

РАСЧЕТ АДИАБАТИЧЕСКОГО И ПОЛИТРОПИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПО СРЕДНЕЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ

Г. И. ФУКС

Для расчетов адиабатического и политропических процессов с переменной теплоемкостью обычно рекомендуют применение тепловых диаграмм. Это действительно целесообразно, особенно в том случае, если надо провести серию расчетов. Но в отдельных случаях, особенно при единичных расчетах, желательно иметь возможность аналитических подсчетов, используя обычные формальные зависимости для теплоемкостей или табличные значения. Как указывается ниже, эти расчеты можно провести с достаточной степенью точности соответственным подбором величины средних теплоемкостей.

1. Адиабатические процессы

Связь между p и T для адиабатических процессов

$$C_p \frac{dT}{T} - AR \frac{dP}{P} = 0. \quad (1)$$

Принимая линейную зависимость теплоемкости от температуры

$$C_p = a_p + bT, \quad (2)$$

получаем после интегрирования

$$a_p \ln \frac{T_2}{T_1} + b(T_2 - T_1) - AR \ln \frac{P_2}{P_1} = 0. \quad (3)$$

Если провести интегрирование (1), считая теплоемкость неизменной и равной средней величине c_p , то получится

$$c_p \ln \frac{T_2'}{T_1} - AR \ln \frac{P_2}{P_1} = 0. \quad (4)$$

При линейной зависимости теплоемкости от температуры

$$c_p = a_p + b \frac{T_1 + T_2'}{2}, \quad (5)$$

а с учетом (4)

$$\left[a_p + \frac{b}{2}(T_1 + T_2') \right] \ln \frac{T_2'}{T_1} - AR \ln \frac{P_2}{P_1} = 0. \quad (6)$$

Из (3) и (6) получается

$$\ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{b}{a_p} T_2 = \ln \frac{T_2'}{T_1} + \frac{b}{a_p} \left[\frac{T_1 + T_2'}{2} \ln \frac{T_2'}{T_1} + T_1 \right]. \quad (7)$$

Очевидно, что вообще

$$T_2 \neq T_2',$$

т. е. применение для подсчета конечной температуры адиабатического процесса значения теплоемкости по (5) дает неправильный результат. Но средняя теплоемкость в данном интервале температур равна истинной при какой-то средней температуре (в частности, средне-арифметической при линейной зависимости теплоемкости от температуры). Можно попытаться подобрать такую среднюю температуру, что определенная по ней теплоемкость даст правильное значение конечной температуры адиабатического процесса. При линейной зависимости теплоемкости от температуры для этого достаточно в соотношении (7) положить

$$\frac{T_1 + T_2'}{2} = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}}. \quad (8)$$

Действительно, при этом соотношение (7) переходит в

$$\ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{b}{a_p} T_2 = \ln \frac{T_2'}{T_1} + \frac{b}{a_p} \left[\frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} \ln \frac{T_2'}{T_1} + T_1 \right],$$

что при

$$T_2 = T_2'$$

превращается в тождество. Следовательно, если при интегрировании в уравнении адиабаты (I) принимать теплоемкость такой, какой она будет при средне-логарифмической между начальной и конечной температурами процесса, то интегральное уравнение даст правильный конечный результат. Так как в действительности зависимость теплоемкости от температуры имеет не линейный, а более сложный характер, то указанное правило является не точным, а приближенным. Тем не менее, его вполне можно принять, так как погрешность расчетов при этом получается ничтожной, как показано ниже на нескольких примерах.

При действительных расчетах, разумеется, нет никакой необходимости проводить интегрирование и т. д. Дело сводится к использованию обычных соотношений для адиабатического процесса при неизменной теплоемкости:

$$\frac{T}{p^{\frac{k_1-1}{k_1}}} = \text{const} \quad (9)$$

$$T v^{k_1-1} = \text{const}, \quad (10)$$

$$p v^{k_1} = \text{const}, \quad (11)$$

с тем отличием, что показатель адиабаты k_1 надо подобрать, как отношение теплоемкостей при средне-логарифмической температуре между началом и концом процесса. Если заданы начальная и конечная температуры процесса, то величина k_1 находится сразу, что позволяет также сразу найти конечную упругость или конечный объем процесса. Если конечная температура процесса не задана, то определение ее по (9) или (10) приходится вести подбором: сначала значение k_1 задается наглаз, подсчитывается значение конечной температуры, по ней уточняется значение k_1 и т. д. до достаточного совпадения. Оно получается на втором или третьем расчете (не считая предварительного). Детали расчета будут зависеть от того, чем пользоваться: формулами для теплоемкостей, табли-

цами, и какими именно. Разберем подробнее случай использования таблицы для энтальпий, данных в приложении.

Для определения $\frac{k_1-1}{k_1}$ имеем

$$\frac{k_1-1}{k_1} = \frac{\frac{C_p}{C_v} - 1}{\frac{C_p}{C_v}} = \frac{(c_p - c_v)(t_2 - t_1)}{c_p(t_2 - t_1)} = \frac{AR\Delta t}{\Delta i}, \quad (12)$$

а при расчете на нм^3

$$\frac{k_1-1}{k_1} = \frac{0.0886\Delta t}{\Delta i}. \quad (13)$$

Для предварительного расчета можно во всех случаях считать $t_2 = i_2 = 0$, т.е.

$$\frac{k_1-1}{k_1} = \frac{0.0886t_1}{i_1}. \quad (13a)$$

По формулам (9) и (10) (в зависимости от характера задания) определяется предварительно конечная температура T_2 , по которой надо уточнить значение k_1 . Для этого определяется условная температура по соотношению

$$T_{2k} = 2 \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} - T_1, \quad (14)$$

или

$$t_{2k} = 2 \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} - T_1 - 273^\circ\text{C}. \quad (14a)$$

Определяем по этой температуре по таблице значение энтальпии i_{2k} , затем

$$\Delta i = i_{2k} - i_1,$$

$$\Delta t = t_{2k} - t_1$$

и далее, по (13) новое значение $\frac{k_1-1}{k_1}$.

Пример № 1: адиабатическое сжатие воздуха от $p_1 = 1 \text{ ата}$, $t_1 = 300^\circ\text{C}$ до $p_2 = 100 \text{ ата}$.

Решение: из таблицы $i_1 = 94.4 \frac{\text{ккал}}{\text{нм}^3}$. По (13a)

$$\frac{k_1-1}{k_1} = \frac{0.0886 \cdot 300}{94.4} = 0.281.$$

Из (9)

$$\lg \frac{T_2}{T_1} = 0.281, \lg \frac{p_2}{p_1} = 0.562.$$

$$T_2 = 1995^\circ\text{K}.$$

Из (14a)

$$t_{2k} = 2 \frac{1995 - 573}{\ln \frac{1995}{573}} - 573 - 273 = 1351^\circ\text{C}$$

Остальные расчеты сведены в таблицу 1

Таблица 1

t_{2k}	$t_{1k} - i_1 t_1$	i_{2k}	$i_{2k} - i_1$	$\frac{k_1 - 1}{k_1}$	$\lg \frac{T_2}{T_1}$	T_2	Примечание
	300	94.4	94.4	0.281	0.562	1995	Предв. расчет
1351 (1400)	1100	486.5	392.1	0.2485	0.4960	1795	
1294 (1300)	1000	448.2	353.8	0.2504	0.5008	1816	
1310	1010	452.0	357.6	0.2502	0.5004	1814	

Примечание: 1. В промежуточных подсчетах значения t_{2k} округлялись для упрощения подсчетов по таблице.

2. Точный расчет конечной температуры дает значение $T_2 = 1812^\circ\text{K}$.

Пример № 2: Сжатие CO_2 при тех же условиях. Расчеты сведены в таблицу 2.

Таблица 2

t_{2k}	$t_{2k} - t_1$	i_{2k}	$i_{2k} - i_1$	$\frac{k_1 - 1}{k_1}$	$\lg \frac{T_2}{T_1}$	T_2	Примечание
	300	134.8	134.8	0.197	0.394	1419	Предв. расчет
1019 (1000)	700	531.8	397.0	0.1567	0.3134	1179	
834 (800)	500	411.1	276.3	0.1603	0.3206	1199	
850	550	441.1	306.3	0.1591	0.3182	1192	

Примечание: Уточненный расчет дает $T_2 = 1194^\circ\text{K}$.

Пример № 3: Сжатие CH_4 при тех же условиях. Расчет сведен в таблицу 3.

Таблица 3

t_{2k}	$t_{2k} - t_1$	i_{2k}	$i_{2k} - i_1$	$\frac{k_1 - 1}{k_1}$	$\lg \frac{T_2}{T_1}$	T_2	Примечание
	300	135.6	135.6	0.195	0.392	1413	Предв. расчет
1014 (1000)	700	644.0	508.4	0.1220	0.2400	1005	
692 (700)	400	398.3	262.7	0.1349	0.2698	1066	
740	440	429.6	294.0	0.1426	0.2652	1055	

Примечание: Точный расчет дает $T_2 = 1055^\circ\text{K}$.

Для расчета работы адиабатического процесса может служить общее соотношение

$$Aw_a = u_1 - u_2. \quad (15)$$

Если вести расчет по таблице энтальпий, то удобнее выражение

$$Aw_a = i_1 - i_2 - AR(t_1 - t_2), \quad (16)$$

или в расчете на 1 нм³

$$Aw_a = i_1 - i_2 - 0.0886(t_1 - t_2) \frac{\text{ккал}}{\text{нм}^3} \quad (16a)$$

Учитывая зависимость внутренней энергии от температуры, можно также записать:

$$Aw_a = c_v(T_1 - T_2), \quad (17)$$

где c_v —средняя теплоемкость в интервале температур $T_1(t_1) - T_2(t_2)$

Можно также получить зависимость

$$w_a = \frac{R}{k-1} (T_1 - T_2), \quad (18)$$

где k —отношение средних теплоемкостей в интервале температур $T_1(t_1) - T_2(t_2)$. Учитывая (9) и (10), легко также получить

$$w_a = \frac{p_1 v_1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k_1-1} \right], \quad (19)$$

$$w_a = \frac{p_1 v_1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k_1-1}{k_1}} \right], \quad (20)$$

где k_1 —отношение средних теплоемкостей в интервале температур $T_1(t_1) - T_2(t_2)$, см. (14) и (14a).

Сопоставление значений конечных температур T_2 , полученных указанным приемом, и истинных значений, приведенных в примечаниях к таблицам, показывает, что работа адиабатического процесса может быть вычислена с совершенно удовлетворительной точностью.

Расчет при заданных объемах v_1 и v_2 не имеет существенных отличий. Для подсчета имеем:

$$k_1 - 1 = \frac{AR\Delta t}{\Delta i - AR\Delta t}, \quad (21)$$

где

$$\Delta t = t_{2k} - t_1,$$

$$\Delta i = i_{2k} - i_1.$$

Аналогично,

$$k_1 = \frac{\Delta i}{\Delta i - AR\Delta t}. \quad (22)$$

2. Политропические процессы

Называя политропическими процессы, подчиняющиеся соотношению

$$pv^n = \text{const}, \quad (23)$$

где n —любое неизменное число, получаем общеизвестные связи между параметрами и выражения для работы политропического процесса, пригодные также при переменных теплоемкостях C_p и C_v . Учитывая, что

$$\Delta u = c_v(T_2 - T_1), \quad (17)$$

легко получить для тепла политропического процесса

$$q = c_v \frac{n-k}{n-1} (T_2 - T_1), \quad (24)$$

где c_v и k — средняя теплоемкость и отношение средних теплоемкостей $\frac{c_p}{c_v}$ в интервале температур T_1 — T_2 . Величину

$$c_n = c_v \frac{n-k}{n-1} \quad (25)$$

следует рассматривать как среднюю теплоемкость политропического процесса в интервале температур процесса. Давая показателю политропы n значения 0, 1 и ∞ , получаем соответственные связи между параметрами, а также выражения для работы и тепла (через средние теплоемкости) для изобарического, изотермического и изохорического процессов. Таким образом, политропический процесс и при переменных теплоемкостях может рассматриваться, как обобщение некоторых основных процессов.

Исключение составляет только адиабатический процесс. При $n = k$ получается из (25) $c_n = 0$, т. е. политропический процесс с общим теплообменом, равным нулю. Но это не исключает возможности сообщения и объема тела в равных количествах в отдельных частях этого процесса, чем он отличается от адиабатического.

Для расчетов с помощью таблицы энтальпий наиболее удобны соотношения:

$$Aw_n = \frac{AR}{n-1} (t_1 - t_2), \quad (26)$$

и

$$q = i_2 - i_1 - \frac{n}{n-1} AR(t_2 - t_1). \quad (27)$$

В частности, на 1 нм^3

$$Aw_n = \frac{0.0886}{n-1} (t_1 - t_2), \quad (26a)$$

$$q = i_2 - i_1 - 0.0886 \frac{n}{n-1} (t_2 - t_1). \quad (27a)$$

Энтальпия идеальных газов на мм^3 (0°C , 760 мм р. ст.) в $\frac{\text{ккал}}{\text{мм}^3}$

Таблица 4

температура $^\circ\text{C}$	Воздух	Углекис- лота CO_2	H_2O	Кислород O_2	Азот N_2	Окись угле- рода CO	Водород H_2	Метан CH_4	Этилен C_2H_4	Сероводо- род H_2S
0	31.2	41.1	35.9	31.5	31.1	31.1	30.8	39.5	50.3	36.8
100	32.6	86.4	72.5	64.0	62.0	62.6	62.0	84.4	111.2	75.2
200	94.4	134.8	110.2	97.2	93.7	94.5	93.3	135.6	181.2	115.2
300	127.1	185.7	149.0	131.8	125.8	127.2	124.4	193.2	260.0	157.2
400	160.5	239.2	189.0	167.2	158.8	160.5	156.0	256.0	345.5	201.0
500	194.6	295.1	230.4	203.4	192.3	195.0	187.2	325.2	436.8	246.6
600	229.5	352.4	273.1	240.2	226.6	229.6	219.8	398.3	533.4	294.0
700	265.4	411.1	317.2	277.6	261.4	265.6	252.0	476.8	638.4	343.2
800	300.1	471.1	362.5	315.2	297.0	301.5	284.4	558.0	741.6	393.3
900	337.2	531.8	409.2	353.5	332.9	338.0	317.0	644.0	852.0	445.0
1000	374.6	593.6	457.9	391.9	369.3	375.2	350.9	731.0	—	497.2
1100	411.1	655.9	506.0	430.6	407.0	412.8	385.2	823.2	—	550.8
1200	448.2	716.7	556.0	469.6	443.7	449.8	411.9	—	—	604.5
1300	486.5	782.6	606.9	508.9	480.6	488.6	455.0	—	—	659.4
1400	524.5	846.8	658.8	548.6	518.4	526.5	490.5	—	—	715.5
1500	562.9	911.4	711.5	593.5	556.2	564.8	526.4	—	—	—
1600	601.3	976.1	765.0	628.7	593.8	603.5	562.7	—	—	—
1700	640.1	1041.5	819.2	668.9	632.2	642.6	599.4	—	—	—
1800	678.9	1106.9	873.6	709.6	770.7	680.2	634.6	—	—	—
1900	718.0	1172.8	929.0	750.6	709.4	720.0	672.0	—	—	—
2000	757.0	1238.8	984.7	791.7	748.0	750.1	709.8	—	—	—
2100	797.3	1305.0	1041.0	832.9	787.2	798.6	748.0	—	—	—
2200	836.0	1371.7	1097.8	874.7	825.7	837.2	786.6	—	—	—
2300	875.5	1438.6	1154.9	916.6	864.7	876.0	826.6	—	—	—
2400	915.5	1505.5	1212.5	958.8	904.2	917.5	865.0	—	—	—
2500	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Молеку- лярный вес $M=$	28.95	44.00	18.02	32.00	28.02	28.00	2.02	16.03	28.03	34.08