

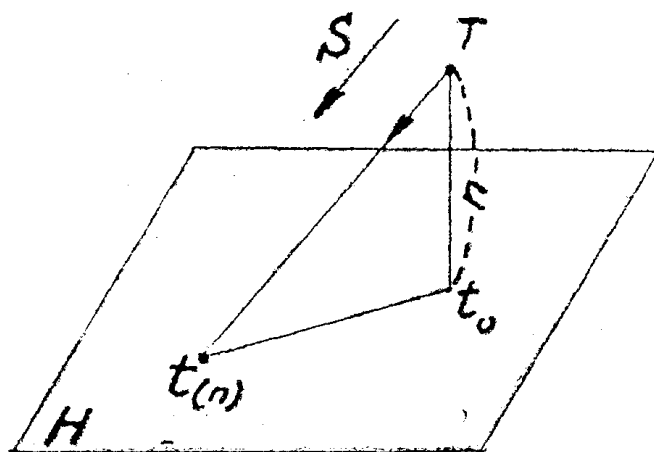
НАЧАЛА МЕТОДА ЧИСЛОВЫХ ОТМЕТОК В ПРОСТЕЙШЕМ ВИДЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

П. А. МАСЛЕНИКОВ

Назначение и сущность метода

Основным назначением метода проекций с числовыми отметками является построение изображений пространственных форм на одной плоскости проекций и решение по полученным изображениям различных геометрических задач. К числу задач, разрешаемых этим методом при его практическом использовании, надлежит отнести в первую очередь задачи построения изображений земной поверхности, поверхностных земляных сооружений и разработок, подземных выработок и решение задач, связанных с определением истинной величины различных геометрических форм по их искаженным изображениям.

Для того, чтобы уяснить сущность метода с числовыми отметками, представим себе плоскость проекций, совмещенной с некоторой горизонтальной плоскостью H . Возьмем в пространстве некоторую точку T , принадлежащую изображаемой форме, и параллельно наперед заданному направлению S спроектируем пространственную точку T на плоскость проекций H . Точка пересечения t прямой, проходящей параллельно



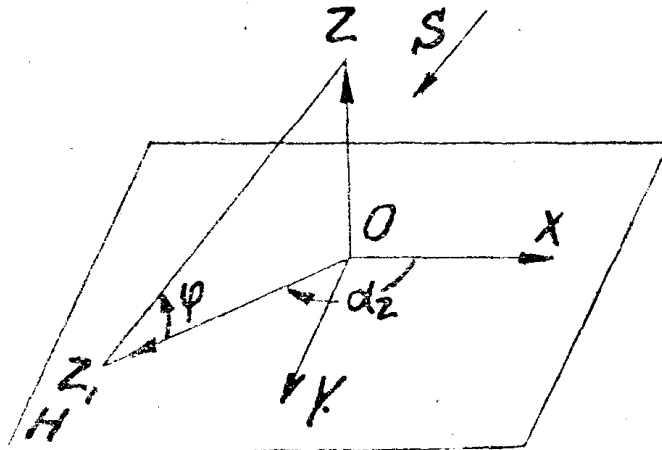
Фиг. 1

заданному направлению S через пространственную точку T , с плоскостью проекций H будет являться изображением (проекцией) пространственной точки T . Рядом с точкою t пишется число n , выражающее возвышение или понижение изображаемой точки T относительно плоскости проекций H . Нетрудно видеть (фиг. 1), что по данной проекции t , известному направлению проектирования и данному числу n (отметка точки T) возможно будет восстановить пространственное положение точки T .

Проекция системы прямоугольных осей

Вообразим себе систему пространственных прямоугольных осей OX , OY и OZ . Пусть координатные оси OX и OY будут находиться в горизонтальной плоскости проекций H , а ось OZ будет перпендикулярна к ней.

Если проектировать параллельно заданному направлению S систему прямоугольных осей OX , OY и OZ на горизонтальную плоскость проекций H (фиг. 2), то так как координатные оси OX и OY лежат, по условию, в плоскости проекций H , их изображениями, очевидно, будут являться сами координатные оси. Следовательно, отрезки, взятые на координатных осях OX и OY , будут изображаться в натуральную величину, то есть изображения этих отрезков не будут претерпевать искажения, а также не будут претерпевать искажения все отрезки прямых и углы между ними, лежащие в плоскости XOY или ей параллельной. Проекция же OZ_1 координатной оси OZ , как нетрудно видеть из фиг. 2, с изображением координатной оси OX будет составлять в общем случае не прямой угол, а некоторый угол α_z , зависящий от угла, который образует заданное направление проектирования S с координатной осью OX . Из прямоугольного треугольника ZOZ_1 видно, что $OZ_1 = OZ \cotg \varphi$, то есть линейная величина изображения OZ_1 отрезка прямой на оси OZ равняется истинной величине отрезка на оси OZ , помноженной на котангенс угла, который образует направление проектирования с горизонтальной плоскостью проекций. Таким образом, котангенс угла φ служит масштабом искажения отрезков прямых, расположенных по оси OZ или ей параллельных.



Фиг. 2

Обозначив масштаб искажения по оси OZ через m_z , то есть положив

$$m_z = \cotg \varphi$$

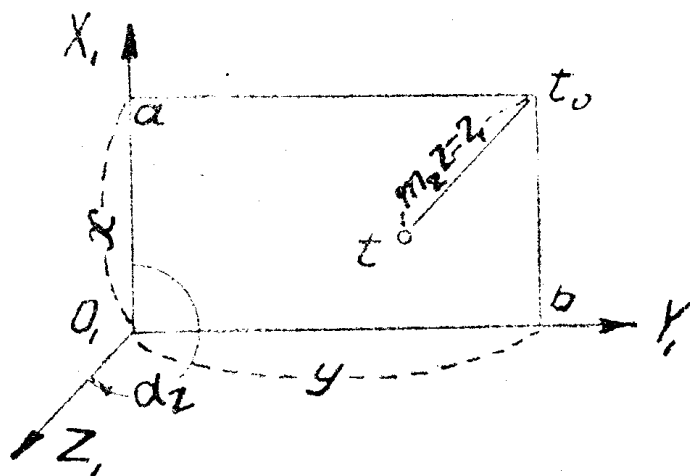
и придавая различные значения углу φ , мы будем иметь различные значения масштаба искажения m_z .

В общем случае, при $90^\circ \neq \varphi \neq 45^\circ$, будут получаться так называемые косоугольные проекции простейшего вида диметрического класса, для которых масштабы по координатным осям OX и OY равны единице, а по оси OZ — $m_z \neq 1$. При частных же значениях $\varphi = 90^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$ для масштаба искажения m_z по оси OZ будут значения $m_z = 0$ и $m_z = 1$; в первом случае будет получена ортогональная проекция, во втором — косоугольная проекция простейшего вида изометрического класса.

Проекция точки

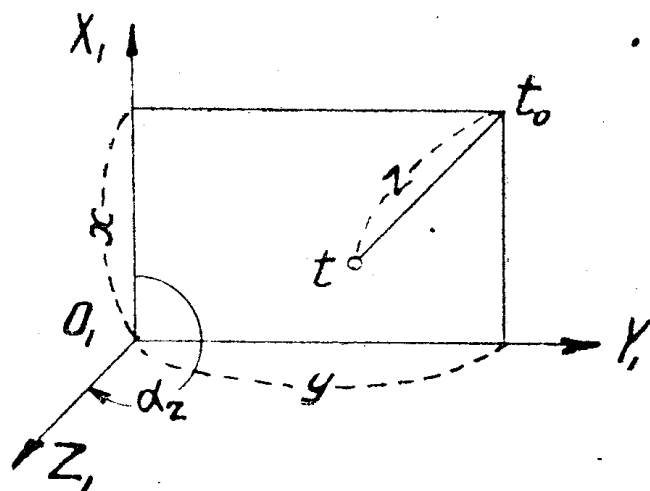
Если для некоторой пространственной точки T даны ее прямоугольные координаты x , y и z , то построение ее изображения t в проекциях с числовыми отметками в общем случае производится следующим образом. От изображения O , начала координат O откладываем по осям O_1X_1 и O_1Y_1 отрезки $O_1a = x$ и $O_1b = y$; из полученных точек a и b проводим прямые, параллельные осям O_1Y_1 и O_1X_1 до пересечения их в точке t_0 ; из точки t_0 проводим прямую, параллельную оси O_1Z_1 , длиной $t_0t = z_1 = m_z \cdot z$. Полученная таким построением точка t будет являться диметрической проекцией точки T .

Поставив рядом с точкою t число $n = z$, выражающее величину возвышения или понижения пространственной точки T относительно плоскости XOY , которая попрежнему принимается лежащей в горизонтальной плоскости, получим проекцию с числовою отметкою $t_{(n)}$ пространственной точки T (фиг. 3).



Фиг. 3

Нетрудно видеть, что для определения пространственного положения точки T по ее проекции с числовою отметкою $t_{(n)}$ надлежит произвести точно такие же построения, но в обратном порядке.



Фиг. 4

Для построения же изображения точки в простейшем виде проекций изометрического класса (фиг. 4), вместо $z_1 = m_z \cdot z$, откладываем от точки t_0 на прямой $t_0 t$ неискаженную величину отметки $z = n$.

Проекция прямой

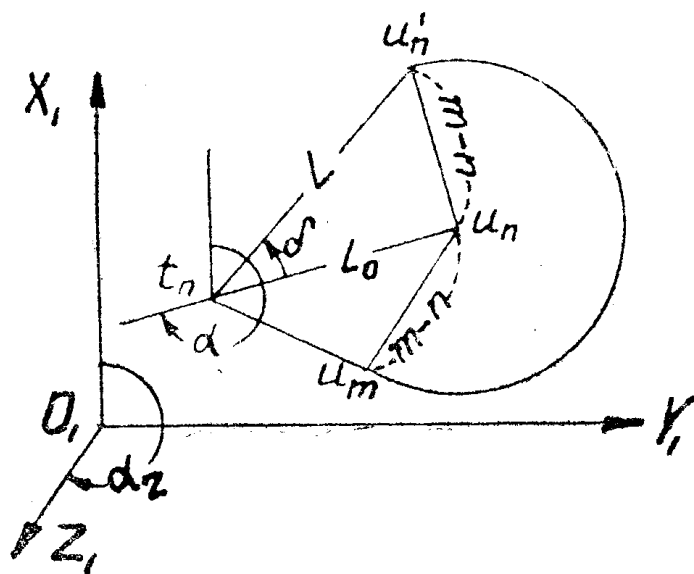
Проекция прямой в общем случае есть прямая, но в отличие от ортогональных проекций с числовыми отметками, в которых длина прямого отрезка на проекции меньше или равна длине изображаемой прямой, в данном виде проектирования изображение отрезка прямой может быть меньше, равно или больше изображаемого отрезка прямой. Так

как косоугольное и ортогональное проектирование относятся к одному роду проектирования (параллельному), то, следовательно, правила градуировки прямой и определения взаимного положения точки с прямой и двух прямых в косоугольных параллельных проекциях с числовыми отметками будут точно такими же, что и при проектировании в ортогональных проекциях с числовыми отметками. Различие будет лишь в способе определения элементов залегания прямой (простираение α и падение δ) и способе определения натуральной величины отрезка прямой по ее косоугольному изображению с числовыми отметками.

Так, если $t_n u_m$ (фиг. 5) есть косоугольное изображение с числовыми отметками отрезка TU некоторой прямой, у которой точка T отстоит от плоскости XOY (горизонтальной) на расстоянии n единиц, а точка U — на расстоянии m единиц и если еще $m > n$, то для определения элементов залегания и натуральной величины этого отрезка надлежит:

- 1) из точки u_m провести прямую $u_m u_n$, равную по длине разности $(m - n)$ отметок крайних точек отрезка прямой и параллельную оси $Z_1 O_1$;
- 2) соединить прямой $t_n u_n$ точки t_n и u_n ;
- 3) из точки u_n к прямой $t_n u_n$ восстановить перпендикуляр $u_n u_n'$ длиной, равной разности $(m - n)$ отметок крайних точек отрезка;
- 4) соединить прямой $t_n u_n'$ точки t_n и u_n' .

Длина прямой $t_n u_n'$ и будет выражать собою натуральную величину отрезка TU ; угол при точке t_n между прямыми $t_n u_n'$ и $t_n u_n$ будет углом падения δ прямой TU , а угол, отсчитанный по ходу часовой стрелки от



Фиг. 5

положительного направления оси $O_1 X_1$ до прямой $u_n t_n$, будет простираением прямой α (за направление прямой принято направление в сторону ее падения).

Для построения прямой (фиг. 5), проходящей через данную точку T , отстоящую от плоскости XOY на расстоянии в n единиц, по ее элементам залегания (простираению α и падению δ) надлежит:

- 1) из точки t_n провести прямую $t_n u_n$ по данному простираению α и прямую $t_n u_n'$, составляющую с проведенной угол δ ;
- 2) на прямой $t_n u_n'$ от точки t_n отложить отрезок, равный натуральной величине L отрезка прямой TU ;

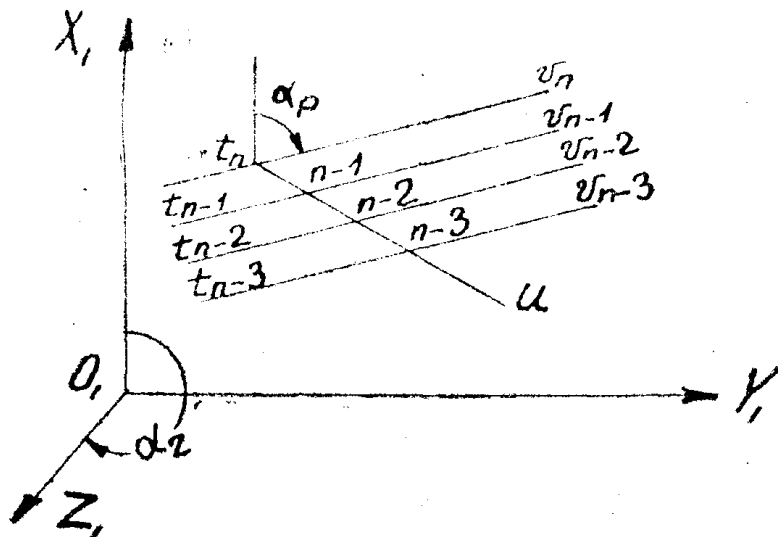
- 3) из точки u_n' на прямую $t_n u_n$ опустить перпендикуляр $u_n' u_n$;
- 4) из подошвы перпендикуляра u_n провести прямую $u_n u_m$, параллельную оси $O_1 Z_1$, и отложить на ней отрезок $(m - n) = u_n u_n'$;
- 5) полученную таким построением точку u_m соединить прямой с точкой t_n ; отрезок $t_n u_m$ и будет искомым изображением.

В том случае, когда длина отрезка прямой неизвестна, построение косоугольной проекции с числовыми отметками для прямой TU , проходящей через данную точку T , производится по элементам залегания (α и δ), этой прямой только что описанным способом, но с тем отличием, что на прямой $t_n u_n'$ откладывается от точки t_n не данная длина отрезка, а произвольная длина L , которая позволит найти вторую произвольную точку прямой TU и ее отметку.

Приведенные правила построения и определения элементов залегания прямой относятся к проекциям изометрического класса; если же проекция будет диметрическая, то расстояние между точками u_m и u_n надлежит брать равным $m_z(m - n)$.

Проекция плоскости

Если придерживаться принятого способа изображения плоскости в виде горизонталей, то для построения их косоугольного параллельного изображения с числовыми отметками по данным элементам залегания плоскости: падению δ_p и простиранию α_p , при условии, что плоскость проходит через некоторую точку пространства T , отстоящую от плоскости XOY на расстоянии n единиц, поступают так. Через проекцию t_n точки T (фиг. 6)

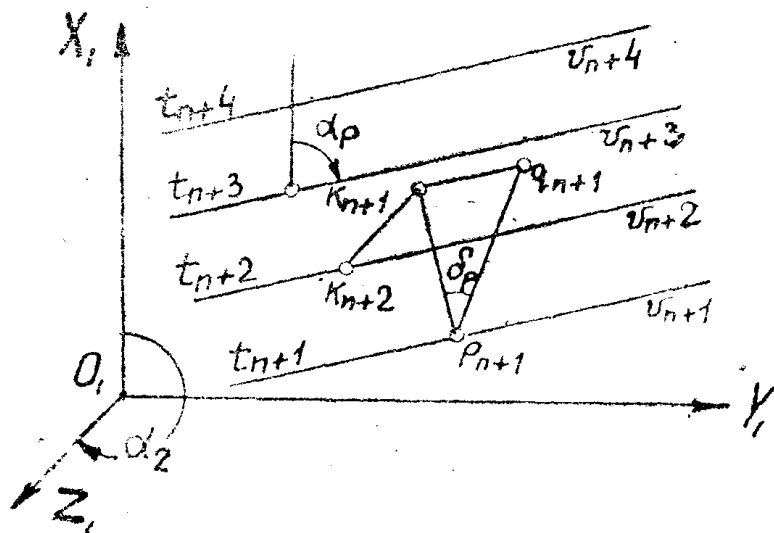


Фиг. 6

проводят прямую $t_n v_n$, составляющую с положительным направлением оси $O_1 X_1$ данный угол α_p , и прямую $t_n u$ (линия падения), составляющую в пространстве с плоскостью XOY угол δ_p и имеющую азимут простирания равный $\alpha_p + 90^\circ$. Затем, проградуйровав прямую $t_n u$, проводят через полученные точки делений $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$ и т. д. прямые, являющиеся косоугольными изображениями горизонталей плоскости, параллельно проведенной линии $t_n v_n$.

Построенные в косоугольной проекции горизонтали плоскости вполне определяют ее пространственное положение. И верно, если прямые $t_n v_n$, $t_{n+1} v_{n+1}$, $t_{n+2} v_{n+2}$... являются изображением в косоугольной проекции

горизонталей плоскости (фиг. 7), то для определения простираения достаточно будет измерить угол, образованный этими горизонталями с положительным направлением оси O_1X_1 . Для определения угла падения δ_p из какой-либо точки k_{n+2} некоторой горизонтали $t_{n+2} v_{n+2}$ параллельно оси O_1Z_1 проводим прямую $k_{n+2} k_{n+1}$, длина которой s равна разности отметок двух смежных горизонталей (в данном случае $s=1$). Из полученной точки k_{n+1} , имеющей отметку на единицу меньшую, чем отметка взятой точки k_{n+2} , опускаем на горизонталь $t_{n+1} v_{n+1}$ перпендикуляр $k_{n+1} p_{n+1}$. Так как отрезок $k_{n+1} p_{n+1}$ лежит в горизонтальной плоскости, то, следовательно, на проекции он выражает натуральную величину заложения отрезка длиной l , у которого разность отметок равна единице. Восстановив наконец из точки k_{n+1} к прямой $k_{n+1} p_{n+1}$ перпендикуляр $k_{n+1} q_{n+1}$, длина которого равна единице, соединяем полученную точку q_{n+1} с точ-



Фиг. 7

кою p_{n+1} прямой $q_{n+1}p_{n+1}$. Угол при точке p_{n+1} , образованный прямыми $p_{n+1}q_{n+1}$ и $p_{n+1}k_{n+1}$, и будет искомым углом падения плоскости δ_p .

Все остальные задачи, как-то: построение плоскости 1) по данным трем точкам, не лежащим на одной прямой; 2) прямой и точке, не лежащей на этой прямой; 3) двум параллельным прямым; 4) двум пересекающимся прямым; определение взаимного положения плоскостей; построение линии пересечения плоскостей; определение точки встречи прямой с плоскостью и т. д., кроме перпендикулярных плоскостей и линий, — решаются точно так же, как и в ортогональных проекциях с числовыми отметками.

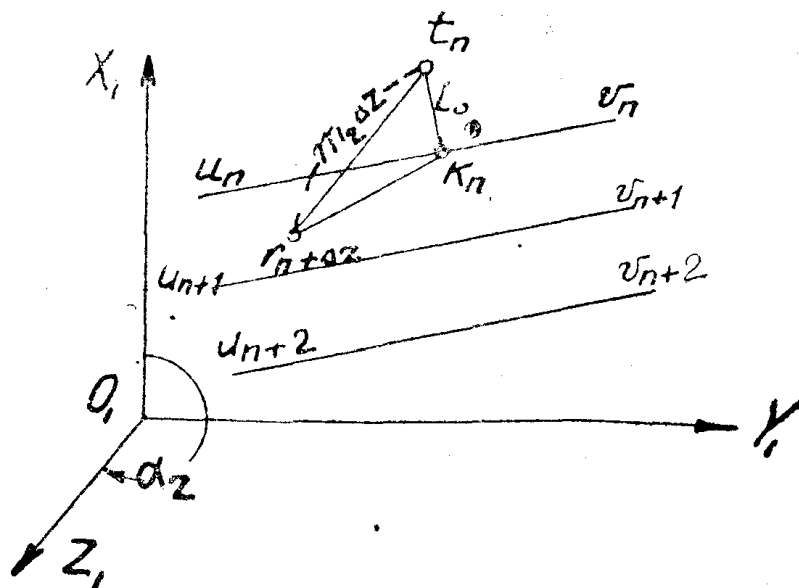
Построение горизонталей плоскости и определение ее элементов залегания в данном случае производилось в изометрических проекциях; в том случае, если эти задачи потребуются решать в диметрических проекциях, надлежит учитывать искажения по оси OZ так же, как и при решении задач на прямую.

Построение перпендикуляра к плоскости

Представляем себе в косоугольной проекции плоскость, заданную горизонталями $u_n v_n$, $u_{n+1} v_{n+1}$, $u_{n+2} v_{n+2}$ и т. д., и точку t_n , лежащую вне этой плоскости (фиг. 8).

Если из точки t_n опустить на горизонталь $u_n v_n$ перпендикуляр $t_n k_n$, то отвечающая ему линия в пространстве TK будет также перпендикулярна к соответствующей горизонтали плоскости в пространстве, так как

горизонтальные прямые $t_n k_n$ и $u_n v_n$ проектируются в данном случае без искажения. Угол падения перпендикуляра к плоскости будет равен дополнению до 90° к углу падения плоскости, то есть, если угол падения пло-



Фиг. 8

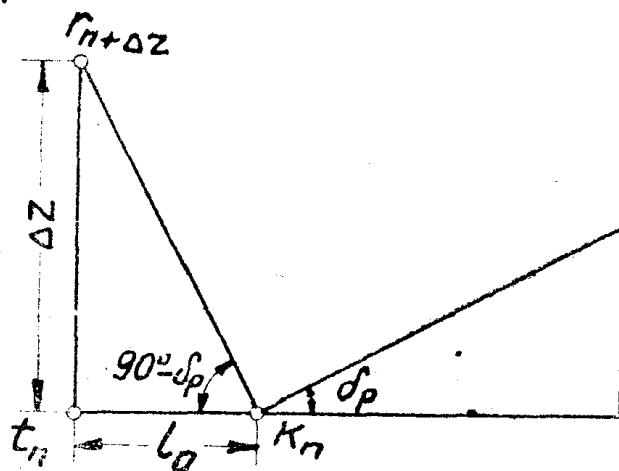
скости есть δ_p , то угол падения перпендикуляра к плоскости должен быть равным $90^\circ - \delta_p$ (фиг. 9).

Для того, чтобы провести перпендикуляр к плоскости, встречающий плоскость в данной точке k_n , как нетрудно видеть из фиг. 9, нужно точку t_n поднять по оси OZ на высоту Δz , определяющуюся формулой

$$\Delta z = l_0 \operatorname{tg} (90^\circ - \delta_p),$$

где l_0 есть заложение перпендикуляра, равное длине прямой $t_n k_n$.

На проекции это поднятие выразится перемещением точки t_n (фиг. 8) на величину $m_z \Delta z$, если проекция диметрическая, и Δz , если проекция изометрическая, по прямой, проходящей через эту точку параллельно оси $Z_1 O_1$.



Фиг. 9

После приведенных рассуждений нетрудно будет вывести и соответствующее правило для построения перпендикуляра к плоскости в простейшем виде параллельных проекций диметрического и изометрического классов с числовыми отметками.

Итак, если требуется через точку r_m провести перпендикуляр к плоскости, заданной горизонталями $u_n v_n$, $u_{n-1} v_{n-1}$, $u_{n-2} v_{n-2}$ и т. д., надлежит (фиг. 10):

1) провести через точку r_m параллельно оси $O_1 Z_1$ прямую $r_m t_n$, длина которой равна произведению масштаба искажения m_z на разность отметок $(n - m)$ данной точки и какой-либо из горизонталей плоскости;

- 4) отложить от точки t_n в направлении от t_n к r_m отрезок $t_n r_{n-\Delta z} = m_z \Delta z$, где $\Delta z = l_0 t_g (90^\circ - \delta_p)$;



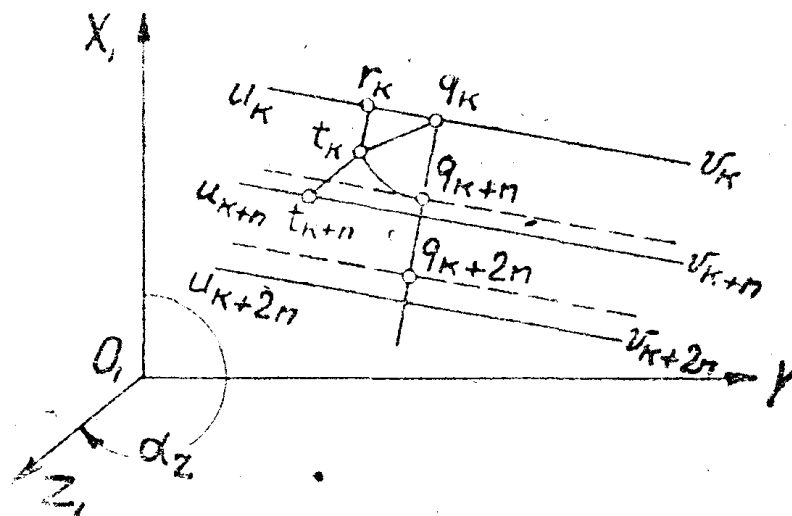
- Вместо вычисления величины Δz для случая изометрической проекции можно будет воспользоваться таким графическим определением ее. При точке k_n прямой $t_n k_n$ построим прямую $k_n r'_{n-\Delta z}$, составляющую с прямой $t_n k_n$ угол $90^\circ - \delta_p$, а из точки t_n восстанавливаем к прямой $t_n k_n$ перпендикуляр; построенный таким образом прямоугольный треугольник $t_n k_n r'_{n-\Delta z}$ будет иметь один катет равным l_0 , а другой $t_n r'_{n-\Delta z}$ равным искомой величине Δz .

Для определения натуральной величины плоских фигур, как известно, наиболее пригодным является способ совмещения плоскости, включающей данную фигуру, с горизонтальной или другой какой-либо плоскостью проекций.

В данном случае, для того чтобы получить натуральную величину фигуры, совмещение придется производить с горизонтальной плоскостью, так как плоскость проекций параллельного проектирования выбрана нами параллельно горизонтальной плоскости.

139.

Итак, в совмещенном положении горизонтالي плоскости остаются параллельными первоначальному своему положению, но расстояния между ними будут, очевидно, иными; так, если l_1 есть расстояние между двумя смежными горизонталями на проекции, то при совмещенном положении эти горизонтالي должны отстоять друг от друга на величину l , равную

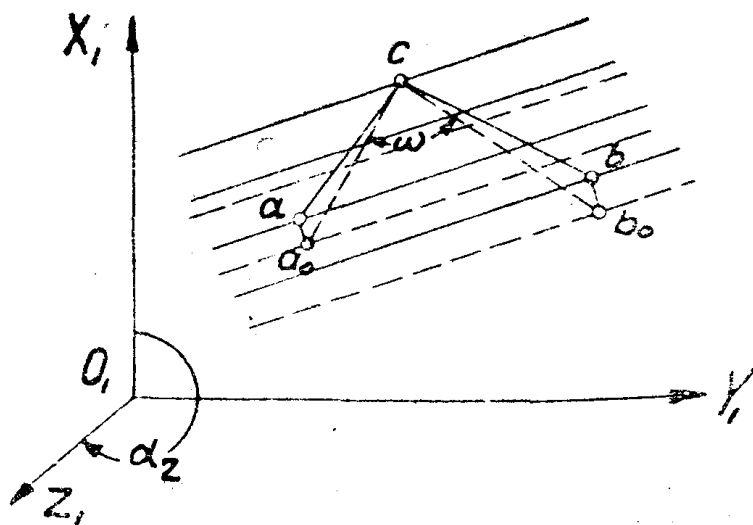


Фиг. 11

расстоянию между двумя смежными горизонталями в натуре, а следовательно, при совмещении плоскости надлежит прежде всего определить величину l .

Пусть плоскость (фиг. 11) задана своими горизонталями $u_k v_k$, $u_{k+n} v_{k+n}$, $u_{k+2n} v_{k+2n}$ и т. д., и требуется ее совместить с горизонтальной плоскостью, проходящей через горизонталь $u_k v_k$.

Для этого выбираем на горизонтали $u_{k+n} v_{k+n}$ некоторую точку t_{k+n} и через нее параллельно оси $O_1 Z_1$ проводим прямую $t_{k+n} t_k$, длина которой равна разности отметок двух смежных горизонталей (в данном случае длина



Фиг. 12

эта в натуре равна n , а на проекции — $m_z n$, если она диметрическая, и n , если проекция изометрическая). Из полученной точки t_k на горизонталь $u_k v_k$ опускаем перпендикуляр $t_k r_k$, от подошвы которого r_k откладываем на горизонтали $u_k v_k$ отрезок длиной $m_z n = r_k q_k$. Расстояние между точ-

ками t_k и q_k будет выражать собою натуральную величину l расстояния между двумя смежными горизонталями. Восстановив из точки q_k к горизонтали $u_k v_k$ перпендикуляр, откладываем на последнем равные отрезки l и через полученные точки делений q_{k+n} , q_{k+2n} и т. д. проводим прямые, параллельные оси вращения, которые и будут выражать собою совмещенное положение горизонталей плоскости.

Пример. Требуется определить натуральную величину угла между двумя прямыми ac и bc (фиг. 12).

Решение. Проградуировав данные прямые, проводим горизонталь плоскости. Совмещаем плоскость угла вращением вокруг горизонтали, проходящей через точку c . Из точек a и b проводим перпендикулярные линии к горизонталям до встречи в точках a_0 и b_0 с совмещенным положением горизонталей, имеющим отметки, равные отметкам точек a и b . Соединяем прямыми точки a_0 и b_0 с точкою c . Измеряем угол ω при точке c между прямыми ca_0 и cb_0 . Угол ω и будет искомым.

Заключение

Как видно из приведенных основных примеров на решение различных геометрических задач и построение изображения с числовыми отметками при параллельном проектировании в простейшем виде диметрического и изометрического классов, большинство задач разрешается точно так же, как и в случае применения метода с числовыми отметками в ортогональных проекциях. Различие приведенного метода с числовыми отметками с методом числовых отметок в ортогональных проекциях возникает лишь при определении натуральной величины искаженных форм, причем и в этом случае окончательные операции для решения данных задач тождественны методу числовых отметок в ортогональных проекциях.

Сравнивая приведенный метод с методом числовых отметок в ортогональных проекциях, нетрудно видеть, что при построении изображения в простейшем виде проекций диметрического и изометрического классов прежде всего строится ортогональная проекция изображаемой пространственной формы, а затем по полученной ортогональной проекции строится параллельная диметрическая или изометрическая проекция. Наоборот, при определении натуральной величины формы по ее параллельной проекции прежде всего делается переход к ортогональному изображению формы, а затем по полученной ортогональной проекции определяется искомая натуральная величина.

Нетрудно видеть, что проекции простейшего вида и диметрического и изометрического классов при масштабе искажений по координатной оси OZ , равном нулю, то есть при $m_z = 0$, обращаются в ортогональные проекции, а, следовательно, метод числовых отметок в ортогональных проекциях является частным случаем приведенного в настоящей работе.

Существующий взгляд на аксонометрические изображения пространственных форм, как на дорогостоящие, не позволяющие решать метрические задачи, объясняется в первую очередь отсутствием удобного для них метода, позволяющего по аксонометрическому изображению быстро определять размеры и взаимное расположение спроектированных форм.

Предлагаемый в настоящей работе метод числовых отметок в аксонометрических изображениях разрешает все основные метрические задачи, а, следовательно, он может быть применен при построении наглядных аксонометрических изображений.

Основной областью, в которой этот метод может быть использован, является картирование разработок полезных ископаемых и в особенности мощных и крутопадающих месторождений. План разработок полезных

ископаемых, построенный в аксонометрическом изображении на горизонтальную плоскость с числовыми отметками, будет удобоизмеряемым и достаточно наглядным. При этом следует учесть, что предлагаемый автором метод предполагает косоугольное параллельное проектирование на горизонтальную плоскость проекций, то есть такое проектирование, которое не будет искажать горизонтальных проложений длин выработок, горизонтальных проложений длин сторон и горизонтальных углов прокладываемых полигонов. Поэтому подобные аксонометрические изображения разработок полезных ископаемых будут являться не дорогостоящим приложением к существующему ортогональному изображению (плану), а основным планом, так как для его построения и пополнения не требуется особых вычислений. Горизонтальные проложения линий и измеренные горизонтальные углы строятся на таком плане обыкновенными способами при помощи масштабной линейки и транспортира, причем дирекционные углы сохраняют свою величину. При построении аксонометрического плана разработок с готового ортогонального может быть применен пантограф.
