

ТЕОРЕМЫ О ВЕРОЯТНЕЙШЕМ ЗНАЧЕНИИ УРАВНЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

В. С. НУВАРЬЕВ

Общие соображения

Уравненное по способу наименьших квадратов значение прямого наблюдения или функции прямых наблюдений всегда можно представить в виде линейной функции наблюдаемых величин, к которой приложима важная формула, доказанная Гауссом, Лапласом и позднейшими авторами, определяющая среднюю ошибку этой функции в виде

$$m_u^2 = F_x^2 m_x^2 + F_y^2 m_y^2 + \dots, \quad (1)$$

если

$$u = F(x, y, \dots).$$

В формуле (1) под $F_x, F_y, \dots$ подразумеваются частные производные u по $x, y, \dots$, а под $m_x, m_y, \dots$ — средние ошибки прямых независимых наблюдений $x, y, \dots$.

В основу второго доказательства способа наименьших квадратов Гауссом положено следующее соображение: если уравнения ошибок для определения m функций наблюдений

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i X + b_i Y + c_i Z + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (a)$$

умножить на некоторые положительные или отрицательные числа α_i , подчиняющиеся m условиям

$$[\alpha a] = 1; [\alpha b] = 0; [\alpha c] = 0, \dots, \quad (b)$$

то истинное значение

$$X = [x l] + [\alpha \varepsilon]$$

Так как член $[\alpha \varepsilon]$ неизвестен, приближенное значение x с ошибкой $u = [\alpha \varepsilon]$ будет иметь вид

$$x = [x l]. \quad (c)$$

Наилучшим определением Гаусс считает то, при котором

$$u^2 = [\alpha \varepsilon]^2 = \text{minimum}. \quad (d)$$

Выбором значений α_i , удовлетворяющих требованию (d) и уравнениям (b), значение x приближается к истинному значению X .

Выводы теорем о вероятнейшем значении уравненной величины искомого мы построили из соображения, противоположного описанному. Именно мы стремились вначале найти зависимость между истинными значениями искомого и величин, подлежащих измерению. Этот прием дал нам возможность получить формулы способа наименьших квадратов непосредственно из формулы средней квадратической ошибки функции прямых наблюдений.

Сообразно с изложенным, мы исходили из следующих условий:

1. Уравненное значение искомой величины вне зависимости от вида функции, связывающей её с наблюдениями, должно равняться истинному значению её, если наблюдения свободны от погрешностей.
2. Оно должно быть функцией всех наблюдений.
3. Уравненное значение должно лежать в возможно малой окрестности точного значения искомого, т. е. средняя ошибка уравненного значения искомого должна быть минимальной.

На наш взгляд, такой путь, от точного значения к приближенному, имеет некоторые логические преимущества. В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим существо доказательства, приведенного проф. А. С. Чеботаревым для метода условных наблюдений ¹⁾. Как известно, свободные члены условных уравнений определяются по формулам:

$$w_1 = a_0 + [a l]; w_2 = b_0 + [b l] \dots$$

Основой вывода является..... „зададимся целью найти при данных результатах измерений, и, значит, при данных невязках такие значения коэффициентов $k_1, k_2, \dots, k_r$, при которых функция u получится с наименьшей средней квадратической ошибкой...“

Может создаться впечатление, что множители k зависят от данных результатов измерений. Несомненно, они зависят только от коэффициентов уравнений и остаются постоянными для любого ряда измерений.

Теперь рассмотрим это доказательство с другой точки зрения. Пусть нами найдено приближенное значение x^0 , удовлетворяющее требованию $m_x^2 = \min$. Очевидно, мы с таким же основанием можем поставить эту задачу и в отношении остальных наблюдений. Допустим, что найдены последовательно все уравненные значения, за исключением последнего. Но тогда уравненное значение этого последнего наблюдения уже определено, так как оно может быть найдено путем подстановки $x^0, y^0, \dots$ в любое условное уравнение (стр. 348 указанного труда). Этим последним может быть любое из входящих в условные уравнения $x, y, \dots$, т. е. возникает некоторое затруднение: основой доказательства является узкая задача определения уравненного значения только одного наблюдения, но последовательное решение такой задачи, благодаря тому, что уравненные значения связаны точными условиями, уже сообщает последнему наблюдению вполне определенное значение. Иными словами, доказательство, основанное на решении изолированной задачи определения множителей k под условием, чтобы уравненное значение было определено с наименьшей средней квадратической ошибкой, на наш взгляд, не является достаточно строгим, например, при $r=1, n=2$.

Согласно условиям, которые нами положены в основу выводов, ищется связь между истинными значениями искомого и величинами, подлежащими измерению. При этом мы исходим из следующего: пусть имеется r точных условий, связывающих истинные значения подлежащих измерению величин

$$\begin{aligned} a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots + a_0 &= 0 \\ b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \dots + b_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Найдем из уравнений (2) истинное значение X_1 . Тогда

$$X_1^{(1)} = -\frac{1}{a} ([aX]_1 + a_0) \quad X_1^{(2)} = -\frac{1}{b} ([bX]_1 + b_0) \dots, \quad (3)$$

где под $[aX]_1$ подразумевается сумма произведений $a_i X_i$ без $a_1 X_1$ и т. д.

¹⁾ А. С. Чеботарев. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. 1936, стр. 349.

Согласно п. 2 определенных нами условий, искомый результат должен быть функцией всех подлежащих измерению величин. Это осуществится, если к выражениям (3) добавить $X_1 = X_1^{(0)}$. Несомненно, $X_1 = X_1^{(0)} = X_1^{(1)} = \dots = X_1^{(r)}$. Умножим X_1 на $p_1^{(0)}$, а $X_1^{(1)}, X_1^{(2)} \dots$ соответственно на неопределенные множители $p_1^{(1)}, p_1^{(2)} \dots$. Тогда истинное значение X_1 может быть представлено в виде

$$X_1 = X_1^{(0)} p_1^{(0)} + [X_1^{(j)} p_1^{(j)}], (j = 1, 2, \dots, r) \quad (4)$$

Последнее уравнение имеет смысл только при условии

$$[p_1^{(s)}] = p_1^{(0)} + [p_1^{(j)}] = 1 \quad (5)$$

Можно было бы представить X_1 в виде

$$X_1 = \frac{X_1^{(0)} p_1^{(0)} + [X_1^{(j)} p_1^{(j)}]}{r + 1}, \quad (6)$$

но тогда

$$[p_1^{(s)}] = r + 1 \quad (7)$$

Итак, из уравнения (4) следует, что

$$X_1 = F(X_1^{(s)} p_1^{(s)}); \quad (i = 1, 2, \dots, n; s = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (8)$$

Выражение (8) дает истинное значение X_1 при любых значениях $p_1^{(s)}$, удовлетворяющих уравнению (5). Если в (3) вместо истинных значений X_i подставить измеренные значения l_i , то уравнение (8) даст приближенное значение x_1 , зависящее от выбора множителей $p_1^{(s)}$.

Найдем совокупность значений $p_1^{(s)}$ под условием

$$m_{X_1}^2 = \text{minimum}. \quad (9)$$

Допустим, что $X_1, X_2, \dots$ будут найдены из измерений с средними ошибками $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots$. Тогда для решения поставленной задачи необходимо написать выражение

$$m_{x_1}^2 = f(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}, p_1^{(0)}, p_1^{(1)}, \dots, p_1^{(r)}) \quad (10)$$

и приравнять частные производные уравнения (10) по $p_1^{(s)}$ частным производным по $p_1^{(s)}$ уравнения (5), умноженного на $2k_1$. Полученные $r + 1$ уравнений, вместе с уравнением (5), дадут возможность найти $r + 1$ множителей $p_1^{(s)}$ и корреляту k_1 . Подставив $p_1^{(s)}$ в уравнение (4), мы, имея в виду равенства (3), получим истинное значение X_1 в функции истинных значений всех подлежащих измерению величин l_i и множителей $p_1^{(s)}$.

Заметим, что мы исходили только из системы условных уравнений (2). Выражение (4) может быть написано для каждого значения X_i , и подстановка X_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) в уравнения (2) не влияет на значение X_n , чем устраняется указанное выше затруднение. В этом мы видим преимущества метода рассуждения „от точного к приближенному“.

Теорема о вероятнейшем значении прямых наблюдений, связанных r точными условиями

Теорема 1. Вероятнейшее значение каждой из n наблюдаемых величин, связанных r точными условиями ($n > r$), может быть представлено в виде арифметической середины из результата прямого измерения искомой величины и зависимых значений ее, полученных из r совместных решений уравнений или доставляемых каждым условным уравнением, с весами, подчиняющимися требованию наибольшего веса искомого.

Первое доказательство. Использование значений, полученных из каждого условного уравнения ¹⁾

Возьмем для упрощения выкладок два условных уравнения с четырьмя неизвестными ²⁾

$$\begin{aligned} a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_0 &= 0 \\ b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_0 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Решим каждое из уравнений (11) относительно X_1 ; тогда, если бы наблюдения были свободны от погрешностей, истинное значение X_1 можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_1^{(0)} &= X_1 \\ X_1^{(1)} &= -\frac{1}{a_1} ([aX]_1 + a_0) \\ X_1^{(2)} &= -\frac{1}{b_1} ([bX]_1 + b_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Умножив равенства (12) на множители $p_1^{(0)}, p_1^{(1)}, p_1^{(2)}$, удовлетворяющие условию

$$[p_1^{(s)}] = 1, \quad (s = 0, 1, 2), \quad (13)$$

истинное значение $X_1 = X_1^{(0)}$ можно представить в виде

$$X_1 = X_1^{(0)} p_1^{(0)} + X_1^{(1)} p_1^{(1)} + X_1^{(2)} p_1^{(2)}. \quad (14)$$

Если в правую часть уравнений (12) подставим измеренные значения l_i , то на основании (14) получим приближенное значение x_1 величины X_1

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 p_1^{(0)} - \left(\frac{a_2}{a_1} p_1^{(1)} + \frac{b_2}{b_1} p_1^{(2)} \right) l_2 - \left(\frac{a_3}{a_1} p_1^{(1)} + \frac{b_3}{b_1} p_1^{(2)} \right) l_3 - \\ &\quad - \left(\frac{a_4}{a_1} p_1^{(1)} + \frac{b_4}{b_1} p_1^{(2)} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Допустим, что все наблюдения равноточны ³⁾; тогда, полагая $m = 1$, будем иметь

$$m_{x_1}^2 = (p_1^{(0)})^2 + \frac{[a^2]_1}{a_1^2} (p_1^{(1)})^2 + \frac{[b^2]_1}{b_1^2} (p_1^{(2)})^2 + 2 \frac{[ab]_1}{a_1 b_1} p_1^{(1)} p_1^{(2)} \quad (16)$$

Пусть $m_{x_1}^2 = \text{minimum}$.

Тогда, умножив уравнение (13) на $2k_1$, дифференцируя $2k_1 [p_1^{(s)}]$ и уравнение (16) по переменным $p_1^{(s)}$ и приравнявая дифференциалы по каждому переменному, получим:

$$\begin{aligned} \frac{[a^2]_1}{a_1^2} p_1^{(1)} + \frac{[ab]_1}{a_1 b_1} p_1^{(2)} &= k_1 \\ \frac{[ab]_1}{a_1 b_1} p_1^{(1)} + \frac{[b^2]_1}{b_1^2} p_1^{(2)} &= k_1, \end{aligned} \quad (17)$$

¹⁾ Для этого необходимо, чтобы в каждое условное уравнение входили все подлежащие измерению величины $X_1, X_2, \dots, X_n$.

²⁾ Количество уравнений и неизвестных не влияет на методику вывода, т. е. выбор двух уравнений не мешает общности доказательства.

³⁾ При неравноточных наблюдениях существо вопроса не меняется.

откуда

$$\begin{aligned} p_1^{(0)} &= k_1; \quad p_1^{(1)} = k_1 \frac{A_1}{D}; \quad p_1^{(2)} = k_1 \frac{A_2}{D} \\ A_1 &= \frac{[b^2]_1}{b_1^2} - \frac{[ab]_1}{a_1 b_1}; \quad D = \frac{[a^2]_1 [b^2]_1 - [ab]_1^2}{a_1^2 b_1^2} \\ A_2 &= \frac{[a^2]_1}{a_1^2} - \frac{[ab]_1}{a_1 b_1}; \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив значения $p_1^{(s)}$ в уравнение (13), на основании (18), получим

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{D}{D + A_1 + A_2} \\ p_1^{(0)} &= \frac{D}{D + A_1 + A_2}; \quad p_1^{(1)} = \frac{A_1}{D + A_1 + A_2}; \quad p_1^{(2)} = \frac{A_2}{D + A_1 + A_2} \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом мы нашли выражения p , имеющие смысл весов, с которыми входят в арифметическую среднюю (14) результат прямого измерения и зависимые значения его, полученные из каждого условного уравнения.

Покажем, что выражение уравненного по формулам (12)–(19) значения x_1 может быть приведено к обычному выводу x_1^0 , получаемому через коррелаты.

Прибавим к правой части второго и третьего уравнений (12) $0 = X_1 - X_1$; тогда для истинных значений $X_1^{(s)}$ будем иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned} X_1^{(0)} &= X_1, \\ X_1^{(1)} &= X_1 - \frac{1}{a_1} ([aX] + a_0) \\ X_1^{(2)} &= X_1 - \frac{1}{b_1} ([bX] + b_0). \end{aligned}$$

Умножив эти значения на множители $p_1^{(s)}$, подчиненные условиям (13) и $m_x^2 = \min$, и заменив в правой части X_i через l_i , получим

$$x_1^0 = l_1 - \frac{w_1}{a_1} p_1^{(1)} - \frac{w_2}{b_1} p_1^{(2)},$$

где w_1, w_2 — свободные члены условных уравнений (11). Тогда поправка к наблюдаемому значению l_1 будет равна

$$v_1 = x_1^0 - l_1 = - \left(\frac{w_1}{a_1} p_1^{(1)} + \frac{w_2}{b_1} p_1^{(2)} \right) \quad (20)$$

На основании (18) и (19) имеем

$$D + A_1 + A_2 = \frac{[a^2]_1 [b^2]_1 - [ab]_1^2 + [b^2]_1 a_1^2 + [a^2]_1 b_1^2 - 2 [ab]_1 a_1 b_1}{a_1^2 b_1^2}$$

Добавим к числителю тождество; $0 = a_1^2 b_1^2 - a_1^2 b_1^2$; тогда

$$D + A_1 + A_2 = \frac{1}{a_1^2 b_1^2} ([aa] [bb] - [ab]^2) = \frac{1}{a_1^2 b_1^2} D_0 \quad (21)$$

Известно, что D_0 есть определитель системы нормальных уравнений, соответствующих условным уравнениям (11).

Имея в виду (18), (19) и (21), значение поправки v_1 из (20) найдем в виде

$$v_1 = -\frac{1}{D_0} \left\{ \frac{w_1}{a_1} ([b^2] a_1^1 - [ab] a_1 b_1) + \frac{w_2}{b_1} ([a^2] b_1^2 - [ab] a_1 b_1) \right\}$$

Добавим к каждому, стоящему в скобках выражению $0 = a_1^2 b_1^2 - a_1^2 b_1^2$, тогда

$$v_1 = -\frac{1}{D_0} \left\{ w_1 ([b^2] a_1 - [ab] b_1) + w_2 ([a^2] b_1 - [ab] a_1) \right\} \quad (22)$$

Но формула (22) представляет собой выражение поправки, найденной через коррелаты, чем и доказывается возможность использования арифметической середины из прямого измерения искомой величины и косвенных значений ее, найденных из каждого условного уравнения, с весами, подчиняющимися требованию наибольшего веса искомого.

Применим найденные формулы к рассмотрению частного примера.

Пусть имеется система условных уравнений

$$\begin{aligned} -4 X_1 + X_2 + 2 X_3 + X_4 + a_0 &= 0 \\ 5 X_1 - 2 X_2 + X_3 + 2 X_4 + b_0 &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Допустим, что значения X_i равны:

	X_1	X_2	X_3	X_4
Истинные X_i	6	8	4	9
Измеренные l_i	5	7	4	11

Тогда $a_0 = -1$; $b_0 = -36$; $w_1 = [a l] + a_0 = 5$; $w_2 = 1$.

Решая систему (23) по способу наименьших квадратов, найдем:

$v_1 = +0,45$, т. е. уравненное значение

$$x_1^0 = 5,45$$

со средней ошибкой $m_{x_1^0}^2 = 0,118$.

Применим к этому же примеру выведенные нами формулы.

Вставляя в уравнения (12) данные непосредственных измерений, получим следующие значения для x_1 :

$$l_1 = 5; \quad x_1^{(1)} = -\frac{1}{a_1} ([a l]_1 + a_0) = 6,25; \quad x_1^{(2)} = -\frac{1}{b_1} ([b l]_1 + b_0) = 4,80.$$

По формулам (18) и (19) значения $p_1^{(s)}$ равны:

$$p_1^{(0)} = 0,118; \quad p_1^{(1)} = 0,434; \quad p_1^{(2)} = 0,448$$

Уравненное значение по формуле (14) $x_1^0 = 5,425$.

Подставляя $p_1^{(s)}$ в (16), найдем

$$m_x^2 = (0,118)^2 + \frac{6}{16} (0,434)^2 - \frac{9}{25} (0,448)^2 - \frac{2}{10} (0,434 \times 0,448) = 0,1181,$$

т. е. мы получим прежний результат.

В данном случае мы искали уравненное значение x_1^0 . Однако можно использовать эти же формулы, поставив задачу определения поправки к непосредственному измерению. Уравненное значение x_1^0 найдется из (14):

$$x_1^0 = l_1 p_1^{(0)} + x_1^{(1)} p_1^{(1)} + x_1^{(2)} p_1^{(2)}. \quad (24)$$

Выражения (12) для $X_1^{(1)}$ и $X_1^{(2)}$ можно преобразовать, прибавив к правым частям $0 = X_1 - X_1$. Тогда равенства (12) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} X_1^{(0)} &= X_1 \\ X_1^{(1)} &= X_1 - \frac{1}{a_1} ([aX] + a_0) \\ X_1^{(2)} &= X_1 - \frac{1}{b_1} ([bX] + b_0). \end{aligned}$$

Если же в правых частях заменим истинное значение X_1 через наблюдаемое значение l_1 , то получим:

$$x_1 = l_1; x_1^{(1)} = l_1 - \frac{w_1}{a_1}; x_1^{(2)} = l_1 - \frac{w_2}{b_1}. \quad (25)$$

На основании (24) и (13)

$$v_1 = x_1^0 - l_1 = -\left(\frac{w_1}{a_1} p_1^{(1)} + \frac{w_2}{b_1} p_1^{(2)}\right). \quad (26)$$

Так как в данном примере $w_1 = 5$, $w_2 = 1$, то

$$v_1 = -\left(-\frac{5}{4} 0,434 + \frac{1}{5} 0,448\right) = 0,452,$$

что согласуется с поправкой, найденной через коррелаты. Известно, что уравненное значение $x_i^{(0)}$ можно выразить через переходные коэффициенты r_j в следующем виде:

$$x_i^0 = l_i + [rw].$$

Сравнивая это выражение с (26), находим, что веса, с которыми входят в арифметическую среднюю значения $x_1^{(s)}$, полученные из каждого условного уравнения, равны

$$p_1^{(1)} = -a_1 r_1; \quad p_1^{(2)} = -b_1 r_2. \quad (27)$$

Второе доказательство. Использование значений, полученных из совместного решения условных уравнений

Приложим приведенные в предыдущем параграфе соображения для построения доказательства первой теоремы в случае, когда зависимые значения искомого получены из совместного решения условных уравнений.

Найдем значение X_1 из совместного решения¹⁾ уравнений (11), для чего решим систему (11) сначала относительно x_1 и x_2 ; тогда

$$X_{12} = \left\{ (a_2 b_3 - b_2 a_3) X_3 + (a_2 b_4 - a_4 b_2) X_4 + (a_2 b_0 - b_2 a_0) \right\} \frac{1}{D_{12}}$$

¹⁾ Такое решение возможно, если ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

равен рангу матрицы

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_0 \end{pmatrix}$$

Точно так же, решая системы (11) относительно X_1 и X_3 , получим:

$$X_{13} = \frac{1}{D_{13}} \left\{ (a_3 b_2 - b_3 a_2) X_2 + (a_3 b_4 - b_3 a_4) X_4 + (a_3 b_0 - b_3 a_0) \right\}.$$

Тогда левые части равенства (28) представят собой истинные значения X_i , если в правой части под X_i подразумевать истинные значения

$$\begin{aligned} X_1 \\ X_{12} &= \frac{1}{D_{12}} (D_{23} X_4 + D_{24} X_4 + D_{20}) \\ X_{13} &= \frac{1}{D_{13}} (-D_{23} X_2 + D_{34} X_4 + D_{30}) \end{aligned} \quad (28)$$

Умножим выражения (28) соответственно на множители p_1, p_2, p_3 ; тогда истинное значение X_1 примет вид

$$X_1 = X_1 p_1 + X_{12} p_2 + X_{13} p_3, \quad (29)$$

если множители p_1, p_2, p_3 подчинить условию

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1. \quad (30)$$

На основании (29) и (28) имеем

$$\begin{aligned} X_1 &= p_1 X_1 - \frac{D_{23}}{D_{13}} p_3 X_2 + \frac{D_{23}}{D_{12}} p_2 X_3 + \left(-\frac{D_{24}}{D_{12}} p_2 + \frac{D_{34}}{D_{13}} p_3 \right) X_4 + p_2 \frac{D_{20}}{D_{12}} + \\ &+ p_3 \frac{D_{30}}{D_{13}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом мы представили X_1 в виде линейной функции величин, подлежащих измерению. Если в правую часть уравнения (31) подставить измеренные значения величин X_i , то уравнение (31) определит приближенное значение x_1 с средней квадратической ошибкой, зависящей от системы множителей p_i . Наивыгоднейшим значением x_1 будет значение, при котором оно минимально уклоняется от X_1 , т. е. когда

$$m_{x_1}^2 = \text{minimum};$$

для случая равноточных значений, значит—при $m^2 = 1$,

$$m_{x_1}^2 = p_1^2 + \frac{D_{23}^2 + D_{24}^2}{D_{12}^2} p_2^2 + \frac{D_{23}^2 + D_{34}^2}{D_{13}^2} p_3^2 + 2 \frac{D_{24} D_{34}}{D_{12} D_{13}} p_2 p_3 = \min \quad (32)$$

Умножим условное уравнение (30) на неопределенный пока множитель $2k$ и частные производные уравнения (32) по переменным p_i приравняем частным производным выражения $2k [p]$ по этим же переменным.

Тогда

$$\begin{aligned} p_1 &= k; \\ \frac{1}{D_{12}^2} (D_{23}^2 + D_{24}^2) p_2 + \frac{D_{24} D_{34}}{D_{12} D_{13}} p_3 &= k \\ \frac{D_{24} D_{34}}{D_{12} D_{13}} p_2 + \frac{1}{D_{13}^2} (D_{23}^2 + D_{34}^2) p_3 &= k. \end{aligned} \quad (33)$$

Решение двух последних уравнений дает

$$p_2 = \frac{1}{D_0} \left\{ \frac{1}{D_{13}^2} (D_{23}^2 + D_{34}^2) - \frac{D_{24} D_{34}}{D_{12} D_{13}} \right\} k = \frac{D_2}{D_0} k$$

$$p_3 = \frac{1}{D_0} \left\{ \frac{1}{D_{12}^2} (D_{23}^2 + D_{24}^2) - \frac{D_{24} D_{34}}{D_{12} D_{13}} \right\} k = \frac{D_3}{D_0} k$$

Подставляя значения p_i в (30), имеем:

$$k = \frac{D_0}{D_0 + D_2 + D_3},$$

тогда

$$p_1 = \frac{D_0}{N}$$

$$p_2 = \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{D_{13}^2} (D_{23}^2 + D_{34}^2) - \frac{D_{24} D_{34}}{D_{12} D_{13}} \right\}$$

$$p_3 = \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{D_{12}^2} (D_{23}^2 + D_{24}^2) - \frac{D_{24} D_{34}}{D_{12} D_{13}} \right\},$$

где D_0 — определитель системы (33), а $N = D_0 + D_2 + D_3$.
Найдем значения D_0 и N .

$$D_0 = \frac{1}{D_{12}^2 D_{13}^2} (D_{23}^2 + D_{24}^2)(D_{23}^2 + D_{34}^2) - \frac{D_{24}^2 D_{34}^2}{D_{12}^2 D_{13}^2}$$

$$D_0 = \frac{D_{23}^2}{D_{12}^2 D_{13}^2} (D_{23}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2)$$

$$N = \frac{1}{D_{12}^2 D_{13}^2} \left\{ (D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{23}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2) D_{23}^2 + (D_{12} D_{34} - D_{13} D_{24})^2 \right\},$$

но

$$D_{12} D_{34} - D_{13} D_{24} = -D_{23} D_{14} \quad (34)$$

или

$$N = \frac{D_{12}^2 D_{13}^2}{D_{12}^2 D_{13}^2},$$

где

$$D = D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{14}^2 + D_{23}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2 \quad (35)$$

Как мы увидим впоследствии, D есть определитель системы нормальных уравнений, соответствующих данной системе условных уравнений.

Используя значения D_0 и N , преобразуем выражения p_i :

$$p_1 = \frac{D_{22}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2}{D};$$

$$p_2 = \frac{D_{12}^2 D_{13}^2}{D D_{23}^2} \left\{ \frac{1}{D_{13}^2} (D_{23}^2 + D_{34}^2) - \frac{D_{24} D_{34}}{D_{12} D_{13}} \right\};$$

$$p_3 = \frac{D_{12}^2 D_{13}^2}{D D_{23}^2} \left\{ \frac{1}{D_{12}^2} (D_{23}^2 + D_{24}^2) - \frac{D_{24} D_{34}}{D_{12} D_{13}} \right\}.$$

Произведя умножение и имея в виду (35), найдем значения p_i в окончательном виде:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{D} (D_{23}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2); \\ p_2 &= \frac{D_{12}}{D D_{23}} (D_{12} D_{23} - D_{14} D_{34}); \\ p_3 &= \frac{D_{13}}{D D_{23}} (D_{13} D_{23} + D_{14} D_{24}). \end{aligned} \quad (36)$$

Формулы (36) решают задачу отыскания множителей, имеющих смысл весов, с которыми входят в арифметическую среднюю (29) непосредственно измеренное значение l_1 и значения x_{12} и x_{13} , полученные из решения условных уравнений. При этом p_i отвечает условиям: $m_{x_1}^2 = \min$ и $[p] = 1$. Если бы мы взяли случай неравноточных измерений, то средняя квадратическая ошибка (32) имела бы вид

$$m_{x_1}^2 = p_1^2 m_{x_1}^2 + \frac{D_{23}^2 m_{x_3}^2 + D_{24}^2 m_{x_4}^2}{D_{23}^2} p_2^2 + \dots$$

т. е. изменились бы частные производные $m_{x_1}^2$ по p_i , но общий ход решения остался бы прежним.

Мы рассмотрели вопрос отыскания множителей p_i , которые определяют уравненное значение x с наименьшей средней квадратической ошибкой или с наибольшим весом. При этом выводе мы исходили из средней квадратической ошибки сложного отклонения, являющегося линейной функцией отдельных отклонений, подчиняющихся нормальному закону распределения.

Покажем, что результаты уравнивания по формулам (31)–(36) и по методу условных наблюдений способа наименьших квадратов совпадают, т. е. уравненные значения измеренных величин в обоих случаях будут равны.

Из общей теории способа наименьших квадратов известно, что уравненное значение x_1^0 измеренной величины x_1 можно представить в виде:

$$x_1^0 = (1 + a_1 r_1 + b_1 r_2 + \dots) l_1 + (0 + a_2 r_1 + b_2 r_2 + \dots) l_2 + \dots + a_0 r_1 + b_0 r_2 + \dots$$

или, вводя обозначения

$$F_1 = 1 + a_1 r_1 + b_1 r_2 + \dots \quad F_2 = 0 + a_2 r_1 + b_2 r_2 + \dots,$$

получим:
$$x_1^0 = \sum F_i l_i + a_0 r_1 + b_0 r_2, \quad (37)$$

где $r_1, r_2, \dots$ — переходные коэффициенты, определяемые уравнениями:

$$\begin{cases} [aa] r_1 + [ab] r_2 + \dots + a_1 = 0 \\ [ab] r_1 + [bb] r_2 + \dots + b_1 = 0. \end{cases} \quad (38)$$

Из формулы (31) следует, что

$$x_1^0 = p_1 l_1 - \frac{D_{23}}{D_{13}} p_3 l_2 + \dots + p_2 \frac{D_{20}}{D_{12}} + p_3 \frac{D_{30}}{D_{13}},$$

т. е. мы решим поставленную задачу, если докажем, что

$$F_1 = p_1; \quad F_2 = -\frac{D_{23}}{D_{13}} p_3; \quad F_3 = \frac{D_{23}}{D_{12}} p_2; \quad F_4 = \frac{D_{24}}{D_{12}} p_2 + \frac{D_{34}}{D_{13}} p_3; \quad (39)$$

$$a_0 r_1 + b_0 r_2 = \frac{D_{20}}{D_{12}} p_2 + \frac{D_{30}}{D_{13}} p_3.$$

В этом случае значения x_i^0 по формуле (37) и по формуле (31) совпадут.

Приведем уравнение (37), определяющее уравненное по способу наименьших квадратов значение x_i^0 , к иному виду.

Переходные коэффициенты r_1 и r_2 из (38) равны

$$r_1 = \frac{1}{D} ([ab] b_1 - [bb] a_1)$$

$$r_2 = \frac{1}{D} ([ab] a_1 - [aa] b_1). \quad (40)$$

Тогда

$$F_1 = \frac{1}{D} (D + a_1 b_1 [ab] - a_1^2 [bb] + a_1 b_1 [ab] - b_1^2 [aa]).$$

Преобразуем стоящее в скобках выражение. После умножения, приведения подобных членов, опуская подробности, получим стоящие в скобке выражения в виде

$$D_{23}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2. \quad (41)$$

На этих же основаниях

$$D = D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{14}^2 + D_{23}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2$$

или

$$F_1 = \frac{D_{23}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2}{D} \quad (42)$$

Из (37) и (40) найдем

$$F_2 = \frac{1}{D} \{ a_2 b_1 [ab] - a_1 a_2 [bb] - a_1 b_2 [ab] - b_1 b_2 [aa] \}.$$

После указанных выше действий по преобразованию выражения F_1 для F_2 , F_3 и F_4 получим следующие значения:

$$F_2 = -\frac{1}{D} (D_{13} D_{23} + D_{14} D_{24});$$

$$F_3 = \frac{1}{D} (D_{12} D_{23} - D_{14} D_{34}); \quad (43)$$

$$F_4 = \frac{1}{D} (D_{12} D_{24} + D_{13} D_{34}).$$

Теперь перейдем к последним членам правой части уравнения (37). После подстановки значений r_1 , r_2 и проведения необходимых действий $a_0 r_1 + b_0 r_2$ приводится к виду

$$a_0 r_1 + b_0 r_2 = \frac{1}{D} (D_{20} D_{12} + D_{30} D_{13} + D_{40} D_{14}). \quad (44)$$

Здесь необходимо напомнить, что D_{ik} есть определитель системы двух условных уравнений, когда они решаются относительно неизвестных с номером i и k . Символ D_{i0} (по аналогии с D_{ik}) мы можем назвать определителем той же системы, составленным из коэффициентов при x_i и точных чисел a_0 и b_0 , входящих в систему условных уравнений (11).

Обратимся теперь к формуле (31), определяющей уравненное значение x_1^0 под условием

$$m_{x_1}^2 = \text{minimum}.$$

Если бы в (31) X_i заменить через измеренные значения l_i , то условиями совпадения результатов уравнивания по формуле (31) и по формулам метода условных наблюдений будут равенства (39).

Из сравнения (42) и (36) мы сразу находим, что

$$F_1 = p_1.$$

Докажем также, что коэффициент при X_2 в уравнении (31) будет равен F_2 в уравнении (37), т. е.

$$-\frac{D_{23}}{D_{13}} p_3 = F_2 = ?$$

На основании (31) и (36) имеем:

$$-\frac{D_{23}}{D_{13}} p_3 = -\frac{1}{D} (D_{13} D_{23} + D_{14} D_{24}). \quad (45)$$

Точно так же

$$\frac{D_{23}}{D_{12}} p_2 = \frac{1}{D} (D_{12} D_{23} - D_{14} D_{34}); \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_{24}}{D_{12}} p_2 + \frac{D_{34}}{D_{13}} p_3 &= \frac{D_{24}}{D_{23} D} (D_{12} D_{23} - D_{14} D_{34}) + \frac{D_{34}}{D_{23} D} (D_{13} D_{23} + \\ &+ D_{14} D_{24}) = \frac{1}{D} (D_{12} D_{24} + D_{13} D_{34}). \end{aligned} \quad (47)$$

Сравнивая (45), (46), (47) и (48), находим, что коэффициенты при l_i в уравнениях (31) и (37) одинаковы.

Преобразуем последние два члена уравнения (31).

$$Q = \frac{D_{20}}{D_{12}} p_2 + \frac{D_{30}}{D_{13}} p_3 = \frac{D_{20}}{D_{23} D} (D_{12} D_{23} - D_{14} D_{34}) + \frac{D_{30}}{D_{23} D} (D_{13} D_{23} + D_{14} D_{24});$$

$$Q = \frac{1}{D} \left\{ D_{20} D_{12} + D_{30} D_{13} + \frac{D_{14}}{D_{23}} (D_{30} D_{24} - D_{20} D_{34}) \right\};$$

$$\begin{aligned} D_{30} D_{24} - D_{20} D_{34} &= (a_3 b_0 - b_3 a_0) (a_2 b_4 - a_4 b_2) - (a_2 b_0 - b_2 a_0) (a_3 b_4 - a_4 b_3) = \\ &= -a_2 b_3 b_4 a_0 - a_3 a_4 b_2 b_0 + a_3 b_2 b_4 a_0 + a_2 a_4 b_3 b_0 = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) (a_4 b_0 - b_4 a_0) = D_{23} D_{40}. \end{aligned}$$

Вставляя в Q полученное значение скобки, имеем:

$$Q = \frac{D_{20}}{D_{12}} p_2 + \frac{D_{30}}{D_{13}} p_3 = \frac{1}{D} (D_{20} D_{12} + D_{30} D_{13} + D_{40} D_{14}). \quad (48)$$

Замечаем, что выражения (48) и (44) совпадают, т. е. равенства (39) подтверждающие идентичность результатов уравнивания под условием, минимума суммы квадратов поправок и по формулам теоремы 1-ой, доказаны. В этом доказательстве мы опустили громоздкие алгебраические преобразования.

Рассмотрим выражение (31)

$$X_1 = p_1 X_1 - \frac{D_{23}}{D_{13}} p_2 X_2 + \dots + p_2 \frac{D_{20}}{D_{12}} + p_3 \frac{D_{30}}{D_{13}},$$

где $D_{12}, D_{23}, \dots, D_{30}$ есть определители системы условных уравнений

$$[a_i X_i] + a_0 = 0$$

$$[b_i X_i] + b_0 = 0,$$

если определять из них соответственно $X_1, X_2, \dots, X_2, X_3, \dots, X_3, a_0, b_0$ (символы D_{20}, D_{30} введены для симметрии), а p_i подчиняются уравнению $[p] = 1$.

Нами доказано, что x_1^0 из (31) будет иметь значение, совпадающее с уравненным по способу наименьших квадратов значением x_1^0 , если $m_{x_1}^2 = \min$.

Подставляя в (28) и (29) вместо истинных значений X_i измеренные значения l_i , получим значения x_1, x_{12}, x_{13}

$$x_1 = l_1; \quad x_{12} = \frac{1}{D_{12}} (D_{23} l_3 + D_{21} l_1 + D_{20}); \quad x_{13} = \frac{1}{D_{13}} (-D_{23} l_2 + D_{34} l_4 + D_{30}), \quad (a)$$

и уравненное по способу наименьших квадратов значение x_1^0

$$x_1^0 = x_1 p_1 + x_{12} p_2 + x_{13} p_3, \quad (b)$$

где система p_i удовлетворяет условиям $[p] = 1$ и

$$m_{x_1}^2 = \text{minimum}$$

Из рассмотрения выражений (a) и (b) следует, что x_1^0 представляет собою общую арифметическую средину из зависимых величин, так как в определение значений x_{12} и x_{13} входит одна и та же измеренная величина l_4 .

Такое же заключение мы можем сделать из формулы (12 и (14).

Пример уравнивания по формулам (29)–(36)

Возьмем систему условных уравнений

$$-4 X_1 + X_2 + 2 X_3 + X_4 + a_0 = 0,$$

$$5 X_1 - 2 X_2 + X_3 + 2 X_4 + b_0 = 0.$$

Допустим, что истинные значения X_i равны соответственно 6, 8, 4, 9; тогда

$$-4 X_1 + X_2 + 2 X_3 + X_4 - 1 = 0,$$

$$5 X_1 - 2 X_2 + X_3 + 2 X_4 - 36 = 0. \quad (a)$$

Уравнения (38) для определения переходных коэффициентов будут иметь вид

$$\begin{array}{l|l} +22 r_1 - 18 r_2 - 4 = 0 & r_1 = \frac{23}{212}; \quad r_2 = \frac{-19}{212}. \\ -18 r_1 + 34 r_2 + 5 = 0 & \end{array}$$

Уравненное по способу наименьших квадратов значение x_1^0 через переходные коэффициенты (форм. 37) может быть выражено так:

$$x_1^0 = [Fl] + a_0 r_1 + b_0 r_2,$$

где

$$F_1 = 1 + a_1 r_1 + b_1 r_2; \quad F_2 = 0 + a_2 r_1 + b_2 r_2 \dots \dots$$

Для наглядности зададимся наблюдаемыми значениями l_i и подсчитаем уравненное значение x_1^0 через F_i . Пусть

	a	b	Li	li	al	bl	F_i	$F_i l_i$
1	-4	5	6	5	-20	25	0,120	0,600
2	1	-2	8	7	7	-14	0,288	2,015
3	2	1	4	4	8	4	0,127	0,508
4	1	2	9	11	11	22	-0,071	-0,781
					6	37		2,347

$$a_0 r_1 + b_0 r_2 = 3,118$$

$$x_1^0 = 5,46$$

$$m^2_{x_1} = [F^2] = 0,1184$$

Решим эту же задачу через корреляты.

Свободные члены условных уравнений будут равны

$$w_1 = [al] + a_0 = 5, \quad w_2 = [bl] + b_0 = 1.$$

Тогда

$$\begin{array}{l|l} 22k_1 - 18k_2 + 5 = 0 \\ 18k_1 + 34k_2 + 1 = 0 \end{array} \quad \left| \quad k_1 = -\frac{188}{424}; \quad k_2 = -\frac{112}{424} \right.$$

$$v_1 = +0,45, \quad x_1^0 = 5,45.$$

Теперь применим формулы, выведенные нами при втором доказательстве теоремы 1. Из формулы (28) следует, что решение системы (а) дает следующие значения X_i :

$$\begin{aligned} X_{12} &= \frac{1}{D_{12}} (D_{23} X_3 + D_{24} X_4 + D_{20}) \\ X_{13} &= \frac{1}{D_{13}} (-D_{23} X_2 + D_{34} X_4 + D_{30}) \end{aligned} \quad (b)$$

Подсчитаем определители системы (а)

	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{23}	D_{24}	D_{34}	$[D^2]$
D_i	3	-14	-13	5	4	3	—
D^2_i	9	196	169	25	16	9	424

Зададимся вначале целью определить истинное значение X , удовлетворяющее первому и второму условиям (общие соображения). Для этого выберем из системы (49), допустим, первые m уравнений и найдем значение X_1 неизвестного X из алгебраического решения их. Тогда

$$X_1 = f_1(L_i); \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (50)$$

Но это же значение мы можем получить, отбросив одно из первых m уравнений и прибавив одно, допустим, $m+1$ уравнение. Тогда истинное значение X может быть представлено в виде

$$X_2 = f_2(L_i); \quad (i = 1, 2, \dots, m-1, m+1) \quad (51)$$

Заранее оговоримся, что результат уравнивания не зависит от того, какие из уравнений войдут в каждую комбинацию. Единственным условием каждой новой комбинации является ограничение, чтобы в нее входило одно неиспользованное ранее уравнение. Очевидно, при этом условии количество всех комбинаций будет $n-m+1$.

Ниже мы покажем, что $n-m+1$ комбинаций необходимо и достаточно. Использование всех сочетаний (по теореме Якоби) или же $n-m+2$ сочетаний приведет определитель системы уравнений (63) к нулю, т. е. эти уравнения имеют более, чем одну систему решений.

Покажем, что из уравнений (49) всегда можно получить $n-m+1$ необходимых решений. Это следует из доказательства положения: в матрице с n строками и m столбцами ($n > m$), каждая из $m-1$ строк которой не имеет линейной зависимости с другими строками матрицы, количество отличных от нуля детерминантов m порядка не может быть меньше $n-m+1$.

Доказательство: переставим строки матрицы так, чтобы первые $m-1$ строк не имели бы линейной зависимости с другими строками. Тогда каждая из $n-m+1$ других строк матрицы даст с первыми $m-1$ строками $n-m+1$ отличных от нуля детерминантов. В уравнениях погрешностей (49) количество строк, не имеющих линейной зависимости с другими строками, всегда $\geq m$, т. е. всегда можно получить более $n-m+1$ решений.

$$\text{Очевидно, } X_1 = X_2 = \dots = X_{n-m+1} \quad (52)$$

Умножим $X_1, X_2, \dots$ на неопределенные множители $p_1, p_2, \dots$, подчиняющиеся условию

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n-m+1} = 1, \quad (53)$$

и образуем сумму

$$X = X_1 p_1 + X_2 p_2 + \dots + X_{n-m+1} p_{n-m+1} \quad (54)$$

Уравнение (54), если в него подставить значения X_i из (50), (51), определит истинное значение X искомого, выраженное в функции всех подлежащих измерению величин L_i . Несомненно, уравнение (54) справедливо только при равенствах (52) и (53). Только в этом случае уравнение (54) даст истинное значение искомого.

Пусть из измерений для величин L_i найдены значения l_i . Тогда из (50) (51) ... найдутся приближенные значения X_i неизвестного X , а уравнение (54) даст его приближенное значение x , зависящее от множителей p_i .

$$x = [x_i p_i], \quad (i = 1, 2, \dots, n-m+1). \quad (55)$$

Найдем множители p так, чтобы

$$m^2_x = \text{minimum}. \quad (56)$$

Тогда, заменяя в (50) (51)..... L_i через l_i и применяя формулу (1), найдем:

$$m_x^2 = F(l_i, p_i); \quad (i = 1, 2, \dots, n - m + 1) \quad (57)$$

Приравнивая частные производные (57) по переменным p частным производным уравнения (53), умноженного на $2k$, найдем значения p_i , а затем по (55) и x_0 . Уравнение (55) может рассматриваться как арифметическая середина из зависимых значений x_i , найденных из алгебраического решения $n - m + 1$ систем уравнений. Из (55) и (56) следует, что p имеют смысл весов этих значений, подчиняющихся требованию наибольшего веса искомого. Подставив p в уравнение (57), найдем m_x^2 .

Важно обратить внимание на то обстоятельство, что изложенный ход решения задачи применим и в том случае, когда в каждом из уравнений (49) входит более, чем одна величина L^1 .

Если систему (49) решить под условием $[v^2] = \min$, т. е. найти x их нормальных уравнений

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + \dots + [al] &= 0 \\ [ab]x + [bb]y + \dots + [bl] &= 0, \end{aligned} \quad (58)$$

то можно в общем виде показать, что выражения x^0 из (58) и (55) совпадают.

Во избежание громоздких выкладок, приложим формулы (49) — (57) к трем уравнениям с двумя неизвестными и покажем, что по теореме 2 и способу наименьших квадратов мы получим один и тот же результат. Так как методика вывода не зависит от количества уравнений, то общность доказательства при трех уравнениях сохраняется.

Пусть имеются уравнения:

$$\begin{aligned} a_1 X + b_1 Y - L_1 &= 0, \\ a_2 X + b_2 Y - L_2 &= 0, \\ a_3 X + b_3 Y - L_3 &= 0, \end{aligned} \quad (59)$$

тогда из решения первых двух уравнений имеем

$$X = \frac{1}{D_{12}} (b_2 L_1 - b_1 L_2);$$

из второго и третьего уравнений получаем:

$$X = \frac{1}{D_{23}} (b_3 L_2 - b_2 L_3);$$

тогда

$$X = \frac{1}{D_{12}} (b_2 L_1 - b_1 L_2) p_1 + \frac{1}{D_{23}} (b_3 L_2 - b_2 L_3) p_2, \quad (60)$$

где

$$p_1 + p_2 = 1. \quad (61)$$

Через D_{12} обозначен определитель системы из первого и второго уравнений, через D_{23} — определитель системы из второго и третьего уравнений.

¹⁾ Изложенный метод применим и в самом общем случае, когда уравнения (49) имеют вид

$$0 = -A_i L_i - B_i L_2 - \dots + a_i X + b_i Y + c_i Z + \dots$$

Пусть из измерений найдены равноточные значения l_i со средней квадратической ошибкой $m = 1$. Тогда на основании (56) и (60)

$$m_x^2 = \frac{[b^2]_3}{D_{12}^2} p_1^2 + \frac{[b^2]_1}{D_{23}^2} p_2^2 - 2 \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} p_1 p_2, \quad (62)$$

где $[b^2]_3$ представляет собою сумму b_i^2 без b_3^2 ; $[b^2]_1$ есть сумма b_i^2 без b_1^2 .

Наивыгоднейшим решением будет то, которое дает значение x , возможно близкое к истинному значению (60). Это осуществляется, если

$$m_x^2 = \text{minimum}.$$

Тогда на основании (62) и (61) имеем

$$\frac{\partial(m_x^2)}{2\partial p_1} = \frac{[b^2]_3}{D_{12}^2} p_1 - \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} p_2 = k, \quad (63)$$

$$\frac{\partial(m_x^2)}{2\partial p_2} = -\frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} p_1 + \frac{[b^2]_1}{D_{23}^2} p_2 = k.$$

Решение этой системы дает

$$p_1 = \frac{1}{D} \left(\frac{[b^2]_1}{D_{23}^2} + \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} \right) k, \quad D = \frac{b_1^2 [b^2]}{D_{12}^2 D_{23}^2}, \quad (64)$$

$$p_2 = \frac{1}{D} \left(\frac{[b^2]_3}{D_{12}^2} + \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} \right) k,$$

где D — определитель системы (63).

Обозначая скобку в правой части выражения p_1 через A_1 , в выражении p_2 — через A_2 , подставляя p_1 и p_2 в уравнение (61), будем иметь

$$k = \frac{D}{A_1 + A_2},$$

или

$$p_1 = \frac{A_1}{A_1 + A_2}; \quad p_2 = \frac{A_2}{A_1 + A_2}. \quad (65)$$

Таким образом множители p_1 и p_2 найдены. Наивыгоднейшее значение x из (60) определится так:

$$x = \frac{1}{D_{12}} (b_2 l_1 - b_1 l_2) p_1 + \frac{1}{D_{23}} (b_3 l_2 - b_2 l_3) p_2 \quad (66)$$

Решим систему (59) методом посредственных наблюдений, заменив в ней L_i через l_i . Составив соответствующую систему нормальных уравнений

$$\begin{aligned} [aa] x + [ab] y - [al] &= 0 \\ [ab] x + [bb] y - [bl] &= 0, \end{aligned} \quad (67)$$

получим

$$x = \frac{1}{D} ([bb][al] - [ab][bl]);$$

или более развернуто

$$x = \frac{1}{D} \left\{ (a_1[bl] - b_1[ab]) l_1 + (a_2[bb] - b_2[ab]) l_2 + \dots \right\}, \quad (68)$$

где D — определитель системы (67).

Если мы покажем, что коэффициенты при l_i в выражениях (66) и (68) совпадают, то этим будет доказано, что требование $[v^2] = \min$ и теорема 2 приводят к одному и тому же результату уравнивания.

Обращаясь к уравнению (66), мы видим, что коэффициент при l_1 на основании (65) и (64) равен

$$\frac{a b_2}{D_{12}} p_1 = b_2 \frac{[b^2]_1 D_{12} + b_1 b_3 D_{23}}{[b^2]_1 D_{12}^2 + [b^2]_3 D_{23}^2 + 2 b_1 b_3 D_{12} D_{23}}.$$

Подставляя значения определителей и $[b^2]_i, \dots$, произведя умножение и вынося за скобку a_1 и b_1 , найдем, что числитель равен $(a_1 [bb] - b_1 [ab]) b_2$. Применяя эти же действия к знаменателю, найдем, что он равен

$$b_2^2 (b_2^2 a_1^2 + a_2^2 b_1^2 - 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_3^2 - 2 a_1 b_1 a_3 b_3 + a_3^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + b_1^2 a_3^2 - \\ - 2 a_2 b_2 a_3 b_3).$$

Добавим к стоящему в скобках выражению тождество

$$0 = [a^2 b^2] - [a^2 b^2];$$

тогда знаменатель можно привести к виду $b_2^2 ([aa][bb] - [ab]^2) = D b_2^2$, откуда следует, что коэффициент при l_1 в уравнении (66)

$$\frac{b_2}{D_{12}} p_1 = \frac{a_1 [bb] - b_1 [ab]}{D}$$

совпадает с коэффициентом при l_1 в уравнении (68). Точно так же можно показать, что коэффициенты при l_2 и l_3 в уравнениях (66) и (68) равны, т. е. равны и уравненные под условием $[v^2] = \min$ и по теореме 2 значения неизвестного.

Рассмотрим пример, состоящий из трех уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} 2X - Y - L_1 &= 0, \\ X + Y - L_2 &= 0, \\ X - Y - L_3 &= 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Пусть измеренные значения l_i получились

$$l_1 = 4, \quad l_2 = 5, \quad l_3 = 2;$$

соответствующие нормальные уравнения будут:

$$\begin{aligned} 6x - 2y - 15 &= 0 \\ -2x + 3y + 1 &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$x = 3,072, \quad m_x^2 = 0,214.$$

Таков результат, получаемый по формулам способа наименьших квадратов.

Решим систему (a) по формулам (60) — (66), для чего подсчитаем определители D_{ik} и их квадраты

	D_{12}	D_{13}	D_{23}
D_i	3	-1	-2
D_i^2	9	1	4

Тогда из решения первого и второго уравнений получим

$$x_{12} = \frac{1}{D_{12}} (b_2 l_1 - b_1 l_2) = 3,0.$$

Решение второго и третьего уравнений дает значение, равное

$$x_{23} = \frac{1}{D_{23}} (b_3 l_2 - b_2 l_3) = 3,5.$$

Уравненное значение будет равно

$$x^0 = x_{12} p_1 + x_{23} p_2. \quad (b)$$

Подсчитаем p_1 и p_2 , на которые надо умножить полученные результаты. Используя формулы (64) и (65), найдем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{[b^2]_1}{D_{23}^2} + \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} = \frac{1}{3}, \\ A_2 &= \frac{[b^2]_3}{D_{12}^2} + \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} = \frac{1}{18}, \\ p_1 &= \frac{A_1}{A_1 + A_2} = \frac{6}{7}; \quad p_2 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} = \frac{1}{7}, \end{aligned} \quad (c)$$

и уравненное значение x^0 на основании (66) вычислим так:

$$x^0 = 3 \cdot \frac{6}{7} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{7} = 3,072$$

Подставив значения p_i в уравнение (62), получим

$$m_{x^0}^2 = \frac{2}{9} \cdot 0,734 + \frac{1}{2} \cdot 0,020 + \frac{1}{3} \cdot 0,122 = 0,214,$$

т. е. мы получили результаты, найденные нами ранее по способу наименьших квадратов.

При выводе формул (60) — (66) мы не ограничивали выбора значений x_{ik} , поэтому этот же результат мы должны получить, избрав иную систему значений x . Подтвердим сказанное решением этого же примера. Возьмем значения:

$$\begin{aligned} x_{13} &= \frac{1}{D_{13}} (b_3 l_1 - b_1 l_3) = 2,0, \\ x_{23} &= \frac{1}{D_{23}} (b_3 l_2 - b_2 l_3) = 3,5, \\ x^0 &= x_{13} p_1 + x_{23} p_2, \end{aligned} \quad (b)'$$

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{b_3 p_1}{D_{13}} l_1 + \frac{b_3 p_2}{D_{23}} l_2 - \left(\frac{b_1 p_1}{D_{13}} + \frac{b_2 p_2}{D_{23}} \right) l_3, \\ m_{x^0}^2 &= \frac{[b^2]_2}{D_{13}^2} p_1^2 + \frac{[b^2]_1}{D_{23}^2} p_2^2 + 2 \frac{b_1 b_2}{D_{13} D_{23}} p_1 p_2, \\ \frac{[b^2]_2}{D_{13}^2} p_1 + \frac{b_1 b_2}{D_{13} D_{23}} p_2 &= k, \\ \frac{b_1 b_2}{D_{13} D_{23}} p_1 + \frac{[b^2]_1}{D_{23}^2} p_2 &= k. \end{aligned} \quad (d)$$

$$p_1 = \frac{1}{D} \left(\frac{[b^2]_2}{D_{13}^2} - \frac{b_1 b_2}{D_{13} D_{23}} \right) k,$$

$$p_2 = \frac{1}{D} \left(\frac{[b^2]_1}{D_{13}^2} - \frac{b_1 b_2}{D_{13} D_{23}} \right) k.$$

Стоящие в скобках выражения есть A_1 и A_2 в уравнениях (с) или

$$A_1 = 1; \quad A_2 = 2,5.$$

$$p_1 = 0,286; \quad p_2 = 0,714$$

Уравненное значение x^0 получится на основании (b)

$$x^0 = 2 \cdot 0,236 + 3,5 \cdot 0,714 = 3,071; \quad m_{x^0}^2 = 0,215.$$

т. е. результат уравнения не зависит от выбора системы значений x_{ik} , как это и следовало из теории.

Теперь возьмем (по Якоби) все комбинации

$$X_{12} = \frac{1}{D_{12}} (b_2 L_1 - b_1 L_2); \quad X_{13} = \frac{1}{D_{13}} (b_3 L_1 - b_1 L_3); \quad X_{23} = (b_3 L_2 - b_2 L_3) \quad (e)$$

Тогда истинное значение X можно представить в виде

$$X = X_{12} p_1 + X_{13} p_2 + X_{23} p_3 \quad (f)$$

при условии $[p] = 1$.

(g)

Если в (e) и (f) заменить L_i через l_i , то получим приближенное значение x , равное

$$x = \left(\frac{b_2}{D_{12}} p_1 + \frac{b_3}{D_{13}} p_2 \right) l_1 + \left(\frac{b_3}{D_{23}} p_3 - \frac{b_1}{D_{12}} p_1 \right) l_2 - \left(\frac{b_1}{D_{13}} p_2 + \frac{b_2}{D_{23}} p_3 \right) l_3 \quad (h)$$

со средней ошибкой m_x , зависящей от p . При $m_l = 1$

$$m_x^2 = \frac{[b^2]_3}{D_{12}^2} p_1^2 + \frac{[b^2]_2}{D_{13}^2} p_2^2 + \frac{[b^2]_1}{D_{23}^2} p_3^2 + 2 \frac{b_2 b_3}{D_{12} D_{13}} p_1 p_2 + \\ + 2 \frac{b_1 b_2}{D_{13} D_{23}} p_2 p_3 - 2 \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} p_1 p_3 \quad (i)$$

Дифференцируя (i) по переменным p_i , сокращая на 2 и приравнявая дифференциалам (g) по этим же переменным, умноженным на k , получим:

$$\frac{[b^2]_3}{D_{12}^2} p_1 + \frac{b_2 b_3}{D_{12} D_{13}} p_2 - \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} p_3 = k; \\ \frac{b_2 b_3}{D_{12} D_{13}} p_1 + \frac{[b^2]_2}{D_{13}^2} p_2 + \frac{b_1 b_2}{D_{13} D_{23}} p_3 = k; \\ - \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} p_1 + \frac{b_1 b_2}{D_{13} D_{23}} p_2 + \frac{[b^2]_1}{D_{23}^2} p_3 = k. \quad (j)$$

Пусть p_1 из уравнений (j) будет равно

$$p_1 = \frac{A}{D_0}.$$

Покажем, что $D_0 = 0$

$$D_0 = \frac{1}{D_{12}^2 D_{13}^2 D_{23}^2} \begin{vmatrix} [b^2]_3 & b_2 b_3 - b_1 b_3 \\ b_2 b_3 & [b^2]_2 & b_1 b_2 \\ -b_1 b_3 & b_1 b_2 & [b^2]_1 \end{vmatrix}$$

Раскладывая определитель, получим:

$$I = \{([b^2] - b_2^2)([b^2] - b_1^2) - b_1^2 b_2^2\} [b^2]_3;$$

$$II = -b_2 b_3 \{b_2 b_3 ([b^2] - b_1^2) + b_1^2 b_2 b_3\} = -b_2^2 b_3^2 [b^2];$$

$$III = -b_1^2 b_3 \{b_1 b_3 ([b^2] - b_2^2) + b_1 b_2^2 b_3\} = -b_1^2 b_3^2 [b^2];$$

$$D_0 = I + II + III = (b_1^2 + b_2^2) [b^2] b_3^2 - b_2^2 b_3^2 [b^2] - b_1^2 b_3^2 [b^2] = 0.$$

Можно показать также, что определитель системы (i) будет равен нулю и в том случае, когда мы возьмем не все комбинации, а только $n - m + 2$.

Используем для этого пример Гаусса, приведенный на стр. 233 труда Уиттекера и Робинсона „Математическая обработка результатов наблюдений“.

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 3 \\ 3x + 2y - 5z &= 5 \\ 4x + y + 4z &= 2 \\ -x + 3y + 3z &= 14. \end{aligned}$$

Решим вначале необходимое число сочетаний уравнений:

$$n - m + 1 = 2, \text{ так как } n = 4, \quad m = 3.$$

Возьмем комбинации x_{123}, x_{234}

$$\left. \begin{aligned} x_{123} &= \frac{1}{D'_0} \{ (b_2 c_3 - b_3 c_2) l_1 - (b_1 c_3 - b_3 c_1) l_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) l_3 \} = \\ &= \frac{1}{D'_0} (D_1 l_1 - D_2 l_2 + D_3 l_3) \\ x_{234} &= \frac{1}{D''_0} \{ (b_3 c_4 - b_4 c_3) l_2 - (b_2 c_4 - b_4 c_2) l_3 + (b_2 c_3 - b_3 c_2) l_4 \} = \\ &= \frac{1}{D''_0} (D_4 l_2 - D_5 l_3 + D_6 l_4) \\ x^0 &= x_{123} p_1 + x_{234} p_2; [p] = 1. \end{aligned} \right\} (l)$$

Средняя квадратическая ошибка x^0 на основании (l) равна

$$\begin{aligned} m^2_{x^0} &= \frac{1}{D'^2_0} (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) p_1^2 + \frac{1}{D''^2_0} (D_4^2 + D_5^2 + D_6^2) p_2^2 - \\ &\quad - \frac{2}{D'_0 D''_0} (D_2 D_4 + D_3 D_5) \end{aligned} \quad (m)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_0'^2} (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) p_1 - \frac{1}{D_0' D_0''} (D_2 D_4 + D_3 D_5) p_2 &= k \\ - \frac{1}{D_0' D_0''} (D_2 D_1 + D_3 D_5) p_1 + \frac{1}{D_0''^2} (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) p_2 &= k. \end{aligned} \quad (n)$$

Подсчитаем D_i

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
D_i	13	-6	1	-9	21	13
D_{i2}	169	36	1	81	441	169

Уравнения (n) дают

$$p_1 = 0,15492, \quad p_2 = 0,84508.$$

Так как (по Уиттекеру)

$$x_{123} = \frac{90}{35} = 2,571428, \quad x_{234} = \frac{304}{124} = 2,451612,$$

$$\text{то } x^0 = x_{123} p_1 + x_{234} p_2 = 2,470174, \quad (p)$$

т. е. мы получили тот же результат, что и по теореме Якоби.

В формуле (p) использованы только два решения, веса p подчиняются условию наибольшего веса искомого. Покажем, что введение хотя бы одного решения сверх $n - m + 1$ обращает определить системы (n) в нуль.

Добавим к необходимым двум решениям еще одно; допустим, что

$$\begin{aligned} x_{121} &= \frac{1}{D_0'''} \left\{ (b_2 c_1 - b_1 c_2) l_1 - (b_1 c_1 - b_4 c_1) l_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) l_4 \right\} = \\ &= \frac{1}{D_0'''} (D_7 l_1 - D_8 l_2 + D_9 l_4) \end{aligned} \quad (q)$$

Тогда истинное значение X будет равно

$$X = X_{123} p_1 + X_{234} p_2 + X_{121} p_3, \text{ где } [p] = 1.$$

Приближенное значение x на основании (l) и (q) найдется из выражения

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{D_1}{D_0'} p_1 + \frac{D_7}{D_0'''} p_3 \right) l_1 + \left(-\frac{D_2}{D_0'} p_1 + \frac{D_4}{D_0''} p_2 - \frac{D_8}{D_0'''} p_3 \right) l_2 + \\ &+ \left(\frac{D_3}{D_0'} p_1 - \frac{D_5}{D_0''} p_2 \right) l_3 + \left(\frac{D_6}{D_0''} p_2 + \frac{D_9}{D_0'''} p_3 \right) l_4 \end{aligned}$$

со средней ошибкой

$$\begin{aligned} m_x^2 &= \frac{1}{D_0'^2} (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) p_1^2 + \frac{1}{D_0''^2} (D_4^2 + D_5^2 + D_6^2) p_2^2 + \\ &+ \frac{1}{D_0'''^2} (D_7^2 + D_8^2 + D_9^2) p_3^2 - \frac{2}{D_0' D_0''} (D_2 D_4 + D_3 D_5) p_1 p_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{D'_0 D_0'''} (D_1 D_7 + D_2 D_8) p_1 p_3 + \frac{2}{D''_0 D_0'''} (D_6 D_9 - D_4 D_8) p_2 p_3 = \\
& = \frac{1}{D_0'^2} A p_1^2 + \frac{1}{D_0''^2} B p_2^2 + \frac{1}{D_0'''^2} C p_3^2 - \frac{2D}{D'_0 D''_0} p_1 p_2 + \\
& + \frac{2E}{D'_0 D_0'2} p_1 p_3 + \frac{2F}{D''_0 D_0'''} p_2 p_3.
\end{aligned}$$

Приравняв частные производные $m^2 x$ и $2[p]k$ по переменным p_i получим:

$$\begin{aligned}
\frac{A}{D_0'^2} p_1 - \frac{D}{D'_0 D_0''} p_2 + \frac{E}{D'_0 D_0'''^2} p_3 &= k \\
-\frac{D}{D'_0 D_0''} p_1 + \frac{B}{D_0''^2} p_2 + \frac{F}{D''_0 D_0'''} p_3 &= k \\
\frac{E}{D'_0 D_0'''} p_1 + \frac{F}{D_0'' D_0'''} p_2 + \frac{C}{D_0'''^2} p_3 &= k
\end{aligned} \tag{r}$$

Определитель системы (r) также будет равен нулю. Опуская громоздкие разложения определителя в общем виде, покажем на том же примере Гаусса, что $D_0 = 0$.

$$D_0 = \frac{1}{D_0'^2 D_0''^2 D_0'''^2} \begin{vmatrix} A - DE \\ -DBF \\ EFC \end{vmatrix}$$

Надо показать, что равно нулю выражение

$$A(BC - F^2) - D(DC - EF) - E(DF + BE);$$

на основании (k) и (q), причем значение определителей D_i даются таблицей

	D_7	D_8	D_9
D_i	21	-9	1
D_i^2	441	81	1

Тогда, имея в виду также и (r), получим:

$$A = 206, B = 691, C = 523, D = 75, E = 327, F = -68, D_0 = 206 \times (361393 - 4624) + 75(22236 - 39225) + 327(510 - 225957) = +73494414 - 73494414 = 0.$$

Выше мы нашли веса p_1 и p_2 , отвечающие условию наибольшего веса x^0 . Из уравнения (p) следует, что количество требующихся комбинаций равно $n - m + 1 = 2$, по Якоби же их должно быть четыре.

На величины p_1 и p_2 мы не можем смотреть иначе, как на веса, с которыми входят в арифметическую средину (p) зависимые значения x_{123} и x_{234} . В этом случае $P_{x^0} \neq p_1 + p_2$. Используя p_1 и p_2 , найдем значение $m^2 x^0$, т. е. и p_{x^0} .

Подставляя в (i) значения D и p , получим:

$$m^2 x^0 = \frac{206}{1225} p_1^2 + \frac{69}{15376} p_2^2 + 2 \frac{75}{4340} p_1 p_2 = 0,0406,$$

что полностью согласуется с данными примера Гаусса, приведенными Уиттекером (стр. 234).

Выводы

Результаты исследования можно формулировать следующим образом:

1. Способ наименьших квадратов определен для некоторого среднего ряда наблюдений; данный ряд наблюдений им используется вне зависимости от распределения значений погрешностей в этом ряде.

2. Теорема 1. Вероятнейшее значение каждой из n наблюдаемых величин, связанных r точными условиями ($n > r$), может быть представлено в виде арифметической середины из результата прямого измерения искомой величины и зависимых значений её, полученных из r совместных решений уравнений, или доставляемых каждым условным уравнением с весами, подчиняющимися требованию наибольшего веса искомого.

3. Теорема 2. Вероятнейшее значение каждой из m функций прямых наблюдений, связанных с прямыми наблюдениями n уравнениями ($n > m$), можно представить в виде арифметической середины из зависимых значений, полученных из решения необходимого и достаточного ($n - m + 1$) числа сочетаний уравнений, с весами, подчиняющимися требованию наибольшего веса искомого.

4. Эти теоремы имеют теоретические и практические следствия и расширяют область приложений способа наименьших квадратов.

5. Веса, с которыми значения искомого входят в арифметическую середину, дают возможность подсчитать и вес уравненного значения его.

6. Арифметическая середина из независимых значений есть частный случай лежащего в основе способа наименьших квадратов принципа наибольшего веса искомого.
