ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 67, вып. 2 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1951 г.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОСРЕДСТВЕННЫМИ И УСЛОВНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

В. С. НУВАРЬЕВ

Прежде всего, остановимся на самом разделении на посредственные и условные измерения. По общему смыслу этих определений можно предположить, что наименованием „Метод посредственных измерений" имеется в виду подчеркнуть, что в данном случае измерялись не сами искомые величины, а величины, с ними связанные. Отличительной чертой этого метода являются так называемые уравнения погрешностей, связывающие прямые наблюдения l_i с m функциями их $X, У, Z\ldots$ и имеющие вид

$$a_i X + b_i У + c_i Z + \ldots - l_i = v_i \quad (i = 1.2\ldots n);\ n > m. \qquad (a)$$

Методу условных измерений присущи уравнения, связывающие только прямые наблюдения (или поправки к ним) или только поправки к функциям наблюдений [1]). Эти уравнения имеют вид

$$[a_i L_i] + a_0 = 0;\ [b_i L_i] + b_0 = 0\ldots[r_i L_i] + r_0 = 0 \qquad (b)$$

или относительно поправок к наблюдениям или их функциям

$$[a_i v_i] + w_1 = 0;\ [b_i v_i] + w_2 = 0\ldots[r_i v_i] + w_r = 0 \qquad (b)'$$

$$(i = 1,2\ldots n);\ (n > r).$$

Мы находим, что система (a) может быть представлена в виде, который дает нам бо̀льший простор при исследованиях [2]), именно:

$$a_i X + b_i У + c_i Z + \ldots + m_i M - L_i = 0;\ (i = 1,2\ldots n);\ n > m \qquad (a)'$$

Если существует система уравнений (a), то существует и система $(a)'$, в которой m истинных значений функций прямых наблюдений $X, У, Z\ldots$ связаны с n значениями величин $L_i\ (n > m)$, подлежащих измерению. Мы можем утверждать, что между величинами $X, У, Z, \ldots M$ существуют точные условия $(a)'$, т. е. условные уравнения. Если вид их отличен от обычных условных уравнений (b), то смысл их одинаков: точные значения входящих в системы $(a)'$ и (b) величин связаны точными условиями.

Обе системы решаются под условием

$$[v^2] = minimum \text{ или } [pv^2] = minimum \qquad (c)$$

---

[1]) Возможность введения в систему условных уравнений (b) поправок функций прямых наблюдений доказана в работе В. С. Нуварьева „Новый метод уравнивания триангуляций", Иркутск, ОГИЗ, 1932.

[2]) При рассмотрении вопроса связи между методами „посредственных" и „условных" наблюдений проф. Идельсон (см. его работу „Способ наименьших квадратов", М. 1947 г., § 27, стр. 195) использует запись $v_i = 0$, которую нельзя признать удачной, так как v_i заведомо не равны нулю. Нельзя признать также удачной запись уравнений (по А. А. Маркову) в виде приближенных равенств.

Как следует из математического анализа, отыскание минимума функции (c), в которой v_i определены уравнениями (a) и не связаны между собою, решается методом абсолютного минимума; если же переменные в функции (c) связаны уравнениями вида (b)', то ищется относительный минимум этой функции, т. е. через неопределенные множители Лагранжа (коррелаты). Что же понимать под наименованием „посредственные" измерения? Принято думать, что в этом методе находятся функции (или поправки к ним) прямых наблюдений отысканием абсолютного минимума функции (c). Но, как уже указывалось, можно, и весьма успешно, искать поправки к функциям прямых наблюдений, применяя коррелатное уравнивание. Таким образом „посредственные" измерения совсем не связаны с методом решения. В математическом анализе доказывается, что в случае, когда переменные в функции (c) связаны r условиями (b), можно от метода относительного минимума перейти к методу абсолютного минимума, т. е. принимая существующую терминологию, от метода условного уравнивания перейти к методу посредственного уравнивания. Для этого необходимо решить систему (b)' относительно, допустим, первых r поправок и вставить их значения в функцию (c), после чего ищется абсолютный минимум новой функции, в которой оставшиеся $n-r$ поправок уже не связаны никакими условиями.

Иначе сказать, с точки зрения математического анализа не следует приводить доказательства связи между посредственными и условными наблюдениями в том виде, как этот вопрос излагается в учебниках, так как в таких доказательствах нет перехода от метода условных измерений к методу посредственных измерений, а решается одна и та же задача различными приёмами. Мы считаем, что необходимо поставить другую задачу, именно: перейти от метода посредственных измерений к методу условных измерений, т. е. от абсолютного минимума перейти к относительному минимуму. Такая задача не рассматривается в математическом анализе, почему мы и считаем нужным провести исследование этого вопроса. Выше указывалось, что доказано совпадение результатов решения одной и той же задачи, а не связь между методами. Мы считаем, что между системами (a) и (b) существует резкое различие, заключающееся в том, что в систему (a) входят и прямые наблюдения и их функции, в систему же (b)—только прямые наблюдения. Переход от системы посредственных наблюдений (a) к системе условных наблюдений можно было доказать лишь на основе предлагаемой нами формы записи уравнений (a)'.

Решим систему (a)' относительно неизвестных $X, Y, Z\ldots$, используя для этого, допустим, первые m уравнений; тогда, обозначая определитель этой системы через D, а определители для $X, Y, \ldots, M$ соответственно через $D_1, D_2, \ldots, D_m$, получим

$$X = \frac{D_1}{D}; \quad Y = \frac{D_2}{D}; \ldots M = \frac{D_m}{D};$$

вставляя значения $X, Y, \ldots$ в систему остальных $n-m$ уравнений (a) и умножая на D, получим

$$a_{m+1} D_1 + b_{m+1} D_2 + \ldots + m_{m+1} D_m - DL_{m+1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n D_1 + b_n D_2 + \ldots + m_n D_m - DL_n = 0 \qquad (d)$$

Уравнения (d) будут иметь вид условных уравнений (b) с той разницей, что в них $a_0 = b_0 = \ldots = 0$.

Для простоты возьмем систему из четырех уравнений:

$$a_1 X + b_1 У - L_1 = 0 \qquad a_3 X + b_3 У - L_3 = 0$$
$$a_2 X + b_2 У - L_2 = 0 \qquad a_4 X + b_4 У - L_4 = 0 \tag{e}$$

Решим два первых уравнения системы (e) и вставим найденные значения в 3-е и 4-е уравнения, тогда получим систему уравнений вида

$$D_{23} L_1 - D_{13} L_2 + D_{12} L_3 = 0$$
$$D_{24} L_1 - D_{14} L_2 + D_{12} L_4 = 0, \tag{f}$$

где D_{ik} — миноры второго порядка матрицы системы, соответствующие парам уравнений (e) с номерами ik.

Если в системах (e) и (f) заменить истинные значения L_i измеренными значениями l_i, то получим обычные для способа посредственных и условных наблюдений системы.

Наша задача заключается в том, чтобы показать, что результат уравнивания не будет зависеть от того, какую систему мы изберем для решения, т. е. необходимо показать, что уравненное значение, допустим, l°_1 по методам посредственных и условных наблюдений будет совпадать

Известно, что уравненное по методу условных наблюдений значение l°_1 может быть представлено в виде

$$l^\circ_1 = [Fl],$$

где F — определяются формулами способа наименьших квадратов (37) или выведенными нами формулами (41), (42) и (43)[1]. Так как последние формулы быстрее приведут к цели, мы и воспользуемся ими, учтя, что в системе (f), вместо коэфициентов a и b, стоят определители, составленные из коэфициентов уравнений (e), в уравнениях же (41), (42) и (43) определители должны быть составлены из коэфициентов уравнений (f).

Тогда

$$F_1 = \frac{1}{D'} \left\{ D_{12}^2 D_{14}^2 + D_{13}^2 D_{12}^2 + D_{12}^4 \right\} = \frac{D_{12}^2}{D'} (D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{14}^2);$$

$$F_2 = -\frac{1}{D'} \left\{ -D_{12}^2 D_{24} D_{14} - D_{12}^2 D_{23} D_{13} \right\} = \frac{D_{12}^2}{D'} (D_{13} D_{23} + D_{14} D_{24});$$

$$F_3 = \frac{1}{D'} \left\{ (-D_{14} D_{23} + D_{13} D_{24}) D_{12} D_{14} - D_{12} D_{23} D_{12}^2 \right\} = \frac{D_{12}^2}{D'} (D_{14} D_{34} - D_{12} D_{23});$$

$$F_4 = \frac{1}{D'} \left\{ (D_{14} D_{23} - D_{13} D_{24}) D_{12} D_{13} - D_{12}^3 D_{24} \right\} = -\frac{D_{12}^2}{D'} (D_{12} D_{24} + D_{13} D_{34});$$

$$D' = [D'^2] = (-D_{14} D_{23} + D_{13} D_{24})^2 + D_{12}^2 D_{24}^2 + D_{23}^2 D_{12}^2 + D_{14}^2 D_{12}^2 +$$
$$+ D_{12}^2 D_{13}^2 + D_{12}^4 = D_{12}^2 (D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{14}^2 + D_{23}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2) = D^2_{12} D;$$

или

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{D} (D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{14}^2); \qquad & F_3 &= \frac{1}{D} (D_{14} D_{34} - D_{12} D_{23}); \\ F_2 &= \frac{1}{D} (D_{13} D_{23} + D_{14} D_{24}); \qquad & F_4 &= \frac{1}{D} (D_{12} D_{24} + D_{13} D_{34}); \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

[1]) В. С. Нуварьев. Теоремы о вероятнейшем значении уравненной величины. „Известия Томского политехнического института", том 67, вып. 2.

Таким образом решение условных уравнений (f), полученных из системы (e), дает уравненное значение

$$l^0_1 = [Fl], \tag{h}$$

где F_i определяется уравнениями (g).

Покажем, что решение системы уравнений погрешностей (e), если L_i заменить через l_i, приведет к результату (h).

Нормальные уравнения, соответствующие системе (e), будут иметь вид

$$[aa]\,x + [ab]\,y - [al] = 0$$

$$[ab]\,x + [bb]\,y - [bl] = 0,$$

откуда

$$x = \frac{1}{D}([bb]\,[al] - [ab]\,[bl]),$$

$$y = \frac{1}{D}([aa]\,[bl] - [ab]\,[al]).$$

Определитель системы нормальных уравнений на основании (40) и (41) (см. указанную работу) равен

$$D = D_{12}^2 + D_{13}^2 + \ldots + D_{34}^2 = [D^2_{kj}].$$

Тогда

$$l^0_1 = a_1 x + b_1 y,$$

$$l^0_1 = \frac{1}{D}(a_1^2\,[bb] + b_1^2\,[aa] - 2a_1 b_1\,[ab])\,l_1 + \frac{1}{D}(a_1 a_2\,[bb] -$$

$$- a_1 b_2\,[ab] + b_1 b_2\,[aa] - a_2 b_1\,[ab])\,l_2 + \ldots$$

Обозначая коэфициент при l_1 через F_1 и произведя умножение, имеем

$$F_1 = \frac{1}{D}(a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2\,a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 - 2\,a_1 a_3 b_1 b_3 +$$

$$+ a_1^2 b_4^2 + a_4^2 b_1^2 - 2\,a_1 a_4 b_1 b_4);$$

$$F_1 = \frac{1}{D}(D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{14}^2). \tag{i}$$

Точно таким же путем мы можем получить

$$F_2 = \frac{1}{D}(D_{13} D_{23} + D_{14} D_{24}) \text{ и т. д.} \tag{i'}$$

Сравнивая значения F_1 из (i) и (g), мы видим, что уравненные значения l^0_1 из системы уравнений (e) и (f) по методу посредственных и условных наблюдений одинаковы.

Решение одного и того же примера методом посредственных и условных наблюдений

Пусть имеется система уравнений:

$$
\begin{aligned}
-2X+3У-L_1&=0\\
3X-2У-L_2&=0\\
6X+\ \ У-L_3&=0\\
-X+2У-L_4&=0.
\end{aligned}
\qquad (k)
$$

Пусть измеренные значения равны

$$l_1=6;\ l_2=28;\ l_3=125;\ l_4=13.$$

Тогда из нормальных уравнений

$$
\begin{aligned}
50x-8y-809&=0\\
-8x+18y-113&=0
\end{aligned}
$$

получим $x=18.5;\ y=14.5,$

и поправки к наблюденным значениям, полученные по методу посредственных наблюдений, будут равны

$$v_1=+0{,}50;\ v_2=-1{,}50;\ v_3=+0{,}50;\ v_4=-2{,}50.$$

Решим систему (k) методом условных наблюдений. Подсчитаем определители системы (k).

	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{23}	D_{24}	D_{34}	ΣD^2
D_i	-5	-20	-1	15	4	13	—
D_i^2	25	400	1	225	16	169	836

Тогда условные уравнения на основании (f) будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
15L_1+20L_2-5L_3&=0\\
4L_1+L_2-5L_4&=0.
\end{aligned}
\qquad (l)
$$

Из нормальных уравнений коррелат

$$
\begin{aligned}
650k_1+80k_2+25&=0\\
80k_1+42k_2-13&=0,
\end{aligned}
$$

в которых свободные члены подсчитаны после подстановки в систему (l) измеренных значений l_i, получим

$$k_1=-0{,}1,\ k_2=+0{,}5,$$

и поправки к наблюденным значениям l_i

$$v_1=+0{,}5;\ v_2=-1{,}5;\ v_3=+0{,}5;\ v_4=-2{,}5;$$

т. е. поправки, полученные из решения системы (l) методом условных уравнений, равны поправкам, найденным ранее методом посредственных наблюдений для системы (k).

Выводы

1. Всякую систему из n уравнений, связывающих прямые наблюдения с m функциями их ($n > m$), можно привести к $n - m$ точным уравнениям относительно прямых наблюдений.

2. Результат уравнивания не зависит от того, какая из этих систем избирается для решения.