ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 67, в. 2 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1951 г.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДИНОЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАСЕЧКИ (для арифмометра)

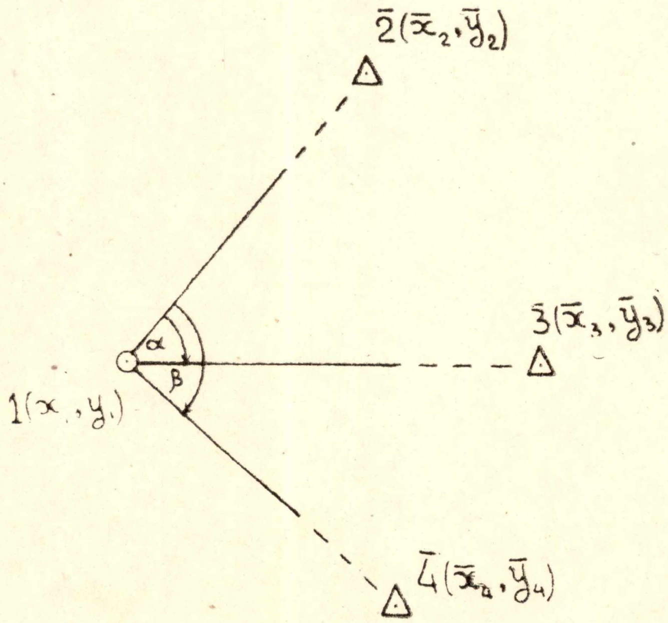
Б. Ф. КРУТОЙ

При разработке новых формул для решения одиночной обратной засечки (задачи Потенота) преследовалась цель дать такие формулы, чтобы все вычисления вести исключительно на арифмометре, без применения таблиц тригонометрических функций в промежуточных действиях. Это возможно, если в промежуточных формулах не вводятся явно операции с угловыми величинами и их функциями. При наличии этого условия все выкладки становятся наиболее простыми и механичными, что гарантирует от ошибок логического порядка.

Руководствуясь такими соображениями, мы пришли после ряда проб к нижеследующему решению одиночной обратной засечки (в начале 1933 г.).

Решение

Условие задачи: *В* точке 1 (x_1, y_1), подлежащей определению, измерены углы α и β между направлениями на твердые (опорные) точки $\overline{2}$ $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$, $\overline{3}$ $(\overline{x}_3, \overline{y}_3)$, $\overline{4}$ $(\overline{x}_4, \overline{y}_4)$, координаты которых $\overline{x}_2$, $\overline{y}_2$; $\overline{x}_3$, $\overline{y}_3$; $\overline{x}_4$, $\overline{y}_4$ известны.



Фиг. 1

Требуется по этим данным найти координаты x_1, y_1 искомой точки 1 (фиг. 1).

Приступим к решению задачи. Прежде всего для упрощения последующих вычислений перенесем начало координат в точку $\overline{2}$, обозначив координаты точек относительно нового начала с индексом$'$. Мы будем иметь (табл. 1):

Таблица 1

1	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$x'_1 = x_1 - \overline{x_2}$	$\overline{x'_2} = \overline{x_2} - \overline{x_2} = 0$	$\overline{x'_3} = \overline{x_3} - \overline{x_2}$	$\overline{x'_4} = \overline{x_4} - \overline{x_2}$
$y'_1 = y_1 - \overline{y_2}$	$\overline{y'_2} = \overline{y_2} - \overline{y_2} = 0$	$\overline{y'_3} = \overline{y_3} - \overline{y_2}$	$\overline{y'_4} = \overline{y_4} - \overline{y_2}$

Выразим затем тангенсы дирекционных углов $t_{1\cdot 2}$, $t_{1\cdot 3}$, $t_{1\cdot 4}$ линий $1.\overline{2}$, $1.\overline{3}$, $1.\overline{4}$ через координаты точек $1, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ в новой системе:

$$\operatorname{tg} t_{1\cdot 2} = \frac{0 - y'_1}{0 - x'_1} = \frac{y'_1}{x'_1}\,; \qquad \operatorname{tg} t_{1\cdot 3} = \frac{\overline{y'_3} - y'_1}{\overline{x'_3} - x'_1}\,; \ \operatorname{tg} t_{1\cdot 4} = \frac{\overline{y'_4} - y'_1}{\overline{x'_4} - x'_1} \tag{1}$$

Тогда, заметив, что

$$\alpha = t_{1\cdot 3} - t_{1\cdot 2} \qquad \beta = t_{1\cdot 4} - t_{1\cdot 2}\,, \tag{2}$$

тангенсы углов α и β можем представить в следующем виде:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} t_{1\cdot 3} - \operatorname{tg} t_{1\cdot 2}}{1 + \operatorname{tg} t_{1\cdot 2} . \operatorname{tg} t_{1\cdot 3}} = \frac{\dfrac{\overline{y'_3} - y'_1}{\overline{x'_3} - x'_1} - \dfrac{y'_1}{x'_1}}{1 + \dfrac{\overline{y'_3} - y'_1}{\overline{x'_3} - x'_1} \cdot \dfrac{y'_1}{x'_1}} = a$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} t_{1\cdot 4} - \operatorname{tg} t_{1\cdot 2}}{1 + \operatorname{tg} t_{1\cdot 2}\ \operatorname{tg} t_{1\cdot 4}} = \frac{\dfrac{\overline{y'_4} - y'_1}{\overline{x'_4} - x'_1} - \dfrac{y'_1}{x'_1}}{1 + \dfrac{\overline{y'_4} - y'_1}{\overline{x'_4} - x'_1} \cdot \dfrac{y'_1}{x_1'}} = b \tag{3}$$

Займемся преобразованием этой системы двух уравнений с двумя неизвестными x'_1, y'_1:

$$a(\overline{x'_3}\, x'_1 - x'^2_1 + \overline{y'_3}\, y'_1 - y'^2_1) = \overline{y'_3}\, x'_1 - y'_1 x'_1 - \overline{x'_3}\, y'_1 +$$
$$+ x'_1 y'_1 = \overline{y'_3}\, x'_1 - \overline{x'_3}\, y'_1$$

$$b(\overline{x'_4}\, x'_1 - x'^2_1 + \overline{y'_4}\, y'_1 - y'^2_1) = \overline{y'_4}\, x'_1 - y'_1 x'_1 - \overline{x'_4}\, y'_1 +$$
$$+ x'_1 y'_1 = \overline{y'_4}\, x_1' - \overline{y'_4}\, y'_1$$

$$a x'^2_1 - (a\overline{x'_3} - \overline{y'_3})\, x'_1 - (a\,\overline{y'_3} + \overline{x'_3})\, y'_1 + a y'^2_1 = 0$$
$$b x'^2_1 - (b\overline{x'_4} - \overline{y'_4})\, x'_1 - (b\overline{y'_4} + \overline{x'_4})\, y'_1 + b y'^2_1 = 0 \tag{4}$$

Введя обозначения:

$$a\overline{x'_3} - \overline{y'_3} = k \qquad\qquad b\overline{x'_4} - \overline{y'_4} = m$$
$$a\overline{y'_3} + \overline{x'_3} = l \qquad\qquad b\overline{y'_4} + \overline{x'_4} = n, \tag{5}$$

предыдущую систему запишем так:

$$\begin{aligned} ax'^2_1 - kx'_1 - ly'_1 + ay'^2_1 = 0 \\ bx'^2_1 - mx'_1 - ny'_1 + by'^2_1 = 0 \end{aligned} \tag{4a}$$

Умножив первое уравнение на $-b$, а второе на $+a$ и складывая, выразим y'_1 через x'_1:

$$y'_1 = -\frac{bk - am}{bl - an} x'_1 = Mx'_1 , \tag{6}$$

где

$$M = +\frac{bk - am}{an - bl} . \tag{7}$$

Подставим теперь значение y'_1 из (6) в (4a):

$$ax'^2_1 - kx'_1 - lMx'_1 + aM^2 x'^2_1 = 0$$

$$bx'^2_1 - mx'_1 - nMx'_1 + bM^2 x'^2_1 = 0$$

или после сокращения на x'_1:

$$a(1 + M^2) x'_1 = k + lM ,$$

$$b(1 + M^2) x'_1 = m - nM$$

Отсюда получим:

$$x'_1 = \frac{k + lM}{a(1 + M^2)} = \frac{m + nM}{b(1 + M^2)} \tag{8}$$

Заметив, что $x_1 = \overline{x}_2 + x'_1$ и $y_1 = \overline{y}_2 + y'_1$, найдем окончательно:

$$x_1 = \overline{x}'_2 + \frac{k + lM}{a(1 + M^2)} = \overline{x}_2 + \frac{m + nM}{b(1 + M^2)} \tag{9}$$

$$y_1 = \overline{y}_2 + Mx'_1$$

Заключительным контролем вычислений может служить следующая формула:

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{d - c}{1 + cd} , \tag{10}$$

где

$$c = \frac{y'_1}{x'_1} \qquad d = \frac{\overline{y}_3 - y_1}{x_3 - x_1} \tag{11}$$

Промежуточного же контроля — двойное вычисление x'_1 — можно не делать, так как он контролирует лишь функцию $M = M(k, l, m, n)$. Поэтому, если при вычислении k, l, m, n будет сделана ошибка, то 2 значения x'_1 сойдутся, а задача все-таки будет решена неверно.

Соберем все необходимые для вычисления формулы в порядке последовательного получения соответствующих величин.

1) $\operatorname{tg} \alpha = a$

2) $\operatorname{tg} \beta = b$

3) $a\overline{x}'_3 - \overline{y}'_3 = k$

4) $a\overline{y}'_3 + \overline{x}'_3 = l$

5) $b\overline{x}'_4 - \overline{y}'_4 = m$

6) $b\overline{y}'_4 + \overline{x}'_4 = n$

7) $\dfrac{bk - am}{an - bl} = M$

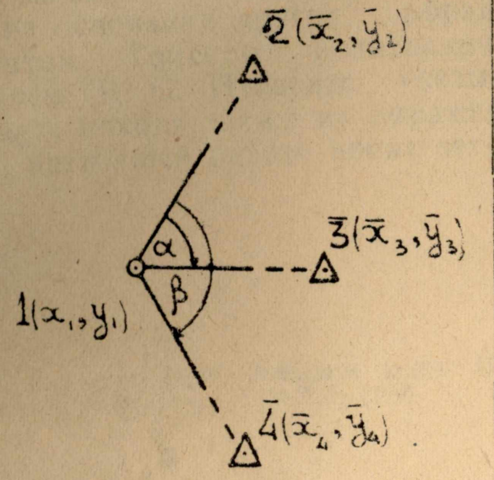
8) $x'_1 = \dfrac{k + lM}{a(1 + M^2)} = \dfrac{m + nM}{b(1 + M^2)}$

Одиночная обратная засечка

Для арифмометра

По Б. Ф. Крутому

Чертеж



$\alpha = 38°19'00''$

$\beta = 150°09'44''$

$\mathrm{tg}\,\alpha = -6.84082 = a$

$\mathrm{tg}\,\beta = +2.77187 = b$

Формулы

Переносим начало координат в точку $\bar{2}$, обозначив координаты точек относительно нового начала с индексом$'$. Тогда:

$\bar{x}'_2 = 0$ $\quad \bar{x}'_3 = \bar{x}_3 - \bar{x}_2$ $\quad \bar{x}'_4 = \bar{x}_4 - \bar{x}_2$ $\quad x'_1 = x_1 - \bar{x}_2$

$\bar{y}'_2 = 0$ $\quad \bar{y}'_3 = \bar{y}_3 - \bar{y}_2$ $\quad \bar{y}'_4 = \bar{y}_4 - \bar{y}_2$ $\quad y'_1 = y_1 - \bar{y}_2$

1) $\mathrm{tg}\,\alpha = a$

2) $\mathrm{tg}\,\beta = b$

3) $a\bar{x}'_3 - \bar{y}'_3 = k$

4) $a\bar{y}'_3 + \bar{x}'_3 = l$

5) $b\bar{x}'_4 - \bar{y}'_4 = m$

6) $b\bar{y}'_4 + \bar{x}'_4 = n$

7) $\dfrac{bk - am}{an - bl} = M$

8) $x'_1 = \dfrac{k + lM}{a(1 + M^2)} = \dfrac{m + nM}{b(1 + M^2)}$

9) $y'_1 = M x'_1$

10) $x_1 = \bar{x}_2 + x'_1$

11) $y_1 = \bar{y}_2 + y'_1$

12) $\dfrac{y'_1}{x'_1} = c$

13) $\dfrac{\bar{y}_3 - y_1}{\bar{x}_3 - x_1} = d$

Контроль

14) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{d - c}{1 + cd} = a$

Решение

32	x_1	−2078.671	33	y_1	−370.880	25	M	−4.318583
1	$\bar{x}_4$	−1261.199	2	$\bar{y}_4$	−468.360	26	nM	−680.008
3	$\bar{x}_3$	−2887.709	4	$\bar{y}_3$	−687.190	27	M^2	+18.65016
5	$\bar{x}_2$	−2114.203	6	$\bar{y}_2$	−217.431	28	$m + nM$	+1935.337
30′	x'_1	+35.532	31	y'_1	−153.449	29	$b(1 + M^2)$	+54.467
7	$\bar{x}'_4$	+853.004	9	$\bar{y}'_4$	−250.929	30	x'_1	+35.5323
8	$\bar{x}'_3$	−773.506	10	$\bar{y}'_3$	−469.759	31	y'_1	−153.449
11	$b\bar{y}'_4$	−695.543	13	$b\bar{x}'_4$	+2364.416	34	$\bar{y}_3 - y_1$	−316.310
12	$a\bar{y}'_3$	+3213.537	14	$a\bar{x}'_3$	+5291.415	35	$\bar{x}_3 - x_1$	−809.038
15	$b\bar{y}'_4 + \bar{x}'_4 = n$	+157.461	17	$b\bar{x}'_4 - \bar{y}'_4 = m$	+2615.345	36	d	+0.390971
						37	c	−4.318614
16	$a\bar{y}'_3 + \bar{x}'_3 = l$	+2440.031	18	$a\bar{x}'_3 - \bar{y}'_3 = k$	+5761.174	38	$d - c$	+4.709585
						39	cd	−1.688453
						40	$1 + cd$	−0.688453
19	an	−1077.162	22	bk	+15969.225			Контроль
20	bl	+6763.449	23	am	−17891.104	41	$a = \dfrac{d - c}{1 + cd}$	−6.84082
21	$an - bl$	−7840.611	24	$bk - am$	+33860.329			−6.84082

9) $y'_1 = Mx'_1$

10) $x_1 = \overline{x}_2 + x'_1$

11) $y_1 = \overline{y}_2 + y'_1$

12) $\dfrac{y'_1}{x'_1} = c$

13) $\dfrac{\overline{y}_3 - y_1}{\overline{x}_3 - x_1} = d$

Контроль:

14) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{d - c}{1 + cd}$

В заключение заметим, что формулы, близкие к нашим, но полученные на основании других соображений, были опубликованы в 1936 году доцентом Томского политехнического института В. С. Нуварьевым[1]. Впрочем В. С. Нуварьев указывает на возможность вывода своих формул, исходя также из выражений (3).

К настоящей работе прилагается формуляр вычислений.

[1] Нуварьев В. С. Решение задач Потенота и Ганзена на плоскости и в координатах Гаусса—Крюгера, ГОНТИ, 1936.