ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 68, вып. 1 1951 г.

К ВОПРОСУ ОБ ОПЫТНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ДВИЖУЩИХСЯ МАСС МАШИН

С. И. ШУБОВИЧ

При проведении ряда динамических расчетов (например, при исследовании процесса разгона машины и т. п.) возникает необходимость в определении фактических моментов инерции движущихся масс машины, приведенных к некоторой оси вращения. Эта задача, как известно, разрешается путем аналитического или опытного определения моментов инерции отдельных деталей и последующего их приведения к заданной оси вращения. В том случае, когда этот общепринятый способ по каким-либо причинам неприемлем (когда нет достаточно подробных чертежей деталей и нежелательна в то же время разборка машины), приведенный момент инерции всех движущихся масс машины может быть определен способом, основанным на измерениях времени выбега машины; этот способ в дальнейшем для краткости будет именоваться методом выбега.

Возможность определения приведенных моментов инерции всех движущихся масс машины методом выбега вытекает из анализа основного уравнения выбега:

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} + M = 0, \tag{1}$$

где Θ — суммарный момент инерции всех движущихся масс машины, приведенный к оси какого-либо вала машины,

ω — угловая скорость вращения этого вала,

M — момент сопротивления вращения вала при выбеге (т. е. момент, вызывающий остановку машины), приведенный к оси того же вала.

При выбеге машины без внешней нагрузки моментом сопротивления M будет момент трения в машине M_{mp}, который в общем случае может быть представлен, как сумма по меньшей мере двух слагаемых: момента сил „вязкого" трения и момента сил сухого трения, а поэтому уравнение момента трения запишется в виде:

$$M_{mp} = K\omega^n + M_c, \tag{2}$$

где K — коэфициент пропорциональности, зависящий, главным образом, от нагрузки трущихся пар и вязкости масла, n — показатель зависимости трения от скорости движения и M_c — момент, обусловленный сухим трением, т. е. силами трения, не зависящими от скорости движения.

После замены в уравнении (1) момента сопротивления выражением (2) и некоторых преобразований диференциальное уравнение выбега можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{K}{\Theta}\omega^n + \frac{M_c}{\Theta} = 0 \tag{3}$$

Показатель трения n в случае „вязкого" трения (которое и будет наиболее вероятным в машинах с малыми вентиляционными потерями), равен единице.

Решение диференциального уравнения (3), при $n=1$ и при начальных условиях $t=0$, $\omega=\omega_0$, будет иметь следующий вид:

$$\omega=\left(\omega_0+\frac{M_c}{K}\right)e^{-\frac{k}{\Theta}t}-\frac{M_c}{K}, \tag{4}$$

где ω_0 — начальная скорость выбега, t—время выбега, т. е. время, за которое произойдет снижение скорости от значения ω_0 до ω. Запишем выражение (4) для выбега машины с приведенным моментом инерции движущихся масс Θ и для той же машины, при тех же условиях, но с искусственно измененной величиной момента инерции масс до некоторого значения Θ_1.

$$\left.\begin{aligned}\omega&=\left(\omega_0+\frac{M_c}{K}\right)e^{-\frac{k}{\Theta}t}-\frac{M_c}{K}\\ \omega&=\left(\omega_0=\frac{M_{c1}}{K_1}\right)e^{-\frac{k_1}{\Theta_1}t_1}-\frac{M_1}{K_1}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если изменение момента инерции движущихся масс машины от значения Θ до Θ_1 не вызывает качественных и количественных изменений в трении машины, то $K_1=K$ и $M_{c1}=M_c$, а совместное решение уравнений (5) даст нам следующее соотношение:

$$\frac{t_1}{t}=\frac{\Theta_1}{\Theta} \tag{6}$$

Нетрудно заметить, что наличие в машине только одного вязкого трения или только одного сухого трения не изменит полученного соотношения. Более того, если предположить, что трение в машине является только скоростным трением [1], подчиняющимся закону:

$$M_{mp}=K_э\,\omega^n,$$

где $K_э$—эквивалентный коэфициент трения, а n—показатель трения, имеющий значение $0<n<1$, то и в этом случае соотношение (6) будет также верным.

Действительно, решением уравнения (3) при $M_c=0$ и $0<n<1$ будет выражение следующего вида

$$\omega=\left[\omega_0^{1-n}-\frac{K_э}{\Theta}(1-n)t\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

Поэтому система уравнений, аналогичная системе (5), запишется:

$$\left.\begin{aligned}\omega&=\left[\omega_0^{1-n}-\frac{K_э}{\Theta}(1-n)\,t\right]^{\frac{1}{1-n}}\\ \omega&=\left[\omega_0^{1-n_1}-\frac{K_{э1}}{\Theta_1}(1-n_1)\,t_1\right]^{\frac{1}{1-n_1}}\end{aligned}\right\}$$

Откуда, при $n = n_1$ и $K_э = K_{э1}$, получим прежнее соотношение (6), которое показывает, что при неизменных пределах скоростей выбега и неизменных условиях трения в машине время выбега всегда пропорционально приведенному моменту инерции движущихся масс.

В условиях практики изменение момента инерции движущихся масс машины можно осуществить посадкой на вал машины добавочной массы, например, посадкой маховика или присоединением каких-либо иных вращающихся деталей.

В связи с этим, удобнее записать выражение (6) в следующем виде

$$\frac{t_1}{t} = \frac{\Theta + \Theta_g}{\Theta},$$

где Θ_g — момент инерции добавочной массы.

Отсюда:

$$\Theta = \Theta_g \frac{1}{\frac{t_1}{t} - 1} \tag{7}$$

Таким образом, для определения приведенного момента инерции машины необходимо привести машину в действие, довести скорость вращения ее вала, к которому приводится момент инерции, до некоторой скорости ω_0, отключить машину от источника энергии и измерить время выбега t до некоторой скорости ω [1]). Затем надлежит изменить приведенный момент инерции движущихся масс и повторить опыт для замера времени выбега в тех же пределах скоростей—t_1.

По полученным из опытов величинам t, t_1 и известному моменту инерции Θg [2]) найдется момент инерции Θ из уравнения (7).

Для иллюстрации сказанного приведем пример. При определении момента инерции ротора одного электродвигателя по изложенному выше методу автором были получены следующие результаты:

а) среднее время выбега ротора с начальной скорости $n_0 = 1480$ об/*мин* до конечной $n_k = 0$, $t = 8{,}9$ *сек*,

б) среднее время выбега ротора с насаженным шкивом (в тех же пределах скоростей) $t_1 = 40{,}5$ *сек*,

в) момент инерции шкива (найденный методом качания на двойном подвесе) $\Theta_g = 0{,}45$ *кг. см. сек.*^{2}

Теперь искомый момент инерции ротора определится из формулы (7)

$$\Theta = 0{,}45 \frac{1}{\frac{40{,}5}{8{,}9} - 1} = 0{,}127 \text{ кг.см.сек}^2.$$

В целях выяснения надежности полученного результата, момент инерции ротора был определен вторично методом качаний на двойном подвесе и при этом его значение оказалось равным 0,126 *кг. см. сек*^{2}. Если последнее значение момента инерции принять за истинное значение, то погрешность в определении момента инерции методом выбега лежит в пределах 1%.

[1]) В целях повышения точности измерений времени целесообразно устанавливать возможно больший диапазон скоростей.

[2]) Если момент инерции добавочной массы неизвестен, то его нетрудно определить общепринятым способом [2].

Однако метод выбега не всегда может обеспечить столь высокую точность. Это можно видеть из анализа относительных квадратических погрешностей функции

$$\Theta = f\ (\Theta_g,\ t,\ t_1)$$

в зависимости от относительных погрешностей аргументов t и t_1.

Средняя квадратическая погрешность функции нескольких переменных находится, как известно [3], из следующей зависимости:

$$\sigma_y = \pm \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 \sigma_z^2 + \ldots \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \sigma_t^2},$$

$$\text{если } y = f\ (x,\ z, \ldots t),$$

где σ_y, σ_x, $\sigma_z, \ldots \sigma_t$ — средние квадратические погрешности величин y, x, $z, \ldots t$. В нашем случае эта зависимость запишется в следующем виде:

$$\sigma_\Theta = \pm \sqrt{\left(\frac{d\Theta}{d\Theta_g}\right)^2 \sigma_{\Theta g}^2 + \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{d\Theta}{dt_1}\right)^2 \sigma_{t_1}^2}$$

Так как величина момента инерции добавочной массы Θ_g может быть всегда определена с пренебрежимо малой погрешностью, то $\sigma_{\Theta g} = 0$ и тогда

$$\sigma_\Theta = \pm \sqrt{\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{d\Theta}{dt_1}\right)^2 \sigma_{t1}^2}$$

Случайные погрешности в измерении времени (при исправном секундомере) не зависят от величины измеряемого отрезка времени, так как погрешность, обычно, возникает лишь по той причине, что наблюдатель не в состоянии абсолютно точно зафиксировать нужный момент времени включением или выключением секундомера. Ввиду этого можно принять $\sigma_t = \sigma_{t1}$. Тогда уравнение средней квадратической погрешности искомого момента запишется в следующем виде:

$$\sigma_\Theta = \pm \sqrt{\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dt_1}\right)^2} \cdot \sigma_t.$$

Отсюда после подстановки значений частных производных и некоторых преобразований получаем окончательное выражение для средней квадратической погрешности опытного определения момента инерции Θ.

$$\sigma_\Theta = \pm \Theta_g \frac{\sqrt{\left(\frac{t_1}{t}\right)^2 - 1}}{\left(\frac{t_1}{t} - 1\right)^2} \cdot \frac{\sigma_t}{t}, \qquad (8$$

где $\frac{\sigma_t}{t}$ — относительная квадратическая погрешность измерений времени выбега без добавочной массы.

Деление уравнения (8) на (7) дает выражение относительной квадратической погрешности искомого момента инерции

$$\frac{\sigma_\Theta}{\Theta} = \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{t_1}{t}\right)^2 - 1}}{\frac{t_1}{t} - 1} \cdot \frac{\sigma_t}{t},$$

что можно записать в более удобном виде:

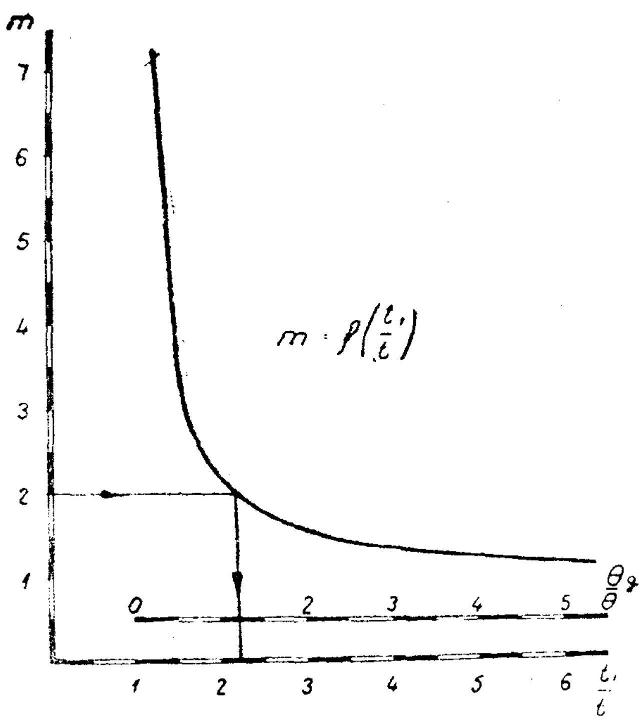
$$\frac{\sigma_\Theta}{\Theta} = \pm m \frac{\sigma_t}{t}, \tag{9}$$

где m — коэфициент увеличения относительной квадратической погрешности, который, как это следует из выражения (9), является функцией отношения $\frac{t_1}{t}$ и равен:

$$m = \frac{\sqrt{\left(\frac{t_1}{t}\right)^2 - 1}}{\frac{t_1}{t} - 1} \tag{10}$$

Зависимость $m = f\left(\frac{t_1}{t}\right)$ представлена графически на фиг. 1.

Из анализа выражения (10) следует, что при значениях $\frac{t_1}{t}$, приближающихся к единице, m стремится к бесконечно большим значениям.



Фиг. 1

Следовательно, как малы ни были бы относительные погрешности в измерениях времени, конечный результат значения Θ может оказаться совершенно непригодным по точности, если только отношение $\frac{t_1}{t}$ не будет достаточно отличаться от единицы.

Таким образом, при определении момента инерции масс методом выбега, добавочную массу необходимо выбирать так, чтобы при имеющейся погрешности в измерениях времени t обеспечивалась необходимая точность в определении момента инерции Θ.

Так, например, пусть требуется определить момент инерции массы методом выбега с относительной квадратической погрешностью $\pm 2\%$, в то время как относительная погрешность в измерениях времени выбега $\frac{\sigma_t}{t}$ составляет $\pm 1\%$. Для обеспечения заданной точности, очевидно, необходимо удовлетворить условию $m \leqslant 2$. Согласно графику на фиг. 1 это условие обеспечивается лишь при

$$\frac{t_1}{t} \geqslant 2,25,$$

что соответствует $\Theta_g \geqslant 1,25\,\Theta$.

При дальнейшем увеличении момента инерции добавочной массы Θ_g погрешность определения искомого момента инерции будет продолжать уменьшаться, но эффект снижения погрешности будет тем слабее, чем больше $\frac{t_1}{t}$, а поэтому нет смысла прибегать к чрезмерно большим добавочным массам Θ_g, тем более что в этом случае могут возникнуть новые погрешности, связанные с увеличением нагрузки в подшипниках вала, на который насаживается добавочная масса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаталов К. Т. Вопросы экспериментальных исследований крутильных колебаний валов двигателей. Сб. статей „Динамика и прочность коленчатых валов", изд. АН СССР, 1948.
2. Серенсен С. В. и др. Динамическая прочность в машиностроении. Машгиз, 1945.
3. Машиностроение, энциклопедический справочник, т. 1, книга первая, Машгиз, 1947.