

ДВУХГРУППОВОЕ УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

Б. Ф. КРУТОЙ

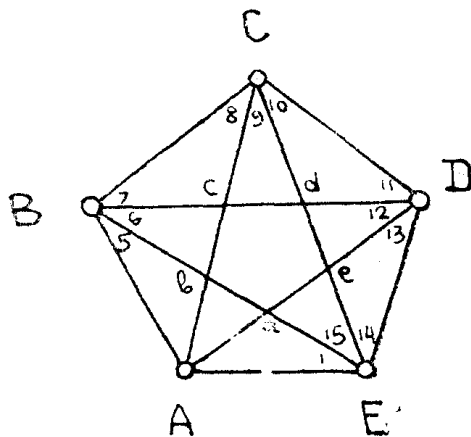
При уравнивании геодезического пятиугольника по способу наименьших квадратов наиболее трудоемкой частью является составление и совместное решение 9 нормальных уравнений. Эта стадия вычислительной работы может быть сокращена или, по крайней мере, упрощена при выполнении 2 условий:

1) совместное уравнивание всех 9 условных уравнений должно быть заменено раздельным уравниванием по так называемому двухгрупповому способу (Урмаев. О последовательном уравнивании тригонометрических сетей);

2) система условных уравнений фигур должна быть составлена так, чтобы получающаяся из нее система нормальных уравнений допускала простое решение. Отсюда, как следствие, явилась бы возможность дать общие формулы для коррелат, выразив их через невязки.

Установив основные принципы рационализации уравнивательных вычислений, вкратце изложим двухгрупповой способ уравнивания. Сущность его заключается в том, что все уравнения разбиваются на 2 группы, причем в первую группу включаются уравнения, имеющие наиболее простой вид, желательно—с коэффициентами ± 1 . Решение уравнений первой группы дает

первичные поправки. По исправленным за первичные поправки углам составляются условные уравнения 2 группы. Чтобы сделать их независимыми от уравнений 1 группы, коэффициенты уравнений 2 группы преобразуются по формулам, аналогичным для первичных поправок. Решение преобразованных уравнений дает вторичные поправки. Как показывает теория, сумма первичных и вторичных поправок в точности равняется поправкам, получающимся при совместном уравнивании. Следовательно, двухгрупповой способ уравнивания эквивалентен по конечным результатам обычному способу Гаусса.



Фиг. 1

Приступая к выводу формул геодезического пятиугольника, заметим предварительно, что углы следует нумеровать в порядке, указанном на чертеже, так как формулы разработаны применительно к этой нумерации.

В соответствии с вышеизложенным все условные уравнения разбиваем на 2 группы, включив в 1-ю группу 6 уравнений фигур, как наиболее простых, и во 2-ю—3 полюсных уравнения. Для достижения наибольшей простоты формул условные уравнения фигур пишем несколько своеобразно,

а именно: 5 уравнений получим, исходя из равенства вертикальных углов в 5 внутренних точках пересечения диагоналей; 6-е уравнение получим, исходя из суммы внутренних углов пятиугольника. Полюсные же уравнения пишутся из 3 геодезических четырехугольников, имеющих общий полюс A и общую сторону AE : ΔABC , ΔADE и ΔBDE (хотя формула сочетаний $C_4^3 = 4$ указывает на возможность получения еще 4-го четырехугольника — $ABCD$, но мы его отбрасываем, как являющегося следствием первых 3). Общий вид условных уравнений фигур приводится ниже, составление же полюсных уравнений считаем общеизвестным, а потому их не помещаем. Кроме того, способ их составления ясен из прилагаемого формуляра. Составив условные уравнения 1 группы, находим общие формулы первичных поправок. Дальнейшие вычисления располагаем в виде схем и соответствующих формул.

Схема
условных уравнений
1 группы

Уравнения По- правки	I	II	III	IV	V	VI
1	+1					+1
2	+1					+1
3			-1		-1	+1
4		+1				+1
5		+1				+1
6	-1			-1		+1
7			+1			+1
8			+1			+1
9		-1			-1	+1
10				+1		+1
11				+1		+1
12	-1		-1			+1
13					+1	+1
14					+1	+1
15		-1		-1		+1
w_i	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6

Условные уравнения 1 группы

а) 5 уравнений вида

$$(3i-2) + (3i-1) - (3i+3) - \\ - (3i+6) + w_i = 0, \quad (1)$$

где

$$w_i = \sigma_{2i-1} - \sigma_{2i}$$

(см. формуляр);

б) 6-е уравнение вида

$$\sum_{s=1}^{15} (i_s) + w_6 = 0,$$

где

$$w_6 = \sum_{r=1}^{11} \sigma_r - 540^\circ. \quad (2)$$

Коррелаты 1 группы

$$k_1 = \frac{-19w_1 - w_2 + 5w_3 + 5w_4 - w_5}{66}$$

$$k_2 = \frac{-w_1 - 19w_2 - w_3 + 5w_4 + 5w_5}{66}$$

$$k_3 = \frac{+5w_1 - w_2 - 19w_3 - w_4 + 5w_5}{66}$$

$$k_4 = \frac{+5w_1 + 5w_2 - w_3 - 19w_4 - w_5}{66}$$

$$k_5 = \frac{+w_1 + 5w_2 + 5w_3 - w_4 - 19w_5}{66}$$

$$k_6 = -\frac{w_6}{15}$$

(Составление и решение нормальных уравнений 1 группы см. на обороте).

Нормальные уравнения 1 группы и решение их

Корре- латы Уравне- ния	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	w_i	Множители	
I	+4		+1	+1			w_1	+1	+1
II		+4		+1	+1		w_2		
III	+1		+4		+1		w_3	-4	
IV	+1	+1		+1			w_4		-4
V		+1	+1		+4		w_5		
VI						+15	w_6		

	k_2	k_3	k_4	k_5	$w_i^{(1)}$	Множители	
I-4 III		-15	+1	-4	w_1-4w_3		
I-4 IV	-4	+1	-15		w_1-4w_4	+1	+1
II	+4		+1	+1	w_2	+1	
V	+1	+1		+4	w_5		+4

	k_3	k_4	k_5	$w_i^{(2)}$	Множители	
I-4 III	-15	+1	-4	w_1-4w_3		+1
I+II-4 IV	+1	-14	+1	$w_1+w_2-4w_4$	-5	
I-4 IV+4 V	+5	-15	+16	$w_1-4w_4+4w_5$	+1	+3

	k_4	k_5	$w_i^{(3)}$	Множители	
-4 I-5 II+16 IV+4 V	+55	+11	$-4w_1-5w_2+16w_4+4w_5$	+4	-4
+4 I-4 III-12 IV+12 V	-44	+44	$+4w_1-4w_3-12w_4+12w_5$	+5	+1

	k_5	$w_i^{(4)}$
-4 I+20 II-20 III-4 IV+44 V	+264	$4w_1-20w_2-20w_3+4w_4+76w_5$

Выразив коррелаты через свободные члены, для первичных поправок получим нижеследующие формулы:

$$(1) = (2) = k_1 + k_6 \quad (4) = (5) = k_2 + k_6 \quad (7) = (8) = k_3 + k_6$$

$$(3) = -k_3 - k_5 + k_6 \quad (6) = -k_1 - k_4 + k_6 \quad (9) = -k_2 - k_5 + k_6$$

$$(10) = (11) = k_4 + k_6 \quad (13) = (14) = k_5 + k_6$$

$$(12) = -k_1 - k_5 + k_6 \quad (15) = -k_2 - k_4 + k_6$$

Двухгрупповое уравнивание геодезического пятиугольника По Б. Ф. Крутому

ЧЕРТЕЖ

Формулы и методические указания

Число условных уравнений — 9
 " " " 1 гр. — 6
 " " " 2 гр. — 3

Условные уравнения 1 гр. и 3 вспомогат. систем α, β, γ :
 5 уравнений вида: $(3i-2) + (3i-1) - (3i+3) - (3i+6) + w_i = 0$

6-е " " $\sum_{s=1}^{15} (i_s) + w_6 = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} w_1 = \sigma_{2i-1} - \sigma_{2i} \\ w_6 = \sum_{r=1}^{11} \sigma_r - 540^\circ \end{array} \right.$

Отсюда $k_i = \frac{-19w_i - w_{i+1} + 5w_{i+2} + 5w_{i+3} - w_{i+4}}{66}$

$k_6 = -\frac{w_6}{15}$

и $(3i-2) = (3i-1) = k_i + k_6$
 $(3i) = -k_{i-1} - k_{i+2} + k_6$

Формулы циклические

Здесь: (i) — поправка 1-я или вспомогательные приращения $\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma$; k_i — коррелата

1-я группы уравнений или вспомогательных систем α, β, γ . Затем: $(i=1, 2, \dots, 5)$; $(s=1, 2, \dots, 15)$; $(r=1, 3, 5, \dots, 11)$. Кроме того:
 1) если $(3i+3)$ или $(3i+6) > 15$, то нужно взять соответственно $(3i-6)$ и $(3i-9)$;
 2) если индексы $(i+1), \dots, (i+4)$, а также $(i-1)$ и $(i-2) > 5$, то их уменьшают на 5;
 3) ур. 2 группы — полюсные — пишутся из геодезич. 4-угольников, имеющих общий полюс A и общую сторону AE: ABCE; ACDE; ABDE.
 Процесс уравнивания: 1) Нахождение поправок I; 2) составление полюсных условий по исправленным углам; 3) преобразование коэффициентов уравнений 2 гр.; 4) составление нормальных уравнений, решение их и нахождение поправок II. Окончательные поправки $(i_s) = (i_s)_1 + (i_s)_2$, причем $[(i_s)]^2 = [(i_s)_1]^2 + [(i_s)_2]^2 = \min$.

№	Углы редуцированные	Попр. I	Углы исправленные	Попр. II	Углы уравниваемые
1	30°06'54.7	-2.2	30°06'54.5	+0.2	30°06'54.7
2	14 42 35.1	-2.2	14 42 32.9	-1.0	14 42 31.9
σ_1	44 49 31.8	-4.4	44 49 27.4	-0.8	44 49 26.6
6	19 14 34.9	-1.5	19 14 33.4	-1.8	19 14 31.6
12	25 34 52.1	+1.9	25 34 54.0	+1.0	25 34 55.0
σ_2	44 49 27.0	+0.4	44 49 27.4	-0.8	44 49 26.6
4	57 55 16.0	-1.5	57 55 14.5	+0.3	57 55 14.8
5	28 25 39.0	-1.5	28 25 37.5	-0.1	28 25 37.4
σ_3	86 20 55.0	-3.0	86 20 52.0	+0.2	86 20 52.2
9	50 30 42.2	-0.6	50 30 41.6	0.0	50 30 41.6
15	35 50 12.7	-2.3	35 50 10.4	+0.2	35 50 10.6
σ_4	86 20 54.9	-2.9	86 20 52.0	+0.2	86 20 52.2
7	19 19 54.1	-0.6	19 19 53.5	+1.9	19 19 55.4
8	55 04 41.7	-0.6	55 04 41.1	-0.3	55 04 40.8
σ_5	74 24 35.8	-1.2	74 24 34.6	+1.6	74 24 36.2
12	25 34 52.1	+1.9	25 34 54.0	+1.0	25 34 55.0
3	48 49 42.2	-1.6	48 49 40.6	+0.6	48 49 41.2
σ_6	74 24 34.3	+0.3	74 24 34.6	+1.6	74 24 36.2

№	Углы редуцированные	Попр. I	Углы исправленные	Попр. II	Углы уравниваемые
10	39°41'00.5	+2.8	39°41'03.3	+1.1	39°41'04.4
11	15 23 37.6	+2.9	15 23 40.5	-2.7	15 23 37.8
σ_7	55 04 38.1	+5.7	55 04 43.8	-1.6	55 04 42.2
15	35 50 12.7	-2.3	35 50 10.4	+0.2	35 50 10.6
6	19 14 34.9	-1.5	19 14 33.4	-1.8	19 14 31.6
σ_8	55 04 47.6	-3.8	55 04 43.8	-1.6	55 04 42.2
13	16 52 11.5	+1.2	16 52 12.7	+1.0	16 52 13.7
14	82 28 08.3	+1.2	82 28 09.5	-0.4	82 28 09.1
σ_9	99 20 19.8	+2.4	99 20 22.2	+0.6	48 49 41.2
3	48 49 42.2	-1.6	48 49 40.6	+0.6	48 49 41.2
9	50 30 42.2	-0.6	50 31 41.6	0.0	50 30 41.6
σ_{10}	99 20 24.4	-2.2	99 20 22.2	+0.6	99 20 22.8
3	48 49 42.2	-1.6	48 49 40.6	+0.6	48 49 41.2
6	19 14 34.9	-1.5	19 14 33.4	-1.8	19 14 31.6
9	50 30 42.2	-0.6	50 30 41.6	0.0	50 30 41.6
12	25 34 52.1	+1.9	25 34 54.0	+1.0	25 34 55.0
15	35 50 12.7	-2.3	35 50 10.4	+0.2	35 50 10.6
σ_{11}	180 00 04.1	-4.1	180 00 00.0	0	180 00 00.0
$w_1 = \sigma_1 - \sigma_2 = +4.8$		$w_2 = \sigma_3 - \sigma_4 = +0.1$		$w_3 = \sigma_5 - \sigma_6 = +1.75$	
$w_4 = \sigma_7 - \sigma_8 = -9.5$		$w_5 = \sigma_9 - \sigma_{10} = -4.6$		$w_6 = \sum_{r=1}^{11} \sigma_r - 540^\circ = +4.6$	

Углы исправлен.	lg lg sin <<	diff	Углы исправлен.	lg lg sin <<	diff
8	9.9137783 ₁	14.7	9	3.8874782 ₂	17.3
1+15	9.9605658 ₁	9.4	5+6+7	9.9640300 ₂	8.9
5	9.6776433 ₂	38.9	1	9.7004781 ₂	36.3
$\Sigma \lg \sin A$	9.5519875 ₁		$\lg \sin B$	9.5519864 ₁	
$\Sigma \lg \sin B$	9.5519864 ₁				
$w_7 = +11.0$					

Углы исправлен.	lg lg sin <<	diff	Углы исправлен.	lg lg sin <<	diff
11+12	9.8167357 ₄	24.3	13	2.4627040 ₁	69.4
1+14+15	9.7190648 ₂	-34.2	9+10	9.9849974 ₂	-0.1
9	9.8874782 ₁	17.3	1+15	9.9635658 ₁	9.4
$\Sigma \lg \sin A$	9.4232788 ₁		$\Sigma \lg \sin B$	9.4232673 ₂	
$\Sigma \lg \sin B$	9.4232673 ₂				
$w_8 = +115.6$					

Углы исправлен.	$\lg \lg \sin \angle$	diff	Углы исправлен.	$\lg \lg \sin \angle$	diff
12 1+14+15 5	9.6352798 ₀ 9.7190618 ₀ 9.6776433 ₈	44.0 -34.2 38.9	13 5+6 1	9.4627040 ₄ 9.8688050 ₃ 9.7001781 ₂	69.4 19.2 36.3
$\Sigma \lg \sin A$ $\Sigma \lg \sin B$	9.0319880 ₃ 9.0319881 ₀		$\Sigma \lg \sin B$	9.0319881 ₀	
	$w_0 = -1.6$				

[AA]	[AB]	[AC]	[AS]
+19.05	+1.41	+16.06	+36.52

[BB]	[BC]	[BS]
+29.05	+30.58	+61.04

[CC]	[CS]
+54.13	+100.78

k_1	k_2	k_3
-0.937	-1.599	+1.184

№ $\angle$	α	$\Delta \alpha$	A	β	$\Delta \beta$	B	γ	$\Delta \gamma$	C	S	Попр. II
1 2	-2.69 —	+0.53 +0.53	-2.16 +0.53	-4.36 —	+3.26 +3.26	-1.10 +3.26	-7.05 —	+3.98 +3.98	-3.07 +3.98	-6.33 +7.77	+0°.15 -1.01
σ_1	-2.69	+1.66	-1.63	-4.36	+6.52	+2.16	-7.05	+7.96	+0.91	+1.44	-0.86
4 5	— +3.00	-0.90 -0.89	-0.90 +2.11	— —	-0.18 -0.19	-0.18 -0.19	— +1.97	-0.63 -0.63	-0.63 +1.34	-1.71 +3.26	+0.38 -0.09
σ_3	+3.00	-1.79	+1.21	0	-0.37	-0.37	+1.97	-1.26	+0.71	+1.55	+0.29
7 8	-0.89 +1.47	-0.18 -0.17	-1.07 +1.30	— —	-0.04 -0.04	-0.04 -0.04	— —	+0.69 +0.69	+0.69 +0.69	-0.42 +1.95	+1.88 -0.34
σ_5	+0.58	-0.35	+0.23	0	-0.08	-0.08	0	+1.38	+1.38	+1.53	+1.54
10 11	— —	+0.18 +0.19	+0.18 +0.19	+0.01 +2.43	-1.23 -1.22	-1.22 +1.21	— —	-0.54 -0.53	-0.54 -0.53	-1.58 +0.87	+1.14 -2.74
σ_7	0	+0.37	+0.37	+2.44	-2.45	-0.01	0	-1.07	-1.07	-0.71	-1.60
13 14	— —	-0.09 -0.09	-0.09 -0.09	-6.94 -3.42	+4.33 +4.33	-2.61 +0.91	-6.94 -3.42	+4.22 +4.21	-2.72 +0.79	-5.42 +1.61	+1.04 -0.43
σ_9	0	-0.18	-0.18	-10.36	+8.66	-1.70	-10.36	+8.43	-1.93	-3.81	+0.61
3 6 9 12 15	— -0.89 -1.73 — +0.94	+0.42 -0.55 +1.13 -0.19 +0.87	+0.42 -1.44 -0.60 -0.19 +1.81	— +1.74 +2.43 -4.36	-1.79 +0.45 -1.65 -0.72 +3.90	-1.79 +0.45 -0.09 -0.72 -0.46	— -1.92 -3.42 +4.40 -3.42	-1.62 -0.17 -0.31 -1.41 +4.44	-1.62 -2.09 -0.31 +3.00 +1.02	-2.99 -3.08 -0.82 +4.52 -2.37	+0.56 -1.84 +0.05 +0.99 +0.24
σ_{11}	-1.68	+1.68	0	-0.19	+0.19	0	-0.94	+0.94	0	0	0

6 12	-0.89 —	-0.55 -0.19	-1.44 -0.19	— +2.43	+0.45 -0.72	+0.45 +1.71	-1.92 +4.40	-0.17 -1.40	-2.09 +3.00		k_1	k_2	k_3	w_i	Δ	Контроль
σ_2	-0.89	-0.74	-1.63	+2.43	-0.27	+2.16	+2.48	-1.57	+0.91	N_1 E_1	+19.05	+1.41 -0.074	+16.06 -0.843	+1.10 -0.058	+37.62 -1.975	(-1.975)
9 15	-1.73 +0.94	+1.13 +0.87	-0.60 +1.81	+1.74 -4.36	-1.65 +3.90	+0.09 -0.46	— -3.42	-0.31 +4.44	-0.31 +1.02	N_2 ΣE_2		+29.05 +28.95	+30.58 +29.39 -1.015	+11.56 -11.48 -0.397	+72.60 +69.82 -2.412	(+69.82) (-2.412)
σ_4	-0.79	+2.00	+1.21	-2.62	+1.25	-0.37	-3.42	+4.13	+0.71	N_3 ΣE_3			+54.13 +10.76	-0.16 -12.73 +1.184	+100.61 -1.97 +0.183	(-1.97)
12 3	— —	-0.19 +0.42	-0.19 +0.42	+2.43 —	-0.72 -1.79	+1.71 -1.79	+4.40 —	-1.40 -1.62	+3.00 -1.62	k_i	-0.937	-1.599	+1.184			(-0.16)
σ_6	0	+0.23	+0.23	+2.43	-2.51	-0.08	+4.40	-3.02	+1.38							
15 6	+0.94 -0.89	+0.87 -0.55	+1.81 -1.44	-4.36 —	+3.90 +0.45	-0.46 +0.45	-3.42 -1.92	+4.44 -0.17	+1.02 -2.09							
σ_8	+0.05	+0.32	+0.37	-4.36	+4.35	-0.01	-5.34	+4.27	-1.07							
3 9	— -1.73	+0.42 +1.13	+0.42 -0.60	— +1.74	-1.79 -1.65	-1.79 -0.09	— —	-1.62 -0.31	-1.62 -0.31							
σ_{10}	-1.73	+1.55	-0.18	+1.74	-3.44	-1.70	0	-1.93	-1.93							
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6										
α	-1.80	+3.79	+0.58	-0.05	+1.73	-0.79										
β	-6.79	+2.62	-2.43	+6.80	-12.10	-12.47										
γ	-9.53	+5.39	-4.40	+5.34	-10.36	-10.38										

В общем же виде предыдущие формулы для коррелат и первичных поправок изобразятся так (ввиду их цикличности):

$$\text{коррелаты} \left\{ \begin{aligned} k_i &= -\frac{19w_i - w_{i+1} + 5w_{i+2} + 5w_{i+3} - w_{i+4}}{66} \\ k_6 &= -\frac{w_6}{15} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\text{поправки} \left\{ \begin{aligned} (3i-2) &= (3i-1) = k_i + k_6 \\ (3i) &= -k_{i-1} - k_{i+2} + k_6 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Во всех этих формулах (1) — (4): $i = 1, 2, \dots, 5$; $s = 1, 2, \dots, 15$; $r = 1, 3, 5, \dots, 11$. Кроме того: 1) если в (1) поправки $(3i+3)$ или $(3i+6) > 15$, то нужно взять соответственно $(3i-6)$ и $(3i-9)$; 2) если в (3) индексы при w : $i+1, i+2, \dots, i+4$, а также в (4) индексы при k : $i-1$ и $i+2$ оказываются больше 5, то их уменьшают на 5; 3) если в (4) индекс при k_{i-1} обращается в 0, то его увеличивают на целый период, т. е. на 5. Указанные правила вытекают из циклического характера формул (1), (3) и (4), имеющих циклы 5 и 15.

Получив общие формулы для коррелат и первичных поправок, мы можем считать нашу задачу законченной, так как все дальнейшие вычисления: составление полюсных уравнений, преобразование коэффициентов этих уравнений и нахождение вторичных поправок, — достаточно общеизвестны и изложены в общей теории двухгруппового уравнивания. Заметим только, что эти преобразования производятся по формулам (3), (4), причем ϕ_i получаются по формулам (1), (2), так как коэффициенты в уравнениях 1 группы равны ± 1 .

Ниже приводится формуляр уравнивательных вычислений геодезического пятиугольника.