

ГИПОТЕЗА ЛОМАННЫХ СЕЧЕНИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ СТЕРЖНЕЙ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ*)

ВЕРХОВСКИЙ А. В.

Профессор, доктор технических наук

Вступление

Вопрос о расчете стержней сложной конфигурации с переменным поперечным сечением имеет определенное практическое значение.

Стержни рассматриваемого типа можно подразделить на прямоосные и кривоосные. Характерным примером прямоосного стержня переменного поперечного сечения является зубец зубчатого колеса; кривоосного стержня — крюки, станины машин и т. п.

Вопросу расчета зубцов зубчатых колес посвящена обширная литература, но все же нельзя сказать, что в данном расчете достигнута полная ясность. В практике зубчатых колес имеют место случаи, когда проверка зубца на прочность дает напряжения, значительно превосходящие временное сопротивление того материала, из которого изготовлен зубец, но тем не менее зубец фактически работает и не ломается. Это приводит к мысли о порочности существующих методов расчета зубцов зубчатых колес, которая, вероятно, происходит раньше всего в результате двух причин: 1) при расчете зубца на изгиб применяют известную из курса сопротивления материалов формулу, выведенную для расчета призматических балок, в то время как зубец зубчатого колеса не является призматической балкой, 2) концентрация напряжений у корня ножки зубца учитывается весьма грубо и неточно.

Таким образом, уже из рассмотренного примера в достаточной мере выявляется необходимость в создании более точного метода расчета стержней переменного поперечного сечения, с более точным учетом концентрации напряжений у выкружек.

В теории упругости решены задачи по расчету на изгиб балок с переменным поперечным сечением только для наиболее простых случаев. Аналитически решается задача по изгибу консольной балки клинообразной формы, нагруженной на острие сосредоточенной силой или равномерно распределенной нагрузкой по грани клина [1].

По поводу расчета тел более сложной формы проф. Тимошенко пишет: „Во многих случаях пластины, на которые действуют лежащие в их плоскости внешние силы, имеют такой вид, что аналитическое исследование распределения напряжений становится затруднительным и приходится прибегать к исследованию опытным путем. Весьма пригодным для этой цели оказался оптический метод“ [1,2].

Даже форма зубца зубчатого колеса оказывается настолько сложной, что при решении вопроса о распределении напряжений отказываются от точного аналитического решения и прибегают к опытному исследованию.

*) Работа была доложена на научной конференции механического факультета Томского политехнического института в июне 1943 г.

С. В. Серенсен в своей книге „Прочность металла и расчет деталей машин“ пишет: „Как было отмечено, применение в машинных конструкциях длинных тонких стержней весьма ограничено. В большинстве случаев конфигурация деталей бывает геометрически достаточно сложной и все размеры соизмеримы: достаточно взять такие типовые элементы, как зубья шестерен, коленчатые валы, пальцы, кулаки и т. д. К их расчету еще и в настоящее время самым широким образом применяют элементарные методы и формулы сопротивления материалов, которые не отражают действительного распределения напряжений и дают отклонения от него, достигающие сотен процентов“.

Здесь можно отметить работы Нойбера [3] и Афанасьева [4] в которых даны аналитические методы определения концентрации напряжений в выточках и выкружках.

В работе Нойбера на основе теории упругости дано решение задачи по определению напряжений в выточке. Точное решение задачи ограничено рассмотрением предельно мелких и предельно глубоких выточек, имеющих параболическое очертание.

В работе Афанасьева даны эмпирические формулы для определения концентрации напряжений в выкружках и выточках плоских образцов. Предполагая закон распределения напряжений гиперболическим, по аналогии с кривым брусом Афанасьев дает переходную формулу для коэффициента концентрации напряжений в случае круглого образца [4,5].

Общего метода расчета стержней переменного сечения до настоящего времени не предложено.

Все сказанное заставляет думать, что появление достаточно точного и удобного для практического применения метода расчета прямоосных и кривоосных стержней переменного поперечного сечения было бы весьма желательным.

Настоящая работа ставит задачу дать приближенный способ определения напряжений в прямоосных стержнях переменного поперечного сечения при любой форме очертания этих стержней и даже при наличии в них выкружек и выточек малого радиуса, а также дать решение для некоторых частных случаев стержней переменного поперечного сечения с криволинейной осью.

Часть I. Изгиб прямоосных стержней фигурного очертания

1. Гипотеза ломаных сечений и гипотеза цилиндрических сечений. Общие соображения

При расчете прямоосных стержней фигурного очертания на изгиб обычно применяют формулу

$$\sigma = \frac{M}{W}, \quad (1)$$

выведенную для призматических стержней. В этой формуле σ —напряжение, M —изгибающий момент, W —момент сопротивления.

Формула (1) предусматривает линейный закон распределения напряжений, и эпюра напряжений будет выглядеть так, как это показано на рис. 1(а).

Указанная эпюра напряжений, а также формула (1) являются для данного случая порочными по двум причинам: 1) напряжение σ в точке А направлено не по касательной контура, а следовательно, оно является не главным, и 2) прямолинейный закон распределения напряжений вследствие кривизны контура стержня является неверным. Отмеченные причины иногда могут привести к весьма неточному результату при определении напряжения по формуле (1).

Неточность формулы (1) в применении ее к расчету прямоосных стержней фигурного очертания обуславливается тем, что формула (1) выведена на основе гипотезы плоских сечений (гипотеза Бернулли), в то время как при изгибе рассматриваемых стержней плоские сечения значительно искривляются.

На основании исследований, которые будут изложены ниже, можно прийти к заключению, что значительно более точные результаты по определению напряжений при изгибе рассматриваемых стержней могут быть получены на основе гипотезы ломаных, а не плоских сечений.

На рис. 1(б) для некоторой точки A , взятой на контуре стержня, проведено ломаное сечение ADB . Это сечение проведено таким образом, что сторона AD является нормалью верхнего контура, а сторона DB — нормалью нижнего контура. На этом же рисунке изображена эпюра напряжений для данного ломаного сечения. Далее будет показано, что закон распределения напряжений в ломаном сечении в общем случае будет гиперболический.

Гипотеза ломаных сечений или, точнее, гипотеза неискривления ломаных сечений не является вполне точной.

Однако сравнение результатов, полученных на основе предлагаемой гипотезы, с опытными данными говорит о достаточной ее точности для практического использования.

Оправданием к принятию гипотезы ломаных сечений могут служить прежде всего следующие соображения:

1) Нормальное напряжение в точке, взятой на верхней или нижней поверхности изгибаемого стержня, будет лежать в плоскости, касательной этой поверхности, а следовательно, будет главным напряжением, что не получалось при применении гипотезы плоских сечений [ср. рис. 1 (а) и 1 (б)].

2) С принципиальной точки зрения некоторое искривление ломаного сечения при изгибе стержней рассматриваемого типа не является фактом, порочащим гипотезу ломаных сечений. Известно, что применение гипотезы плоских сечений при расчете на изгиб призматических стержней является тоже условным, так как точное исследование показывает, что при изгибе даже призматических стержней плоские сечения не остаются плоскими, а несколько искривляются. Однако гипотезой плоских сечений широко пользуются при расчете призматических стержней (балок) на изгиб.

Таким образом, основным критерием оценки той или иной гипотезы является то, насколько данная гипотеза дает достаточно точные результаты для решения практических задач.

3) Опыты показывают, что при изломе стержней переменной высоты поперечного сечения в случае, если стержни изготовлены из хрупкого материала, начальная трещина образуется по направлению нормали контура стержня, т. е. совпадает с направлением ломаного сечения. Указанное обстоятельство также говорит в пользу гипотезы ломаных сечений.

Заметим также, что довольно точные результаты, достаточно хорошо совпадающие с опытом, могут быть получены посредством гипотезы цилиндрических сечений ¹⁾ [см. рис. 1 (б)]. Исследования, произведенные ав-

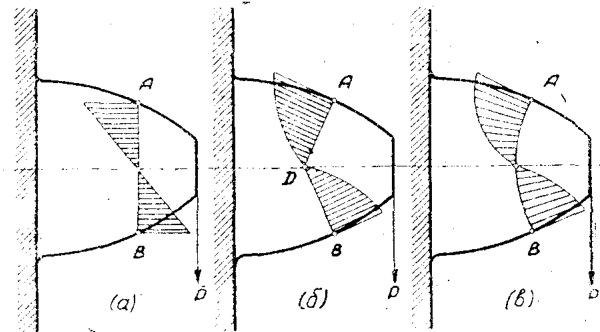


Рис. 1

1) Гипотеза цилиндрических сечений предполагает, что при деформации стержня цилиндрические сечения изменяются по некоторому определенному закону, а именно так, что в граничных точках цилиндрическое сечение остается нормальным к контуру стержня.

тором, показали, что предпочтение должно быть дано гипотезе ломаных сечений, как гипотезе достаточно точной и более удобной для практического использования. В дальнейшем изложении будет произведено некоторое сравнение указанных гипотез.

2. Применение гипотезы ломаных сечений к определению нормальных напряжений при изгибе прямоосных стержней любого фигурного очертания

Рассмотрим консольную прямоосную балку, высота поперечных сечений которой будет изменяться по произвольно заданному закону (см. рис. 2).

Ограничимся пока рассмотрением балки прямоугольного поперечного сечения с постоянной шириною b .

Некоторое обобщение в отношении балок или стержней не прямоугольного сечения будет сделано в дальнейшем.

Пусть контур рассматриваемой балки будет задан некоторым уравнением

$$y = f(x) \quad (2)$$

в системе координатных осей, указанных на рис. 2. При этом прямоосность балки, при условии прямоугольных поперечных сечений, определяет симметричность верхнего и нижнего контуров.

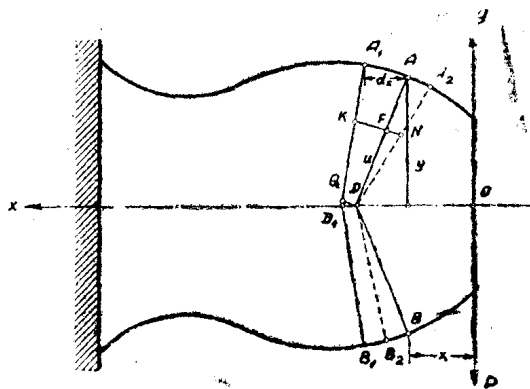


Рис. 2

Балка нагружена на конце сосредоточенной силой P . Предположим, требуется найти напряжение в некоторой точке A контура балки, абсцисса которой будет x .

Проведем через точку A ломаное сечение ADB так, чтобы AD и DB соответственно являлись нормальными к верхнему и нижнему очерку балки. Затем возьмем точку A_1 , абсцисса которой будет $x + dx$, и аналогичным образом через эту точку проведем ломаное сечение $A_1D_1B_1$.

Рассмотрим волокно KF материала, заключенное между сечениями ADB и $A_1D_1B_1$ и расположенное параллельно AA_1 . При изгибе балки сечение ADB повернется относительно сечения $A_1D_1B_1$ на угол $d\varphi$, заняв положение A_2DB_2 . Относительное удлинение волокна KF будет

$$\varepsilon = \frac{FN}{KF}.$$

Определим FN и KF .

$$FN = d\varphi \cdot u,$$

где $u = DF$ является расстоянием рассматриваемого волокна от точки D .
Далее из рис. 2 находим

$$KF = QD + (AA_1 - QD) \frac{DF}{AD}.$$

Определим значения величин, входящих в правую часть.
Из рис. 2

$$\frac{QD}{DD_1} = \frac{dx}{AA_1}.$$

Отсюда

$$QD = \frac{dx}{AA_1} \cdot DD_1 = \frac{dx}{AA_1} dx_0,$$

где $dx_0 = DD_1$.

AA_1 , как длина дуги, может быть представлена

$$AA_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \cdot q,$$

где

$$q = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Далее из рис. 2

$$AD = \sqrt{y^2 + \left(y \frac{dy}{dx}\right)^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y \cdot q,$$

$$OD = x_0 = x + y \frac{dy}{dx}.$$

Дифференцируя, получим

$$dx_0 = \left[1 + y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx = m \cdot dx,$$

где

$$m = 1 + y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Тогда

$$QD = \frac{dx}{AA_1} \cdot dx_0 = \frac{dx m dx}{dx \cdot q} = \frac{m}{q} \cdot dx.$$

Из написанных соотношений найдем

$$KF = \frac{m}{q} \cdot dx + \left(q \cdot dx - \frac{m}{q} \cdot dx\right) \frac{u}{yq} = dx \left[\frac{m}{q} + \left(q - \frac{m}{q}\right) \frac{u}{yq}\right],$$

или, учитывая, что

$$dx = \frac{dx_0}{m},$$

получим

$$KF = \frac{dx_0}{m} \left[\frac{m}{q} + \left(q - \frac{m}{q}\right) \frac{u}{yq}\right] = \frac{dx_0}{mq} \left[m + (q^2 - m) \frac{u}{yq}\right].$$

Тогда относительное удлинение рассматриваемого волокна выразится так:

$$\varepsilon = \frac{FN}{KF} = \frac{d\varphi \cdot u}{\frac{dx_0}{mq} \left[m + (q^2 - m) \frac{u}{yq}\right]} = \frac{d\varphi \cdot mqu}{dx_0 \left[m + (q^2 - m) \frac{u}{yq}\right]}.$$

Напряжение в волокне KF будет

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{d\varphi \cdot Emqu}{dx_0 \left[m + (q^2 - m) \frac{u}{yq}\right]} \quad (3)$$

Учитывая, что

$$\frac{dx_0}{d\varphi} = \rho_0,$$

где ρ_0 — радиус кривизны изогнутой оси балки в точке D , можем выражение для σ переписать так:

$$\sigma = \left(\frac{yb}{x_1} \right) \pm \frac{Emqu}{\rho_0 \left[m + (q^2 - m) \frac{u}{yq} \right]}. \quad (4)$$

В этом выражении:

E — модуль упругости,

$u = DF$ есть расстояние рассматриваемого волокна от точки D ,

y — ордината точки A ,

ρ_0 — радиус кривизны изогнутой оси балки в точке D и

$$\begin{aligned} m &= 1 + y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \\ q &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что все величины, входящие в правую часть выражения (4), являются для данного ломаного сечения ADB постоянными, за исключением величины u . Таким образом, напряжение в какой либо точке рассматриваемого сечения является функцией расстояния этой точки от точки D .

Как видно из выражения (4), напряжение в общем случае будет распределено по сечению ADB не по линейному закону, а по гиперболическому.

Далее, из условия равновесия можем написать

$$M = 2 \int_0^{AD} \sigma b u du,$$

или

$$M = 2 \int_0^{yq} \frac{Emqbu^2 du}{\rho_0 \left[m + (q^2 - m) \frac{u}{yq} \right]},$$

откуда

тогда

$$\frac{E}{\rho_0} = 2 \frac{M}{yq \int_0^{yq} \frac{m q b u^2 du}{m + (q^2 - m) \frac{u}{yq}}}.$$

Подставляя $\frac{E}{\rho_0}$ в формулу (4), получим выражение для напряжения в следующем виде:

$$\sigma = \frac{M m q u}{\left[m + (q^2 - m) \frac{u}{yq} \right] \cdot 2 \cdot \int_0^{yq} \frac{m q b u^2 du}{m + (q^2 - m) \frac{u}{yq}}}. \quad (6)$$

Решая интеграл, стоящий в знаменателе выражения (6), а затем, принимая $u = AD = y \cdot q$, получим напряжение в точке A

$$\sigma = \frac{M}{2by^2 \left[\frac{1}{2n} - \frac{a}{n^2} + \frac{a^2}{n^3} \ln \left(\frac{a+n}{a} \right) \right] (a+n)^3}, \quad (7)$$

где

$$n = \frac{q^2 - m}{q}; \quad a = \frac{m}{q},$$

или, принимая во внимание ранее принятые обозначения для q и m ,

$$n = - \frac{y \frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}; \quad a = \frac{1 + y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}. \quad (8)$$

M — момент внешней силы относительно точки D

$$M = P \cdot OD,$$

b — ширина поперечного сечения балки,

y — ордината точки A ,

$\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2 y}{dx^2}$ — соответственно представляют значения первой и второй производной уравнения контура балки или стержня в рассматриваемой точке A (см. ур-е 2).

Выражения (8) для n и a могут быть представлены иначе. Известно, что

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (9)$$

где ρ — радиус кривизны, в нашем случае — радиус кривизны контура балки в точке A . Знак в выражении (9) должен быть выбран в соответствии со знаком второй производной.

Выражение (9) можно переписать так:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]},$$

откуда

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} = \pm \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\rho} = \pm \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\rho} = \pm \frac{1}{\rho \cos^2 \alpha},$$

где α — угол, составляемый касательной контура балки с осью абсцисс для рассматриваемой точки A .

Тогда выражения (8) могут быть преобразованы так:

$$n = \pm \frac{\frac{y}{\rho}}{\cos^2 \alpha} ; \quad a = \frac{\cos \alpha \pm \frac{y}{\rho}}{\cos^2 \alpha}. \quad (10)$$

В полученных выражениях должен быть взят верхний знак, если рассматриваемая точка A лежит на вогнутой части контура; нижний знак следует брать, если рассматриваемая точка лежит на выпуклой части контура.

Во многих случаях вычисления удобнее вести, пользуясь выражениями (10), так как y , ρ и α , входящие в эти выражения при заданном контуре балки или стержня, легко могут быть найдены графически.

Формула (7) совместно с выражениями (8) или (10) разрешает поставленную задачу по определению напряжения в некоторой точке A контура рассматриваемой балки.

Из формулы (7), выведенной для прямоосной балки или стержня произвольного очертания, могут быть получены решения для различных частных случаев; так, например:

1. Для случая призматической балки или стержня

$$\frac{dy}{dx} = 0 ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

а следовательно, на основании выражений (8),

$$n = 0 ; \quad a = 1.$$

После подстановки полученных значений в формулу (7) и раскрытия неопределенности, найдем

$$\sigma = 1,5 \frac{M}{by^2}, \quad (11)$$

т. е. получим формулу, действительную для расчета призматических балок. Принимая во внимание, что

$$y = \frac{h}{2},$$

где h — высота сечения балки, формуле (11) можно придать более обычный вид:

$$\sigma = \frac{M}{\frac{bh^2}{6}},$$

учитывая, что мы рассматриваем балки прямоугольного сечения.

2. Для случая клинообразной балки будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

и следовательно, согласно выражениям (10), получим

$$n = 0 ; \quad a = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (7) и произведя раскрытие неопределенности, найдем

$$\sigma = 1,5 \frac{M \cos^2 \alpha}{by^2}.$$

Если угол α не превышает 20° , то полученное выражение дает расхождение с точным расчетом клинообразной балки, основанным на теории упругости, не более 3%.

Пределом применимости формулы (7) является случай, когда у выпуклой части контура центр кривизны контура лежит по одну сторону

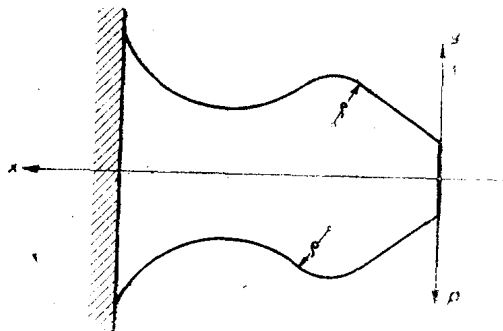


Рис. 3

от оси абсцисс с самим контуром (см. рис. 3), так как в этом случае величина, от которой в формуле (7) должен быть взят логарифм, получается отрицательной.

3. Эпюры распределения нормальных напряжений, получаемые согласно гипотезе ломаных сечений для различных форм прямоосных балок

Согласно формуле (4), на рис. 4 построены эпюры напряжений для различных сечений консольной балки, имеющей вид фигурной пластины. Пластина выбрана указанной на рис. 4 формы для того, чтобы на ней можно было изобразить все возможные случаи.

Обратим внимание на характерность отдельных эпюр, изображенных на рассматриваемом рисунке.

1. Эпюра напряжений, построенная для сечения $A_1 B_1$, соответствует призматической части балки и дает прямолинейный закон распределения напряжений, что согласуется с обычными представлениями об изгибе призматических балок.

2. Эпюра, построенная для сечения $A_2 D_2 B_2$, соответствует клинообразной части балки. Полученная эпюра представляет ливейный закон распределения напряжений. Рассматриваемая эпюра не вполне совпадает с эпюрой, получаемой при точном решении клинообразной балки. В этом отношении гипотеза цилиндрических сечений дала бы более точный результат. Для клинообразной балки, нагруженной силой, приложенной к вершине клина, гипотеза цилиндрических сечений дает результат, совпадающий с точным решением.

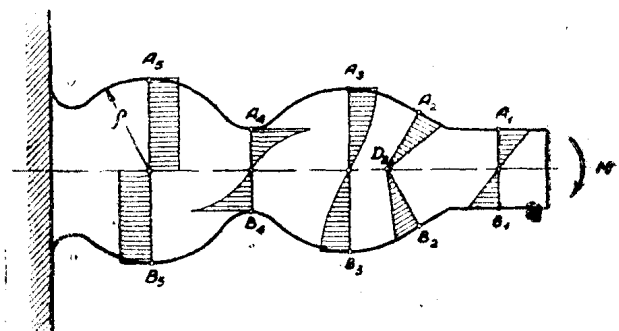


Рис. 4

$$\sigma = \frac{P \cdot \sin \beta}{b \cdot r \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)},$$

где α — половина угла заострения клина,

ρ и r — полярные координаты любой точки клина, если начало координат совпадает с вершиной клина, а полярная ось — с осью клина.

3. Эпюра, построенная для сечения $A_3 B_3$, соответствует выпуклой части контура балки и представляет закон распределения напряжений в виде некоторых гипербол. Из указанного обстоятельства следует, что в сечениях, соответствующих выпуклой части контура, балка сопротивляется изгибу более интенсивно, чем в сечениях, соответствующих призматической части.

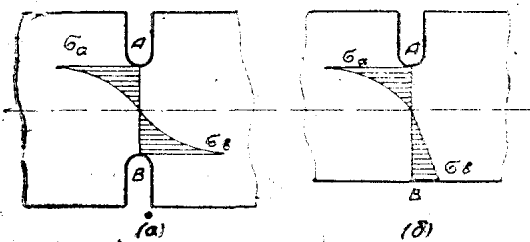
4. Эпюра напряжений, построенная для сечения $A_4 B_4$, характерна концентрацией напряжений у вогнутых частей контура. Этим обстоятельством мы воспользуемся впоследствии для определения концентрации напряжений у выкружек и выточек.

5. Эпюра напряжений, построенная для сечения $A_5 B_5$, которое характерно тем, что контур балки, соответствующий этому сечению, имеет центр кривизны, лежащий на нейтральной оси, представляется в виде двух прямоугольников. Этот случай является предельным, далее он переходит в случай, изображенный на рис. 3, при котором гипотеза ломаных сечений неприменима. Поэтому надо полагать, что эпюра напряжений, полученная для сечения $A_5 B_5$, является значительно неточной.

4. Определение концентрации напряжений по формуле (7), выведенной из гипотезы ломаных сечений, у выкружек и выточек. Сравнение результатов, полученных по формуле (7), с опытными данными

На рис. 5 воспроизведено сравнение результатов, полученных по формуле (7), с опытными данными.

На фиг. (а) рис. 5 представлена прямоосная пластина с двумя симметрично расположенными выточками. Пластина подвергнута чистому изгибу.



На рассматриваемой фигуре дана эпюра напряжений для центрального сечения, построенная посредством формул (4) и (7).

На фиг. (б) рис. 5. представлена пластина, имеющая одну выточку. Для центрального сечения этой пластины показана эпюра напряжений, полученная оптическим методом [1, стр. 151].

К сожалению, между двумя представленными результатами нельзя сделать

полного сравнения, так как в первом случае пластина взята с двумя выточками (по той причине, что формула (7) применима только для прямоосных балок), во втором — с одной.

Однако можно констатировать, что в частях, прилегающих к выточкам, эпюры в обоих случаях получились достаточно идентичными. В обоих случаях распределение напряжений в рассматриваемых частях эпюр имеет гиперболический характер.

На рис. 6 приведена сравнительная картина распределения нормальных напряжений по контуру выточки.

На рис. 6 толстой линией показана эпюра, построенная на основе опытных данных, полученных оптическим методом [1, стр. 151]. Тонкой линией построена эпюра напряжений, вычисленных посредством формулы (7). Рассматриваемые эпюры дают сравнительно хорошее совпадение. Наибольшее расхождение не превышает 4%.

На рис. 7 изображены кривые, представляющие коэффициенты концентрации напряжений в зависимости от отношения $\frac{\rho}{h}$. Кривые получены для пластины, изображенной на рис. 5(а), подвергнутой чистому изгибу. На рис. 7 линией (I) дана кривая, полученная опытным путем (см. Н. М. Беляев, Курс сопротивления материалов, 1939 г., стр. 604), при $H = h + 2\rho$. Линией (II) нанесена кривая коэффициентов концентрации напряжений,

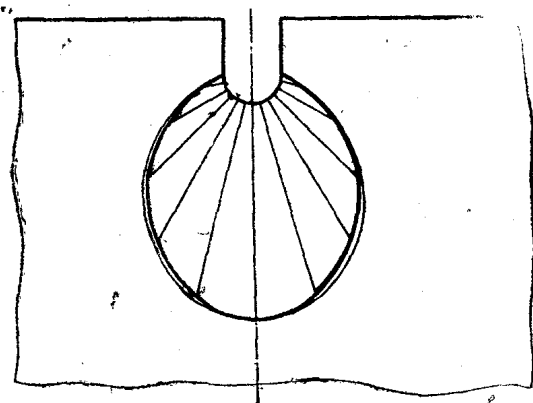


Рис. 6

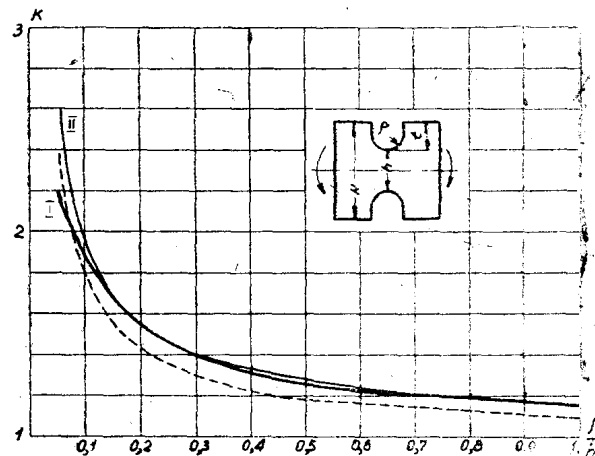


Рис. 7

вычисленных посредством формулы (7), из которой может быть получено следующее выражение коэффициента концентрации напряжения для точки, лежащей на дне выточки:

$$K = \frac{1}{-3 \left[\frac{1}{2c} + \frac{1+c}{c^2} + \frac{(1+c)^2}{c^3} \ln \left(\frac{1}{1+c} \right) \right]},$$

где

$$c = + \frac{y}{\rho} = + \frac{h}{2\rho}.$$

На рассматриваемом графике рис. 7 можно наблюдать очень хорошее схождение опытных и теоретических результатов, что свидетельствует о достаточной точности формулы (7). Расхождение между опытной и теоретической кривыми, начиная с отношения $\frac{\rho}{h}$, равному 0,1 (и больше), не превышает 2—3%.

На том же графике рис. 7 пунктирной линией нанесена кривая коэффициентов концентрации напряжений, вычисленных посредством гипотезы цилиндрических сечений. Коэффициенты концентрации напряжений для точки, лежащей на дне выточки, могут быть получены на основе гипотезы цилиндрических сечений по следующей формуле, которую приводим без вывода:

$$K = \frac{1}{6n \left[\frac{1}{2} \sqrt{2n+1} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{2n+1} + 1}{\sqrt{2n+1} - 1} \right) - 1 \right]},$$

где

$$n = \frac{\rho}{y} = \frac{2\rho}{h}.$$

Рассматривая график рис. 7, можно констатировать, что линия II, полученная на основе гипотезы ломаных сечений, дает меньшее расхождение с опытной кривой, чем пунктирная линия, полученная на основе гипотезы цилиндрических сечений.

В таблице 1 дано сравнение коэффициентов концентрации напряжений, полученных различными исследователями, для случая изгиба плоского образца с боковыми выточками.

Таблица 1¹⁾

$\frac{\rho}{h}$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3
$\frac{t}{h}$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,4	0,3
По Бухманну	2,0	2,45	2,9	—	—	—
По Фрохту	1,85	1,93	2,04	1,58	1,6	1,43
По вычислениям Афанасьева . .	1,75	1,82	1,91	1,56	1,58	1,44
По гипотезе ломаных сечений . .	1,90	1,90	1,90	1,50	1,50	1,40

Перейдем к рассмотрению концентрации напряжений у выкружек.

На рис. 8 (а) и 8 (б) изображены пластины, имеющие по две симметрично расположенных выкружки и подвергнутые чистому изгибу. На этом же рисунке построены эпюры напряжений, найденных по формуле (7) для точек контуров выточек.

В точке А, согласно формуле (7), получается скачок напряжений. Указанное обстоятельство объясняется тем, что в точке А вторая производная уравнения, представляющего контур пластины, изменяется скачкообразно. Но скачкообразное изменение напряжения в точке А не может соответствовать действительности, так как нельзя допустить, чтобы в одной точке одновременно существовали одного направления два разных нормальных напряжения. Следует признать, что за счет добавочного искривления ломаных сечений здесь произойдет выравнивание напряжений

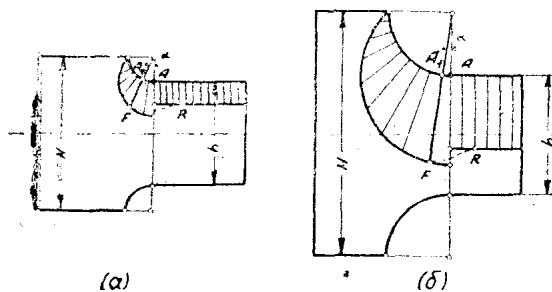


Рис. 8

по некоторой линии FR , нанесенной на рис. 8 пунктиром.

В литературе имеются опыты, произведенные оптическим методом с пластинами указанной формы. Эпюры напряжений, построенные по результатам этих опытов, почти не отличаются от исправленного вида теоретической эпюры рис. 3.

Максимальное напряжение получается в некоторой точке A_1 , расположенной под некоторым углом к вертикали. Из сравнения рис. 8 (а) и 8 (б) видно, что этот угол будет тем меньше, чем больше отношение $\frac{\rho}{h}$. Ниже будут даны более конкретные значения рассматриваемого угла.

¹⁾ При составлении таблицы использована статья Н. Н. Афанасьева [4].

На рис. 9 приведены кривые коэффициента концентрации напряжений в зависимости от отношения $\frac{\rho}{h}$ для пластин, имеющих форму, изображенную на рис. 8. Толстой линией (I) нанесена кривая коэффициентов концентрации напряжений, полученных опытным путем, [1, стр. 150]. Тонкой линией (II) построена кривая коэффициентов концентрации напряжений, полученных посредством формулы (7). Расхождение между рассматриваемыми кривыми отчасти объясняется тем, что при построении теоретической кривой максимум напряжений предусматривался в точке А, в то время как в действительности он будет в точке А₁, лежащей под некоторым углом к вертикали (см. рис. 8).

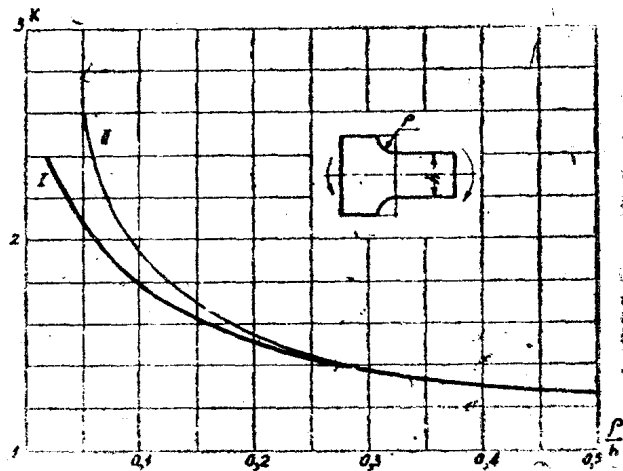


Рис. 9

Если при построении теоретической кривой исходить из напряжения, имеющегося в точке А₁, определяя его по формуле (7), то теоретическая кривая на всем протяжении почти совпадает с опытной кривой, если при этом брать следующие значения угла α :

$$\text{при } \frac{\rho}{h} = 0,1 \quad \alpha = 20^\circ$$

$$\text{при } \frac{\rho}{h} = 0,2 \quad \alpha = 10^\circ$$

$$\text{при } \frac{\rho}{h} \geq 0,3 \quad \alpha = 0^\circ.$$

Поэтому для определения наибольшего напряжения в случае выкружки надо вычисление вести по формуле (7), принимая указанные значения угла α .

5. График для определения напряжения по формуле (7)

Препятствием для пользования формулой (7) может явиться ее сложность. Процесс вычислений может быть весьма ускорен при помощи графика, который приводится ниже.

Формулу (7) можно представить в следующем виде:

$$\sigma = \frac{M \cdot B}{b \cdot y^2}, \quad (12)$$

где

$$B = \frac{1}{2 \left[\frac{1}{2n} - \frac{a}{n^2} + \frac{a^2}{n^3} \ln \left(\frac{a+n}{a} \right) \right] (a+n)^3}. \quad (13)$$

Из выражений (10) и (13) следует, что величина B является функцией угла α и отношения $\frac{y}{\rho}$.

На графике (рис. 10) нанесены кривые, изображающие B как функцию отношения $\frac{y}{\rho}$ при различных значениях угла α .

Таким образом, если известны величины $\frac{y}{\rho}$ и α , то величина B находится по графику весьма быстро, как это будет показано на примере.

График для определения коэффициента B

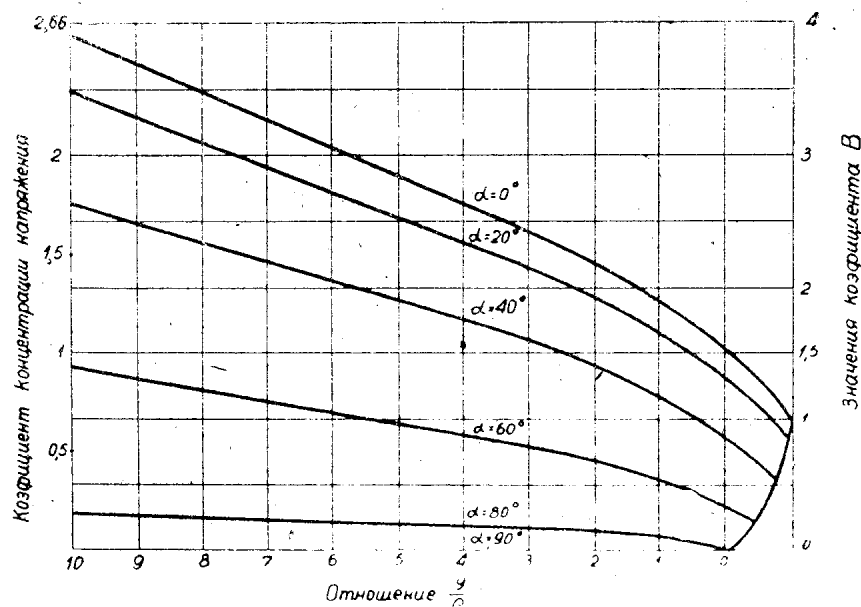


Рис. 10

Найденную величину B следует, далее, подставить в формулу (12), откуда и определится напряжение σ .

Допустим, дана консольная балка с переменной высотой поперечного сечения (см. рис. 11), нагруженная силой P , приложенной в точке O .

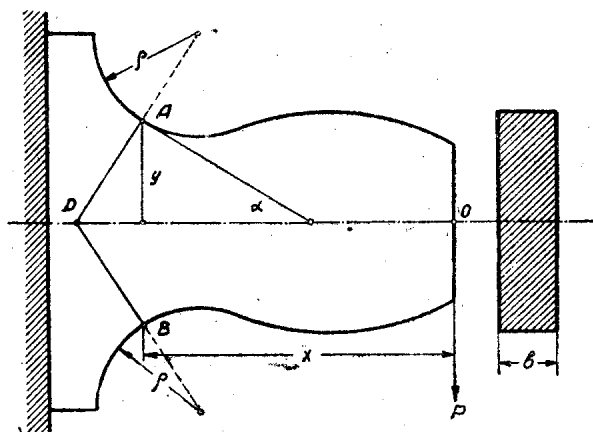


Рис. 11

Сила $P = 1000$ кг. Требуется определить напряжение в точке A . Пусть будут известны (или определены из чертежа) следующие величины:

- $x = 9,3$ см (абсцисса точки A),
- $y = 2$ см (ордината точки A),
- $\rho = 2$ см (радиус кривизны контура в точке A),
- $\alpha = 20^\circ$,
- $b = 5$ см (ширина поперечного сечения балки).

Проводим через точку A ломаное сечение ADB .

Плечо силы будет

$$OD = x + y \operatorname{tg} \alpha = 9,3 + 2,0,36 \cong 10 \text{ см.}$$

Тогда изгибающий момент для сечения ADB

$$M = P \cdot OD = 1000 \cdot 10 = 10000 \text{ кг.см.}$$

Далее находим

$$\frac{y}{\rho} = \frac{2}{2} = 1.$$

По графику (рис. 10) определяем величину B следующим образом. На нижней горизонтальной оси графика, по которой отложены отношения $\frac{y}{\rho}$,

отыскиваем точку, обозначенную цифрой 1. Учитывая, что мы определяем напряжение в точке A , лежащей на вогнутости контура,—точку, обозначенную цифрой 1, надо искать на указанной оси графика левее нуля. Найдя точку, обозначенную цифрой 1, проводим через нее вертикаль до пересечения с кривой $\alpha = 20^\circ$. Полученную точку на кривой сносим по горизонтали на вертикальную правую ось графика, на которой и получаем значение величины B . В нашем случае

$$B = 1,62.$$

После этого по формуле (12) определяем напряжение

$$\sigma = \frac{M \cdot B}{b y^2} = \frac{10000 \cdot 1,62}{5 \cdot 2^2} = 810 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Таково будет напряжение в точке A .

Заметим, что если бы балка изгибалась не под влиянием силы P , а под влиянием пары сил, то в формулу (12) следовало бы подставить значение момента пары сил. В этом случае отпадает отыскание точки D . Если бы требовалось определить напряжение для точки, лежащей на выпуклом участке контура, то, вычислив отношение $\frac{y}{\rho}$, следовало бы оты-

скивать соответствующую точку на нижней горизонтальной оси графика, рис. 10 правее нулевой точки. Если бы требовалось определить напряжение для точки, лежащей на прямолинейном участке контура, то на нижней горизонтальной оси графика следовало бы взять нулевую точку.

На левой вертикальной оси графика отложены значения коэффициента концентрации напряжений.

В рассмотренном примере коэффициент концентрации напряжения для точки A получается по графику равным 1,1.

Заметим, что здесь под коэффициентом концентрации напряжений понимается отношение величины напряжения, вычисленного по формуле (12), к величине напряжения, которое получилось бы для той же точки по гипотезе плоских сечений.

6. Некоторые примеры по приложению выведенных формул к расчету на изгиб зубцов зубчатых колес

Характерным примером прямоосной балки переменной высоты поперечного сечения является зубец зубчатого колеса.

Рассмотрим зубец зубчатого колеса, изображенный на рис. 12. Для определения напряжения в некоторой точке A профиля зубца измеряем на чертеже (рис. 12) следующие величины:

$$\alpha; y; OD; \rho = AT.$$

Исходя из этих величин, можно определить по формуле (12) напряжение в точке A , подобно тому, как это было сделано в предыдущем примере. Определив напряжения для целого ряда точек профиля, можно построить эпюру напряжений по всей длине профиля. Такая эпюра изображена на рис. 12.

На основании данных, приведенных в пункте 4 (см. рис. 8) теоретическая эпюра должна быть несколько выправлена вблизи точки перегиба профиля (точка A_0). На рис. 12 исправление произведено по кривой FR . Из эпюры (рис. 12) видно, что опасная точка профиля зубца, в смысле

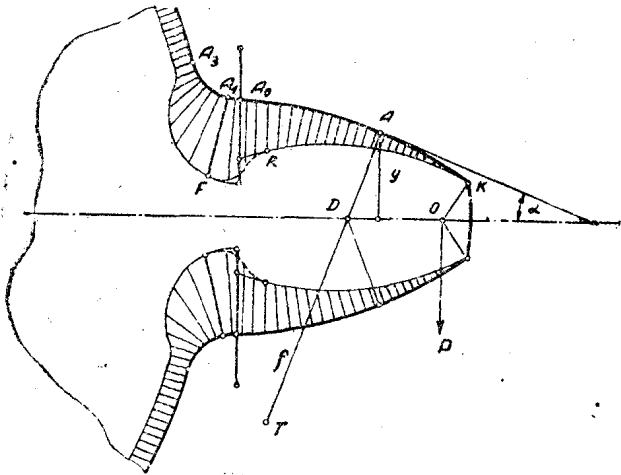


Рис. 12

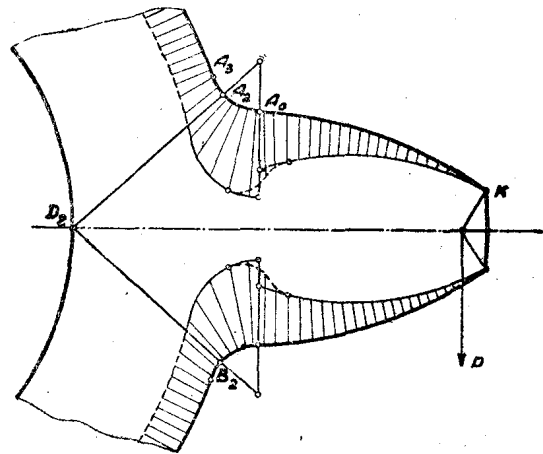


Рис. 13

наибольшего нормального напряжения, в данном примере получается на закруглении ножки вблизи точки A_0 .

При построении эпюры напряжений (рис. 12) предполагалось, что зубчатое колесо не имеет обода, а выполнено в виде сплошного диска. В случае, если колесо будет иметь обод ограниченной толщины, то эпюра напряжений в части, лежащей около точки A_3 , примет несколько иной вид.

На рис. 13 изображена эпюра напряжений для точек профиля зубца, который принадлежит зубчатому колесу, имеющему обод ограниченной толщины.

На участке профиля KA_2 эпюра напряжений сохранит прежний вид, совпадающий с рис. 12. Начиная с точки A_2 , эпюра напряжений, за счет деформации обода, примет несколько иной вид, ориентировочно изображенный на рис. 13 пунктирной линией.

Сказанное объясняется тем, что формулы (7) или (12), при помощи которых вычисляется напряжение, мы вправе применять только до тех пор, пока вершина ломаного сечения (точка D_2) находится в пределах тела изгибаемой балки. Как только точка D_2 выйдет за пределы обода, так напряжения на контуре, начиная с точки A_2 , будут определяться не изгибом зубца, а изгибом обода, который (изгиб) будет происходить по двум отдельным сечениям A_2D_2 и B_2D_2 .

7. Распространение гипотезы ломаных сечений на случай, когда прямоосный стержень любого криволинейного очертания имеет двутавровое сечение

На рис. 14 представлена прямоосная балка произвольного очертания, имеющая двутавровое сечение. В правой части рисунка изображено развернутое ломаное сечение балки ADB .

Задача будет заключаться в определении напряжения в точке A рассматриваемой балки.

Решение задачи можно получить из формулы (6), которую надо только несколько преобразовать, так как формула (6) была получена для стержня прямоугольного сечения. При преобразовании формулы (6) необходимо учесть, что ширина поперечного сечения b не будет постоянна. Согласно ранее принятым обозначениям и рис. 14,

$$y \cdot q = AD = u_a.$$

Тогда интеграл, входящий в формулу (6), может быть представлен в виде суммы двух интегралов с пределами от 0 до u_0 и от u_0 до u_a (см.

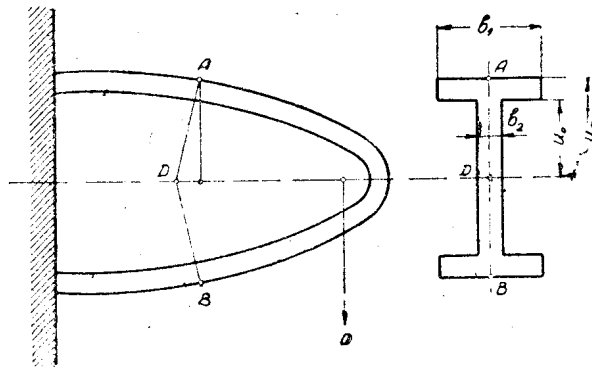


Рис. 14

рис. 14). Так как отыскивается напряжение в точке A, то в части, стоящей вне интеграла, следует положить

$$u = u_a.$$

Теперь формуле (6) можно придать следующий вид:

$$\sigma = \frac{Mmq u_a}{[m + (q^2 - m)] \cdot 2 \left[\int_0^{u_0} \frac{mqb_2 u^2 du}{m + (q^2 - m) \frac{u}{u_a}} + \int_{u_0}^{u_a} \frac{mqb_1 u^2 du}{m + (q^2 - m) \frac{u}{u_a}} \right]}. \quad (14)$$

Интегралы в полученном выражении являются интегралами рациональных функций и их решение не представляет трудностей.

Формула (14) дает возможность определить напряжение в любой точке (A), лежащей на очерке рассматриваемой балки.

Часть II. Изгиб кривоосных стержней фигурного очертания

8. Применение гипотезы ломаных сечений к некоторым частным случаям непрямоосных балок

Гипотеза ломаных сечений может быть применена для некоторых случаев непрямоосных балок.

Рассмотрим балки, у которых имеется поперечное сечение, лежащее в плоскости, проходящей через оба центра кривизны верхней и нижней частей ее контура. При помощи гипотезы ломаных сечений представляется возможность довольно просто определить напряжения в сечении совпадающем с указанной плоскостью.

В виде первого примера рассмотрим балку, изображенную на рис. 15.

Балка представляет пластинку постоянной толщины b , имеющую выточку в верхней части и вогнутость в нижней части. Плоскость nn является поперечной плоскостью симметрии балки.

Пусть балка будет подвергнута чистому изгибу некоторым моментом M . Задача будет заключаться в определении напряжений в сечении AB .

Пусть линия tt будет представлять нейтральный слой балки. Проведем координатные оси X и Y , выбрав точку D за начало координат. Тогда в общем виде верхний контур балки может быть представлен уравнением $y_1 = f_1(x_1)$, а нижний контур уравнением $y_2 = f_2(x_2)$, причем будем считать, что для уравнения верхнего контура положительная ось ординат направлена вверх, а для уравнения нижнего контура положительная ось ординат

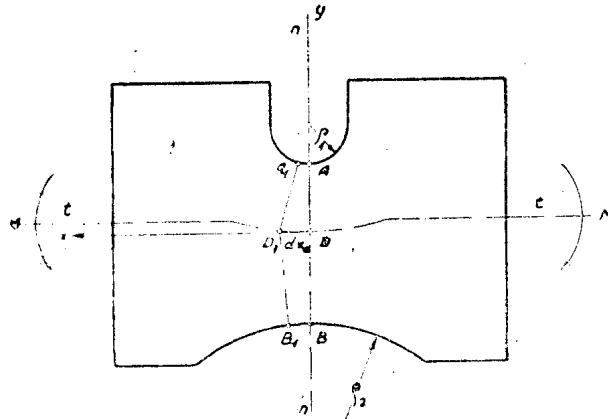


Рис. 15

направлена вниз. Это принесет удобство в дальнейшем при определении знаков перед ρ_1 и ρ_2 .

В соответствии с принятыми обозначениями первая и вторая производные для верхнего контура будут

$$\frac{dy_1}{dx_1} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y_1}{dx_1^2},$$

а для нижнего контура

$$\frac{dy_2}{dx_2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y_2}{dx_2^2}.$$

Для балки рассматриваемого типа будем иметь:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для точки } A, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = 0; \quad \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{\pm \rho_1}; \quad y_1 = y_a = AD \\ \text{для точки } B, \quad \frac{dy_2}{dx_2} = 0; \quad \frac{d^2y_2}{dx_2^2} = \frac{1}{\pm \rho_2}; \quad y_2 = y_b = DB \end{array} \right\}, \quad (15)$$

где ρ_1 и ρ_2 — соответствующие радиусы кривизны контуров в точках A и B . Перед этими радиусами надо брать знак плюс, если контур в данной точке имеет вогнутость, и знак минус, если контур в данной точке имеет выпуклость. Для балки, изображенной на рис. 15, следует перед обоими радиусами взять знак плюс.

Возьмем точку A_1 , отстоящую от точки A на расстоянии dx , и проведем через нее ломаное сечение $A_1D_1B_1$.

Так как элементарно малый отрезок DD_1 нейтрального слоя можно считать совпадающим с осью абсцисс, получается возможность для определения напряжений в сечении AB применить формулу (3).

Для рассматриваемого типа балки, учитывая условия (15), будем иметь, согласно выражениям (5):

для верхней части балки

$$\left. \begin{aligned} m &= m_1 = 1 + \frac{y_a}{\pm \rho_1} \\ q &= q_1 = 1 ; y = y_a ; u = u_1 \end{aligned} \right\} ; \quad (16)$$

для нижней части балки

$$\left. \begin{aligned} m &= m_2 = 1 + \frac{y_b}{\pm \rho_2} \\ q &= q_2 = 1 ; y = y_b ; u = u_2 \end{aligned} \right\} . \quad (17)$$

Тогда выражение напряжений для верхней части балки, т. е. для точек участка сечения AD из формулы (3) получится

$$\sigma_1 = \frac{d\varphi E m_1 n_1}{dx_0 \left[m_1 + (1 - m_1) \frac{u_1}{y_a} \right]}, \quad (18)$$

или, подставляя m_1 и произведя элементарные преобразования, получим

$$\sigma_1 = \frac{d\varphi E u_1}{dx_0 \left(1 - \frac{u_1}{\pm \rho_1 + y_a} \right)}. \quad (19)$$

Для нижней части балки, т. е. для точек участка BD , соответствующим образом найдем

$$\sigma_2 = \frac{d\varphi E m_2 u_2}{dx_0 \left[m_2 + (1 - m_2) \frac{u_2}{y_b} \right]}, \quad (20)$$

или, после подстановки m_2 и некоторых элементарных преобразований получим

$$\sigma_2 = \frac{d\varphi E u_2}{dx_0 \left(1 - \frac{u_2}{\pm \rho_2 + y_b} \right)}. \quad (21)$$

Из условия равновесия сумма проекций сил, действующих на левую или правую часть балки, должна равняться нулю. Учитывая, что балка подвергнута чистому изгибу, указанное условие равновесия можно представить в следующем виде:

$$\int_0^{y_a} \sigma_1 b \cdot du_1 = \int_0^{y_b} \sigma_2 b \cdot du_2. \quad (22)$$

Подставляя σ_1 и σ_2 из (19) и (21) и произведя интегрирование, после сокращения на $E \cdot b \cdot \frac{d\varphi}{dx_0}$ и перемены знаков на обратные, получим

$$(\pm \rho_1 + y_a)^2 \left[\frac{y_a}{\pm \rho_1 + y_a} + \ln \left(\frac{\pm \rho_1}{\pm \rho_1 + y_a} \right) \right] = (\pm \rho_2 + y_b)^2 \left[\frac{y_b}{\pm \rho_2 + y_b} + \ln \left(\frac{\pm \rho_2}{\pm \rho_2 + y_b} \right) \right]. \quad (23)$$

Знаки перед ρ_1 и ρ_2 должны быть взяты в соответствии с вогнутостью или выпуклостью контуров, как об этом указывалось выше. Кроме того, можно написать

$$y_a + y_b = h. \quad (24)$$

Посредством совместного решения двух последних уравнений относительно y_a и y_b можно определить положение нейтрального слоя, т. е. точку D .

Найдем теперь напряжения в точках A и B . Для этого составим уравнения равновесия моментов внешних сил и сил упругости относительно точки D в таком виде:

$$M = \int_0^{y_a} \sigma_1 b u_1 du_1 + \int_0^{y_b} \sigma_2 b u_2 du_2.$$

Подставляя σ_1 и σ_2 из выражений (18) и (20), получим

$$M = \frac{E d \varphi}{dx_0} \left[\int_0^{y_a} \frac{m_1 b u_1^2 du_1}{m_1 + (1 - m_1) \frac{u_1}{y_a}} + \int_0^{y_b} \frac{m_2 b u_2^2 du_2}{m_2 + (1 - m_2) \frac{u_2}{y_b}} \right]. \quad (25)$$

Обозначая первый интеграл, стоящий в скобках, буквою U_a , а второй — буквою U_b , получим

$$E \frac{d\varphi}{dx_0} = \frac{M}{U_a + U_b}.$$

Подставляя найденное значение $E \frac{d\varphi}{dx_0}$ в формулу (18) и полагая $u_1 = y_a$, найдем напряжение в точке A

$$\sigma_a = \frac{M}{U_a + U_b} \cdot m_1 y_a. \quad (26)$$

Аналогично напряжение в точке B найдется по формуле (20)

$$\sigma_b = \frac{M}{U_a + U_b} \cdot m_2 y_b. \quad (27)$$

Решения интегралов U_a и U_b будут следующие:

$$U_a = \frac{b m_1 y_a^3}{(1 - m_1)^3} \left[\frac{1}{2} - 2m_1 + m_1^2 (1,5 - \ln m_1) \right],$$

$$U_b = \frac{b m_2 y_b^3}{(1 - m_2)^3} \left[\frac{1}{2} - 2m_2 + m_2^2 (1,5 - \ln m_2) \right].$$

Заметим, что в этих выражениях

$$\frac{y_a^3}{(1 - m_1)^3} = -\rho_1^3$$

и

$$\frac{y_b^3}{(1 - m_2)^3} = -\rho_2^3,$$

что может упростить вычисления.

В случае, когда $m_1 = 1$ или $m_2 = 1$, что будет иметь место для прямолинейного контура, интегралы U_a и U_b соответственно будут иметь решения

$$U_a = \frac{by_a^3}{3},$$

$$U_b = \frac{by_b^3}{3}.$$

Заметим, что напряжения в точках A и B рассматриваемого стержня (рис. 15) могут быть вычислены также посредством графика рис. 10. При этом напряжения σ_a и σ_b должны быть представлены следующими выражениями:

$$\sigma_a = \frac{2MB_1B_2m_1y_a}{(B_1y_b^3m_2 + B_2y_a^3m_1)b}; \quad (28)$$

$$\sigma_b = \frac{2MB_1B_2m_2y_b}{(B_1y_b^3m_2 + B_2y_a^3m_1)b}. \quad (29)$$

В этих выражениях B_1 и B_2 следует определять по графику рис. 10: при определении B_1 , исходя из параметров верхней кривой контура для

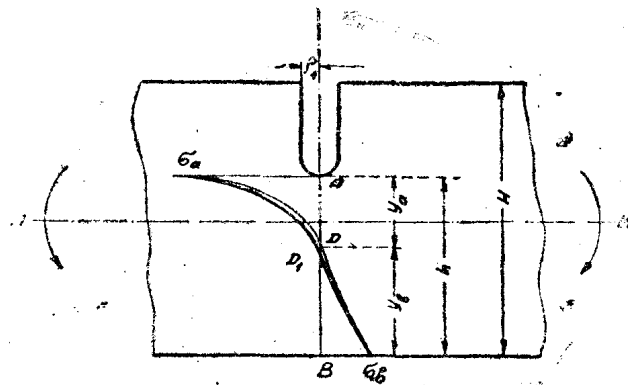


Рис. 16

точки A , т. е. $\frac{y_a}{\rho_1}$ и α_1 , равного нулю, и при определении B_2 ,—исходя из параметров нижней кривой контура для точки B , т. е. $\frac{y_b}{\rho_2}$ и α_2 , равного нулю.

В виде второго примера рассмотрим балку, изображенную на рис. 16.

Этот пример представляет особый интерес, потому что относительно балки данной формы в литературе имеются опытные данные и представляется возможным произвести сравнение теоретических результатов с данными опыта.

В книге проф. С. П. Тимошенко [1] приведены результаты опытного определения напряжений в сечении ADB балки, изображенной на рис. 16, имеющей форму пластины постоянной толщины b и подвергнутой чистому изгибу. Эпюра напряжений, полученная из опыта, представлена на рис. 16 толстой линией. Основные размеры испытанной пластины были следующие:

$$\begin{aligned} H &= 28,6 \text{ мм}, \\ \rho_1 &= 1,6 \text{ мм}, \\ h &= 19,1 \text{ мм}, \\ \frac{\rho_1}{h} &= 0,0831 \cong \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Поставим задачу построить эпюру напряжений для сечения ADB , исходя из теоретических вычислений. Рассматриваемая балка (пластина) является частным случаем балки предыдущего примера (рис. 15).

Особенность данного случая определяется тем, что нижний контур балки прямолинеен. Таким образом, для рассматриваемой балки будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{для точки } A \quad m_1 &= 1 + \frac{y_a}{\rho_1}, \\ q_1 &= 1; \\ \text{для точки } B \quad m_2 &= 1, \\ q_2 &= 1. \end{aligned}$$

Тогда выражение для напряжения в точках участка AD может быть найдено по формуле (18), которая напишется так:

$$\sigma_1 = \frac{d\varphi E u_1}{dx_0 \left(1 - \frac{u_1}{\rho_1 + y_a} \right)}, \quad (30)$$

а выражение напряжения в точках участка DB может быть найдено по формуле (20), которая примет вид

$$\sigma_2 = \frac{d\varphi E u_2}{dx_0}. \quad (31)$$

Перейдем к определению положения нейтрального слоя, т. е. точки D . Из уравнения (22) для рассматриваемого случая получим

$$(\rho_1 + y_a)^2 \left[\frac{-y_a}{\rho_1 + y_a} - \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + y_a} \right) \right] = \frac{y_b^2}{2}.$$

Кроме того, имеем:

$$y_a + y_b = h.$$

Решая совместно два последних уравнения методом подбора, получим

$$y_a = 0,380h = AD,$$

$$y_b = 0,620h = DB.$$

Согласно опытным данным

$$y_a = 0,425h = AD_1,$$

$$y_b = 0,575h = D_1B.$$

Таким образом, расхождение в положении нейтрального слоя теоретического и опытного получается в виде расстояния

$$DD_1 = 0,425h - 0,380h = 0,045h = 0,86 \text{ мм}.$$

Перейдем к сравнению напряжений, найденных теоретическим и опытным путем. Пользуясь формулами (30) и (31), можно найти отношение теоретических напряжений в точках A и B . Для этого примем в формулах (30) и (31)

$$u_1 = y_a \text{ и } u_2 = y_b,$$

после чего делим σ_1 на σ_2 . Тогда получим

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{y_a}{\left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + y_a}\right) y_b}.$$

Так как теоретические значения y_a и y_b были получены

$$y_a = 0,380 h$$

и

$$y_b = 0,620 h,$$

а также известно, что

$$\rho_1 = 0,0834 h,$$

то получим

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = 3,38.$$

Из опытных данных отношение напряжений в точках A и B равно

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = 2,97,$$

т. е. расхождение составляет 14%.

Из сравнения полученных результатов следует, что в точке A теоретическое напряжение будет несколько больше опытного (приблизительно на 7%), а в точке B теоретическое напряжение будет несколько меньше опытного (приблизительно на 7%). Кривая распределения теоретических напряжений в сечении ADB нанесена на рис. 16 тонкой линией.

Из всех рассмотренных в данном примере вопросов наибольший интерес представляет величина напряжения в точке A , как максимального напряжения в данной конструкции.

Выяснилось, что теоретическое значение этого напряжения, найденное на основе гипотезы ломаных сечений, отличается от величины, найденной опытом, примерно на 7%. Есть основание полагать, что значительная доля этого расхождения падает на неточность опытных данных, так как по опытным данным площадь эпюры положительных напряжений не вполне точно равна площади эпюры отрицательных напряжений (см. рис. 16), что противоречит условию равновесия.

В заключение данного примера укажем, что абсолютные значения напряжений в точках A и B могут быть найдены по формулам (28) и (29) при соответствующем определении величин, входящих в эти формулы.

В виде третьего примера рассмотрим кривоосный брус, изображенный на рис. 17, подвергнутый изгибу парами сил, приложенных к его концам.

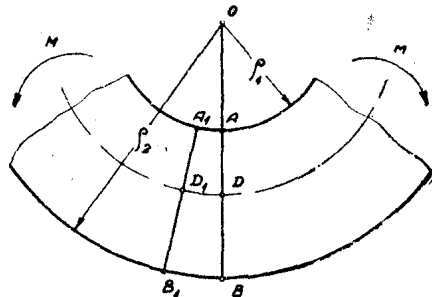


Рис. 17

Сечения бруса будут прямоугольные. Оба контура пусть будут иметь общий центр кривизны в точке O .

В этом частном случае сечения, проведенные через точку A и близлежащую точку A_1 , получаются не ломаными, а плоскими.

Вследствие этого задача переходит в обычную задачу о брус с криволинейной осью, решаемую на основе гипотезы плоских сечений.

Заметим также, что формулы, выведенные из гипотезы ломаных сечений, в данном частном случае переходят в обычные формулы гипотезы плоских сечений.

9. Распространение гипотезы ломаных сечений на случай, когда кривоосный стержень имеет не прямоугольные сечения

Ограничимся рассмотрением сечений, изображенных на рис. 18.

Линии nn на рис. 18 изображают нейтральный слой.

В случае двутаврового сечения [рис. 18(а)] каждый из интегралов U_a и U_b , входящих в формулу (26) и (27) должен быть разбит на два, а именно

$$U_a = \int_0^{y_1} \frac{m_1 b_2 u_1^2 du_1}{m_1 + (1 - m_1) \frac{u_1}{y_a}} + \int_{y_1}^{y_a} \frac{m_1 b_1 u_1^2 du_1}{m_1 + (1 - m_1) \frac{u_1}{y_a}}, \quad (32)$$

$$U_b = \int_0^{y_2} \frac{m_2 b_2 u_2^2 du_2}{m_2 + (1 - m_2) \frac{u_2}{y_b}} + \int_{y_2}^{y_b} \frac{m_2 b_3 u_2^2 du_2}{m_2 + (1 - m_2) \frac{u_2}{y_b}}. \quad (33)$$

Напомним, что в этих выражениях u_1 и u_2 есть расстояния каких-либо точек верхней и нижней части сечения до нейтрального слоя.

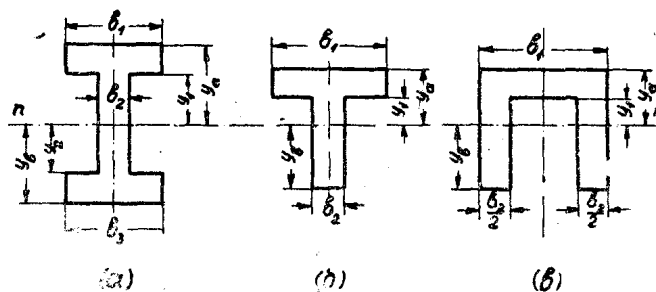


Рис. 18

Для определения положения нейтрального слоя уравнение (22) переписывается так:

$$\int_0^{y_1} \sigma_1 b_2 du_1 + \int_{y_1}^{y_a} \sigma_1 b_1 du_1 = \int_0^{y_2} \sigma_2 b_2 du_2 + \int_{y_2}^{y_b} \sigma_2 b_3 du_2. \quad (34)$$

В случае сечений, изображенных на рис. 18(б) и 18(в), следует в написанных выражениях принять b_3 равным b_2 .

Часть III. Применение гипотезы ломаных сечений к определению нормальных напряжений в пластинах фигурного очертания при одновременном растяжении и изгибе

10. Пределы применимости гипотезы ломаных сечений при растяжении пластин фигурного очертания

В первой и второй частях настоящей работы были выведены формулы для определения нормальных напряжений при изгибе балок фигурного очертания.

Ввиду того что многие детали машин, имеющие фигурное очертание, подвергаются не только изгибу, но также растяжению или сжатию, является весьма полезным распространить гипотезу ломаных сечений на случай комбинации указанных деформаций.

С этой целью рассмотрим предварительно случай осевого растяжения пластины фигурного очертания и выясним пределы применимости гипотезы ломаных сечений для этого случая.

Пусть пластина фигурного очертания имеет вид, изображенный на рис. 19. Толщина пластины постоянна и равна b .

Пластина подвергнута растяжению действием сил P , направленных по ее оси.

Проведем через две бесконечно близкие точки A и A_1 , взятые на контуре пластины, ломаные сечения ADB и $A_1D_1B_1$. Сечение ADB в данном

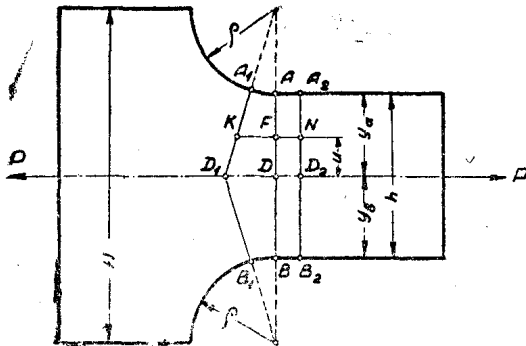


Рис. 19

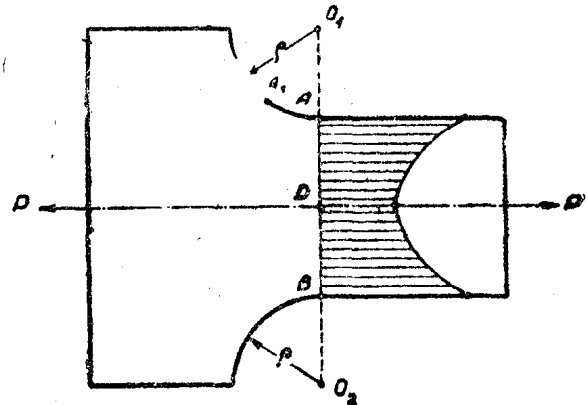


Рис. 20

случае окажется плоским, потому что точка A является точкой перегиба контура, и нормаль в этой точке будет направлена перпендикулярно к оси пластины. Под влиянием растягивающих сил P произойдет деформация и сечение ADB переместится относительно сечения $A_1D_1B_1$ в некоторое положение $A_2D_2B_2$.

На основе гипотезы ломаных сечений предполагается, что сечения не искривляются. Тогда волокна, находящиеся между сечениями $A_1D_1B_1$ и ADB , получат одинаковые абсолютные удлинения, равные DD_2 .

Рассмотрим волокно KF , находящееся между ломаными сечениями ADB и $A_1D_1B_1$ и взятое на расстоянии u от оси стержня.

Относительное удлинение рассматриваемого волокна:

$$\varepsilon = \frac{FN}{KF} = \frac{FN (\rho + y_a)}{DD_1 (\rho + y_a - u)}.$$

Напряжение в том же волокне будет

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{FN (\rho + y_a) E}{DD_1 (\rho + y_a - u)}. \quad (35)$$

Из выражения (35) следует, что закон распределения напряжений будет гиперболическим (рис. 20).

Асимптотами гипербола будут линии, проходящие через центры кривизны O_1 и O_2 параллельно оси пластины.

Из условия равновесия можно написать

$$P = 2 \int_0^{y_a} \sigma \cdot b \cdot du$$

или

$$P = 2 \int_0^{y_a} \frac{FN \cdot (\rho + y_a) \cdot E \cdot b \cdot du}{DD_1 \cdot (\rho + y_a - u)}.$$

Интегрируя, получим

$$P = - \frac{2E \cdot FN \cdot (\rho + y_a) \cdot b \cdot \ln \left(\frac{\rho}{\rho + y_a} \right)}{DD_1}$$

Отсюда найдем

$$\frac{E \cdot FN}{DD_1} = \frac{P}{2(\rho + y_a) \cdot b \cdot \ln \left(\frac{\rho + y_a}{\rho} \right)}.$$

Подставляя в выражение (35), получим

$$\sigma = \frac{P}{2(\rho + y_a - u) \cdot b \cdot \ln \left(\frac{\rho + y_a}{\rho} \right)}. \quad (36)$$

Наибольшее напряжение будет в точке A при $u = y_a$.
Это напряжение будет

$$\sigma = \frac{P}{2\rho b \ln \left(\frac{\rho + y_a}{\rho} \right)}. \quad (37)$$

Коэффициент концентрации напряжений может быть найден так:

$$K = \frac{\sigma}{\sigma_0},$$

где σ_0 есть напряжение в призматической части пластины, равное

$$\sigma_0 = \frac{P}{b \cdot h} = \frac{P}{2by_a}. \quad (38)$$

На основании выражений (37) и (38),

$$K = \frac{y_a}{\rho \ln \left(\frac{\rho + y_a}{\rho} \right)},$$

или

$$K = \frac{y_a}{\rho \ln \left(1 + \frac{y_a}{\rho} \right)}, \quad (39)$$

или

$$K = \frac{h}{2\rho \ln \left(1 + \frac{h}{2\rho} \right)}. \quad (40)$$

Полученную величину K будем называть теоретическим коэффициентом концентрации напряжений для случая растяжения.

На графике рис. 21 тонкая линия III построена для теоретического коэффициента K в зависимости от отношения $\frac{\rho}{h}$.

На этом же графике толстыми линиями построены кривые (I и II) для опытных значений коэффициента концентрации напряжений.

Кривая I построена для условия $\frac{H}{h} = 2,5$ посредством таблицы, приведенной в книге проф. С. П. Тимошенко „Курс сопротивления мате-

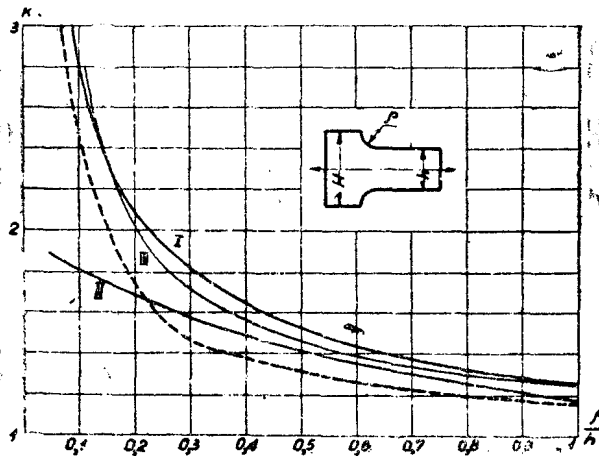


Рис. 21

риалов“ изд. 1931 г., стр. 578. Эту кривую можно рассматривать как предельную, так как дальнейшее увеличение отношения $\frac{H}{h}$ на коэффициент концентрации напряжений практически не влияет.

Кривая II взята из книги проф. Н. М. Беляева „Сопротивление материалов“ изд. 1939 г., стр. 604. Эта кривая построена при условии

$$H = h + 2\rho.$$

При растяжении на коэффициент концентрации напряжения влияет не только отношение $\frac{\rho}{h}$, но в значительной мере и отношение $\frac{H}{h}$, как это следует из опытных данных. Последнее обстоятельство ограничивает применение теоретической формулы (37), а также формул (39) и (40), как не учитывающих влияния величины отношения $\frac{H}{h}$.

Из рассмотрения графика рис. 21 следует, что теоретическая кривая (тонкая линия III) мало расходится с опытными кривыми (I и II) при значениях отношения $\frac{\rho}{h}$, больших 0,35.

Кроме того, теоретическая кривая довольно хорошо совпадает на всем протяжении с верхней предельной опытной кривой I.

Таким образом, можно считать, что гипотеза ломаных сечений и формулы (37, 39 и 40), полученные из нее, практически применимы для отыскания нормальных напряжений при растяжении, если форма пластины удовлетворяет хотя бы одному из двух условий:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\rho}{h} \geq 0,35 \\ \frac{H}{h} \geq 2,5 \end{array} \right\} \quad (41)$$

При этом, как следует из графика, ошибка не будет превышать 3—4%.

Указанные обстоятельства будем иметь в виду в дальнейшем при решении вопросов о применимости гипотезы ломаных сечений для определения нормальных напряжений при растяжении деталей той или иной конфигурации.

Для сравнения на графике рис. 21 пунктирной линией построена кривая коэффициента концентрации напряжения, вычисленного при помощи гипотезы цилиндрических сечений по формуле, которую приводим без вывода:

$$K = \frac{1}{\frac{n}{\sqrt{2n+1}} \ln \left(\frac{\sqrt{2n+1} + 1}{\sqrt{2n+1} - 1} \right)},$$

где

$$n = \frac{\rho}{y} = \frac{2\rho}{h}.$$

В таблице 2 приводим сравнение коэффициентов концентрации напряжений, полученных различными исследователями, для случая растяжения плоского образца с полукруглыми выточками.

Таблица 2¹⁾

$\frac{\rho}{h}$	0,2	0,25	0,35	0,4	0,5
По Фишеру	1,9	—	—	1,6	—
По Валье	—	1,9	—	—	1,55
По Прейссу и Бергу	—	—	1,65	—	—
По Фрохту	2,03	1,92	—	—	1,52
По Кунце	1,7	1,68	1,65	1,62	1,60
По вычислениям Афанасьева . .	2,08	1,97	1,77	1,67	1,50
По гипотезе ломаных сечений .	2,00	1,85	1,60	1,55	1,45

Заметим, что посредством рассматриваемых гипотез можно определить напряжение в произвольной точке, лежащей на контуре выточки (см. рис. 20). Так, по гипотезе ломаных сечений напряжение в точке A_1 будет

$$\sigma = \frac{P \cos \alpha}{2b\rho \ln \left(1 + \frac{y}{\rho \cos \alpha} \right) \left(\cos^2 \alpha + \frac{G}{E} \sin^2 \alpha \right)},$$

где y — ордината точки A_1 ,

¹⁾ При составлении таблицы данные опытов заимствованы из статьи Н. Н. Афанасьева [4].

α — угол наклона касательной в точке A_1 ,
 G — модуль упругости при сдвиге,
 E — модуль упругости при растяжении.

11. Пример на определение нормальных напряжений на основе гипотезы ломаных сечений в прямоосном стержне, подвергнутом растяжению и изгибу

Рассмотрим плоский прямоосный стержень, изображенный на рис. 22, имеющий постоянную толщину b . Таким образом, сечения стержня прямоугольны.

Будем полагать, что стержень удовлетворяет хотя бы одному из условий (41).

Стержень растягивается силами P , приложенными вдоль его оси, и изгибается моментом M , действующим в плоскости стержня. Очевидно, при данных условиях наибольшее напряжение будет в точке A . Задача будет заключаться в определении этого наибольшего напряжения.

Напряжение от изгиба в точке A может быть найдено по формуле (12):

$$\sigma = \frac{M \cdot B}{b \cdot y^2},$$

где M — изгибающий момент,
 b — толщина стержня
 y — ордината точки A , равная AD ,
 B — коэффициент, определяемый по г-ку рис. 10.

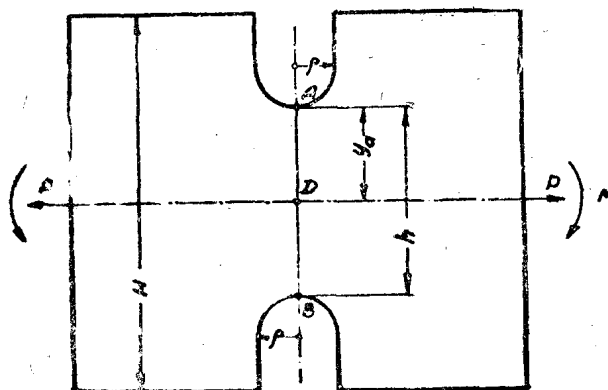


Рис. 22

Напряжение от растяжения в точке A может быть найдено по формуле (37):

$$\sigma_1 = \frac{P}{2r b \ln \left(\frac{r + y_a}{r} \right)},$$

так как в условии задачи предполагалось, что стержень удовлетворяет хотя бы одному из условий (41).

Результирующее напряжение в точке A будет

$$\sigma_a = \sigma + \sigma_1.$$

Таким образом, при помощи гипотезы ломаных сечений с достаточно высокой точностью и малой затратой времени удастся решить сложную задачу, связанную с концентрацией напряжений в условиях одновременного действия изгиба и растяжения.

12. Пример по определению нормальных напряжений на основе гипотезы ломаных сечений у стержня с криволинейной осью, подвергнутого изгибу и растяжению (рис. 23).

Сечения стержня прямоугольны. Ширина сечений b постоянна. Будем считать, что для данного стержня $\frac{\rho_1}{R} \geq 0,35$ и, следовательно, стержень удовлетворяет одному из условий (41), что достаточно для применимости

гипотезы ломаных сечений. Стержень подвергнут действию сил P , приложенных к его концам.

Задача будет заключаться в определении напряжения в точке A . Очевидно, что в сечении ADB стержень будет испытывать растяжение и изгиб. Напряжение в точке A от изгиба определяем на основе данных, изложенных в пункте 8 настоящей работы.

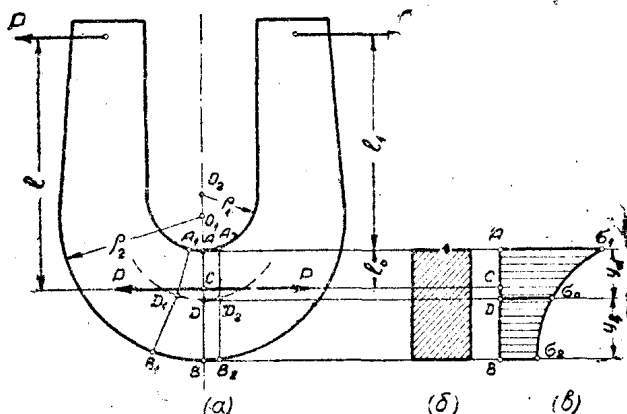


Рис. 23

Из выражений (23) и (24) могут быть найдены y_a и y_b и тем самым определено положение нейтрального слоя (точка D), пока без учета растяжения стержня.

Напряжение в точке A от изгиба должно быть определено по формуле (28) или (26)

$$\sigma_a = \frac{2MB_1B_2m_1y_a}{(B_1y_b^3m_2 + B_2y_a^3m_1)b} \quad (42)$$

Для определения напряжения σ_a необходимо знать величину изгибающего момента M . Величина этого момента будет определена в дальнейшем.

Возьмем некоторую точку C в сечении ADB и приложим к ней две прямо противоположные силы, равные P (см. рис. 23).

Сила P , приложенная в точке C , будет растягивать стержень в сечении ADB . Положение C должно быть выбрано так, чтобы растягивающая сила P не производила поворота сечения ADB , а только производила поступательное его перемещение относительно соседнего ломаного сечения $A_1D_1B_1$. Таким образом, под влиянием силы P , приложенной в точке C , сечение ADB займет относительно сечения $A_1D_1B_1$ некоторое положение $A_2D_2B_2$, параллельное ADB . Тогда все волокна, находящиеся между сечениями ADB и $A_1D_1B_1$, получат одинаковые абсолютные удлинения, равные DD_2 .

В соответствии со сказанным на рис. 23 (b) изображена эпюра нормальных напряжений от растягивающего действия силы P .

Очевидно, что из условия отсутствия поворота сечения ADB положение точки C , как точки приложения растягивающей силы, должно определяться положением центра тяжести площади эпюры напряжений. Точка C должна являться проекцией указанного центра тяжести на линию AB .

Для определения эпюры напряжений можно составить следующие отношения, учитывая, что в данном примере ρ_2 отрицательно:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{DD_1}{AA_1} = \frac{\rho_1 + y_a}{\rho_1}; \quad (43)$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \frac{DD_1}{BB_1} = \frac{\rho_2 + y_b}{\rho_2}; \quad (44)$$

$$P = \int_0^{y_a} \sigma \cdot b \cdot du + \int_0^{y_b} \sigma \cdot b \cdot du. \quad (45)$$

Последнее выражение посредством формулы (37) может быть преобразовано в следующее:

$$P = \sigma_1 \rho_1 b \cdot \ln \left(\frac{\rho_1 + y_a}{\rho_1} \right) + \sigma_2 \rho_2 b \cdot \ln \left(\frac{\rho_2 + y_b}{\rho_2} \right). \quad (45a)$$

Решая совместно уравнения (43), (44) и (45a), получим

$$\sigma_1 = \frac{P}{\rho_1 b \cdot \ln \left(\frac{\rho_1 + y_a}{\rho_1} \right) + \frac{\rho_1 b (\rho_2 + y_b) \ln \left(\frac{\rho_2 + y_b}{\rho_2} \right)}{\rho_1 + y_a}}, \quad (46)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\frac{\rho_2 b (\rho_1 + y_a) \ln \left(\frac{\rho_1 + y_a}{\rho_1} \right)}{\rho_2 + y_b} + \rho_2 b \cdot \ln \left(\frac{\rho_2 + y_b}{\rho_2} \right)}; \quad (47)$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{b (\rho_1 + y_a) \ln \left(\frac{\rho_1 + y_a}{\rho_1} \right) + b (\rho_2 + y_b) \ln \left(\frac{\rho_2 + y_b}{\rho_2} \right)}. \quad (48)$$

Найденные величины определяют эпюру напряжений, изображенную на рис. 23(б). Построив эпюру напряжений, можно определить центр тяжести ее площади.

Заметим, что при определении положения центра тяжести площади эпюры напряжений можно положить в выражениях (46), (47) и (48) силу P равной единице, отчего расстояние l_0 центра тяжести эпюры от точки A , измеренное по вертикали, не изменится, так как l_0 может быть выражено исключительно через геометрические параметры рассматриваемого стержня.

Можно доказать, что точка C совпадает с точкой D и, таким образом, $l_0 = AD = y_a$. Действительно, интегралы, входящие в выражение (22), после подстановки в них σ_1 и σ_2 из выражений (19) и (21), могут рассматриваться как величины, пропорциональные статическим моментам соответствующих частей эпюры растягивающих напряжений, изображенной на рис. 23(б).

Равенство указанных интегралов говорит о том, что точка D является проекцией центра тяжести эпюры растягивающих напряжений на линию AB . Таким образом, точка C , о которой говорилось выше, совпадает с точкой D и, следовательно, l_0 равно y_a и определяется из уравнений (23) и (24).

Найдя l_0 , представляется возможность определить величину изгибающего момента

$$M = P(l_1 + l_0),$$

где l_1 есть расстояние между приложенной силой P и точкой A (см. рис. 23).

Определив величину изгибающего момента, находим напряжение в точке A от изгиба по формуле (42). Результирующее напряжение в точке A будет $\sigma_{a1} = \sigma_a + \sigma_1$.

Таким образом, поставленная задача решена.

Заметим, что данную задачу было бы неправильно решать посредством гипотезы плоских сечений, так как центры кривизны очерка стержня O_1 и O_2 не совпадают. При решении данной задачи посредством гипотезы плоских сечений делается молчаливое допущение о том, что центр кри-

визны O_1 совпадает с центром кривизны O_2 , т. е. имеет место искажение начальных условий задачи. С последним можно мириться только в том случае, если расстояние между центрами кривизны незначительно. Гипотеза ломаных сечений с таким ограничением совершенно не связана. Центры кривизны даже могут лежать по обе стороны стержня. Однако нам удалось решить задачу при помощи гипотезы ломаных сечений только для стержня с криволинейной осью, имеющего поперечную плоскость, проходящую через оба центра кривизны.

Вопрос о решении задачи для стержня более сложной формы с криволинейной осью при помощи гипотезы ломаных сечений остается пока открытым.

13. Распространение метода решения предыдущей задачи на случай, когда поперечные сечения стержня с криволинейной осью не являются прямоугольными

Решение задачи по определению напряжений в стержне, подвергнутом растяжению и изгибу, при условии, что стержень имеет поперечное сечение одного из типов, указанных на рис. 18, не представляет принципиальных трудностей. Определение напряжения от изгиба и отыскание положения нейтрального слоя может быть произведено по способу, указанному в пункте 9. При определении напряжений от растяжения интегралы, входящие в выражение (45), должны быть разбиты на части в соответствии с различной шириной поперечного сечения.

Для определения положения точки S эпюра напряжений от растяжения должна быть известным образом трансформирована, а именно напряжение в каждой точке должно быть умножено на соответствующую ширину сечения. Затем определяется центр тяжести площади трансформированной эпюры и тем самым находится положение точки S . Точка S по-прежнему совпадает с точкой D .

14. Некоторые опыты, касающиеся гипотезы ломаных сечений

В процессе проведения изложенных в настоящей работе исследований автор все время пытался сверять теоретические результаты, получаемые из гипотезы ломаных сечений, с опытными данными, имеющимися в литературе.

В большинстве случаев опытные данные подтверждали достаточную точность гипотезы ломаных сечений. Особенно хорошее совпадение теоретических результатов, полученных из гипотезы ломаных сечений, с опытными данными имело место в разделах работы, касающихся изгиба балок и пластин фигурного очертания (см., например, рис. 6, 7 и 16).

Менее хорошее совпадение получилось при исследовании растяжения фигурных пластин, вследствие чего в данной части пришлось ввести некоторые ограничения применимости гипотезы ломаных сечений.

Ввиду того что произведенная в настоящей работе проверка теоретических результатов, получаемых из гипотезы ломаных сечений, посредством сравнения их с опытными данными, имела все же косвенный характер, явилось желательным произвести непосредственное наблюдение за поведением ломаного сечения при деформации образца. С этой целью были изготовлены опытные образцы из резины. Образцы имели форму фигурных пластин постоянной толщины. На боковых поверхностях образцов наносились тушью ломаные сечения по правилам, установленным в теории данного вопроса [см. рис. 1(б)]. После этого образцы подвергались деформации.

Опыты показали, что в общем случае при изгибе образцов заметных искривлений ломаные сечения не претерпевают, в то время как нанесенные на образце контрольные плоские сечения претерпевают значительные искривления (см. фото на стр. 46).

Незначительное искривление ломаного сечения было замечено в том случае, когда контур профиля образца имел в точке, через которую было проведено ломаное сечение, скачкообразное изменение радиуса кривизны. Последнее обстоятельство согласуется с теми замечаниями, которые были сделаны в пункте 4 по поводу рис. 8. Незначительные искривления ломаного сечения были замечены также при сравнительно острых углах наклона сторон ломаного сечения к нейтральному слою или, иначе говоря, при больших углах α наклона касательной очерка образца. Указанным обстоятельством объясняется некоторое расхождение между теоретической и опытной кривыми, изображенными на рис. 6, причем отмеченное расхождение становится заметным для точек контура, соответствующих углам α , превышающих 20° .

В случае осевого растяжения фигурных резиновых образцов наблюдались более заметные искажения ломаных сечений, причем эти искажения заключались как в изменении угла между сторонами ломаного сечения, так и в искривлении самих сторон. Указанное искажение ломаного сечения получалось даже в том случае, если образец удовлетворял условиям (41) и напряжение, вычисленное по теоретической формуле (37), совпадало с величиной напряжения, найденного оптическим методом. Данное обстоятельство казалось весьма странным, так как теоретическая формула (37) получена на основе гипотезы ломаных сечений, т. е. гипотезы, предполагающей, что при деформации ломаные сечения не искажаются. Такого рода противоречие имеет следующее объяснение.

На рис. 24 (а) изображен испытуемый

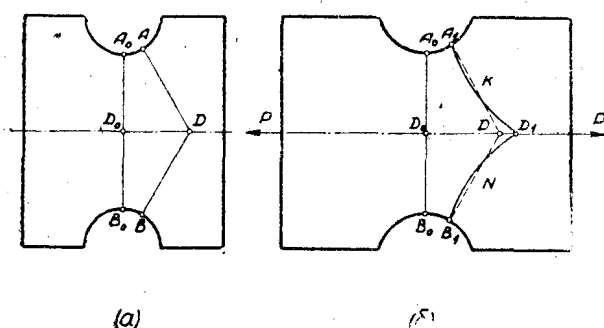


Рис. 24

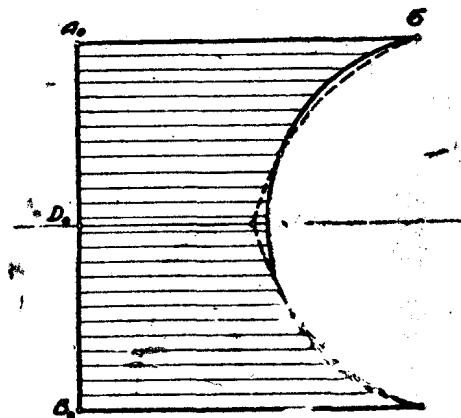


Рис. 25

резиновый образец до деформации. На его поверхности нанесено ломаное сечение ADB и сечение $A_0D_0B_0$.

На рис. 24 (б) изображен тот же образец в растянутом состоянии. Ломаное сечение ADB , нанесенное на поверхности образца до его деформации, приобрело вид, указанный линиями $A_1D_1B_1$ (на рисунке искажение ломаного сечения изображено утрированно).

На том же рис. 24 (б) пунктирной линией изображена для сравнения первоначальная конфигурация ломаного сечения A_1DB_1 .

Рассмотрим волокна, заключенные между сечениями $A_0D_0B_0$ и $A_1D_1B_1$. Теоретическая деформация этих волокон будет определяться положением неискаженного ломаного сечения A_1DB_1 . Действительная деформация тех же волокон будет определяться искаженным сечением $A_1D_1B_1$.

Теоретическая и действительная деформации будут одинаковы для волокон, положение которых определяется точками пересечений неискажен-

ного и искаженного сечений, т. е. точками A_1 ; K ; N и B . Очевидно, что теоретическое и действительное напряжение в указанных волокнах будет также одинаковым. Сообразно со сказанным на рис. 25 изображены эпюры напряжений. Сплошной линией изображена эпюра действительных напряжений, пунктирной—теоретических напряжений.

Таким образом, несмотря на фактическое искривление ломаного сечения, максимальное действительное напряжение может оказаться одинаковым с теоретическим, что имело место для рассматриваемого образца. Этим самым разъясняется противоречие, которое было отмечено выше. Неточности теоретических формул, связанные с искажением ломаных сечений, сказываются главным образом на характере распределения напряжений по сечению, а не на величине максимального напряжения. Но ввиду незначительности искажения ломаных сечений эти неточности чрезвычайно малы, если форма образца соответствует условиям (41).

Часть IV. Растяжение, изгиб и кручение стержней, имеющих форму тел вращения

15. Определение напряжения при растяжении в стержне, имеющем форму тела вращения

Рассмотрим стержень, изображенный на рис. 26. Стержень имеет опоясывающую его выточку. Поперечные сечения стержня являются кругами. Стержень подвергнут растяжению силами P .

Задача будет заключаться в определении напряжений в точках, лежащих на дне выточки. Аналогичная задача со стержнем, имеющим форму пластины, была решена в третьей части настоящей работы посредством гипотезы ломаных сечений.

Для стержня, имеющего форму тела вращения, гипотеза ломаных сечений переходит в гипотезу конических сечений, предполагающую, что

при деформации стержня конические сечения не искажаются и образующие конусов не искривляются.

У стержня, изображенного на рис. 26, проведено коническое сечение ADB через точку A , лежащую на дне выточки. Это коническое сечение в данном частном случае обратилось в плоское, так как образующие гипотетического конуса перпендикулярны к очерку стержня. Второе коническое сечение $A_1D_1B_1$ проведено через близлежащую точку

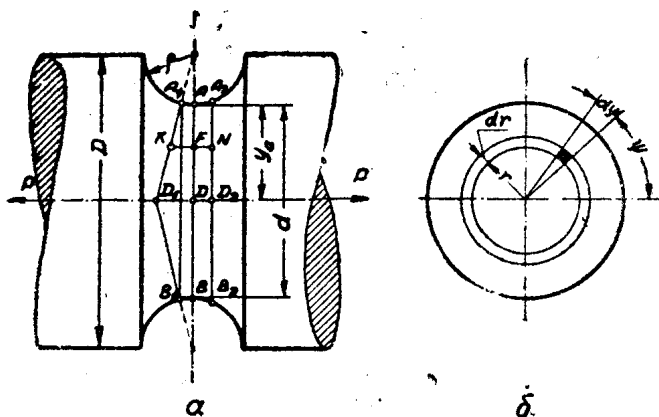


Рис. 26

ку A_1 . Вершиной второго конического сечения будет точка D_1 , лежащая на оси стержня.

Рассмотрим волокно KF , заключенное между коническими сечениями и взятое на расстоянии r от оси стержня. При растяжении стержня сечение ADB переместится в положение $A_2D_2B_2$ (см рис. 26). При этом рассматриваемое волокно KF получит удлинение FN .

Напряжение в рассматриваемом волокне может быть представлено посредством выражения (35), которое при обозначениях, данных на рис. 26, примет следующий вид:

$$\sigma = \epsilon E = \frac{FN \cdot (r + y_a) E}{DD_1(r + y_a - r)}. \quad (49)$$

Из условия равновесия можно написать

$$P = \int_F \sigma \cdot dF. \quad (50)$$

В последнем выражении dF представляет элементарную площадку сечения ADB .

Из рассмотрения рис. 26 (б) следует, что элементарная площадка dF может быть выражена так:

$$dF = r \cdot d\psi \cdot dr. \quad (51)$$

Подставляя в (50), получим

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{y_a} \sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\psi,$$

или

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{y_a} \frac{FN \cdot (\rho + y_a) E \cdot r \cdot dr \cdot d\psi}{DD_1(\rho + y_a - r)}. \quad (52)$$

Интегрируя, найдем

$$P = \frac{FN \cdot (\rho + y_a) E 2\pi \left[(\rho + y_a) \ln \left(\frac{\rho + y_a}{\rho} \right) - y_a \right]}{DD_1}.$$

Определяя

$$\frac{FN \cdot (\rho + y_a) E}{DD_1} = \frac{P}{2\pi \left[(\rho + y_a) \ln \left(\frac{\rho + y_a}{\rho} \right) - y_a \right]}$$

и подставляя в выражение (49), получим

$$\sigma = \frac{P}{2\pi(\rho + y_a - r) \left[(\rho + y_a) \ln \left(\frac{\rho + y_a}{\rho} \right) - y_a \right]}. \quad (53)$$

Принимая в последнем выражении $r = y_a$, получим напряжение в точке A , а также во всех точках, лежащих на дне выточки

$$\sigma_a = \frac{P}{2\pi \rho \left[(\rho + y_a) \ln \left(\frac{\rho + y_a}{\rho} \right) - y_a \right]}, \quad (54)$$

или

$$\sigma_a = \frac{P}{2\pi n y_a^2 \left[(n + 1) \ln \left(\frac{n + 1}{n} \right) - 1 \right]}, \quad (55)$$

где

$$n = \frac{\rho}{y_a}.$$

Полученное выражение для напряжения в точке A является приближенным, подобно выражению (37), найденному ранее для фигурной пластины посредством гипотезы ломаных сечений.

Выражения (54) и (55) будут иметь практически достаточную точность при соблюдении хотя бы одного из условий (41), которые для данного случая примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho}{d} &\geq 0,35, \\ \frac{D}{d} &\geq 2,5. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Если ни одно из этих условий не будет выполнено, то напряжение, вычисленное по формулам (54) или (55), будет больше действительного, подобно тому, как это имело место при растяжении фигурной пластины (см. график рис. 21).

Из формулы (55) может быть получено выражение коэффициента концентрации напряжения для точек, лежащих на дне выточки стержня, изображенного на рис. 26. Коэффициент концентрации напряжения будет

$$K = \frac{\sigma_a}{\sigma_0}, \quad (57)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{P}{\pi y_a^2}. \quad (58)$$

Принимая во внимание выражение (55), получим

$$K = \frac{1}{2n \left[(n+1) \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - 1 \right]}, \quad (59)$$

где попрежнему

$$n = \frac{\rho}{y_a}.$$

На графике рис. 27 представлены кривые, изображающие значения коэффициента концентрации напряжения в зависимости от отношения $\rho:d$.

Сплошной линией построена кривая значений коэффициента концентрации напряжений, вычисленных посредством формулы (59). Пунктирной

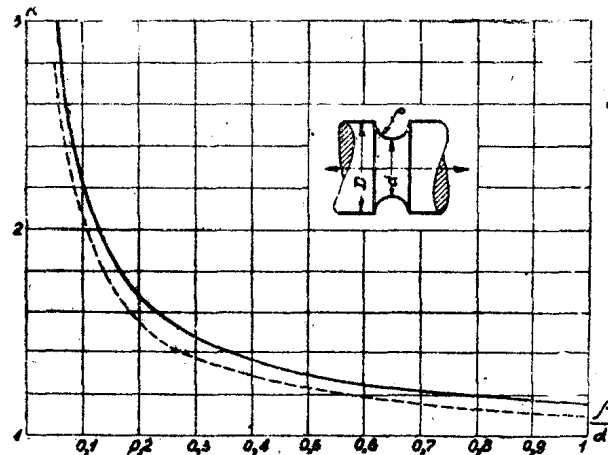


Рис. 27

линей для сравнения построена кривая значений коэффициента концентрации напряжений, полученных по гипотезе шаровых сечений. Гипотеза

шаровых сечений получается из гипотезы цилиндрических сечений применительно к стержням, имеющим форму тел вращения).

По гипотезе шаровых сечений в случае выточки, изображенной на рис. 26, коэффициент концентрации напряжений будет иметь выражение, которое приводим без вывода:

$$K = \frac{1}{2n \ln \left(\frac{2n+1}{2n} \right)}, \quad (60)$$

где

$$n = \frac{\rho}{y_a}.$$

16. Определение напряжения при изгибе в стержне, имеющем форму тела вращения

Рассмотрим стержень, изображенный на рис. 28. Стержень имеет опоясывающую его выточку. Поперечные сечения стержня являются кругами. Рассматриваемый стержень подвергнут чистому изгибу моментами M .

Задача будет заключаться в определении напряжения в точке A . Поставленную задачу решим на основе гипотезы конических сечений, которая была уже применена в предыдущем пункте. На рис. 28, точно так же, как это было сделано на рис. 26, через близлежащие точки A и A_1 проведены конические сечения ADB и $A_1D_1B_1$. Так же, как и на рис. 26, коническое сечение ADB в данном частном случае будет плоским.

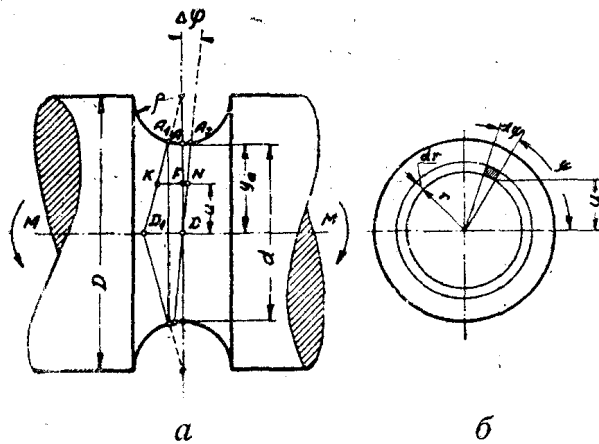


Рис. 28

Рассмотрим волокно материала KF , взятое между указанными коническими сечениями на расстоянии r от оси стержня и расстоянии u от нейтрального слоя.

При изгибе стержня сечение ADB повернется относительно конического сечения $A_1D_1B_1$ на некоторый угол $\Delta\varphi$ и займет положение A_2DB_2 .

Волокно KF получит удлинение, равное

$$FN = u \cdot \Delta\varphi.$$

Из рис. 28 (б) следует:

$$u = r \cdot \sin\psi.$$

Тогда

$$FN = r \cdot \sin\psi \cdot \Delta\varphi.$$

Напряжение в рассматриваемом волокне может быть получено по формуле (49) в таком виде:

$$\sigma = \epsilon E = \frac{r \cdot \sin\psi \cdot \Delta\varphi \cdot (\rho + y_a) E}{DD_1 (\rho + y_a - r)}. \quad (61)$$

Далее, из условия равновесия можно написать

$$M = 2 \int_F \sigma \cdot dF \cdot r \cdot \sin \psi,$$

или

$$M = 2 \int_0^\pi \int_0^{y_a} \frac{r^2 \cdot \sin^2 \psi \cdot \Delta \varphi (\rho + y_a) E \cdot dr \cdot d\psi}{DD_1 (\rho + y_a - r)}.$$

Интегрируя, получим

$$M = \frac{2 \Delta \varphi (\rho + y_a) E}{DD_1} \left[(n+1)^3 \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - (n+1)^2 - \frac{1}{2} (n+1) - \frac{1}{3} \right] \frac{\pi}{2} y_a^3,$$

где

$$n = \frac{\rho}{y_a}.$$

Определяя из этого выражения величину

$$\frac{\Delta \varphi (\rho + y_a) E}{DD_1}$$

и подставляя ее в формулу (61), получим

$$\sigma = \frac{M \cdot r \cdot \sin \psi}{2 \left[(n+1)^3 \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - (n+1)^2 - \frac{1}{2} (n+1) - \frac{1}{3} \right] (\rho + y_a - r) \frac{\pi}{2} y_a^3}. \quad (62)$$

Принимая в последнем выражении

$$r = y_a$$

и

$$\psi = \frac{\pi}{2},$$

найдем напряжение в точке А:

$$\sigma_a = \frac{M}{\pi \cdot n \cdot y_a^3 \left[(n+1)^3 \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - (n+1)^2 - \frac{1}{2} (n+1) - \frac{1}{3} \right]}, \quad (63)$$

где попрежнему

$$n = \frac{\rho}{y_a}.$$

Полученный результат является приближенным, подобно тому, как были приближены результаты, получаемые для изгиба фигурных пластин, основанные на гипотезе ломаных сечений (см., например, график рис. 7).

Коэффициент концентрации напряжения при изгибе стержня, имеющего форму, изображенную на рис. 28, может быть найден следующим образом:

$$K = \frac{\sigma_a}{\sigma_0},$$

где

$$\sigma_0 = \frac{M}{\frac{\pi y_a^3}{4}}.$$

Тогда, учитывая выражение (63), получим

$$K = \frac{1}{4n \left[(n+1)^3 \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - (n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{3} \right]}. \quad (64)$$

На графике рис. 29 представлены кривые, изображающие значения коэффициента концентрации напряжения в зависимости от отношения $\rho:d$ для случая изгиба стержня, изображенного на рис. 29.

Сплошной линией построена кривая значений коэффициента концентрации напряжений, вычисленных посредством формулы (64).

Пунктирной линией для сравнения нанесена кривая значений коэффициента концентрации напряжений, полученных по гипотезе шаровых сечений.

По гипотезе шаровых сечений в случае выточки, изображенной на рис. 28, коэффициент концентрации напряжения будет иметь выражение, которое приводим без вывода:

$$K = \frac{1}{4n \left[(2n+1) \ln \left(\frac{2n+1}{2n} \right) - 1 \right]}, \quad (65)$$

где

$$n = \frac{\rho}{y_a}.$$

Найденные теоретические результаты нельзя сравнить с опытными данными, получаемыми оптическим методом, так как оптический метод пригоден только для плоских стержней и не может быть использован для тел вращения¹⁾.

В некоторых руководствах результаты, полученные оптическим методом для плоских стержней, искусственно переносятся на тела вращения, например, при определении концентрации напряжения в галтели вала. Однако такой искусственный перенос нельзя признать достаточно обоснованным.

Из сравнения графиков, изображенных на рис. (7), (21), (27) и (29), следует, что коэффициент концентрации напряжений, найденный на основе рассмотренных в настоящей работе гипотез, получается для тел вращения ниже, чем для плоских стержней.

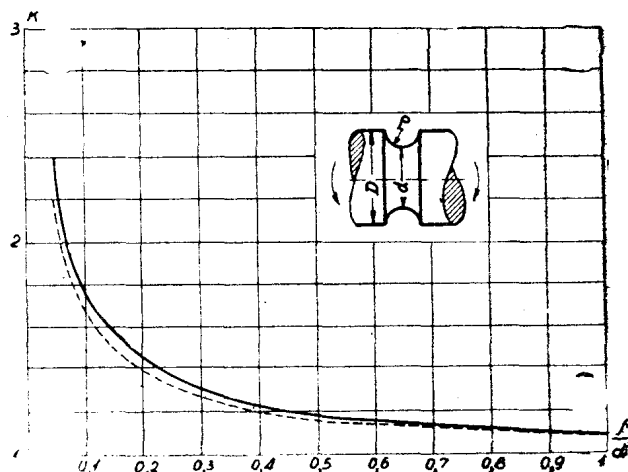


Рис. 29

17. Определение касательных напряжений при кручении стержней, имеющих форму тел вращения

Гипотезы конических и шаровых сечений могут быть использованы для определения касательных напряжений при кручении стержней, имеющих форму тел вращения.

¹⁾ Коэффициенты концентрации напряжений, вычисленные по способу Нойбера и по способу Афанасьева для круглых образцов, получаются несколько выше приведенных на графиках рис. 27 и 29 [3, 4].

Пусть стержень, изображенный на рис. 30, скручивается моментами M , приложенными к его концам. Задача будет заключаться в определении касательных напряжений в точках, лежащих на дне выточки. Поставленную задачу решим посредством гипотезы конических сечений.

Рассмотрим элемент материала KFK_1F_1 , заключенный между коническими сечениями ADB и $A_1D_1B_1$ и находящийся на расстоянии r от оси стержня (см. рис. 30).

Касательное напряжение на боковых гранях рассматриваемого элемента может быть выражено следующим образом:

$$\tau = \gamma \cdot G,$$

где γ — относительный сдвиг,
 G — модуль упругости при сдвиге.

В нашем случае

$$\tau = \frac{\Delta\theta \cdot r(\rho + y_a)G}{DD_1(\rho + y_a - r)}, \quad (66)$$

где $\Delta\theta$ — угол поворота сечения ADB относительно конического сечения $A_1D_1B_1$. Заметим, что выражение (66) в известной мере аналогично выражению (49).

Далее, из условия равновесия можно написать, учитывая рис. 30 (б),

$$M = \int_F \tau \cdot r^2 \cdot d\phi \cdot dr. \quad (67)$$

Решив совместно уравнения (67) и (66) и приняв r равным y_a , получим выражение для напряжения в точках, лежащих на дне выточки, в таком виде:

$$\tau_a = \frac{M}{2\pi n y_a^3 \left[(n+1)^3 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - (n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{3} \right]}, \quad (68)$$

где

$$n = \frac{\rho}{y_a}.$$

Коэффициент концентрации напряжений может быть получен следующим образом:

$$K = \frac{\tau_a}{\tau_0}, \quad (69)$$

где

$$\tau_0 = \frac{M}{\frac{\pi y_a^3}{2}}. \quad (70)$$

Заметим, что после подстановки коэффициент концентрации напряжений получит выражение одинаковое с выражением (64), а следовательно, график, построенный на рис. 29 для случая изгиба стержня, может быть распространен на рассматриваемый здесь случай кручения.

По гипотезе шаровых сечений может быть получено аналогичным образом следующее выражение касательных напряжений в точках, лежащих на две выточки:

$$\tau_a = \frac{M}{2\pi n y_a^3 \left[(2n+1) \ln \left(\frac{2n+1}{2n} \right) - 1 \right]}, \quad (71)$$

где

$$n = \frac{\rho}{y_a}.$$

Коэффициент концентрации напряжений может быть определен по выражению (69).

Заметим, что коэффициент концентрации напряжений получит выражение одинаковое с выражением (65), а следовательно, пунктирная кривая, построенная на графике рис. (29), может быть, отнесена к рассматриваемому здесь случаю. Следует отметить, что по гипотезе конических сечений коэффициент концентрации напряжений получается выше, чем по гипотезе шаровых сечений.

В книге С. В. Серенсена [6] приведены данные для кручения круглого образца с выточкой, полученные измерениями на электрической модели (Тум и Баутц). Сопоставляя эти данные с графиком рис. 29, можно заметить, что удовлетворительное совмещение кривых получается только при $D:d = 1,2$. При остальных значениях $D:d$ имеют место большие расхождения. Из сравнения графика рис. 29 с указанными литературными данными следует прийти к заключению, что формулами 68 и 71 можно пользоваться только при наличии одного из двух условий:

$$\frac{D}{d} \geq 1,2$$

или

$$\frac{\rho}{d} \geq 1.$$

Заметим, что гипотеза шаровых сечений дает точное решение задачи по кручению конуса, так как в теории упругости доказывается, что при кручении конуса шаровые сечения не искажаются.

Перейдем к определению касательного напряжения в любой точке контура вала. На рис. 31 представлен продольный разрез вала переменного диаметра.

Возьмем на галтели рис. 31 произвольную точку A и проведем через нее коническое сечение ADB . Другое коническое сечение $A_1D_1B_1$ проведено через близлежащую точку A_1 . Между указанными коническими сечениями рассмотрим элементарное кольцо, сечение которого будет KFK_1F_1 и радиус r .

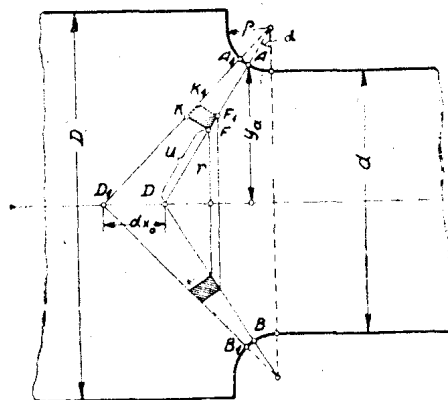


Рис. 31

Касательное напряжение у рассматриваемого кольца может быть выражено по аналогии с формулой (3) (см. 1 часть настоящей работы) следующим образом:

$$\tau = \gamma G = \frac{d\theta \cdot G \cdot m \cdot q \cdot u \cdot \cos \alpha}{dx_0 \left[m + (q^2 - m) \frac{u}{yq} \right]}. \quad (72)$$

В написанном выражении

γ — относительный сдвиг,

G — модуль упругости при сдвиге,

$d\theta$ — угол поворота конического сечения ADB относительно конического сечения $A_1D_1B_1$.

m и q — определяются выражениями (5), остальные величины даны на рис. 31.

Далее, из условия равновесия можно написать

$$M = \int_0^{yq} \tau \cdot 2\pi \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot du. \quad (73)$$

Решив совместно (72) и (73) и приняв затем

$$u = yq,$$

получим выражение для напряжения в точке A в следующем виде:

$$\tau = \frac{M}{2\pi \frac{a}{n} y_a^3 \left[\frac{1}{3a} - \frac{1}{2n} + \frac{a}{n^2} - \frac{a^2}{n^3} \ln \left(\frac{a+n}{a} \right) \right] (a+n)^2}, \quad (74)$$

где

$$n = \pm \frac{y_a}{\cos^2 \alpha}; \quad a = \frac{\cos \alpha \pm \frac{y_a}{\cos^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha}. \quad (75)$$

В последних выражениях верхний знак следует брать в случае вогнутости контура, нижний — в случае выпуклости. y_a — ордината рассматриваемой точки A . В случае галтели

$$y_a = \frac{d}{2} + \rho(1 - \cos \alpha).$$

Согласно литературным данным, по опытам, произведенным по принципу электрической аналогии [1], наибольшее касательное напряжение в галтели получается в точке A (см. рис. 31), лежащей под углом α , равным приблизительно двадцати градусам. Тогда коэффициент концентрации напряжения в случае галтели может быть найден по формуле:

$$K = \frac{\tau_a}{\tau_0},$$

где τ_a должно быть вычислено по формуле (74) для угла α , равного двадцати градусам, а τ_0 должно быть определено как напряжение в цилиндрической части вала, имеющей меньший диаметр:

$$\tau_0 = \frac{M}{\frac{\pi d^3}{16}}.$$

Аналогичным образом может быть найдено касательное напряжение в точке A галтели, исходя из гипотезы шаровых сечений, а именно:

$$\tau_a = \frac{M \sin^4 \alpha}{2\pi y_a^3 \left[(1-c^2) \ln \left(\frac{c - \cos \alpha}{c - 1} \right) + c(1 - \cos \alpha) + \frac{1}{4}(1 - \cos 2\alpha) \right] (c - \cos \alpha)}, \quad (76)$$

где

$$c = \cos \alpha - \frac{\rho}{y_a} \sin^2 \alpha. \quad (77)$$

По сравнению с опытными данными (С.В. Серенсен [6], фиг. 175) формулы (74) и (76) дают значительно завышенные значения напряжений. Так, например, при $\rho:d=0,1$ коэффициент концентрации напряжений при помощи формулы (76) получается 1,58, в то время как по опытным данным он имеет значение 1,44 даже при условии, что $D:d=2$. Следует заметить, что рассматриваемые здесь формулы не учитывают влияния отношения $D:d$, в то время как это отношение по опытным данным сильно влияет на величину напряжения при деформации кручения. Вследствие указанных причин формулы (74) и (76) могут дать удовлетворительные результаты только при отношении $\rho:d > 1$, так как в этом случае влияние отношения $D:d$ затухает.

18. Определение касательных напряжений в случае сдвига у стержней фигурного очертания

Рассмотрим стержень, изображенный на рис. 32. Стержень имеет по бокам выточки. Сдвиг происходит под влиянием сил P .

Формула для определения наибольшего касательного напряжения в точ-

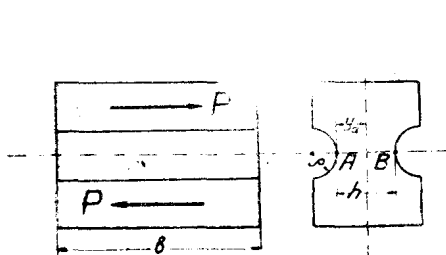


Рис. 32

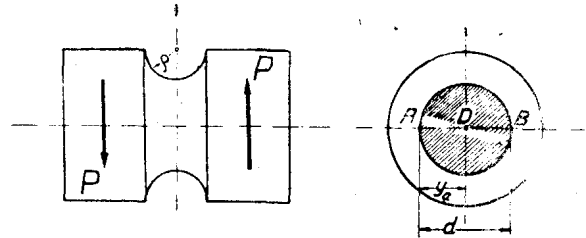


Рис. 33

ках A и B , лежащих на дне выточки, может быть написана по аналогии с формулой (37) и будет иметь вид

$$\tau_a = \frac{P}{2\rho b \ln \left(\frac{\rho + y_a}{\rho} \right)}. \quad (78)$$

Коэффициент концентрации напряжений может быть определен по формулам (39) или (40).

Для случая стержня, изображенного на рис. 33, имеющего наружную круговую выточку, будем иметь формулу, аналогичную формуле (54)

$$\tau_a = \frac{P}{2\pi\rho \left[(\rho + y_a) \ln \left(\frac{\rho + y_a}{\rho} \right) - y_a \right]}. \quad (79)$$

Коэффициент концентрации напряжений может быть определен по формулам (59) или (60).

Заключение

1. Применение описанных гипотез к расчету стержней переменного сечения следует рассматривать как искусственный, приближенный прием для определения напряжений в указанных стержнях.

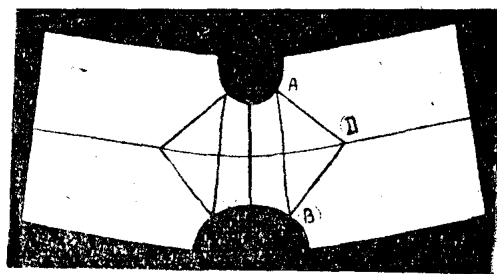
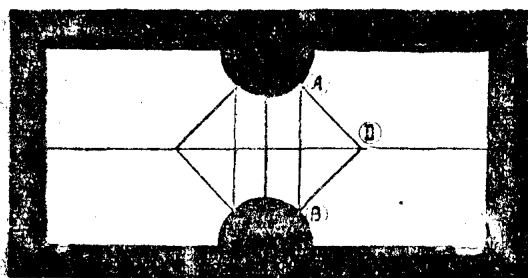
2. Гипотеза ломаных сечений, переходящая для тел вращения в гипотезу конических сечений, дает результаты, близко совпадающие с опытными данными в случае растяжения и изгиба, а следовательно, данная гипотеза может быть признана, с практической точки зрения, достаточно точной для указанных случаев деформации и в определенных пределах применимости.

3. Частично затронутая в настоящей работе гипотеза цилиндрических сечений, переходящая для тел вращения в гипотезу шаровых сечений, дает удовлетворительные результаты при определенных соотношениях параметров детали в случае скручивания стержня переменного сечения. Кроме того, данная гипотеза дает результаты, совпадающие с точным решением в случае изгиба и растяжения клина и скручивания конуса.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Тимошенко.—Теория упругости, перевод. ОНТИ, 1934.
2. Э. Кокер и Л. Файлон.—A treatise on photo elasticity, Cambridge, 1931. Русский перевод: Оптический метод исследования напряжений, ОНТИ, 1936.
3. Н. Neuberg.—Kerbsspannungslehre, Grundlagen für genaue Spannungsrechnung, Berlin, 1937.
4. Н. Н. Афанасьев.—Приближенный расчет коэффициента концентрации напряжений. Журнал технической физики, 1935, т. VI, вып. 7.
5. И. В. Подзол.—Допускаемые напряжения для сталей. Оборониздат, Москва, 1940.
6. С. В. Серенсен.—Динамическая прочность в машиностроении. Москва, 1945.

Приложение



Фотографии резинового образца в свободном и деформированном состоянии. На образце до деформации нанесено тушью ломаное сечение ADB. Как видно из фотографий, ломаное сечение при деформации образца не исказилось, что свидетельствует о достаточно высокой точности гипотезы ломаных сечений при деформациях изгиба.