tau^{III} = -x_{b3} \cdot E\tau^{II}, \quad \text{где} \quad x_{b3} = K_{b3} \frac{E\varphi_3^{III}}{E\gamma_3^{II}} = 0,436 \frac{7,91}{10,35} = 0,333$$

Берем ординаты  $E\tau^{II}$  из таблицы № 2 и множим на множитель ( $-0,333$ ).

4. Построение линии влияния угла поворота  $E\tau^{IV}$  узла IV.

Прикладываем к узлу IV извне момент  $M = 1$  тм.  
Коэффициент распределения

$$\mu_4 = \frac{E\varphi_4^{IV}}{E\varphi_4^{IV} + E\gamma_4^{IV}} = \frac{75,00}{75,00 + 7,30} = 0,911$$

Моменты:

$$M_4^{IV} = -0,911 \text{ тм.}; \quad M_4^{III} = -K_{a4} \cdot M_4^{IV} = +0,369 \cdot 0,911 = +0,336.$$

Вычисление ординат произведено в таблице № 4.

Для стержней 1-го, 2-го и 3-го вычислений не производим, т. к. имеем возможность использовать угловое фокусное отношение:

$$E\tau^{IV} = -x_{b4} E\tau^{III}, \quad \text{где} \quad x_{b4} = K_{b4} \frac{E\varphi_4^{IV}}{E\gamma_4^{III}} = 0,081 \frac{75,00}{9,28} = 0,655.$$

Поэтому берем ординаты  $E\tau^{III}$  из таблицы № 3 и множим их на множитель ( $-0,655$ ).

Графическое построение линий влияния для углов поворота узлов  $E\tau^I$ ,  $E\tau^{II}$ ,  $E\tau^{III}$ ,  $E\tau^{IV}$  излишне, т. к. нам нужно знать для дальнейших вычислений только численные значения ординат этих линий влияния.

5. Построение линии влияния для смещения  $E\delta_i$ .

Вычисление ординат произведено в таблице № 5. Моменты  $m^a$  и  $m^b$ , соответствующие смещающей силе  $V = 1$  т. берем из таблицы моментов от смещения узлов.

Коэфф-ты  $\eta_a$  и  $\eta_b$  для всех стержней были установлены при нахождении линий влияния углов поворота.

Линия влияния для смещения  $E\delta_i$  может служить для определения всех дополнительных моментов от смещения (см. гл. II).

На фиг. 22-а показана линия влияния  $E\delta_i$ .

После вычисления ординат линий влияния для углов поворота и для смещения можем вычислить ординаты для линий влияния всех защемляющих моментов.

6. Нахождение линий влияния для защемляющих моментов.

Вычисление ординат произведено в таблице № 6.

В этой таблице для каждого момента определяются сначала ординаты, соответствующие основному моменту, для чего производится умножение ординат исходной линии для угла поворота узла на

масштабные числа, соответствующие данному моменту. Формула, в удобном для вычислений виде, приведена в каждой верхней строке. Ординаты  $E\tau$  берутся из надлежащей таблицы №№ 1—4.

К ординатам основного момента прибавляются ординаты дополнительного момента от смещения, вычисляемые по ординатам инфлюэнты для  $E\delta_l$  согласно формулы (44):

$$M' = E\delta_l \cdot \frac{\mathfrak{M}}{E \Delta x},$$

которая для модуля железобетона  $E = 21 \cdot 10^5 \frac{\text{т}}{\text{м}^2}$  и  $\Delta x = 0,001$  м. принимает вид

$$M' = E\delta_l \cdot \frac{\mathfrak{M}}{2100} = E\delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \mathfrak{M}).$$

Здесь  $\mathfrak{M}$  — опорный момент от смещения верхних узлов на  $\Delta x = 0,001$  м. — должен быть взят из таблицы моментов от смещения узлов.

Одновременно с ординатами, в таблице № 6 произведено вычисление площадей участков линий влияния, при чем с площадями взятыми из таблиц № 1—4 и № 5, производятся совершенно те же операции, как с ординатами (умножение на те же множители и заключительное сложение).

В качестве проверки вычислений может служить проверка на равновесие моментов в узле для каждого положения подвижного груза. Например, для узла I, принимая во внимание знаки опорных моментов, должно соблюдаться условие:

$$M_1^I + M_8^I - M_2^I = 0.$$

Для узла II должно быть:

$$M_2^{II} + M_7^{II} - M_3^{II} = 0.$$

Для узла III должно быть:

$$M_3^{III} + M_6^{III} - M_4^{III} = 0.$$

Суммируя ординаты (с соответствующими знаками) для одной и той же точки стояния груза, должны получить подтверждение этих равенств.

Ввиду того, что решение настоящего примера имеет целью только ознакомить с практикой применения предлагаемого способа построения линий влияния, нахождение линий влияния произведено в таблице № 6 (из соображений экономии места) не для всех защемляющих моментов, а только для моментов

$$M_1^I, M_2^I, M_8^I, M_8^{VIII}, M_2^{II}, M_3^{II}, M_7^{II}.$$

При желании таблицу № 6 легко дополнить вычислением ординат для всех остальных моментов, сохраняя изложенный порядок вычислений.

7. Нахождение линии влияния для изгибающего момента в середине 2-го пролета производится по известной формуле для момента в пролете

$$M_x = M_{ox} + \frac{M^A (l-x)}{l} + \frac{M^B x}{l}.$$

Вычисление ординат произведено в таблице № 7.

№ 1. Таблица вычислений ординат линии влияния угла поворота  $E^I$  узла I.

№ стержня и № точек	Стержень 1-й					Стержень 2-й					Стержень 3-й					Стержень 4-й									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20				
$\eta_A =$	0	0,271	0,393	0,396	0,310	0,165	0	0,237	0,372	0,385	0,306	0,165	0												
$\eta_B =$	0	0,162	0,294	0,366	0,349	0,216	0	0,165	0,306	0,385	0,372	0,237	0												
$A = M^A \cdot E \beta \cdot l =$	$M_2^I E \beta_2 l_2 = +0,468 \cdot 9,84 \cdot 8 = 36,85$																								
$B = M^B \cdot E \beta \cdot l =$	$M_2^{II} E \beta_2 l_2 = -0,196 \cdot 9,84 \cdot 8 = -15,45$																								
$A \cdot \eta_A =$	0	0	0	0	0	0	0	+8,74	+13,72	+14,20	+11,28	+6,08	0												
$B \cdot \eta_B =$	0	-3,34	-6,06	-7,55	-7,20	-4,46	0	-2,55	-4,72	-5,94	-5,74	-3,66	0												
$E^I = A \eta_A + B \eta_B =$	0	-3,34	-6,06	-7,55	-7,20	-4,46	0	+6,19	+9,00	+8,26	+5,54	+2,42	0	-2,20	-3,17	-2,89	-1,91	-0,81	0	+0,56	+0,90	+0,93	+0,72	+0,38	0
Площадь участка линии влияния $\Omega =$	$\Omega_{(1)} = E \beta_1 l_1^2 \nabla_v M_1^I =$ $= 7,77 \cdot 6^3 \cdot 0,237 (-0,443) = -29,30$ $\Omega_{(2)} = \frac{A+B}{4} \cdot l_2 = \frac{36,85 - 15,45}{4} = +42,80$ $\Omega_{(3)} = -0,361 \cdot 41,40 = -14,95$ $\Omega_{(4)} = -0,361 \cdot (-9,95) = +3,59$																								

Вычисления опадают.

Ввиду существования фокусной зависимости

$$E^I = -\chi_{ав} \cdot E^I = -0,361 \cdot E^I,$$

ординаты  $E^I$  получаем, беря из таблицы № 2 величины ординат  $E^{II}$  и умножая их на (-0,361).

№ 2. Таблица вычислений ординат линии влияния угла поворота  $E^{II}$  узла II.

№ стержня и № точек	Стержень 1-й					Стержень 2-й					Стержень 3-й					Стержень 4-й									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20				
$\eta_A =$	Вычисления опадают, т. к. $E^{II} = -\chi_{ав} E^I = -0,354 \cdot E^I$ .																								
$\eta_B =$	Взяв ординаты $E^I$ из таблицы № 1, умножаем их на (-0,354).																								
$A = M^A \cdot E \beta \cdot l =$	0	0,237	0,372	0,385	0,306	0,165	0	0,237	0,372	0,385	0,306	0,165	0												
$B = M^B \cdot E \beta \cdot l =$	0	0,165	0,306	0,385	0,372	0,237	0	0,165	0,306	0,385	0,372	0,237	0												
$A \cdot \eta_A =$	$M_2^{II} E \beta_2 l_2 = 0,188 \cdot 9,84 \cdot 8 = 14,82$																								
$B \cdot \eta_B =$	$M_2^{III} E \beta_2 l_2 = -0,458 \cdot 9,84 \cdot 8 = -36,10$																								
$E^{II} = A \eta_A + B \eta_B =$	0	+1,18	+2,15	+2,67	+2,55	+1,58	0	-2,44	-5,54	-8,20	-8,91	-6,10	0	+6,08	+8,79	+8,00	+5,29	+2,26	0	-1,55	-2,50	-2,58	-2,01	-1,06	0
Площадь участка линии влияния $\Omega =$	$\Omega_{(1)} = -0,354(-29,30) = +10,35$ $\Omega_{(2)} = \frac{A+B}{4} \cdot l_2 = \frac{14,82 - 36,10}{4} = -42,50$ $\Omega_{(3)} = \frac{A+B}{4} \cdot l_3 = \frac{36,80 - 16,05}{4} = +41,40$ $\Omega_{(4)} = -0,358 \cdot 27,80 = -9,95$																								

№ 3. Таблица вычислений ординат линии влияния угла поворота E<sup>III</sup> узла III.

№ стержня и № точек	Стержень 1-й					Стержень 2-й					Стержень 3-й					Стержень 4-й											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	IV					
$\tau_A =$	Вычисления опадают.																										
$\tau_B =$	Ввиду фокусной зависимости																										
$A = M^A \cdot E \beta \cdot I =$	$E \tau^{III} = -x_{вз} \cdot E \tau^{II} = -0,333 E \tau^{II}$ ,																										
$B = M^B \cdot E \beta \cdot I =$	берем ординаты E <sup>II</sup> из таблицы № 2 и множим их на множитель (-0,333)																										
$A \cdot \tau_A =$	0	0,237	0,372	0,385	0,306	0,165	0	0,229	0,372	0,390	0,309	0,165	0	0,229	0,372	0,390	0,309	0,165	0	0,229	0,372	0,390	0,309	0,165	0		
$B \cdot \tau_B =$	0	0,165	0,306	0,385	0,372	0,237	0	0,165	0,306	0,372	0,237	0	0,165	0,306	0,372	0,237	0	0,165	0,306	0,372	0,237	0	0,165	0,306	0,372	0,237	0
$E \tau^{III} = A \tau_A + B \tau_B =$	0	-0,39	-0,72	-0,89	-0,85	-0,53	0	+0,81	+1,85	+2,74	+2,97	+2,03	0	-2,25	-5,11	-7,60	-8,26	-5,68	0	+4,34	+6,98	+7,22	+5,61	+2,95	0		
Площадь участка линии влияния $\Omega =$	$\Omega_{(1)} = -0,333 \cdot 10,35 = -3,44$ $\Omega_{(2)} = -0,333 \cdot (-42,50) = +14,16$ $\Omega_{(3)} = \frac{A+B}{4} \cdot I_3 = \frac{14,02-33,74}{4} \cdot 8 = -39,50$ $\Omega_{(4)} = \frac{A+B}{4} \cdot I_4 = \frac{20,12-1,61}{4} \cdot 4 = +27,80$																										

№ 4. Таблица вычислений ординат линии влияния угла поворота E<sup>IV</sup> узла IV.

№ стержня и № точек	Стержень 1-й					Стержень 2-й					Стержень 3-й					Стержень 4-й											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	IV					
$\tau_A =$	Вычисления опадают.																										
$\tau_B =$	Ввиду существования фокусной зависимости																										
$A = M^A \cdot E \beta \cdot I =$	$E \tau^{IV} = -x_{вз} \cdot E \tau^{III} = -0,655 E \tau^{III}$ ,																										
$B = M^B \cdot E \beta \cdot I =$	взяв ординаты для E <sup>III</sup> из таблицы № 3, умножаем их на множитель (-0,655)																										
$A \cdot \tau_A =$	0	0,229	0,372	0,390	0,309	0,165	0	0,229	0,372	0,390	0,309	0,165	0	0,229	0,372	0,390	0,309	0,165	0	0,229	0,372	0,390	0,309	0,165	0		
$B \cdot \tau_B =$	0	0,165	0,309	0,385	0,372	0,237	0	0,165	0,309	0,372	0,237	0	0,165	0,309	0,372	0,237	0	0,165	0,309	0,372	0,237	0	0,165	0,309	0,372	0,237	0
$E \tau^{IV} = A \tau_A + B \tau_B =$	0	+0,26	+0,47	+0,58	+0,56	+0,35	0	-0,53	-1,21	-1,80	-1,94	-1,33	0	+1,47	+3,35	+4,97	+5,42	+3,72	0	-3,04	-6,49	-9,28	-9,75	-6,35	0		
Площадь участка линии влияния $\Omega =$	$\Omega_{(1)} = -0,655 (-3,44) = +2,27$ $\Omega_{(2)} = -0,655 \cdot 14,16 = -9,28$ $\Omega_{(3)} = -0,655 (-39,50) = +25,90$ $\Omega_{(4)} = \frac{A+B}{4} \cdot I_4 = \frac{13,90-37,70}{4} \cdot 4 = -36,62$																										

№ 5. Таблица вычислений ординат линии влияния для смещения  $E\delta_l$ .

№ стержня и № точек	Стержень 1-й					Стержень 2-й					Стержень 3-й					Стержень 4-й									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	IV			
$\gamma_A =$	0	0,271	0,393	0,396	0,310	0,165	0	0,237	0,372	0,385	0,306	0,165	0	0,237	0,372	0,385	0,306	0,165	0	0,229	0,372	0,390	0,165	0	
$\gamma_B =$	0	0,162	0,294	0,366	0,349	0,216	0	0,165	0,306	0,385	0,372	0,237	0	0,165	0,306	0,385	0,372	0,237	0	0,165	0,309	0,390	0,372	0,229	0
$A = m^A \cdot E \beta \cdot l =$	$m_2^I \cdot E \beta_2 \cdot l_2 = +0,827 \cdot 9,84 \cdot 8 = +65,20$ $m_3^{II} \cdot E \beta_3 \cdot l_3 = +0,314 \cdot 9,84 \cdot 8 = +24,72$ $m_4^{III} \cdot E \beta_4 \cdot l_4 = +0,815 \cdot 6,89 \cdot 6 = +33,68$																								
$B = m^B \cdot E \beta \cdot l =$	$m_2^{II} \cdot E \beta_2 \cdot l_2 = -0,698 \cdot 9,84 \cdot 8 = -55,00$ $m_3^{III} \cdot E \beta_3 \cdot l_3 = -0,256 \cdot 9,84 \cdot 8 = -20,18$ $m_4^{IV} \cdot E \beta_4 \cdot l_4 = -1,062 \cdot 6,89 \cdot 6 = -43,90$																								
$A \cdot \gamma_A =$	0	0	0	0	0	0	+15,45	+24,28	+25,10	+19,95	+10,77	0	+5,86	+9,19	+9,51	+7,56	+4,08	0	+7,71	+12,52	+13,15	+10,42	+5,56	0	
$B \cdot \gamma_B =$	0	-3,54	-6,42	-7,98	-7,62	-4,72	0	-9,08	-16,83	-21,20	-20,48	-13,05	0	-3,33	-6,17	-7,77	-7,50	-4,78	0	-7,25	-13,58	-17,15	-16,35	-10,07	0
$E\delta_l = A \gamma_A + B \gamma_B =$	0	-3,54	-6,42	-7,98	-7,62	-4,72	0	+6,37	+7,45	+3,90	-0,53	-2,28	0	+2,53	+3,02	+1,74	+0,06	-0,70	0	+0,46	-1,06	-4,00	-5,93	-4,51	0
Площадь участка линии влияния $\Omega =$	$\Omega_{(1)} = E \beta_1 \cdot l_1^2 \cdot \nabla_B \cdot m_1^1 =$ $\Omega_{(2)} = \frac{A+B}{4} \cdot l_2 = \frac{65,20 - 55,00}{4} = +2,30$ $\Omega_{(3)} = \frac{A+B}{4} \cdot l_3 = \frac{24,72 - 20,18}{4} = +1,12$ $\Omega_{(4)} = \frac{A+B}{4} \cdot l_4 = \frac{33,68 - 43,90}{4} = -2,52$																								

№ 6. Таблица вычислений ординат линий влияния защемляющих моментов.

	Стержень 1-й					Стержень 2-й					Стержень 3-й					Стержень 4-й								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	IV		
Ординаты основного момента	$M_1^I = E \tau^I \cdot \frac{1}{E \varphi^I} = E \tau^I \cdot \frac{1}{8,836} = 0,1132 E \tau^I$ $M_1^I = E \tau^I \left( -\frac{1}{E \gamma_1^I} \right) = E \tau^I \left( -\frac{1}{11,12} \right) = -0,0899 E \tau^I$																							
Ординаты дополнительного момента	0	-0,378	-0,685	-0,854	-0,814	-0,502	0	-0,557	-0,809	-0,744	-0,498	-0,218	0	+0,198	+0,286	+0,260	+0,172	+0,073	0	-0,050	-0,081	-0,065	-0,034	0
Полные	$(M_1^I)' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 30,1^I) = E \delta_l (-4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 2,83) = -1,35 \cdot 10^{-3} E \delta_l$																							
Площади участков линии влияния	$\Omega_{(1)} = -29,30 \cdot 0,1132 + 30,96 \cdot 1,35 \cdot 10^{-3} = -3,32 + 0,042 = -3,28$ $\Omega_{(2)} = -42,80 \cdot 0,0899 - 20,30 \cdot 1,35 \cdot 10^{-3} = -3,85 - 0,027 = -3,88$ $\Omega_{(3)} = +14,95 \cdot 0,0899 - 9,12 \cdot 1,35 \cdot 10^{-3} = +1,35 - 0,012 = +1,34$ $\Omega_{(4)} = -3,59 \cdot 0,0899 + 15,32 \cdot 1,35 \cdot 10^{-3} = -0,323 + 0,021 = -0,302$																							

№ 6. (Продолжение таблицы)

	Стержень 1-й				Стержень 2-й				Стержень 3-й				Стержень 4-й												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20				
$M_2^I$	$M_2^I = E \tau^I \left( -\frac{1}{E \gamma_2^I} \right) = E \tau^I \left( -\frac{1}{9,26} \right) = E \tau^I (-0,108)$																								
	0	-0,317	-0,576	-0,718	-0,685	-0,424	0	-0,668	-0,970	-0,891	-0,598	-0,261	0	+0,238	+0,342	+0,312	+0,206	+0,087	0	-0,060	-0,097	-0,100	-0,078	-0,041	0
	$(M_2^I)' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \mathfrak{M}_2^I) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 5,00) = + 2,38 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	-0,008	-0,015	-0,019	-0,018	-0,011	0	+0,015	+0,018	+0,009	-0,001	-0,005	0	+0,006	+0,007	+0,004	0,000	-0,002	0	+0,001	-0,003	-0,010	-0,014	-0,011	0
$M_8^I$	$M_8^I = E \tau^I \left( -\frac{1}{E \gamma_8^I} \right) = E \tau^I \left( -\frac{1}{55,6} \right) = -0,0180 E \tau^I$																								
	0	+0,060	+0,109	+0,136	+0,130	+0,080	0	-0,111	-0,162	-0,148	-0,100	-0,043	0	+0,040	+0,057	+0,052	+0,034	+0,015	0	-0,010	-0,016	-0,017	-0,013	-0,007	0
	$(M_8^I)' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \mathfrak{M}_8^I) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 7,83) = + 3,72 \cdot 10^{-3} E \delta_l$																								
	0	-0,013	-0,024	-0,030	-0,028	-0,018	0	+0,024	+0,028	+0,015	-0,002	-0,008	0	+0,009	+0,011	+0,006	0,000	-0,003	0	+0,032	-0,004	-0,015	-0,022	-0,017	0
$M_8^{VIII}$	$M_8^{VIII} = -K_{as} \cdot M_8^I = -0,333 M_8^I$ (здесь $K_{as}$ — левое моментное фокусн. отношение)																								
	0	-0,020	-0,036	-0,045	-0,043	-0,027	0	+0,037	+0,054	+0,049	+0,033	+0,014	0	-0,013	-0,019	-0,017	-0,011	-0,005	0	+0,003	+0,005	+0,006	+0,004	+0,002	0
	$(M_8^{VIII})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \mathfrak{M}_8^{VIII}) = E \delta_l (-4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,11) = -2,91 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	+0,010	+0,019	+0,023	+0,022	+0,014	0	-0,019	-0,022	-0,011	+0,001	+0,007	0	-0,007	-0,009	-0,005	0,000	+0,002	0	-0,001	+0,003	+0,012	+0,017	+0,013	0
$M_8^{VII}$	$M_8^{VII} = -K_{as} \cdot M_8^I = -0,333 M_8^I$ (здесь $K_{as}$ — левое моментное фокусн. отношение)																								
	0	-0,010	-0,017	-0,022	-0,021	-0,013	0	+0,018	+0,032	+0,038	+0,034	+0,021	0	-0,020	-0,028	-0,022	-0,011	-0,003	0	+0,002	+0,008	+0,018	+0,021	+0,015	0
	$(M_8^{VII})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \mathfrak{M}_8^{VII}) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,11) = -2,91 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	-0,010	-0,017	-0,022	-0,021	-0,013	0	+0,018	+0,032	+0,038	+0,034	+0,021	0	-0,020	-0,028	-0,022	-0,011	-0,003	0	+0,002	+0,008	+0,018	+0,021	+0,015	0
$M_8^{VI}$	$M_8^{VI} = -K_{as} \cdot M_8^I = -0,333 M_8^I$ (здесь $K_{as}$ — левое моментное фокусн. отношение)																								
	0	-0,020	-0,036	-0,045	-0,043	-0,027	0	+0,037	+0,054	+0,049	+0,033	+0,014	0	-0,013	-0,019	-0,017	-0,011	-0,005	0	+0,003	+0,005	+0,006	+0,004	+0,002	0
	$(M_8^{VI})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \mathfrak{M}_8^{VI}) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,11) = -2,91 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	+0,010	+0,019	+0,023	+0,022	+0,014	0	-0,019	-0,022	-0,011	+0,001	+0,007	0	-0,007	-0,009	-0,005	0,000	+0,002	0	-0,001	+0,003	+0,012	+0,017	+0,013	0
$M_8^{V}$	$M_8^{V} = -K_{as} \cdot M_8^I = -0,333 M_8^I$ (здесь $K_{as}$ — левое моментное фокусн. отношение)																								
	0	-0,020	-0,036	-0,045	-0,043	-0,027	0	+0,037	+0,054	+0,049	+0,033	+0,014	0	-0,013	-0,019	-0,017	-0,011	-0,005	0	+0,003	+0,005	+0,006	+0,004	+0,002	0
	$(M_8^{V})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \mathfrak{M}_8^{V}) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,11) = -2,91 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	+0,010	+0,019	+0,023	+0,022	+0,014	0	-0,019	-0,022	-0,011	+0,001	+0,007	0	-0,007	-0,009	-0,005	0,000	+0,002	0	-0,001	+0,003	+0,012	+0,017	+0,013	0
$M_8^{IV}$	$M_8^{IV} = -K_{as} \cdot M_8^I = -0,333 M_8^I$ (здесь $K_{as}$ — левое моментное фокусн. отношение)																								
	0	-0,020	-0,036	-0,045	-0,043	-0,027	0	+0,037	+0,054	+0,049	+0,033	+0,014	0	-0,013	-0,019	-0,017	-0,011	-0,005	0	+0,003	+0,005	+0,006	+0,004	+0,002	0
	$(M_8^{IV})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \mathfrak{M}_8^{IV}) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,11) = -2,91 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	+0,010	+0,019	+0,023	+0,022	+0,014	0	-0,019	-0,022	-0,011	+0,001	+0,007	0	-0,007	-0,009	-0,005	0,000	+0,002	0	-0,001	+0,003	+0,012	+0,017	+0,013	0
$M_8^{III}$	$M_8^{III} = -K_{as} \cdot M_8^I = -0,333 M_8^I$ (здесь $K_{as}$ — левое моментное фокусн. отношение)																								
	0	-0,020	-0,036	-0,045	-0,043	-0,027	0	+0,037	+0,054	+0,049	+0,033	+0,014	0	-0,013	-0,019	-0,017	-0,011	-0,005	0	+0,003	+0,005	+0,006	+0,004	+0,002	0
	$(M_8^{III})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \mathfrak{M}_8^{III}) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,11) = -2,91 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	+0,010	+0,019	+0,023	+0,022	+0,014	0	-0,019	-0,022	-0,011	+0,001	+0,007	0	-0,007	-0,009	-0,005	0,000	+0,002	0	-0,001	+0,003	+0,012	+0,017	+0,013	0
$M_8^{II}$	$M_8^{II} = -K_{as} \cdot M_8^I = -0,333 M_8^I$ (здесь $K_{as}$ — левое моментное фокусн. отношение)																								
	0	-0,020	-0,036	-0,045	-0,043	-0,027	0	+0,037	+0,054	+0,049	+0,033	+0,014	0	-0,013	-0,019	-0,017	-0,011	-0,005	0	+0,003	+0,005	+0,006	+0,004	+0,002	0
	$(M_8^{II})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \mathfrak{M}_8^{II}) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,11) = -2,91 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	+0,010	+0,019	+0,023	+0,022	+0,014	0	-0,019	-0,022	-0,011	+0,001	+0,007	0	-0,007	-0,009	-0,005	0,000	+0,002	0	-0,001	+0,003	+0,012	+0,017	+0,013	0
$M_8^I$	$M_8^I = -K_{as} \cdot M_8^I = -0,333 M_8^I$ (здесь $K_{as}$ — левое моментное фокусн. отношение)																								
	0	-0,020	-0,036	-0,045	-0,043	-0,027	0	+0,037	+0,054	+0,049	+0,033	+0,014	0	-0,013	-0,019	-0,017	-0,011	-0,005	0	+0,003	+0,005	+0,006	+0,004	+0,002	0
	$(M_8^I)' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \mathfrak{M}_8^I) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,11) = -2,91 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	+0,010	+0,019	+0,023	+0,022	+0,014	0	-0,019	-0,022	-0,011	+0,001	+0,007	0	-0,007	-0,009	-0,005	0,000	+0,002	0	-0,001	+0,003	+0,012	+0,017	+0,013	0
$M_8^I$	$M_8^I = -K_{as} \cdot M_8^I = -0,333 M_8^I$ (здесь $K_{as}$ — левое моментное фокусн. отношение)																								
	0	-0,020	-0,036	-0,045	-0,043	-0,027	0	+0,037	+0,054	+0,049	+0,033	+0,014	0	-0,013	-0,019	-0,017	-0,011	-0,005	0	+0,003	+0,005	+0,006	+0,004	+0,002	0
	$(M_8^I)' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \mathfrak{M}_8^I) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,11) = -2,91 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	+0,010	+0,019	+0,023	+0,022	+0,014	0	-0,019	-0,022	-0,011	+0,001	+0,007	0	-0,007	-0,009	-0,005	0,000	+0,002	0	-0,001	+0,003	+0,012	+0,017	+0,013	0

№ 6. (Продолжение таблицы)

	Стержень 1-й					Стержень 2-й					Стержень 3-й					Стержень 4-й									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	IV			
Ординаты основного момента	$M_2^{II} = E \tau^{II} \cdot \frac{1}{E \gamma_2^{II}} = E \tau^{II} \cdot \frac{1}{8,91} = +0,1124 E \tau^{II}$																								
	$M_2^{II} = E \tau^{II} \left( -\frac{1}{E \gamma_2^{II}} \right) = E \tau^{II} \left( -\frac{1}{10,57} \right) = -0,0945 E \tau^{II}$																								
	0	+0,132	+0,242	+0,300	+0,286	+0,177	0	-0,274	-0,622	-0,922	-1,001	-0,885	0	-0,575	-0,830	-0,756	-0,500	-0,214	0	+0,147	+0,237	+0,244	+0,190	+0,100	0
	$(M_2^{II})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 302^{II}) = E \delta_l (-4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 4,22) = -2,01 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
Ординаты дополнитель- ного момента	$(M_2^{II})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 302^{II}) = E \delta_l (-4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 4,22) = -2,01 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	$\Omega^{(1)} = +10,35 \cdot 0,1124 +$ $+30,96 \cdot 2,01 \cdot 10^{-3} =$ $+1,062 + 0,062 = +1,124$																								
	0	+0,007	+0,013	+0,016	+0,015	+0,009	0	-0,013	-0,015	-0,008	+0,001	+0,005	0	-0,005	-0,006	-0,003	0,000	+0,001	0	-0,001	+0,002	+0,008	+0,012	+0,009	0
	$\Omega^{(2)} = -42,50 \cdot 0,1124 =$ $-20,30 \cdot 2,01 \cdot 10^{-3} =$ $-4,780 - 0,041 = -4,821$																								
Полные	$M_2^{II} = E \tau^{II} \cdot \frac{1}{E \gamma_2^{II}} = +0,1124 E \tau^{II}$																								
	$M_2^{II} = E \tau^{II} \left( -\frac{1}{E \gamma_2^{II}} \right) = E \tau^{II} \left( -\frac{1}{10,57} \right) = -0,0945 E \tau^{II}$																								
	0	+0,139	+0,255	+0,316	+0,301	+0,186	0	-0,287	-0,637	-0,930	-1,000	-0,680	0	-0,580	-0,836	-0,769	-0,500	-0,213	0	+0,146	+0,239	+0,252	+0,202	+0,109	0
	$\Omega^{(3)} = -41,40 \cdot 0,0945 =$ $-9,12 \cdot 2,01 \cdot 10^{-3} =$ $-3,920 - 0,019 = -3,94$																								
Площади участков ли- ний влияния	$M_2^{II} = E \tau^{II} \cdot \frac{1}{E \gamma_2^{II}} = +0,1124 E \tau^{II}$																								
	$M_2^{II} = E \tau^{II} \left( -\frac{1}{E \gamma_2^{II}} \right) = E \tau^{II} \left( -\frac{1}{10,57} \right) = -0,0945 E \tau^{II}$																								
	0	+0,007	+0,013	+0,016	+0,015	+0,009	0	-0,013	-0,015	-0,008	+0,001	+0,005	0	-0,005	-0,006	-0,003	0,000	+0,001	0	-0,001	+0,002	+0,008	+0,012	+0,009	0
	$\Omega^{(4)} = +9,95 \cdot 0,0945 +$ $+15,32 \cdot 2,01 \cdot 10^{-3} =$ $+0,940 + 0,031 = +0,97$																								
Ординаты основного момента	$M_3^{II} = E \tau^{II} \cdot \frac{1}{E \gamma_3^{II}} = +0,0965 E \tau^{II}$																								
	$M_3^{II} = E \tau^{II} \left( -\frac{1}{E \gamma_3^{II}} \right) = E \tau^{II} \left( -\frac{1}{9,06} \right) = -0,1105 E \tau^{II}$																								
	0	+0,114	+0,208	+0,258	+0,246	+0,153	0	-0,236	-0,535	-0,791	-0,860	-0,589	0	-0,672	-0,970	-0,885	-0,585	-0,252	0	+0,171	+0,277	+0,285	+0,222	+0,117	0
	$(M_3^{II})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 303^{II}) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 1,90) = +0,904 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
Ординаты дополнитель- ного момента	$(M_3^{II})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 303^{II}) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 1,90) = +0,904 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	$\Omega^{(1)} = +10,35 \cdot 0,0965 =$ $+30,96 \cdot 0,904 \cdot 10^{-3} =$ $+1,000 - 0,028 = +0,972$																								
	0	-0,003	-0,006	-0,007	-0,007	-0,004	0	+0,006	+0,007	+0,004	0,000	-0,002	0	+0,002	+0,003	+0,002	0,000	-0,001	0	0,000	-0,001	-0,004	-0,006	-0,004	0
	$\Omega^{(2)} = -42,50 \cdot 0,0965 +$ $+20,30 \cdot 0,904 \cdot 10^{-3} =$ $-4,11 + 0,018 = -4,092$																								
Полные	$M_3^{II} = E \tau^{II} \cdot \frac{1}{E \gamma_3^{II}} = +0,0965 E \tau^{II}$																								
	$M_3^{II} = E \tau^{II} \left( -\frac{1}{E \gamma_3^{II}} \right) = E \tau^{II} \left( -\frac{1}{9,06} \right) = -0,1105 E \tau^{II}$																								
	0	+0,111	+0,202	+0,251	+0,239	+0,149	0	-0,230	-0,528	-0,787	-0,860	-0,591	0	-0,670	-0,967	-0,883	-0,585	-0,253	0	+0,171	+0,276	+0,281	+0,216	-0,113	0
	$\Omega^{(3)} = -41,40 \cdot 0,1105 +$ $+9,12 \cdot 2,01 \cdot 10^{-3} =$ $-4,58 + 0,008 = -4,572$																								
Площади участков ли- ний влияния	$M_3^{II} = E \tau^{II} \cdot \frac{1}{E \gamma_3^{II}} = +0,0965 E \tau^{II}$																								
	$M_3^{II} = E \tau^{II} \left( -\frac{1}{E \gamma_3^{II}} \right) = E \tau^{II} \left( -\frac{1}{9,06} \right) = -0,1105 E \tau^{II}$																								
	0	+0,111	+0,202	+0,251	+0,239	+0,149	0	-0,230	-0,528	-0,787	-0,860	-0,591	0	-0,670	-0,967	-0,883	-0,585	-0,253	0	+0,171	+0,276	+0,281	+0,216	-0,113	0
	$\Omega^{(4)} = -9,95 \cdot 0,1105 =$ $-15,32 \cdot 2,01 \cdot 10^{-3} =$ $-1,098 - 0,014 = -1,084$																								
Ординаты основного момента	$M_7^{II} = E \tau^{II} \cdot \left( -\frac{1}{E \gamma_7^{II}} \right) = E \tau^{II} \cdot \left( -\frac{1}{64,10} \right) = -0,0156 E \tau^{II}$																								
	$(M_7^{II})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 307^{II}) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,12) = +2,92 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	-0,018	-0,034	-0,042	-0,040	-0,025	0	+0,038	+0,087	+0,128	+0,139	+0,095	0	-0,095	-0,137	-0,125	-0,082	-0,035	0	+0,024	+0,039	+0,040	+0,031	+0,017	0
	$\Omega^{(1)} = +10,35 \cdot 0,156 =$ $+30,96 \cdot 2,92 \cdot 10^{-3} =$ $+0,633 + 0,059 = +0,722$																								
Ординаты дополнитель- ного момента	$(M_7^{II})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 307^{II}) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,12) = +2,92 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	$\Omega^{(2)} = +42,50 \cdot 0,0156 +$ $+20,30 \cdot 2,92 \cdot 10^{-3} =$ $+0,633 + 0,059 = +0,722$																								
	0	-0,010	-0,019	-0,023	-0,022	-0,014	0	+0,019	+0,022	+0,011	-0,001	-0,007	0	+0,007	+0,009	+0,005	0,000	-0,002	0	+0,001	-0,003	-0,012	-0,017	-0,013	0
	$\Omega^{(3)} = -41,40 \cdot 0,0156 +$ $+9,12 \cdot 2,92 \cdot 10^{-3} =$ $-0,646 - 0,027 = -0,673$																								
Полные	$M_7^{II} = E \tau^{II} \cdot \left( -\frac{1}{E \gamma_7^{II}} \right) = E \tau^{II} \cdot \left( -\frac{1}{64,10} \right) = -0,0156 E \tau^{II}$																								
	$(M_7^{II})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 307^{II}) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,12) = +2,92 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	-0,028	-0,053	-0,065	-0,062	-0,039	0	+0,057	+0,109	+0,139	+0,138	+0,088	0	-0,088	-0,128	-0,120	-0,082	-0,037	0	+0,025	+0,036	+0,028	+0,014	+0,004	0
	$\Omega^{(4)} = +9,95 \cdot 0,0156 =$ $-15,32 \cdot 2,92 \cdot 10^{-3} =$ $+0,155 - 0,045 = +0,110$																								
Площади участков ли- ний влияния	$M_7^{II} = E \tau^{II} \cdot \left( -\frac{1}{E \gamma_7^{II}} \right) = E \tau^{II} \cdot \left( -\frac{1}{64,10} \right) = -0,0156 E \tau^{II}$																								
	$(M_7^{II})' = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 307^{II}) = E \delta_l (4,76 \cdot 10^{-4} \cdot 6,12) = +2,92 \cdot 10^{-3} \cdot E \delta_l$																								
	0	-0,028	-0,053	-0,065	-0,062	-0,039	0	+0,057	+0,109	+0,139	+0,138	+0,088	0	-0,088	-0,128	-0,120	-0,082	-0,037	0	+0,025	+0,036	+0,028	+0,014	+0,004	0
	$\Omega^{(4)} = +9,95 \cdot 0,0156 =$ $-15,32 \cdot 2,92 \cdot 10^{-3} =$ $+0,155 - 0,045 = +0,110$																								

№ 7. Таблица вычислений ординат линии влияния изгибающего момента в середине 2-го пролета.

$$M_x = M_{ox} + \frac{M^A(l-x)}{l} + \frac{M^B x}{l}, \text{ что при } x = \frac{l}{2} \text{ дает}$$

$$M_x = M_o + \frac{M^A + M^B}{2}; \quad M^A = M_2^I; \quad M^B = M_2^{II}; \quad l_2 = 8,0 \text{ м.}$$

№№ точек	$M_{ox}$	$M_2^I$	$M_2^{II}$	$\frac{M_2^I + M_2^{II}}{2}$	$M_x$	Площади участков л. в.	
1-й стержень	0	0	0	0	0	$\Omega_{(1)} = \frac{-2,85 + 1,124}{2} = -0,863$	
	1	0	-0,325	+0,139	-0,096		-0,096
	2	0	-0,591	+0,255	-0,168		-0,168
	3	0	-0,737	+0,316	-0,210		-0,210
	4	0	-0,703	+0,301	-0,200		-0,200
	5	0	-0,435	+0,186	-0,125		-0,125
	I	0	0	0	0		
2-й стержень	6	0,667	-0,653	-0,287	-0,470	+0,197	$\Omega_{(2)} = \frac{2,8}{2} - \frac{4,57 + 4,821}{2} = 8 - 4,695 = +3,305$
	7	1,333	-0,952	-0,637	-0,795	+0,538	
	8	2,00	-0,882	-0,930	-0,906	+1,094	
	9	1,333	-0,599	-1,000	-0,800	+0,533	
	10	0,667	-0,266	-0,680	-0,473	+0,194	
		II	0	0	0	0	
3-й стержень	11	0	+0,244	-0,580	-0,168	-0,168	$\Omega_{(3)} = \frac{+1,63 - 3,94}{2} = -1,155$
	12	0	+0,349	-0,836	-0,243	-0,243	
	13	0	+0,316	-0,759	-0,221	-0,221	
	14	0	+0,206	-0,500	-0,147	-0,147	
	15	0	+0,085	-0,213	-0,064	-0,064	
		III	0	0	0	0	
4-й стержень	16	0	-0,059	+0,146	+0,043	+0,043	$\Omega_{(4)} = \frac{-0,42 + 0,97}{2} = +0,275$
	17	0	-0,100	+0,239	+0,069	+0,069	
	18	0	-0,110	+0,252	+0,071	+0,071	
	19	0	-0,092	+0,202	+0,055	+0,055	
	20	0	-0,052	+0,109	+0,028	+0,028	
		IV	0	0	0	0	

По вычисленным ординатам на фиг. 22<sup>b</sup> построена линия влияния. На этом заканчиваем пример I. Благодаря подробным объяснениям к каждой таблице, разбор этого примера весьма разросся в объеме. В практической же работе, когда подобные пояснения излишни, решение приобретает вполне компактный вид и вся работа сводится к последовательному заполнению таблиц.



**Пример II.** Железобетонный рамный трехпролетный виадук (фиг. 23) загружен сосредоточенной силой  $P_1 = 20$  т. в первом пролете, сосредоточенной силой  $P_2 = 10$  т. во 2 пролете и сплошной равномерно-распределенной нагрузкой на протяжении 3-го пролета.

Из произведенных предварительных подсчетов известны угловые величины:

$$E \beta_2 = E \beta_4 = 8,94; \quad E \beta_3 = 10,40$$

(все элементы рамы принимаются стержнями с постоянной жесткостью). Кроме того, произведено построение эпюры моментов от смещения верхних узлов рамы вправо на  $\Delta x = 0,001$  м. и подсчитаны моменты  $m$ , соответствующие смещающей силе  $V = 1$  т.

Именно, для опорных моментов ригелей получены величины:

от смещения на  $\Delta x = 0,001$  м.:

$$\mathfrak{M}_2^I = +8,447 \text{ т. м.} \quad \mathfrak{M}_3^{II} = +1,935 \text{ т. м.} \quad \mathfrak{M}_4^{III} = +5,325 \text{ т. м.}$$

$$\mathfrak{M}_2^{II} = -5,325 \text{ „} \quad \mathfrak{M}_3^{III} = -1,935 \text{ „} \quad \mathfrak{M}_4^{IV} = -8,447 \text{ „}$$

от смещающей силы  $V = 1$  т.:

$$m_2^I = +0,846 \text{ т. м.} \quad m_3^{II} = +0,194 \text{ т. м.} \quad m_4^{III} = +0,534 \text{ т. м.}$$

$$m_2^{II} = -0,534 \text{ „} \quad m_3^{III} = -0,194 \text{ „} \quad m_4^{IV} = -0,846 \text{ „}$$

Требуется, найти для случая загрузки, показанного на фиг. 23, смещение верхних узлов рамы, не определяя смещающих сил. Кроме того, требуется вычислить дополнительные опорные моменты для ригелей, соответствующие найденному смещению.

**Решение.**

Задача сводится к применению формул (25) и (26) для вычисления смещений (коэффициентов смещения  $K$ ).

В 1-м пролете имеем (груз посередине):

$$\text{смещение } \delta'_l = K \Delta x = 0,375 P_1 \beta l (m^A + m^B) = \frac{0,375 P_1 E \beta_2 l_2 (m_2^I + m_2^{II})}{E},$$

$$\begin{aligned} \text{или } \delta'_l &= \frac{0,375 \cdot 20 \cdot 8,94 \cdot 7,50 (0,846 - 0,534)}{21 \cdot 10^5} = \frac{0,375 \cdot 20 \cdot 8,94 \cdot 7,50 \cdot 0,312}{21 \cdot 10^5} = \\ &= +7,46 \cdot 10^{-5} \text{ м.} \end{aligned}$$

Во 2-м пролете (груз в  $\frac{1}{3}$  пролета от левой опоры:  $\frac{2,92}{8,75} = \frac{1}{3}$ ):

$$\begin{aligned} \text{смещение } \delta''_l &= K \Delta x = P_2 \beta l (0,370 m^A + 0,296 m^B) = \\ &= \frac{P_2 E \beta_3 l_3 (0,370 m_3^{II} + 0,296 m_3^{III})}{E}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{или } \delta''_l &= \frac{10 \cdot 10,40 \cdot 8,75 (0,370 \cdot 0,194 - 0,296 \cdot 0,194)}{21 \cdot 10^5} = \\ &= \frac{10 \cdot 10,40 \cdot 8,75 \cdot 0,194 \cdot 0,074}{21 \cdot 10^5} = +0,62 \cdot 10^{-5} \text{ м.} \end{aligned}$$

В 3-м пролете (равномерно-распределенная сплошная нагрузка):  
смещение  $\delta_l''' = K \Delta x = 0,250 q l^2 \beta (m^A + m^B) =$

$$= \frac{0,250 q l^2 E \beta_4 (m_4^{III} + m_4^{IV})}{E},$$

$$\text{или } \delta_l''' = \frac{0,250 \cdot 20,7 \cdot 50^2 \cdot 8,94 (0,534 - 0,846)}{21 \cdot 10^5} =$$

$$= \frac{0,250 \cdot 20,7 \cdot 5^2 \cdot 8,94 (-0,312)}{21 \cdot 10^5} = -37,7 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Суммарное смещение:

$$\delta_l = \delta_l' + \delta_l'' + \delta_l''' = 7,46 \cdot 10^{-5} + 0,62 \cdot 10^{-5} - 37,7 \cdot 10^{-5} = -29,62 \cdot 10^{-5} \text{ м.} =$$

$$= -0,296 \text{ м./м.}$$

Знак (—) указывает, что смещение произойдет влево.

Дополнительные защемляющие моменты для ригелей получим по формуле (44):

$$M' = \delta_l \cdot \frac{\mathfrak{M}}{\Delta x} = \mathfrak{M} \cdot \frac{\delta_l}{\Delta x} = \mathfrak{M} \cdot \left( -\frac{29,62 \cdot 10^{-5}}{0,001} \right) = -0,296 \mathfrak{M}.$$

$$(M_2^I)' = -0,296 \cdot \mathfrak{M}_2^I = -0,296 \cdot 8,447 = -2,498 \text{ т. м.}$$

$$(M_2^{II})' = -0,296 \cdot \mathfrak{M}_2^{II} = +0,296 \cdot 5,325 = +1,584 \text{ „}$$

$$(M_3^{II})' = -0,296 \cdot \mathfrak{M}_3^{II} = -0,296 \cdot 1,935 = -0,573 \text{ „}$$

$$(M_3^{III})' = -0,296 \cdot \mathfrak{M}_3^{III} = +0,296 \cdot 1,935 = +0,573 \text{ „}$$

$$(M_4^{III})' = -0,296 \cdot \mathfrak{M}_4^{III} = -0,296 \cdot 5,325 = -1,584 \text{ „}$$

$$(M_4^{IV})' = -0,296 \cdot \mathfrak{M}_4^{IV} = +0,296 \cdot 8,447 = +2,498 \text{ „}$$

## Заключение.

Основные положения нового приема построения линий влияния даются в конце главы I и главы II.

Сделаем заключительные выводы ко всему изложенному в настоящей статье

1. Новый способ нахождения линий влияния защемляющих моментов для рам с неподвижными узлами применим ко всем случаям рам, если таковые не заключают в себе замкнутых секций.

В частности, новый способ приложим к расчету неразрезных балок.

При допущении меньшей точности расчета пользование изложенным способом возможно и в случае рам с замкнутыми секциями, если применить прием рассечения сложной многоярусной системы на элементарные одноярусные рамы,<sup>\*)</sup> что дает, конечно, приближенные результаты, но иногда с достаточной для практических целей точностью.

2. При нахождении линий влияния для рам со сдвигающимися узлами расчет разделяется на 2 совершенно самостоятельные части: 1) нахождение линий влияния для основных защемляющих моментов в предположении неподвижности узлов рамы; 2) нахождение линий влияния для дополнительных моментов, возникающих в результате смещения узлов. Суммирование ординат, полученных для 1-й и 2-й части расчета, дает линии влияния полных защемляющих моментов.

Предлагаемый способ для нахождения линий влияния дополнительных моментов действителен для всех видов рам, в том числе и рам с замкнутыми секциями.

3. Некоторые выводы и формулы, следующие из теории нового способа построения линий влияния для дополнительных моментов, могут быть применены к расчету рам под фиксированной нагрузкой, создавая облегчение при вычислении смещений и определении дополнительных моментов в рамах с горизонтальными ригелями и вертикальными стойками для случаев нагрузок на ригелях и в узлах стоек (если нагрузка отсутствует в пределах стоек).

К преимуществам нового приема построения линий влияния может быть отнесено следующее:

1) При нахождении линий влияния основных моментов отпадает необходимость построения основной диаграммы, т.е., уничтожается связанная с этим утомительная работа по распределению моментов.

2. При нахождении линий влияния дополнительных моментов не требуется вычисления смещающих сил для каждого положения подвижного груза, т.е. исчезает наиболее громоздкая часть вычислительной работы при определении смещений и дополнительных моментов по старому способу.

3. В новом способе вся работа по вычислению ординат линий влияния сводится к механическому умножению ряда коэффициентов на общие для всего ряда множители<sup>\*\*)</sup> и последующему сложению результатов.

Механичность и простота вычислений делают работу неутомительной и создают возможность быстрой проверки, чем гарантируется большая точность. Все вычисления ординат могут быть заключены в таблицы.

\*) См. об этом „Расчет рамных конструкций“. Изд 4-е стр. 273—274.

\*\*\*) При пользовании счетной линейкой подобная арифметическая операция может быть произведена при одном положении движка линейки. При пользовании арифмометром—при установке одного и того же множителя на барабане арифмометра.

4. Повышение точности построения линий влияния, т.-е. увеличение числа точек в пролете стержня, для которых определяются ординаты, почти не отражается на количестве и времени вычислительной работы, тогда как в прежнем способе число отдельных установок подвижного груза полностью определяло объем вычислений ординат линий влияния.

5. При новом способе сохраняется возможность непосредственного пользования таблицами Suter'a для стержней с переменной жесткостью, которые придают методу фокусов вообще особую практическую ценность.

6. Построение особого графика (§ 3 гл. III) для случая стержней с постоянной жесткостью может облегчить вычисление ординат линий влияния и сделать вычислительную работу еще более элементарной.

7. Перенесение новых принципов построения линий влияния в область расчета рам под фиксированной нагрузкой приносит в известных случаях практические облегчения при определении дополнительных моментов и дает возможность вычислять смещения без определения смещающих сил.

8. Существенным достоинством нового способа является возможность чрезвычайно легкого попутного вычисления площадей участков линий влияния, при чем вычисление производится с полной математической точностью. Этим уничтожается необходимость выполнения этой работы в дальнейшем, после построения линий влияния, путем приближенного правила трапеций (или правила Симпсона)—как это обычно делается.

9. Теоретические достоинства нового способа заключаются в том, что интерпретация линии влияния в качестве упругой линии стержня, нагруженного опорными моментами, дает возможность более ясного и полного понимания формы инфлюэнтной линии в рамных системах.

В заключение скажем несколько слов о методе фокусов вообще.

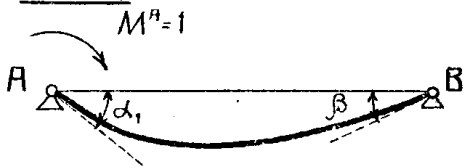
Открытие существования и замечательных особенностей фокусных точек (Festpunkte) упруго-защемленного стержня несомненно является крупницею положительного знания о работе системы подобных стержней, т.-е. рамной конструкции. Поэтому метод фокусов, помимо чисто практических удобств при решении некоторых категорий рамных задач, имеет большое теоретическое значение, раскрывая сущность работы рамной конструкции вообще.

Существующая литература о рамных конструкциях достаточно освещает вопрос о практической применимости метода фокусов. Практика расчетов установила довольно явные пределы случаев рамных задач, когда специфические преимущества метода фокусов—простота и наглядность—отступают на второй план перед громоздкостью вычислительных операций (рамы с наличием замкнутых секций, рамы высокой ярусности), при чем наличие новейших более удобных аналитических приемов заставляет или отказаться от применения метода фокусов „rig sang“ в пользу комбинированного способа или же обратиться к чисто аналитическим методам решения.

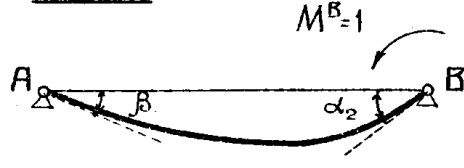
Что же касается систем одноярусных, в особенности несимметричных и многостоечных, то здесь метод фокусов имеет большие практические преимущества. Еще большую практическую ценность признают за методом фокусов при построении линий влияния в рамах и неразрезных балках.

Настоящая статья посвящена как раз этой последней области применения метода фокусов.

Фиг. 1.



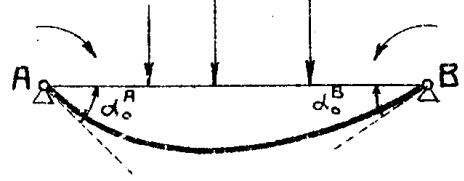
Фиг. 2.



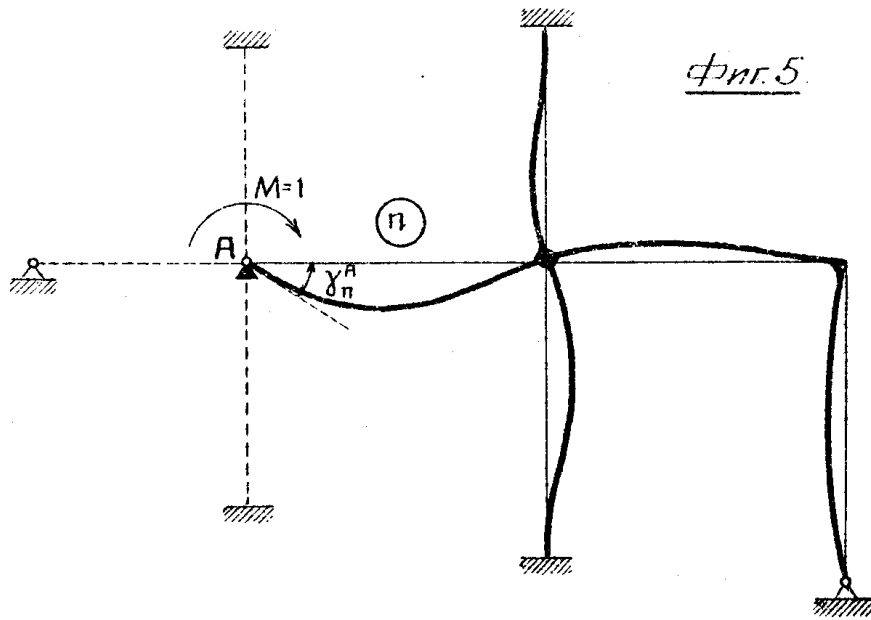
Фиг. 3.



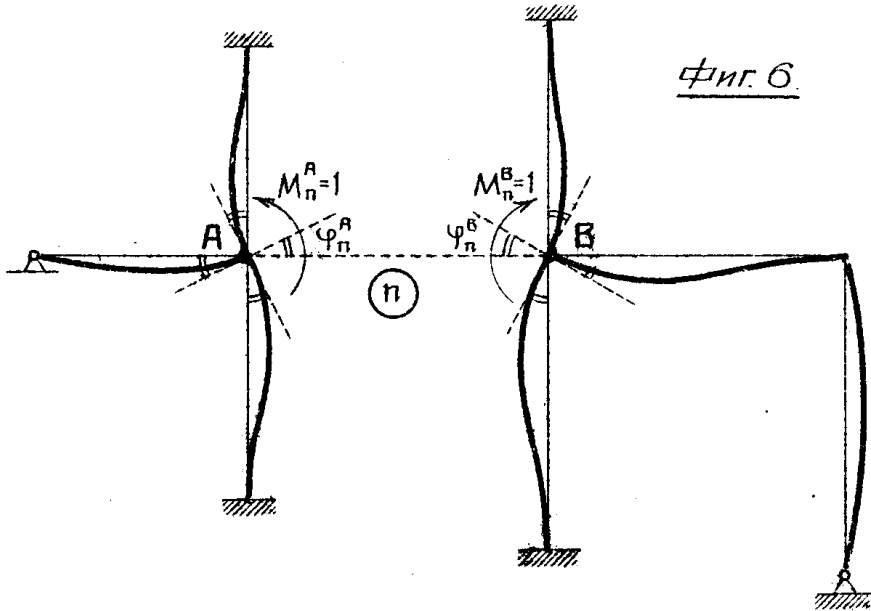
Фиг. 4.



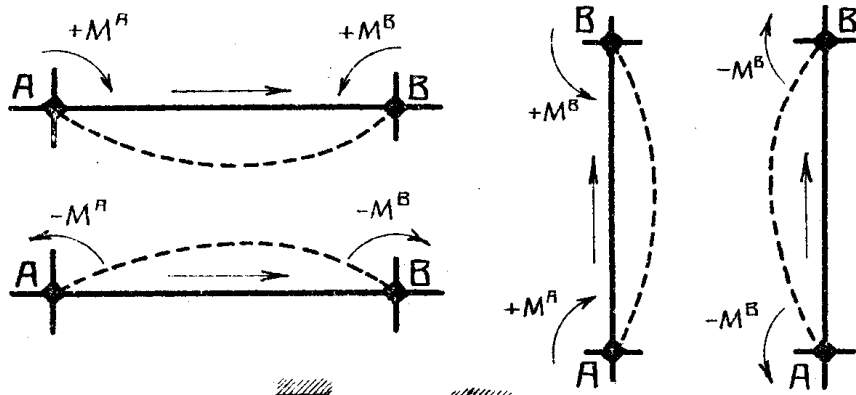
Фиг. 5.



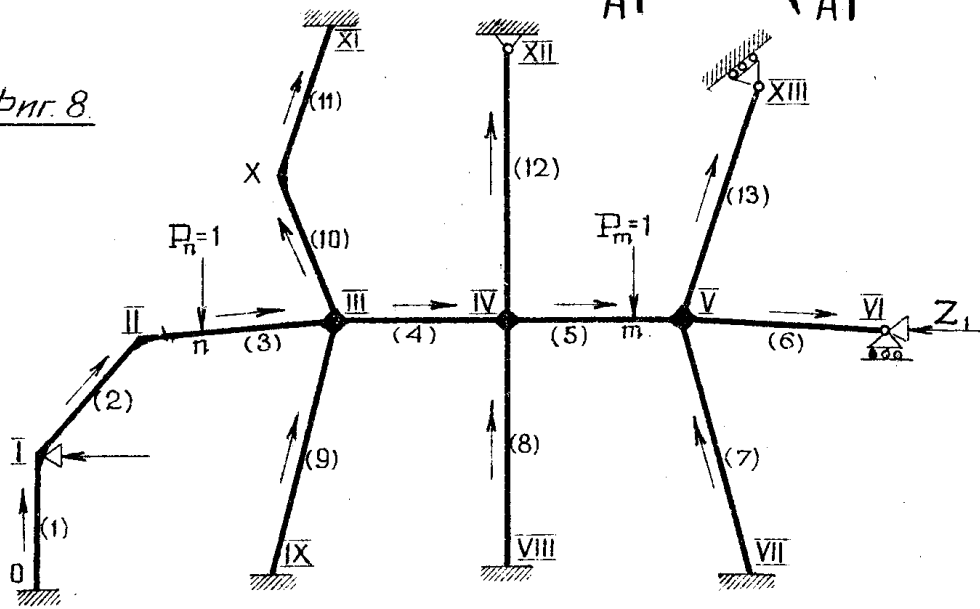
Фиг. 6.



Фиг. 7.

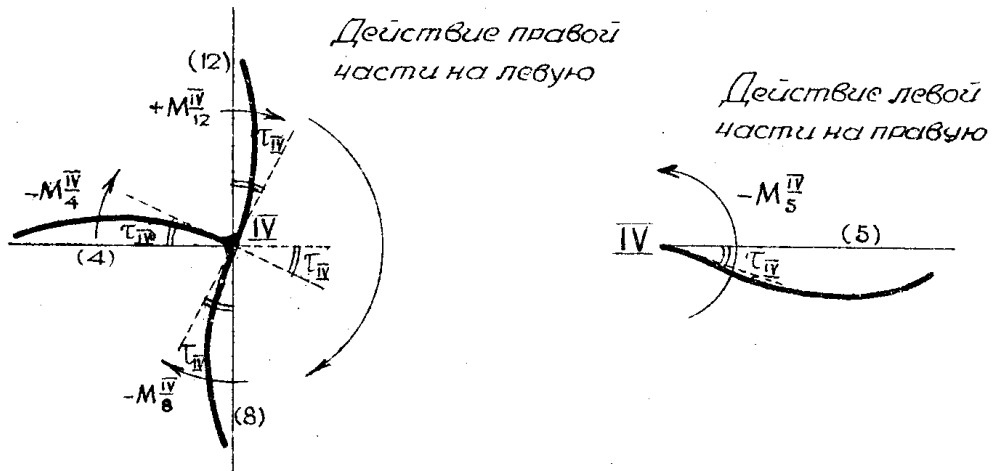


Фиг. 8.



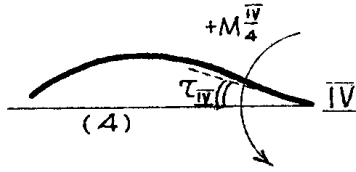
Фиг. 9.

Груз справа от узла IV

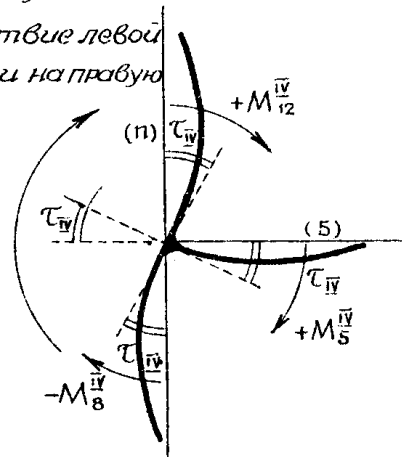


Фиг. 10 Груз слева от узла IV

Действие правой части на левую

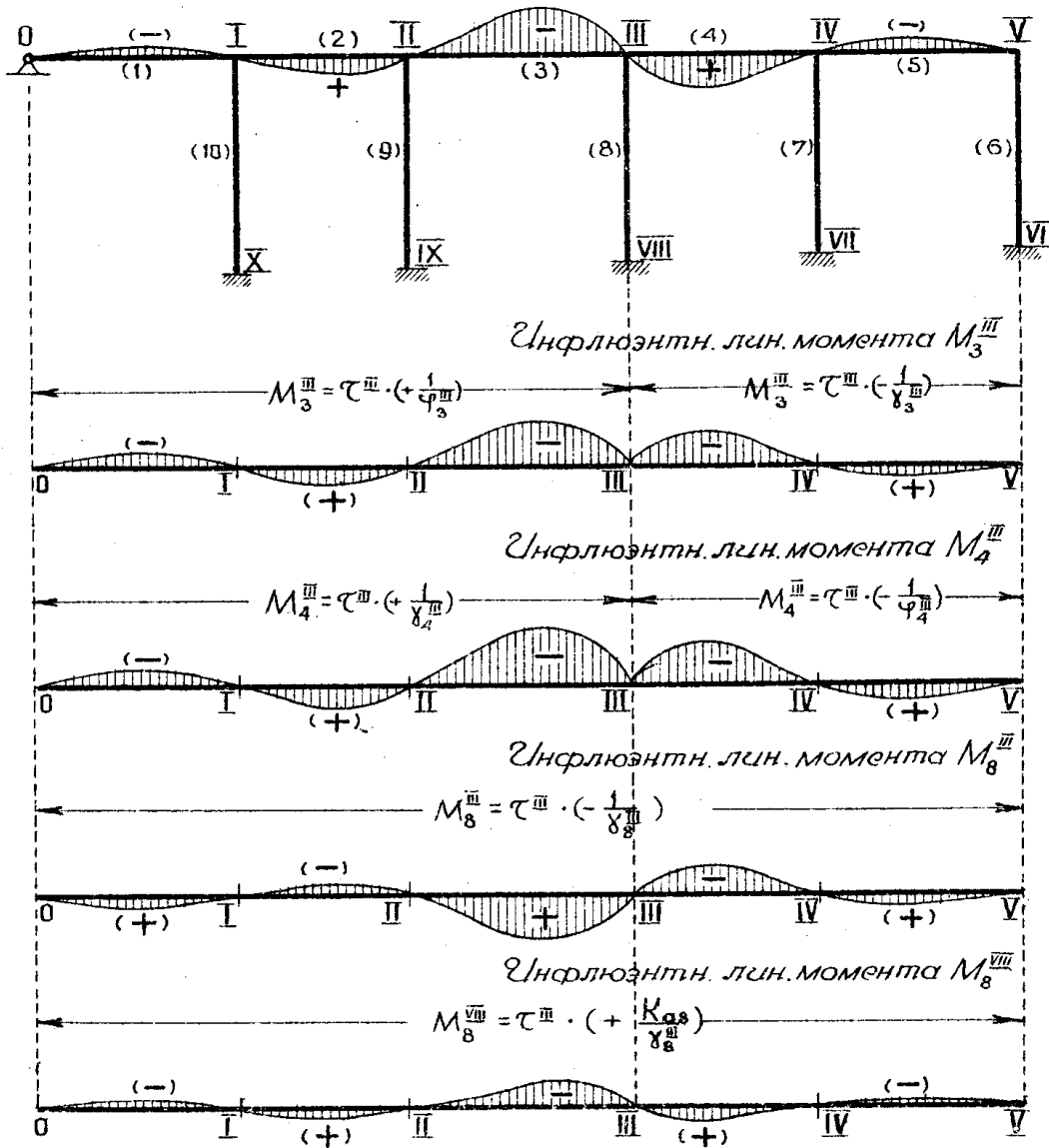


Действие левой части на правую

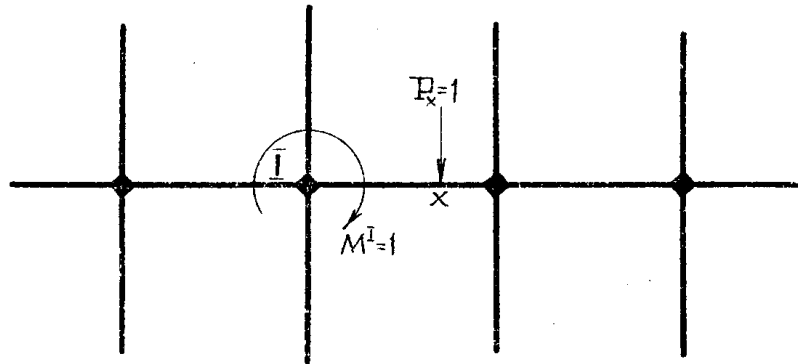


Фиг. 11.

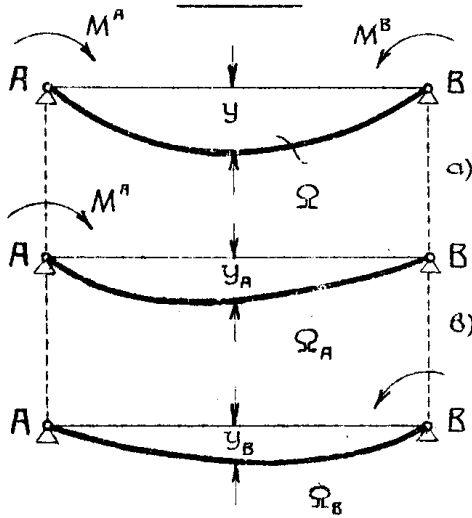
Инфлюэнтная линия угла  $\tau^m$



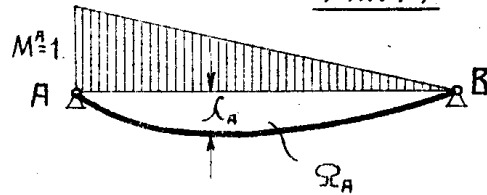
Фиг. 12.



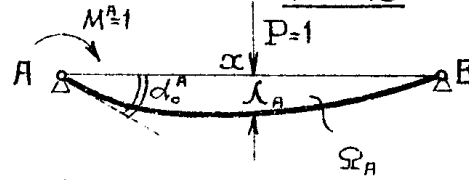
Фиг. 13



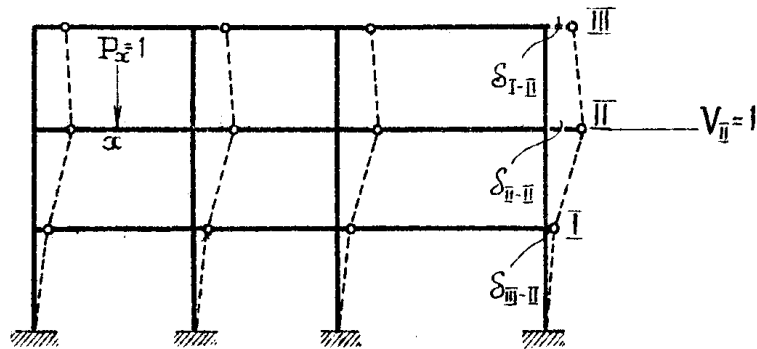
Фиг. 14



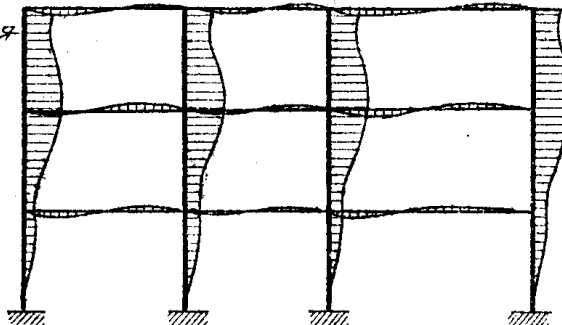
Фиг. 15



Фиг. 16



Влиятельная линия  
смещения  $\delta_{II}^I$   
[ $\delta_{II}^I = K_{II} \cdot \Delta \alpha$ ]

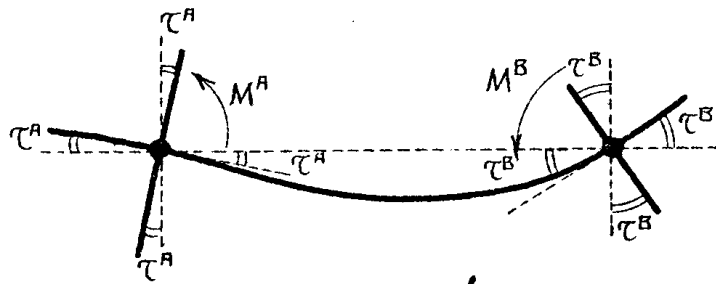




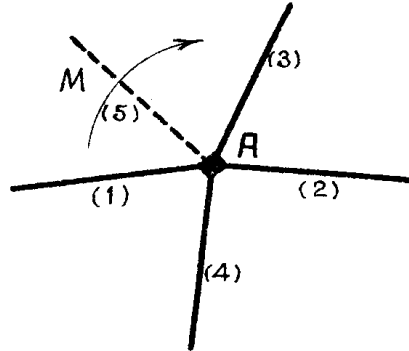
Фиг. 17.



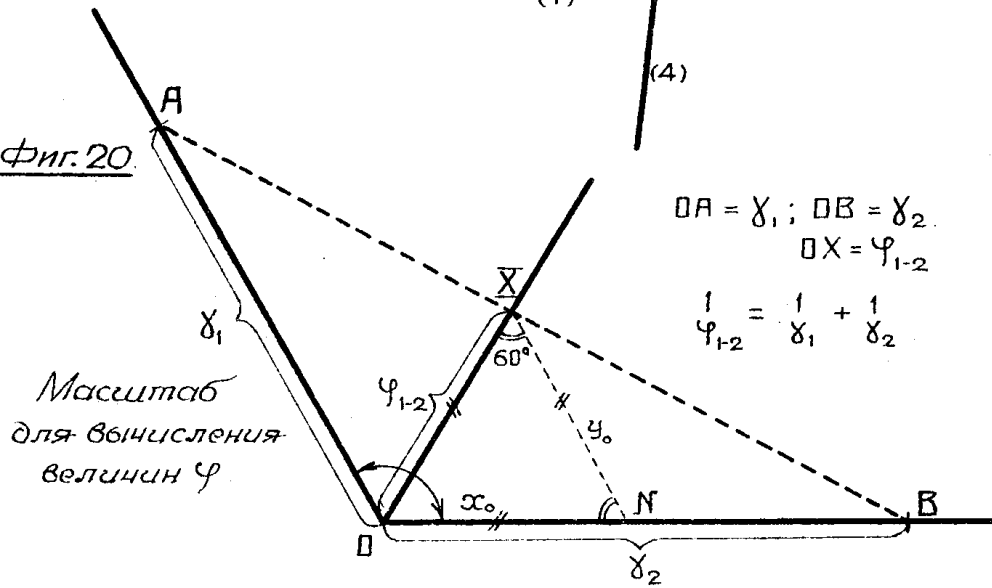
Фиг. 18.



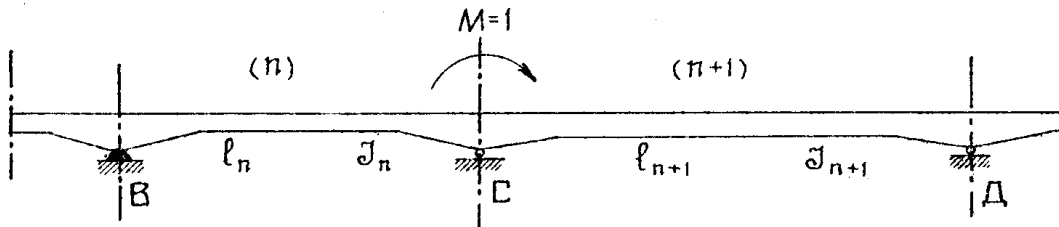
Фиг. 19.



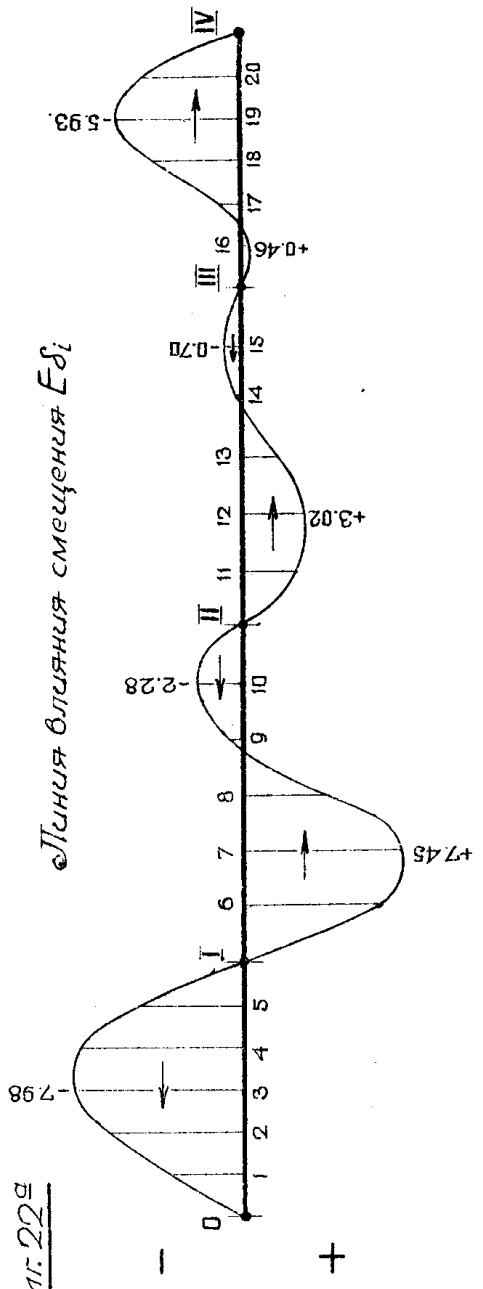
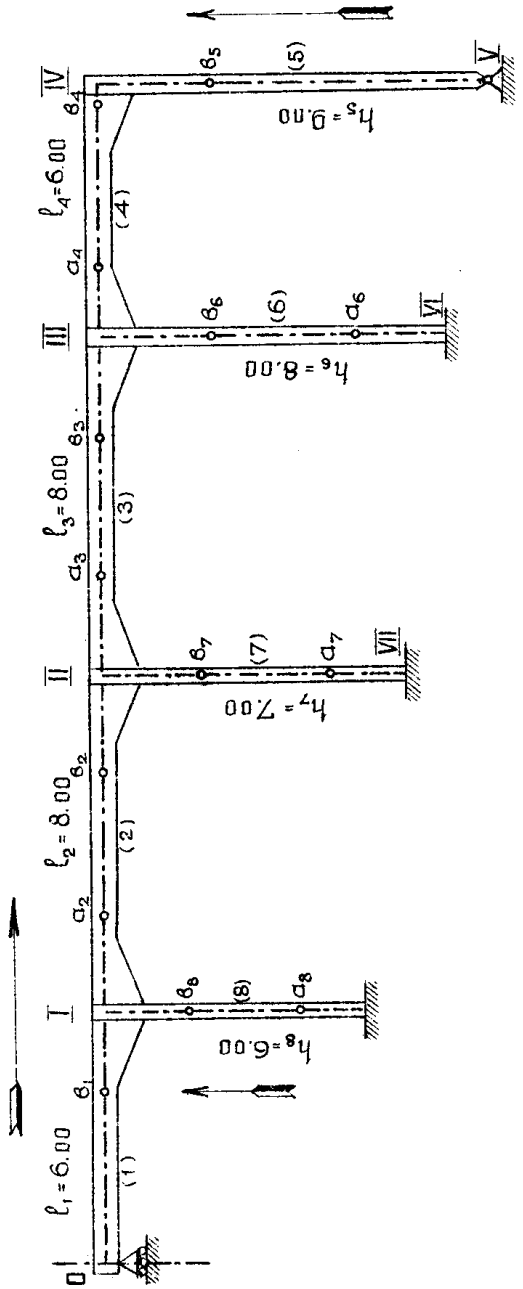
Фиг. 20.



Фиг. 21.



Фиг. 22.  
Числовому примеру I

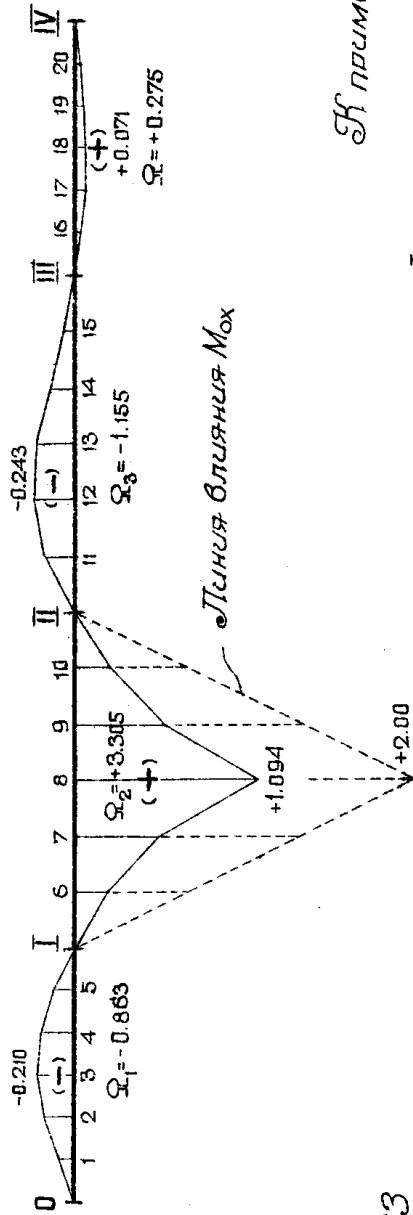


Фиг. 22<sup>б</sup>

Линия влияния смещения  $E\delta_i$

Фиг. 22<sup>в</sup>

Линия влияния изгибающего момента  
в середине 2-го пролета ( $M_2^0$ )



К примеру II

Фиг. 23

