ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 67, вып. 2 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1951 г.

К РЕШЕНИЮ ЗАВИСИМЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ УРАВНИВАНИИ ПО СПОСОБУ УСЛОВНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

А. И. ВОЛКОВ

Успех уравнительных вычислений прежде всего зависит от правильного определения числа условий и правильного их составления. Если определение числа условий не вызывает затруднений благодаря наличию соответствующих формул, то правильное составление их зависит в основном от опыта вычислителя.

Ошибки при составлении условий могут быть самыми разнообразными. В числе других ошибок включение следствий в уравнительные вычисления занимает особое место, так как является ошибкой принципиального характера.

В данной работе рассматривается, каким образом и на какой стадии вычислений могут быть обнаружены следствия, ошибочно включенные в число условий. В маркшейдерской и геодезической литературе на этот счет конкретных указаний нет, кроме предостережений о недопустимости включения следствий в уравнительные вычисления. Так, по этому вопросу в курсе высшей геодезии проф. Ф. Н. Красовского и В. В. Данилова (изд. 1939 г.) мы читаем: „В каждой сети можно составить условия фигур или условия боковые в числе, значительно превышающем определяемое соответственной формулой... Это обстоятельство иногда ведет к ошибочному введению в число условий таких, которые являются следствиями уже введенных условий . . . введение таких условий, зависимых от остальных, равносильно устранению из уравнения сети такого же числа независимых условий“.

В курсе „Маркшейдерское искусство“ (спец. часть, изд. 1932 г.) проф. И. М. Бахурин говорит: „Нередко бывают случаи, что вычислитель . . . при составлении условных уравнений ошибочно не получает их независимыми, благодаря чему составляет уравнение лишнее и пропускает необходимое. Благодаря этому, конечно, весь вычислительный труд по уравниванию фигуры, иногда долгий и упорный, пропадает даром“.

Более точные указания по этому вопросу даны в „Практической геодезии“ В. В. Витковского (изд. 1898 г.), где говорится: „ . . . введение же лишнего (имеется в виду следствие) приводит к поправкам вида $\frac{0}{0}$, т. е. к неопределенности, и тогда вся вычислительная работа пропадает даром“.

Прежде чем приступить к изложению данного вопроса, необходимо заметить, что приведенные выше высказывания по этому поводу не являются исчерпывающими, по крайней мере — с практической точки зрения.

Признаки зависимости при совместном решении нормальных уравнений [1])

Так как следствия являются функцией условий, то включение их в уравнительную обработку приводит к решению системы зависимых уравнений. В теории детерминантов доказывается, что при решении такой системы неизвестные получаются в неопределенном виде.

Проанализируем следующую систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 + \ldots\ldots + a_n E_n + \omega_1 = 0,\\
&b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3 + \ldots\ldots\ldots + b_n E_n + \omega_2 = 0,\\
&c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 + \ldots\ldots\ldots + c_n E_n + \omega_3 = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

которой соответствуют нормальные уравнения

$$
\begin{aligned}
&[aa]\,k_1 + [ab]\,k_2 + [ac]\,k_3 + \omega_1 = 0,\\
&[ab]\,k_1 + [bb]\,k_2 + [bc]\,k_3 + \omega_2 = 0,\\
&[ac]\,k_1 + [bc]\,k_2 + [cc]\,k_3 + \omega_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Если третье уравнение системы (1) является следствием первых двух, то коэфициенты и свободный член этого уравнения могут быть выражены через коэфициенты и свободные члены первых двух уравнений следующим образом [2]):

$$
\begin{aligned}
&c_i = \alpha a_i + \beta b_i,\\
&\omega_3 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

соответственно этому будем иметь

$$
\begin{aligned}
&[ac] = \alpha\,[aa] + \beta\,[ab], \quad [bc] = \alpha\,[ab] + \beta\,[bb],\\
&[cc] = \alpha\,[ac] + \beta\,[bc].
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Решим систему нормальных уравнений (2), пользуясь принятым в уравнительной практике способом подстановки.

После исключения k_1 будем иметь

$$
\begin{aligned}
&[bb.1]\,k_2 + [bc.1]\,k_3 + \omega_2.1 = 0\\
&[bc.1]\,k_2 + [cc.1]\,k_3 + \omega_3.1 = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

После исключения k_2 получим

$$[cc.2]\,k_3 + \omega_3.2 = 0 \tag{6}$$

Учитывая (4), преобразуем коэфициенты и свободные члены уравнений (5) и (6)

$$[bc.1] = [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} = \alpha[ab] + \beta[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}\Big(\alpha\,[aa] + \beta\,[ab]\Big)$$

или

$$[bc.1] = \beta\,[bb.1].$$

[1]) Так как любое из зависимых уравнений является следствием других уравнений, то в данной работе под следствием будем понимать последнее по счету зависимое уравнение

[2]) „Руководство по геодезии“ В. Иордан, изд. 1939 г.

Аналогично найдем

$$[cc.1]=\beta^2\,[bb.1],\qquad \omega_3.1=\beta(\omega_2.1),$$

$$[cc.2]=\beta^2\,[bb.1]-\frac{\beta^2[bb.1]^2}{[bb.1]}=0,$$

$$\omega_3.2=\beta\,(\omega_3.1)-\frac{\beta[bb.1].(\omega_2.1)}{[bb.1]}=0.$$

Подставляя преобразованное значение коэфициентов и свободных членов в (5) и (6), получим

$$[bb.1]\,k_2+\beta\,[bb.1]\,k_3+\omega_2.1=0,$$

$$\beta[bb.1]\,k_2+\beta^2\,[bb.1]\,k_3+\beta\,(\omega_2.1)=0, \tag{5'}$$

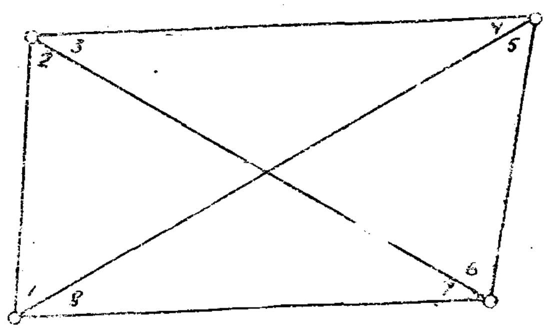
$$0k_3+0=0, \tag{6'}$$

откуда

$$k_3=\frac{0}{0}\,. \tag{7}$$

Из анализа данного примера вытекает, что коэфициенты и свободный член нормального уравнения, соответствующего уравнению-следствию, обращаются в нули после исключения коррелат уравнений, функцией которых является данное следствие.

В рассмотренном примере мы полагали, что следствием являлось третье, т. е. последнее уравнение системы (1). Однако такое положение следствия среди других уравнений не является обязательным, если кроме зависимых уравнений имеются еще и независимые.



Фиг. 1

Пусть для полного геодезического четыреугольника (фиг. 1) составлено пять уравнений поправок, среди которых одно является лишним, т. е. следствием

$$\begin{array}{l}
E_1+E_2+E_3+E_4+\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\omega_1=0\\
\qquad\qquad E_3+E_4+E_5+E_6+\qquad\qquad\quad +\omega_2=0\\
\qquad\qquad\qquad\qquad E_5+E_6+E_7+E_8+\omega_3=0\\
E_1+E_2+\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +E_7+E_8+\omega_4=0\\
\alpha_1\,E_1-\alpha_2\,E_2+\alpha_3\,E_3-\alpha_4\,E_4+\alpha_5\,E_5-\alpha_6\,E_6+\alpha_7 E_7-\alpha_8\,E_8+\omega_5=0
\end{array} \tag{8}$$

и соответствующие им нормальные уравнения

$$\begin{array}{l}
4k_1+2k_2+0k_3+2k_4+[a\alpha]\,k_5+\omega_1=0,\\
2k_1+4k_2+2k_3+0k_4+[b\alpha]k_5+\omega_2=0,\\
0k_1+2k_2+4k_3+2k_4+[c\alpha]\,k_5+\omega_3=0,\\
2k_1+0k_2+2k_3+4k_4+[d\alpha]\,k_5+\omega_4=0,\\
[a\alpha]\,k_1+[b\alpha]\,k_2+[c\alpha]\,k_3+[d\alpha]\,k_4+[\alpha\alpha]\,k_5+\omega_5=
\end{array} \tag{9}$$

В уравнении (9) через a, b, c, d обозначены коэфициенты первых четырех уравнений поправок (8), которые, как видно, соответственно равны единице или нулю, а следовательно,

$$\begin{aligned}
[a\alpha] &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\
[b\alpha] &= \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 \\
[c\alpha] &= \alpha_5 - \alpha_6 + \alpha_7 - \alpha_8 \\
[d\alpha] &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_7 - \alpha_8
\end{aligned} \tag{10}$$

Решим нормальные уравнения (9), как и в предыдущем примере, методом подстановки.

Исключив k_1 из системы (9) путем определения его из первого уравнения, получим

$$k_1 = -\frac{1}{2}k_2 - \frac{1}{2}k_4 - \frac{[a\alpha]}{2}k_5 - \frac{\omega_1}{2} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
3k_2 + 2k_3 - k_4 + [b\alpha.1]\,k_5 + \omega_2.1 &= 0 \\
2k_2 + 4k_3 + 2k_4 + [c\alpha.1]\,k_5 + \omega_3.1 &= 0 \\
-\ k_2 + 2k_3 + 3k_4 + [d\alpha.1]\,k_5 + \omega_4.1 &= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

$$[b\alpha.1]\,k_2 + [c\alpha.1]\,k_3 + [d\alpha.1]\,k_4 + [\alpha\alpha.1]\,k_5 + \omega_5.1 = 0.$$

После исключения k_2 найдем

$$k_2 = -\frac{2}{3}k_3 + \frac{1}{3}k_4 - \frac{[b\alpha.1]}{3}k_5 - \frac{\omega_2.1}{3} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{8}{3}k_3 + \frac{8}{3}k_4 + \left[c\alpha.2\right]k_5 + \omega_3 - \frac{2}{3}\omega_2 - \frac{1}{3}\omega_1 &= 0 \\
\frac{8}{3}k_3 + \frac{8}{3}k_4 + \left[d\alpha.2\right]k_5 + \omega_4 + \frac{1}{3}\omega_2 &= 0
\end{aligned} \tag{14}$$

$$[c\alpha.2]\,k_3 + [d\alpha.2]\,k_4 + [\alpha\alpha.2]\,k_5 + \omega_5.2 = 0$$

После исключения k_3 будем иметь

$$k_3 = -k_4 - \frac{3}{8}[c\alpha.2]\,k_5 - \frac{3}{8}\omega_3 + \frac{1}{4}\omega_2 - \frac{1}{8}\omega_1 \tag{15}$$

$$\left(\frac{8}{3} - \frac{8}{3}\right)k_4 + [d\alpha.3]\,k_5 + \omega_4 - \omega_3 + \omega_2 - \omega_1 = 0 \tag{16}$$

$$[d\alpha.3]\,k_4 + [\alpha\alpha.3]\,k_5 + \omega_5.3 = 0;$$

коэфициент при k_4 из первого уравнения системы (16) равен нулю, свободный член этого уравнения, на основании (8), также равен нулю, следовательно, равен нулю и коэфициент при k_5. Последнее можно было бы доказать путем развертывания символа $[d\alpha.3]$. Развертывая $[d\alpha.3]$, придем к выражению

$$[d\alpha.3] = [a\alpha] + [b\alpha] - [c\alpha] - [d\alpha],$$

которое на основании (10) равно нулю.

Подставляя истинные значения найденных величин в систему (16), получим

$$0k_4 + 0k_5 + 0 = 0$$

$$0k_4 + [\alpha\alpha.3]k_5 + \omega_5.3 = 0. \tag{17}$$

То обстоятельство, что коэфициенты и свободный член первого уравнения (17) равны нулю, показывает, что четвертое уравнение поправок (8) является следствием первых трех уравнений.

Исключая третье уравнение поправок-следствие из (8) и все связанное с ним из остальных уравнений, получим выражения, отвечающие полному геодезическому четыреугольнику, а именно:

$$\begin{aligned} &E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + \qquad\qquad\qquad + \omega_1 = 0 \\ &\qquad E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + \qquad\qquad + \omega_2 = 0 \\ &\qquad\qquad E_5 + E_6 + E_7 + E_8 + \omega_3 = 0 \end{aligned} \tag{8'}$$

$$\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 - \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5 + \alpha_6 E_6 + \alpha_7 E_7 - \alpha_8 E_8 + \omega_5 = 0$$

$$\begin{aligned} &4k_1 + 2k_2 + 0k_3 + [a\alpha]k_5 + \omega_1 = 0 \\ &2k_1 + 4k_2 + 2k_3 + [b\alpha]k_5 + \omega_2 = 0 \\ &0k_1 + 2k_2 + 4k_3 + [c\alpha]k_5 + \omega_3 = 0 \\ &[a\alpha]k_1 + [b\alpha]k_2 + [c\alpha]k_3 + [\alpha\alpha]k_5 + \omega_5 = 0 \end{aligned} \tag{9'}$$

$$k_1 = -\frac{1}{2}k_2 - \frac{[a\alpha]}{2}k_5 - \frac{\omega_1}{2} \tag{11'}$$

$$\begin{aligned} &3k_2 + 2k_3 + [b\alpha.1]k_5 + \omega_2.1 = 0 \\ &2k_2 + 4k_3 + [c\alpha.1]k_5 + \omega_3.1 = 0 \\ &[b\alpha.1]k_2 + [c\alpha.1]k_3 + [\alpha\alpha.1]k_5 + \omega_5.1 = 0 \end{aligned} \tag{12'}$$

$$k_2 = -\frac{2}{3}k_3 - \frac{[b\alpha.1]}{3}k_5 \tag{13'}$$

$$\begin{aligned} &\frac{8}{3}k_3 + [c\alpha.2]k_5 + \omega_3.2 = 0 \\ &[c\alpha.2]k_3 + [\alpha\alpha.2]k_5 + \omega_5.2 = 0 \end{aligned} \tag{14'}$$

$$k_3 = -\frac{3[\alpha\alpha.2]}{8}k_5 - \frac{\omega_5.2}{8} \tag{15'}$$

$$[\alpha\alpha.3]k_5 + \omega_5.3 = 0 \tag{16'}$$

Таким образом, если следствие составлено сверх необходимого числа условий, то его участие в обработке не отражается на результате и не влечет за собой каких-либо перевычислений. В том же случае, когда следствие включено в обработку взамен какого-либо условия, то после обнаружения и исключения его необходимо составить пропущенное условие и произвести перевычисление в решении нормальных уравнений только в отношении этого уравнения и величин, связанных с ним, оставив без изменений все остальное.

Признаки зависимости при двухгрупповом способе уравнивания

Рассмотренные выше примеры относятся к совместному решению всех уравнений, на практике же часто применяется двухгрупповое уравнивание. Выясним, на какой стадии вычислений обнаруживаются следствия в этом случае.

При уравнивании двухгрупповым способом возможны следующие три случая распределения зависимых уравнений по группам:

1. Все зависимые уравнения отнесены к одной группе (первой или второй).

2. Одна часть зависимых уравнений отнесена к одной группе, другая ко второй. Следствие в этом случае всегда будет во второй группе.

3. Во вторую группу отнесено только одно зависимое уравнение-следствие.

В первом и втором случаях следствие обнаруживается при решении нормальных уравнений первой или второй группы так, как это было выяснено выше. В последнем случае следствие обнаруживается при преобразовании коэфициентов и свободных членов уравнений поправок второй группы, которые для уравнения следствия обращаются в нули.

Для подтверждения последнего вывода возьмем геодезический четыреугольник (фиг. 1), составив для него следующие уравнения:

$$
\begin{aligned}
&E_1+E_2+ \qquad -E^5-E_6 \qquad +\omega_1=0\\
&\qquad +F_3+E_4 \qquad -E_7-E_8+\omega_2=0\\
&E_1+E_2+E_3+E_4+E_5+E_6+E_7+E_8+\omega_3=0\\
&E_1+E_2+E_3+E_4+ \qquad +\omega_4=0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Здесь четвертое уравнение является следствием первых трех. Отнеся первые три уравнения в первую группу, получим следующие выражения для системы нормальных уравнений и самих коррелат:

$$
\begin{aligned}
4k_1+\omega_1&=0\\
4k_2+\omega_2&=0\\
8k_3+\omega_3&=0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
k_1&=-\frac{\omega_1}{4}\\
k_2&=-\frac{\omega_2}{4}\\
k_3&=-\frac{\omega_3}{8}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Вспомогательные коррелаты в этом случае будут равны

$$\rho_1=-\frac{1}{2}$$

$$\rho_2=-\frac{1}{2}$$

$$\rho_3=-\frac{1}{2}$$

Преобразованные значения коэфициентов и свободного члена уравнения второй группы найдем из выражений

$$A_1 = A_2 = 1 + \rho_1 + \rho_3;\ A_3 = A_4 = 1 + \rho_2 + \rho_3;\ A_5 = A_6 = -\rho_1 + \rho_3;\ A_7 = A_8 = -\rho_2 + \rho_3$$

$$W_1 = \omega_4 + \rho_1 \omega_1 + \rho_2 \omega_2 + \rho_3 \omega_3.$$

Подставляя значения ρ_i из (21) и учитывая на основании (18), что

$$\omega_4 = \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_3,$$

получим

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 0;\ W_1 = 0.$$

Выводы

1. Необходимо помнить, что успех уравнительных вычислений прежде всего зависит от правильного определения числа условий и правильного их составления, так как только в этом случае затраты труда и времени на решение задачи будут минимальными.

2. В рассмотренных выше примерах мы имели только по одному уравнению-следствию, однако выводы, вытекающие из этих примеров, остаются справедливыми при включении в обработку любого числа следствий.

3. При совместном решении нормальных уравнений следствие обнаруживается в процессе решения этих уравнений. Признаком наличия следствия в этом случае служит то обстоятельство, что коэфициенты и свободный член нормального уравнения, соответствующего следствию, обращаются в нули (практически эти величины будут лишь близкими к нулю) после исключения коррелат уравнений, функцией которых является данное следствие.

4. При двухгрупповом способе уравнивания возможны следующие три случая распределения уравнений поправок по группам:

а) все зависимые уравнения поправок отнесены к одной группе (первой или второй);

б) одна часть зависимых уравнений отнесена к первой группе, другая ко второй группе; в этом случае следствие всегда попадает во вторую группу;

в) во вторую группу отнесено только одно зависимое уравнение поправок-следствие.

В первом и во втором случае зависимое уравнение-следствие обнаруживается в процессе преобразования уравнений второй группы ; преобразованные значения коэфициентов и свободного члена зависимого уравнения-следствия равны нулю.

5. Если уравнение-следствие составлено сверх необходимого числа условий, то его участие в обработке не отражается на результате и не влечет за собой каких-либо перевычислений. В том же случае, когда следствие включено в обработку взамен какого-либо условия, после обнаружения и исключения его необходимо написать пропущенное условие и произвести перевычисления, связанные только с этим уравнением, оставив без изменения все остальное.

6. Если при составлении условий возникает затруднение в определении независимости какого-либо уравнения, то такое уравнение необходимо включить в обработку, в процессе которой вопрос о его независимости будет решен автоматически.

7. Так как при решении нормальных уравнений обнаруживается вся группа зависимых уравнений, то исключено из обработки может быть любое из этих уравнений, а не только последнее. Это обстоятельство следует иметь в виду при наличии синусных зависимых уравнений.