

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ КОНХОИДАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ

Л. И. ГАНДЖА

Пусть в осях $x—y$ задана некоторая центральная кривая (рис. 1) так, что координаты центра этой кривой равны:

$$x_c = 0, \quad y_c = c.$$

Пусть далее отрезок прямой $AB = l$ перемещается в плоскости координат так, что точка A всегда лежит на оси x , а прямая всегда касается заданной центральной кривой. Тогда точка B опишет в плоскости координат плоскую кривую, которая, как будет показано ниже, относится к семейству конхонд.

Найдем уравнение этой кривой в параметрической форме:

$$y = f(\varphi),$$

$$x = f'(\varphi),$$

где φ — угол наклона прямой AB к оси x , отсчитываемый от оси x против часовой стрелки до направления AB . Наши выводы ограничим частным случаем, когда центральная кривая задана эллипсом.

Обозначая текущие координаты искомой кривой через x и y , находим (рис. 1)

$$y = l \cdot \sin \varphi. \tag{1}$$

Обозначим далее через x'_3 и y'_3 — координаты эллипса для случая, когда центр его совпадает с началом координат; тогда

$$\frac{(x'_3)^2}{a^2} + \frac{(y'_3)^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Для перехода к координатам рис. 1 имеем соотношения:

$$x_3 = x'_3 \quad \text{и} \quad y_3 = y'_3 + c,$$

а после замены x'_3 и y'_3 в уравнении (2) получим:

$$\frac{x_3^2}{a^2} + \frac{(y_3 - c)^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

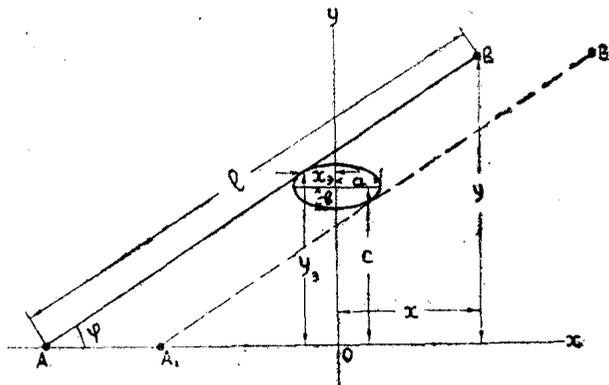


Рис. 1

Согласно рис. 1 уравнение для x может быть получено в следующей форме:

$$x = l \cdot \cos \varphi - y_0 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + (\mp x_0), \quad (4)$$

где знак $-$ должен быть взят в случае касания прямой AB с эллипсом в области отрицательных x -ов при острых углах φ и знак $+$ в области положительных x -ов (прямая A_1, B_1).

Произведем замену значений x_0 и y_0 в (4).

Из (3) находим:

$$y_0 = c \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2} \quad (5)$$

Взяв производную от уравнения (5), получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy_0}{dx_0} = \pm \frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}. \quad (6)$$

Из (6) имеем:

$$x_0 = \pm \frac{a^2 \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}. \quad (7)$$

Решая совместно (4), (5) и (7), получим:

$$x = l \cdot \cos \varphi - \left\{ c \pm \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \right\} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \left\{ \pm \frac{a^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \right\}. \quad (8)$$

Имея в виду, что из сравнения (4) и (8) вытекают равенства

$$\begin{aligned} y_0 &= c \pm \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \\ \text{и} \quad x_0 &= \frac{a^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

получим следующие правила для выбора знаков в (8):

если центральная кривая задана выше оси x , то

1) знак $+$ во втором члене соответствует условиям

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{3}{2} \pi < \varphi < 2\pi$$

при касании в области отрицательных x -ов при острых углах φ и

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2} \pi$$

при касании в области положительных x -ов при острых углах φ ;

2) знак $-$ во втором члене соответствует условиям

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2} \pi$$

при касании в области отрицательных x -ов при острых углах φ и

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2} \pi < \varphi < 2\pi$$

при касании в области положительных x -ов при острых углах φ ;

3) знак $+$ в последнем члене соответствует условиям:

$$\pi < \varphi < 2\pi$$

при касании в области отрицательных x -ов при острых углах φ и

$$0 < \varphi < \pi$$

при касании в области положительных x -ов при острых углах φ ;

4) знак $-$ в последнем члене соответствует условиям:

$$0 < \varphi < \pi$$

при касании в области отрицательных x -ов при острых углах φ и

$$\pi < \varphi < 2\pi$$

при касании в области положительных x -ов при острых углах φ .

Аналогичные правила выбора знаков могут быть выведены и для случая, когда центральная кривая располагается ниже оси x -ов.

На рис. 2 представлены искомые кривые, описываемые уравнениями (1) и (8). При этом сплошная кривая соответствует случаю касания в области отрицательных x -ов при острых углах φ и пунктирная кривая — случаю касания в области положительных x -ов при острых углах φ .

Мы видим, что кривые обоих случаев симметричны относительно оси y . Если рассмотреть оба упомянутых случая при отрицательном c , можно по-

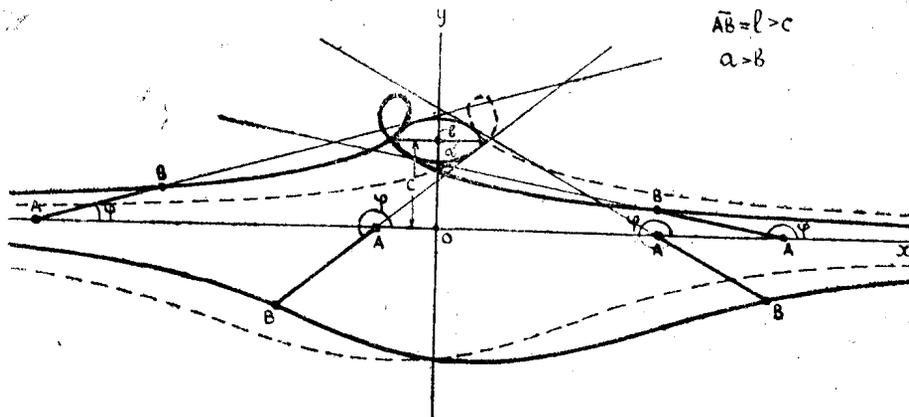


Рис. 2

лучить еще две кривых, симметричных приведенным на рис. 2 относительно оси x (на рисунке не представлены).

Ограничиваясь только рассмотрением одного случая при положительном c и касании в области отрицательных x -ов при острых углах φ (сплошная кривая на рис. 2), выводим следующие следствия.

1. Кривая при $0 < \varphi < \pi$ приходит из $-\infty$, описывает, при известных условиях, петлю около центральной кривой и уходит в $+\infty$, располагаясь выше оси x -ов.

2. При $\pi < \varphi < 2\pi$ кривая приходит из $-\infty$ и уходит в $+\infty$, располагаясь ниже оси x -ов.

3. На основании (1) и (8) при $\varphi = 0, \pi, 2\pi$

$$y = 0,$$

$$x = \infty,$$

то есть обе ветви имеют асимптоту, каковой является ось x -ов.

4. Исследуя уравнение (1) на максимум и минимум, находим, что максимум $y = f(\varphi)$ имеет место при

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

и минимум при

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi.$$

Для определения значений x , соответствующих максимуму и минимуму y , подставляем найденные значения φ в уравнение (8); при этом выражение (8) обращается в неопределенность. Для раскрытия неопределенности представим (8) в виде:

$$x = l \cos \varphi - \left\{ c \pm \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \right\} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \left\{ \pm \frac{a^2}{\sqrt{\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi} + a^2}} \right\}. \quad (9)$$

Подстановка значений $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ в (9) дает следующие значения x :

$$\left. \begin{array}{l} \text{для максимума } y: x_{\max} = -a, \\ \text{для минимума } y: x_{\min} = +a. \end{array} \right\} \quad (10)$$

При этом необходимо учитывать правила выбора знаков, приведенные выше.

Подстановка тех же значений $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ в (1) дает значения максимума и минимума y :

$$\left. \begin{array}{l} y_{\max} = l, \\ y_{\min} = -l \end{array} \right\} \quad (11)$$

5. Из рис. 2 можно заключить, что при $l > c$ кривая имеет узловую точку, в которой ветвь ее пересекает саму себя. Координаты узловой точки найдутся на основании следующих соображений.

В узловой точке углы наклона касательных к кривой различны и удовлетворяют условиям:

$$0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$$

и

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_2 < \pi.$$

При подстановке φ_1 и φ_2 в (9) с соблюдением правил выбора знаков получим значение x_1 и x_2 . Очевидно, что в узловой точке

$$x_1 = x_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & l \cos \varphi_1 - \left\{ c + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} \right\} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) + \left\{ - \frac{a^2}{\sqrt{\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi_1} + a^2}} \right\} = \\ & = l \cos \varphi_2 - \left\{ c - \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_2}} \right\} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right) + \left\{ - \frac{a^2}{\sqrt{\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi_2} + a^2}} \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

С другой стороны, подстановка φ_1 и φ_2 в (1) даёт значения y_1 и y_2 , которые для узловой точки также равны:
 $y_1 = y_2$, или $l \cdot \sin \varphi_1 = l \cdot \sin \varphi_2$, или $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2$, откуда

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1. \quad (13)$$

Подставляя φ_2 из (13) в (12), получим:

$$\sin \varphi_1 = \frac{c}{l}. \quad (14)$$

Подстановка (14) в (1) даёт значение $y_1 = y_2$ для узловой точки:

$$y_1 = l \sin \varphi_1 = c. \quad (15)$$

Подстановка (14) в (9) даёт значение $x_1 = x_2$:

$$x_1 = \sqrt{l^2 - c^2} - \left\{ c + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + \frac{a^2 \cdot c^2}{l^2 - c^2}}} \right\} \frac{\sqrt{l^2 - c^2}}{c^2} - \frac{a^2}{\sqrt{\frac{b^2(l^2 - c^2)}{c^2} + a^2}}. \quad (16)$$

6. На основании (11), (14) и (15) заключаем, что при $l = c$ точка максимума кривой совпадает с ее особой точкой. При этом узловая точка обращается в точку возврата.

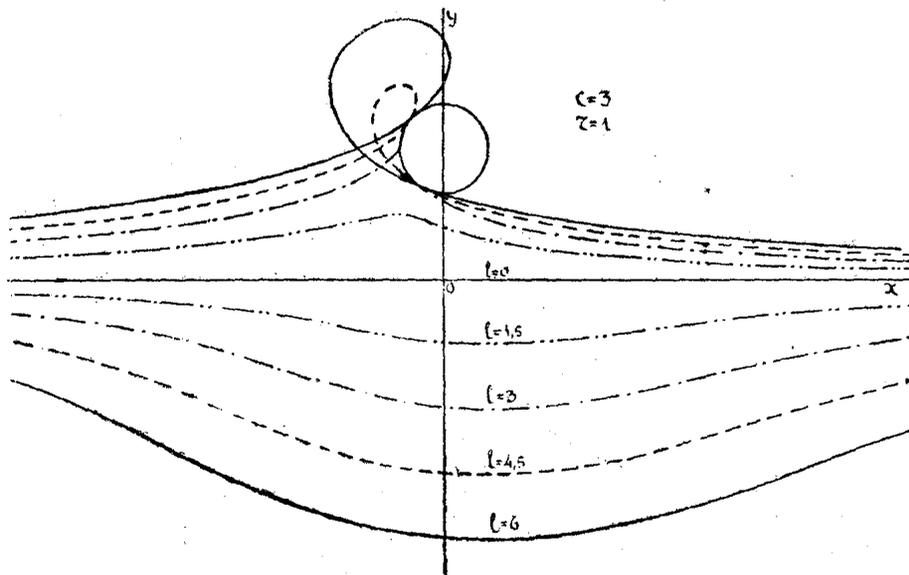


Рис. 3

Если в (8) положить $a = b = r$, то получим центральную кривую, заданную окружностью, при этом (8) упрощается и принимает вид:

$$x = l \cdot \cos \varphi - \left\{ c \pm r \cdot \cos \varphi \right\} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \left\{ \pm r \cdot \sin \varphi \right\} \quad (17)$$

и попержнему $y = l \cdot \sin \varphi$.

На рис. 3 представлено семейство конхонд при различных значениях параметра l , описываемых системой уравнений (17). Методика исследования этих кривых остается той же.

Рис. 3 показывает, что при уменьшении l ветви кривой приближаются к своей асимптоте и при $l = 0$ совпадают с ней.

На рис. 4. представлено другое семейство круговых конхонд при различных значениях параметра c . Особенно характерны кривые при $c = r$ и при $c = 0$.

В первом случае кривая, придя из $-\infty$ в области положительных значений y , образует петлю, доходит до оси x и, резко поворачивая, уходит в $+\infty$, сливаясь с осью x . Нижняя ветвь, сливаясь с осью x в интервале $-\infty, l$, в точке $(x=l, y=0)$ резко поворачивает вниз и, проходя через

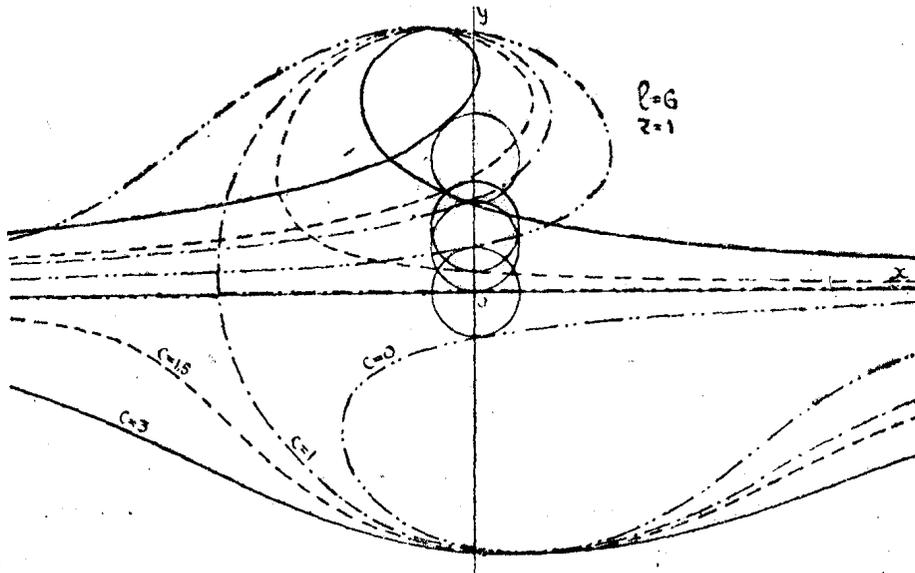


Рис. 4

минимальное значение, уходит в $+\infty$, асимптотически приближаясь к оси x .

Во втором случае верхняя ветвь приходит из $-\infty$ и уходит в $-\infty$; нижняя ветвь приходит из $+\infty$ и, пересекая дважды ось y , уходит в $+\infty$.

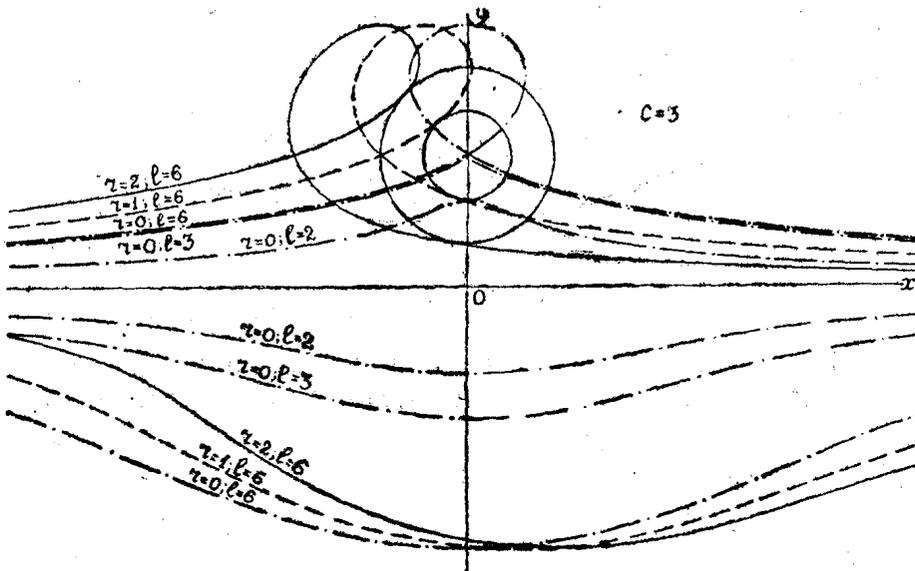


Рис. 5

Рис. 5 представляет семейство круговых конхонд при разных значениях параметра r .

В частном случае, когда $r=0$, центральная кривая обращается в точку, лежащую на оси y в расстоянии c от начала координат.

В этом случае круговая конхоида обращается в конхоиду Никомеда, которая и представлена на рис. 5 для трех значений параметра l :

$$l = 6,$$

$$l = 3,$$

$$l = 2.$$

Подставляя $r = 0$ в уравнение (17), получим уравнения конхоиды Никомеда в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} y &= l \cdot \sin \varphi \\ x &= l \cdot \cos \varphi - c \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

Выводы

1. Путем варьирования параметров семейства конхонид могут быть образованы около различных центральных кривых.

2. Семейства конхонид могут быть обозначены наименованием той центральной кривой, около которой они образованы. Так, можно различать „эллиптические конхониды“, „круговые конхониды“ и т. д.

3. „Круговые конхониды“ представляют собой частный случай „эллиптических конхонид“, когда $a = b = r$.

Конхоида Никомеда представляет собой частный случай „круговых конхонид“, когда $r = 0$.
