

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИСТОРИИ, КЛАССИФИКАЦИИ И
АНАЛИЗА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ РАБОТЫ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ
ЭЛЛИПСОВ**

Е. И. ТОРОПЫГИН

(Представлено научным семинаром кафедр начертательной
геометрии и графики вузов г. Томска)

Наши конструкторы и чертежники не пользуются в своей практике механизмами для вычерчивания эллипсов ввиду отсутствия их серийного выпуска и слабой популяризации. Описания таких механизмов и приборов встречаются только в патентной литературе и специальных журналах и сборниках, издаваемых весьма ограниченным тиражом. Известные две работы из отечественной литературы, посвященные вопросам теории и описания чертежных механизмов [1, 2], в настоящее время очень устарели.

Существенным тормозом в деле широкого применения указанных механизмов в чертежной практике является также отсутствие данных о результатах их применения, так как далеко не все механизмы, известные, например, из патентной литературы, соответствуют своему прямому назначению.

Настоящая статья наряду с вопросами истории и классификации механизмов для образования эллипсов освещает результаты анализа теоретической точности работы некоторой группы рассматриваемых механизмов.

История и состояние вопроса

Работа над созданием механизмов для вычерчивания эллипсов берет свое начало с глубокой древности. Еще Леонардо да Винчи изобрел эллипсограф для обработки эллиптических поверхностей, который мог быть применен также и для вычерчивания эллипсов. В конце прошлого столетия были известны такие механизмы, как эллипсограф Тульмина [1], механизм для вычерчивания эллипсов Делоне [2] и ряд других. В настоящее время нам известно свыше 80 конструкций механизмов для вычерчивания эллипсов, не считая более сложных, таких, как аксонографы, аффинографы, коникографы, которые в частном случае также могут вычерчивать эллипсы.

Однако, несмотря на такую сравнительную давность существования механизмов для вычерчивания эллипсов, вопросам теории кон-

струирования их, исследованию теоретической точности вычерчивания кривых и выработке критерия оценки качества работы их в тех или иных условиях не уделялось должного внимания. Известно только, что Делоне в своей книге [2], излагая вопросы теории преобразования движений, теории инвертирования с описанием некоторых конструкций инверсоров, дает значительное количество материала, в частности, и для конструирования указанных механизмов. Однако эта работа далеко не исчерпывает всего вопроса в целом. Книга В. Фон-Бооля [1] имеет в основном описательный характер с изложением теории отдельно взятых механизмов. Некоторые вопросы изложены в справочной литературе [4] и др.

В таких работах, как кандидатская диссертация Г. П. Вяткина [6], включающая рассмотрение многих конструкций механизмов, и в частности для вычерчивания эллипсов, кандидатская диссертация О. В. Хотимской [7] с описанием механизма для вычерчивания кривых второго порядка, в работах Г. А. Ушакова [9], Г. Б. Вальца [8] и др. имеются конструкции различных чертежных механизмов с характеристикой работы некоторых из них, но все эти механизмы плоского типа и, как уже указывалось в статье автора [5], отличаются своей сложностью и громоздкостью. Пространственные механизмы для вычерчивания эллипсов, имея ряд существенных преимуществ перед плоскими, до сих пор, однако, недостаточно исследованы.

Свои дальнейшие рассмотрения механизмов мы ограничиваем механизмами пространственного типа.

Классификация пространственных механизмов

За основу классификации пространственных механизмов примем характер тех теоретических ошибок, которые им свойственны в силу их конструктивных недостатков. Это значительно упрощает теоретические исследования указанных механизмов.

Все существующие пространственные механизмы для вычерчивания эллипсов можно разделить на две части. Первая часть воспроизводит или создает кривую эллипса. Обеспечивается это либо параллельным проектированием наклонного круглого диска на плоскость чертежа [10, 19], либо наличием особого эллиптического барабана [21] или шаблона [18]. Вторая часть служит для изменения величины эллипса, воспроизведенного первой частью.

Автору известно 17 конструкций рассматриваемых механизмов. Все они могут быть разбиты на следующие четыре группы.

Первая группа включает в себя механизмы, в которых изменение величины эллипса, воспроизведенного первой частью механизма, выполняется методом подобия. Некоторую характеристику работы механизмов этой группы дает В. Фон-Бооль [1]. Описывая конструкцию трехконечного циркуля, он отмечает, что изменение величины эллипса при одном и том же соотношении осей (одном и том же шаблоне) возможно только в небольших пределах, так как при этом механизм дает не строгую форму эллипса. Частично механизмы этой группы были исследованы и автором в его статье [5], где аналитически было установлено, что действительно такие механизмы не обеспечивают образование геометрически точной кривой эллипса. К механизмам этой группы относятся: 1. Эллиптический циркуль Роберта Кайлerta [18]. 2. Прибор для вычерчивания кривых Б. Д. Пец [16]. 3. Трехконечный циркуль [1].

Вторая группа включает в себя механизмы, действие которых основано на изменении величины эллипса, воспроизведенного

где a и b — полуоси эллипса 1, полученного первой частью механизмов. Прямая ABA_n является нормалью к эллипсу 1. Кривая 2 — эллипс с полуосями $a+d$ и $b+d$. Кривая 3 — эквидистанта эллипса 1, полученная с помощью рассматриваемых механизмов откладыванием постоянного отрезка прямой d по нормальям к эллипсу 1, т. е.

$$DE = AA_n = GF = d.$$

Напишем уравнения эллипсов 1 и 2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{X^2}{(a+d)^2} + \frac{Y^2}{(b+d)^2} = 1. \quad (1)$$

Расстояние между любыми двумя точками, из которых одна находится на эллипсе 1, а другая — на эллипсе 2, определится уравнением

$$L = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}. \quad (2)$$

Если принять во внимание принцип работы механизмов, то теоретическую ошибку их следовало бы определять по нормали к эллипсу 1. Но введение дополнительного уравнения нормали значительно усложняет решение поставленной задачи. Поэтому с ничтожно малой погрешностью, не превышающей 0,01%, ошибку механизмов p можно определять по следующему уравнению

$$A_nB = p = d - L_{\min}, \quad (3)$$

где L_{\min} — наименьшее расстояние между двумя текущими точками A и B , из которых точка A находится на эллипсе 1, а точка B — на эллипсе 2. В этом случае ошибка механизмов p будет иметь максимальное свое значение, которое и представляет для нас наибольший интерес. Для определения L_{\min} применим метод Лагранжа и напишем уравнение функции многих переменных, в которое войдут уравнения (1, 2) и неопределенные множители λ_1, λ_2 [25]

$$\Phi = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + \lambda_1 \left[\frac{X^2}{(a+d)^2} + \frac{Y^2}{(b+d)^2} - 1 \right] + \lambda_2 \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right].$$

Возьмем частные производные от этой функции

$$\Phi'_{x'} = -(X-x) + \lambda_2 \frac{x}{a^2} = 0. \quad (4)$$

$$\Phi'_{y'} = -(Y-y) + \lambda_2 \frac{y}{b^2} = 0. \quad (5)$$

$$\Phi'_{X'} = X-x + \lambda_1 \frac{X}{(a+d)^2} = 0. \quad (6)$$

$$\Phi'_{Y'} = Y-y + \lambda_1 \frac{Y}{(b+d)^2} = 0. \quad (7)$$

Из уравнений (4) и (5) имеем

$$X = \frac{(\lambda_2 + a^2)x}{a^2}, \quad Y = \frac{(\lambda_2 + b^2)y}{b^2}. \quad (8)$$

Подставляя эти значения X и Y в уравнения (6) и (7), получим

$$\lambda_1 = -\frac{\lambda_2(a+d)^2}{\lambda_2 + a^2}, \quad \lambda_1 = -\frac{\lambda_2(b+d)^2}{\lambda_2 + b^2}.$$

Из этих уравнений получаем значение одного из неопределенных множителей

$$\lambda_2 = \frac{a^2(b+d)^2 - b^2(a+d)^2}{(a+d)^2 - (b+d)^2}. \quad (9)$$

Для определения значения x при L_{\min} в уравнение (1) подставим значение y из (8) и получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{Y^2 b^2}{(\lambda_2 + b^2)^2} = 1.$$

Вместо Y подставим его значение из (1)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{[(a+d)^2(b+d)^2 - X^2(b+d)^2]b^2}{(a+d)^2(\lambda_2 + b^2)^2} = 1.$$

Подставляя значение X из (8) в это уравнение, получим

$$x^2 = \frac{a^4(a+d)^2[(\lambda_2 + b^2)^2 - b^2(b+d)^2]}{a^2(a+d)^2(\lambda_2 + b^2)^2 - b^2(b+d)^2(\lambda_2 + a^2)}. \quad (10)$$

Чтобы получить значение L_{\min} , множим уравнение (4) на $(X-x)$, а уравнение (5) на $(Y-y)$. Полученные результаты складываем и получаем

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 = \lambda_2 \left[\frac{x}{a^2}(X-x) + \frac{y}{b^2}(Y-y) \right].$$

Левая часть этого уравнения согласно (2) представляет собой значение L^2_{\min} . Подставляя в правую часть его значение X и Y из (8), получим

$$L^2_{\min} = \lambda_2 \left[\frac{(\lambda_2 + a^2)x^2}{a^4} + \frac{(\lambda_2 + b^2)y^2}{b^4} - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right].$$

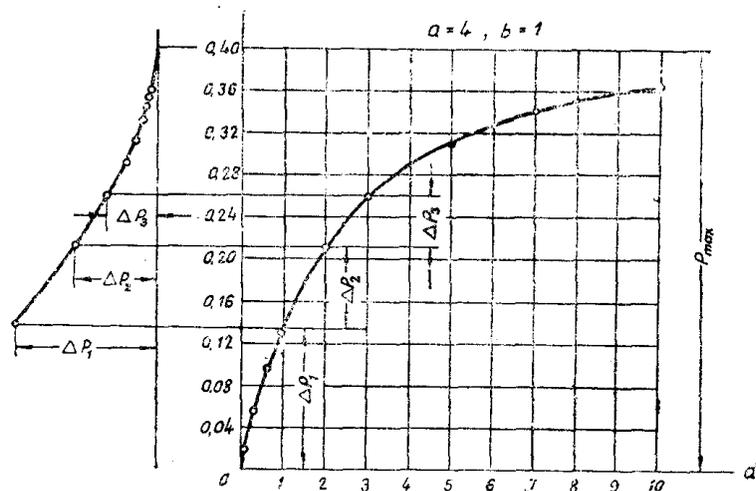
Замечая, что значение $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$ на основании (1) равно

единице, и подставляя значение y^2 из (1), получаем выражение

$$L_{\min} = \frac{\lambda_2}{a^2 b} \sqrt{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}. \quad (11)$$

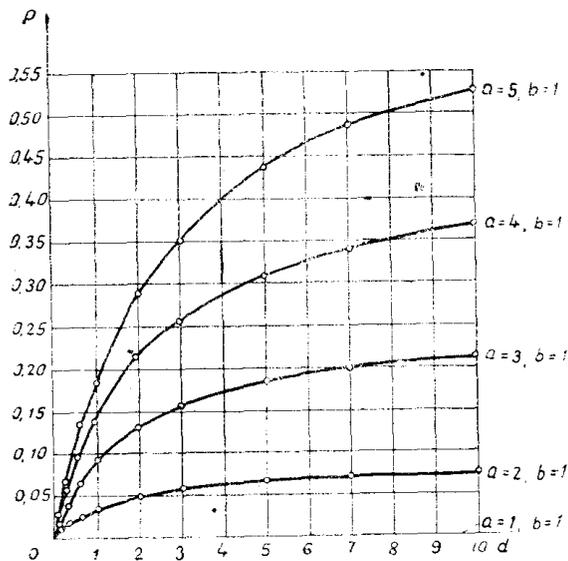
Таким образом, ошибка механизмов p определится применением уравнений (9), (10), (11) и, как заключительного, (3).

Для упрощения решения задачи применительно к тому или иному конкретному примеру, необходимо, задавшись параметрами a , b и d , заранее произвести подсчет величин по вышеупомянутым формулам, свести их в таблицы и выразить графически. Нами для соотношения осей $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$, $\frac{a}{b} = \frac{3}{1}$, $\frac{a}{b} = \frac{4}{1}$ и $\frac{a}{b} = \frac{5}{1}$ при изменении d в пределах от 0 до 10 произведен подсчет искомых величин. Для соотношения осей $\frac{a}{b} = \frac{4}{1}$ при-



Фиг. 2.

веден график (фиг. 2). Как видно из графика, абсолютная ошибка механизмов p растет медленнее d и кривая асимптотически приближается к какой-то предельной величине p_{\max} , которая легко и достаточно точно определяется по известному способу нахождения установившейся температуры двигателя [27]. Слева от графика по этому способу и произведено определение p_{\max} , где также показана сущность этого способа.

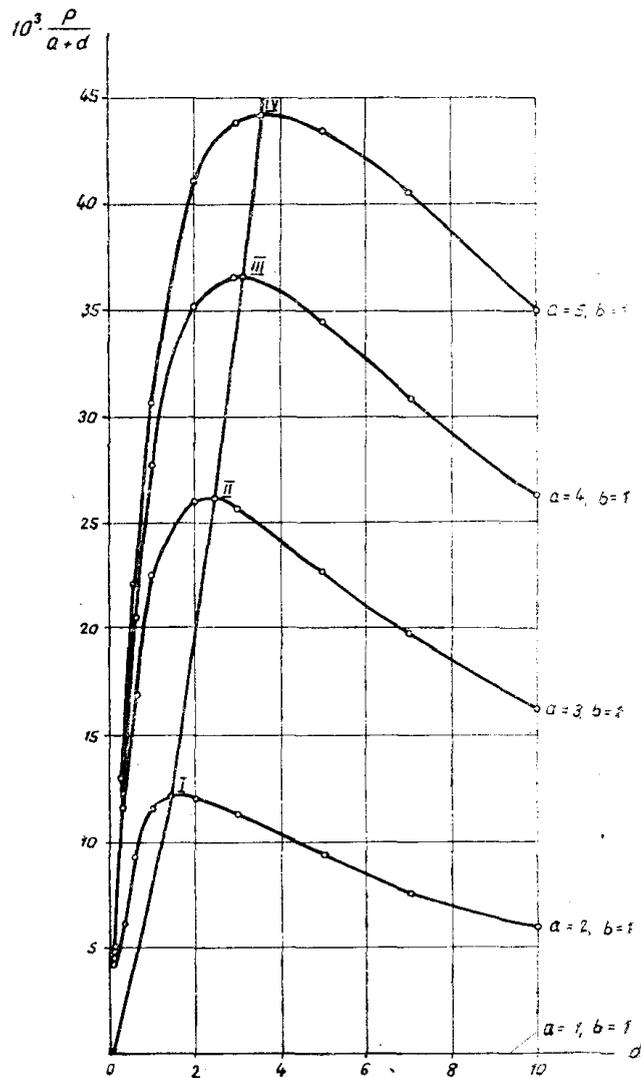


Фиг. 3.

Для определения абсолютной ошибки механизмов при промежуточных значениях a и d на фиг. 3 приводится сводный график. Определение абсолютной ошибки в этом случае следует производить, применяя метод интерполяции расстояния между теми смежными кривыми и при тех значениях d , которые будут представлять интерес. Сопоставление полученных кривых между собой (фиг. 3) указывает на то, что с увеличением вытянутости эллипса максимальная абсолютная ошибка механизмов p_{\max} растет.

В практике пользования деталями, имеющими эллиптическую форму (эллиптические кулачки, цилиндры и т. д.), чаще представляет интерес не абсолютная величина отклонения формы, а относительная. Для этой цели на фиг. 4 представлены кривые, которые выражают такую зависимость, где за меру искажения геометрической формы эллипса принимается отношение абсолютной ошибки механизмов ρ к длине большой полуоси $a+d$ вычерчиваемой кривой. Для удобства отсчетов относительная ошибка механизмов представлена на графике величиной, в тысячу раз превышающей ее действительное значение.

Как показывает характер этих кривых, относительная ошибка механизмов с увеличением d вначале резко растет, затем по достижении определенного максимума постепенно начинает падать. Кривая 0 I II III IV представляет собой максимальные значения относительных ошибок механизмов при различных отношениях осей вычерчиваемой кривой. С увеличением вытянутости вычерчиваемой кривой значение относительной ошибки растет. С помощью кривых, полученных на фиг. 4, можно определять относительную ошибку механизмов не только для выбранных вариантов отношения осей кривой, но и для промежуточных значений. Для этого снова нужно применить метод интерполяции. Попытка автора привести зависимость между a , d и ρ при $b = \text{const}$ к виду,



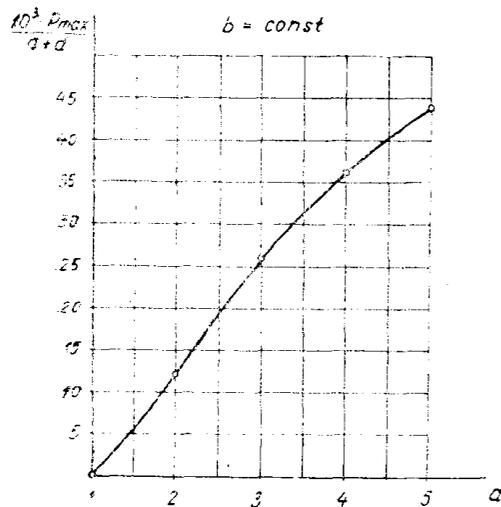
Фиг. 4.

удобному для номографирования из выравненных точек [28], позволяющего быстро и достаточно точно определять промежуточные значения, к положительным результатам не привела.

Для быстрого исчисления промежуточных значений максимальных относительных ошибок механизмов $\rho_{\text{оти. (max)}}$, в зависимости от изменения большой полуоси вычерчиваемой кривой при $b = \text{const}$, на фиг. 5 приводится график.

Относительная ошибка механизмов позволяет определить пригодность принципа работы механизмов этой группы к механической обработке эллиптических деталей методом копирования. Копирование эллиптических кулачков и копиров по второму классу точности со-

гласно принятым допускам [26] для соотношения осей эллипса $\frac{a}{b} \leq 2$ может производиться только при $\frac{d}{b} \leq 0,1$ (фиг.4), по третьему классу — при $\frac{d}{b} \leq 0,15$. Это означает, что практически механическая



Фиг. 5.

Решение. В соответствии с фиг. 3 для $a = 3$, $b = 1$ и $d = 2$ находим $p = 0,130$. Или для нашего примера $p = 0,130 \cdot 50 \text{ мм} = 6,5 \text{ мм}$. Произведя замер абсолютной теоретической ошибки непосредственно на чертеже (фиг. 6), представленном в масштабе 1:2, получаем $3,35 \times 2 = 6,7 \text{ мм}$. Это означает, что разность между аналитически подсчитанной и графически построенной теоретической ошибкой приборов составляет $0,2 \text{ мм}$ и находится в пределах точности графических построений.

Относительная ошибка в соответствии с фиг. 4' составит $p_{отн} = 0,026$. Согласно принятым допускам [26, 3] механическая обработка деталей эллиптической формы по принципу работы рассматриваемых механизмов второй группы по второму классу точности применительно к нашему примеру производиться не может.

В итоге анализа теоретической точности работы механизмов второй группы следует отметить следующее.

1. С помощью математического анализа задача по определению теоретических ошибок решена в общем виде.

2. Графические исследования, облегчающие математические подсчеты, позволяют быстро и достаточно точно определять теоретические ошибки механизмов.

3. Проведенные графоаналитические исследования помогут определить достоинства и недостатки механизмов второй группы и найти ту техническую область, где они согласно принятым допускам и условиям могут иметь применение.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Фон Бооль. Инструменты и приборы для черчения с изложением их теории, Изд. Моск. Отд. Император. Рус. техн. общ., М., 1892.

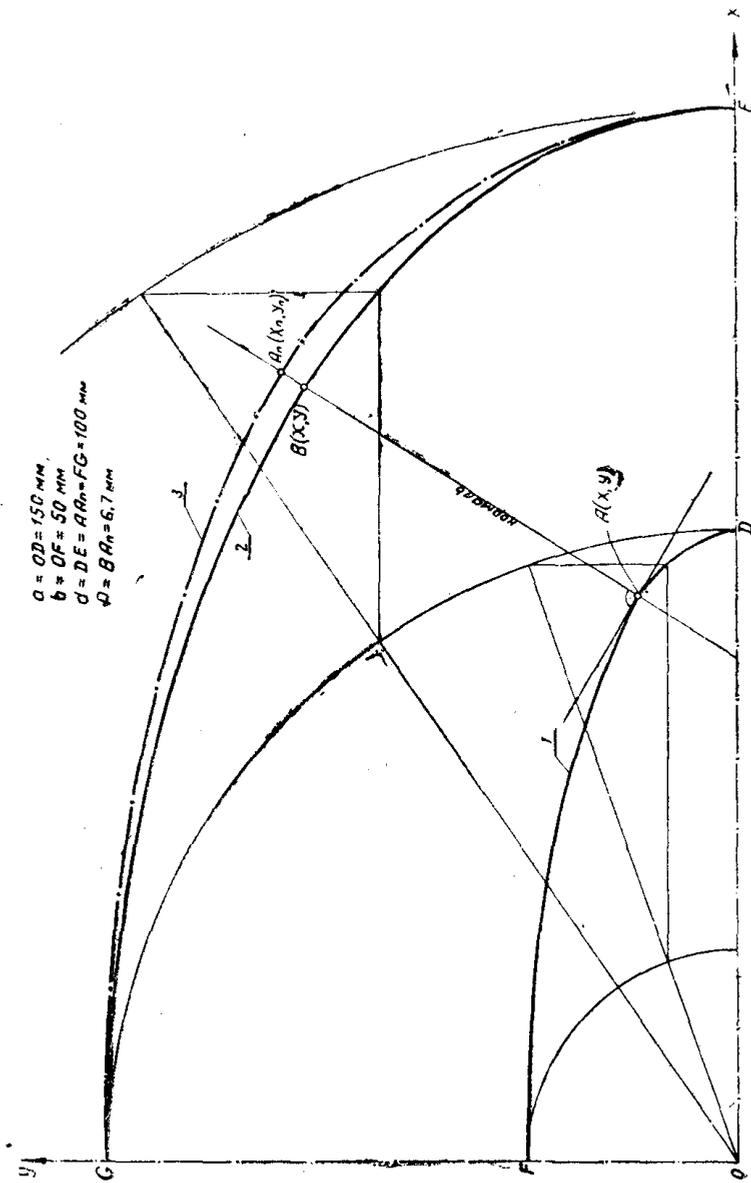
2. Н. Е. Делоне. Передача вращения и механическое черчение кривых шарнирно-рычажными механизмами, Типогр. Киршбаума, Дворцов. площ. С.-Петербург, 1894.

обработка эллиптических кулачков и копиров без предварительного учета относительной ошибки механизмов производиться не может. То же самое можно сказать относительно механической обработки эллиптических цилиндров для счетно-решающих устройств, которые обрабатываются по второму классу точности [3].

Пример

Дано: $a = 150 \text{ мм}$, $b = 50 \text{ мм}$ и $d = 100 \text{ мм}$.

Найти абсолютное и относительное отклонение кривой, полученной механизмами второй группы от геометрической формы эллипса.



Фиг. 6.

3. С. О. Доброгурский, В. К. Титов, Счетно-решающие устройства, Оборонгиз, М., 1953.
4. Н. Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, I Berlin, 1949.
5. Е. И. Торопыгин. Исследование эллиптических циркулей, Изв. Томск. политехн. института, т. 85, Томск, 1957.
6. Г. П. Вяткин. Механизмы для вычерчивания плоских кривых и аксонометрических изображений, канд. диссерт., М., 1949.
7. О. В. Хотимская. Исследование применения кривых второго порядка в некоторых технических задачах, канд. диссерт., М., 1951.
8. Г. В. Вальд. Некоторые вопросы механизации чертежного процесса, сборник Методы начертательной геометрии и ее приложения, М., Гостехиздат, 1955.
9. Г. А. Ушаков. Механизмы для наглядного изображения горных выработок в аффинных и аксонометрических проекциях, сборник Методы начертательной геометрии и ее приложения, М., Гостехиздат, 1955.
10. Е. И. Торопыгин. Конструирование эллиптических циркулей, Изв. Томского политехн. института, изд. института, т. 85, Томск, 1957.
11. М. И. Андреев. Эллипсограф новой конструкции, Судостроение, № 2, Судпромгиз, 1951.
12. В. Мейер Цур Капеллен. Математические инструменты, изд. Иностр. литературы, М., 1950.
13. С. Е. Смотров. Прибор для вычерчивания эллипсов, Советский патент № 19793 по кл. 42 а, 12 от 31 янв 1929.
14. С. И. Гадалини и Т. И. Гадалина. Циркуль для вычерчивания эллипсов, Советский патент № 20324 по кл. 42 а, 12 от 4 апреля 1929.
15. В. И. Домашев. Прибор для вычерчивания эллипсов и др. кривых, Советский патент № 16003 по кл. 42 а от 13 июля 1929.
16. Б. Д. Пец. Прибор для вычерчивания различных кривых, Советское авторское свидетельство № 35377 по кл. 42 а, 14 от 20 сент. 1932.
17. А. И. Шершнев. Прибор для вычерчивания криволинейных фигур, концентричных данной фигуре. Советский патент № 2871 по кл. 42 а от 4 декабря 1922.
18. Robert Kahlert in Lauf b. Nürnberg. Zirkel zum Zeichnen von Ellipsen und ähnlichen Kurven. Patentiert im Deutschen Reiche № 483720 vom 7 März 1928 ab.
19. Cornelius Ott in Stuttgart - Hofen. Gerät zum Zeichnen Ellipsen. Patentiert im Deutschen Reiche № 603712 vom 8 juni 1933 ab.
20. И. Гюнтер. Циркуль для вычерчивания эллипсов и др. кривых, Советский патент № 11464 по кл. 42 а, 12 от 30 сентября 1929.
21. П. П. Николаенко. Эллипсограф. Советский патент № 9695 по кл. 42 а, от 29 марта 1928.
22. Н. А. Кожемякин. Циркуль для вычерчивания эллипсов, Советское авторское свидетельство № 42693 по кл. 42 а, 12 от 3 сент. 1934.
23. В. Ф. Гумилевский. Прибор для вычерчивания эллипсов, Советское авторское свидетельство № 28022 по кл. 42 а, 12 от 31 окт. 1932.
24. С. Б. Галустян и Н. М. Шейдаев. Кривые 2-го порядка и их применение в технике и естествознании, изд. АКИИ, Баку, 1936.
25. Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, том 2, Гостехиздат, М., 1956.
26. С. В. Грумм - Гржимайло. Выбор допусков в машиностроении, Машги М., 1950.
27. НКТП Главэнерго. ЦЭС. Электротехнические правила и нормы, ОНТИ, Госэнергоиздат, М.—Л., 1933.
28. Н. М. Герсеванов. Теория и построение инженерных номограмм, ОНТИ—НКТП—СССР, М.—Л., 1937.