

## К ВОПРОСУ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Г. Е. ПУХОВ

### Введение

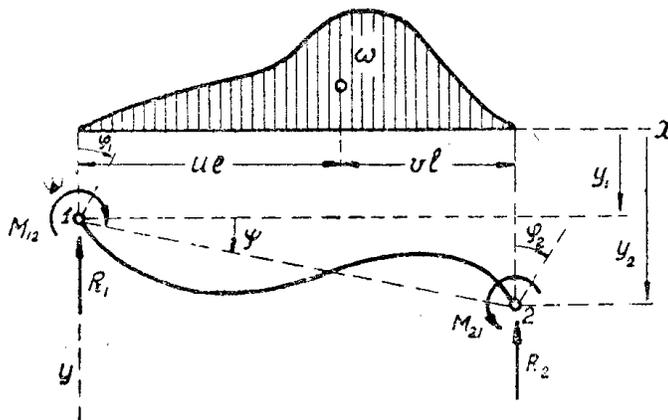
Методы исследования электрических цепей, в особенности за последние годы, стали широко внедряться в смежные области науки [1—13 и др.]. Наиболее эффективными в этом отношении оказались методы электрического моделирования и известный метод электромеханических аналогий.

Настоящая работа ставит своей целью описание метода определения изгибающих моментов и перемещений плоских стержневых систем (неразрезных балок, рам и т. п.), основанного на замеченной возможности привести изгибаемый стержень к активному электрическому трехполюснику.

Для простоты в работе рассматриваются лишь задачи статики.

### 1. Трехполюсная электрическая схема замещения изгибаемого стержня

Пусть стержень 1—2 (фиг. 1) находится под воздействием изгибающих моментов  $M_{12}$  и  $M_{21}$ , реакций  $R_1$  и  $R_2$  и под влиянием произвольно распределенной по его длине внешней нагрузки, действие которой характе-



Фиг. 1. Изгибаемый стержень.

ризуется площадью ( $\omega$ ) эпюры изгибающих моментов (при условии свободных шарнирно опертых концов) и расстоянием ( $ul$ ) ее центра тяжести до точки 1 (или  $vl$  до точки 2).

Известно [14], что в этом случае связь между углами поворота  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  концов стержня, углом  $\psi$ , характеризующим смещение  $y_2 - y_1$  концов,

изгибающими моментами и, наконец, опорными реакциями, выражается системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= \frac{2EI}{l} (2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi) - \frac{2\omega}{l} (3v - 1), \\
 -M_{21} &= \frac{2EI}{l} (\varphi_1 + 2\varphi_2 - 3\psi) + \frac{2\omega}{l} (3u - 1), \\
 R_1 - R_{10} &= -\frac{6EI}{l^2} (\varphi_1 + \varphi_2 - 2\psi) - \frac{6\omega}{l^2} (u - v), \\
 R_2 - R_{20} &= \frac{6EI}{l^2} (\varphi_1 + \varphi_2 - 2\psi) + \frac{6\omega}{l^2} (u - v)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

(действие продольных сил не учитывается), где  $l$  — длина стержня,  $R_{10}$  и  $R_{20}$  — опорные реакции от внешней нагрузки в стержне со свободными шарнирно опертными концами,  $I$  — момент инерции стержня относительно его оси,  $E$  — модуль упругости.

Поскольку стержень характеризуется, вообще говоря, четырьмя входными величинами ( $\varphi_1$ ,  $M_{12}$ ,  $y_1$  и  $R_1$ ) и четырьмя выходными ( $\varphi_2$ ,  $M_{21}$ ,  $y_2$  и  $R_2$ ), то обычно считается, что электрическим изображением стержня является восьмиполюсник [8, 11].

Расчет электрической цепи, состоящей из восьмиполюсников, сложен и приводит к громоздким вычислениям. Покажем, что в качестве электрической схемы, изображающей стержень, может быть взята несравненно более простая трехполюсная схема.

Действительно, замечая, что

$$M_{12} - M_{21} = -l(R_1 - R_{10}) = l(R_2 - R_{20}), \tag{1.2}$$

и определяя из первых двух уравнений (1.3) углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\varphi_1 = \frac{l}{3EI} M_{12} + \frac{l}{6EI} M_{21} + \frac{\omega v}{EI} + \psi, \tag{1.3}$$

$$-\varphi_2 = \frac{l}{6EI} M_{12} + \frac{l}{3EI} M_{21} + \frac{\omega u}{EI} - \psi$$

и, наконец, трактуя углы как напряжения и э. д. с., а изгибающие моменты как токи электрической цепи, нетрудно усмотреть, что зависимостям (1.2) и (1.3) отвечает схема активного электрического трехполюсника, приведенная на фиг. 2. Цепь эта<sup>1)</sup> вполне определяется углом  $\psi$  и величинами

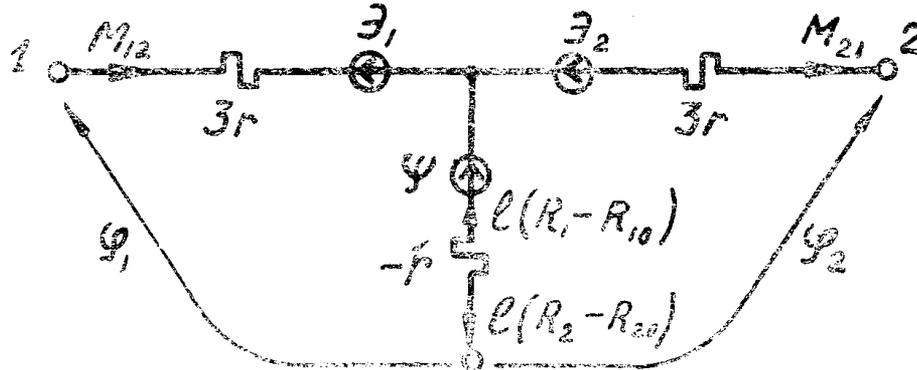
$$r = \frac{l}{6EI}, \quad \mathcal{E}_1 = \frac{\omega v}{EI} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\omega u}{EI}, \tag{1.4}$$

которые назовем параметрами схемы замещения стержня.

Различные нагрузки стержня и способы закрепления его концов отображаются на схеме замещения следующим образом: 1) стержень с несме-

<sup>1)</sup> От T-образной схемы замещения легко, разумеется, при необходимости перейти к II-образной схеме [18].

щающимися концами  $\psi = 0$ , 2) к стержню не приложена внешняя нагрузка  $\omega = 0$  и, следовательно,  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 0$ , 3) жесткое закрепление левого конца стержня  $\varphi_1 = 0$ , 4) жесткое закрепление правого конца стержня  $\varphi_2 = 0$ , 5) шарнирное закрепление левого конца стержня  $M_{12} = 0$  (разумеется, если не прикладывается какой-либо внешний изгибающий момент) и т. д.



Фиг. 2. Т-образная схема замещения (электрический аналог) изгибаемого стержня.

Значения параметров  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  для различных видов нагрузки стержня, подсчитанные по формулам (1.4), приведены в приложении.

## 2. Порядок расчета стержневых систем по предлагаемому методу (методу трехполюсника)

Имея полученную выше трехполюсную схему замещения изгибаемого стержня, можно предложить следующий порядок расчета плоских стержневых систем:

- 1) определение параметров вида  $r$ ,  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  схем замещения стержней, составляющих рассматриваемую систему;
- 2) составление схемы замещения всей стержневой системы с учетом граничных условий (способов закрепления концов и т. п.);
- 3) расчет схемы замещения стержневой системы как обычной электрической цепи с привлечением к решению уравнений статики ( $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  и т. д.).

Следует отметить, что рассматриваемые схемы замещения стержневых систем относятся к электрическим цепям постоянного тока, расчеты которых являются наиболее простыми. Для определения распределения токов и напряжений в схемах замещения могут быть применены любые методы исследования линейных электрических цепей, в частности, методы контурных токов и узловых напряжений, теорема об эквивалентном генераторе, метод составных четырехполюсников [19–21] и т. д. Для расчета цепей особенно сложной конфигурации целесообразно применять метод подсхем, основанный на разложении сложной цепи на последовательно, параллельно и смешанно соединенные подсхемы [22].

Изгибающие моменты, действующие в различных узлах стержневой системы, и углы поворота узлов будут изображаться на схеме замещения соответствующими электрическими токами и напряжениями.

Дальнейшее построение эпюр изгибающих моментов, поперечных срезающих сил и т. д. может производиться обычными приемами строительной механики.

Несколько примеров, поясняющих сказанное, приведены в приложении.

### 3. Замечание об уравнении трех моментов

При расчетах неразрезных балок (фиг. 3а) часто используется уравнение трех моментов:

$$\begin{aligned} \frac{l_k}{I_k} M_{k-1} + 2 \left( \frac{l_k}{I_k} + \frac{l_{k+1}}{I_{k+1}} \right) M_k + \frac{l_{k+1}}{I_{k+1}} M_{k+1} = \\ = -6 \frac{\omega_k u_k}{I_k l_k^2} - 6 \frac{\omega_{k+1} v_{k+1}}{I_{k+1} l_{k+1}^2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Написав уравнение контурного тока для  $k$ -той ячейки схемы замещения балки (фиг. 3б)

$$r_k M_{k-1} + 2(r_k + r_{k+1}) M_k + r_{k+1} M_{k+1} = -\mathcal{E}_2^{(k)} - \mathcal{E}_1^{(k+1)} \quad (3.2)$$

и, принимая во внимание выражение (1.4), убеждаемся в тождественности уравнений (3.1) и (3.2).

Таким образом, метод расчета неразрезных балок, использующий уравнение трех моментов, является аналогом расчета цепных электрических схем по методу контурных токов, заметим, весьма неподходящему для этой цели.

### 4. Замечание о методе фокусных точек

В строительной механике известна теория так называемых фокусных отношений, имеющая большое значение для практических и теоретических расчетов неразрезных балок и рам. Теория эта сводится к нахождению на каждом незагруженном пролете точек (называемых моментными фокусами), в которых происходит изменение знака эпюры изгибающих моментов. Теория основывается на вычислении фокусных отношений  $\lambda$  по формулам:

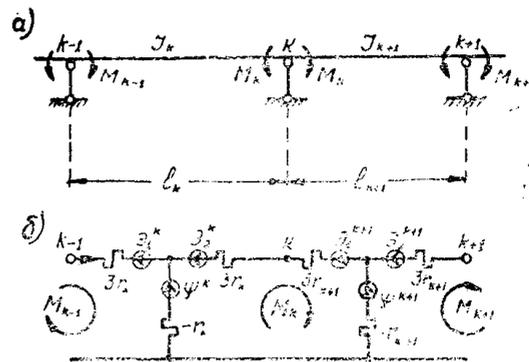
$$\lambda_k = - \frac{M_k}{M_{k-1}} = \frac{l_k - c_k}{l_k}, \quad (4.1)$$

где  $c_k$  — расстояние от фокусной точки до левой опоры  $k$ -того пролета от нагрузки, расположенной на правых относительно него пролетах.

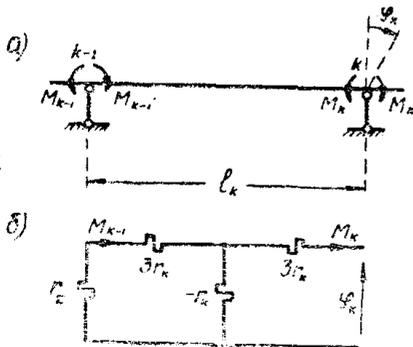
Обращаясь к схеме замещения (фиг. 4)  $k$ -того стержня и учитывая, что как она, так и схемы замещения всех левых пролетов пассивны (параметры типа  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  и  $\psi$  равны нулю), видим, что фокусное отношение определяется в общем случае зависимостью:

$$\lambda_k = - \frac{M_k}{M_{k-1}} = \zeta + \frac{r_\Sigma}{r_k}, \quad (4.2)$$

где  $r_\Sigma$  — сопротивление, отвечающее левой части балки, кроме рассматриваемого  $k$ -того пролета.



Фиг. 3. Неразрезная балка и ее схема замещения.



Фиг. 4. Неразрезная балка и ее схема замещения для случая, когда нагрузки находятся правее  $k$ -той опоры.

В частных случаях: а.  $r_{\Sigma} = 0$  (левый конец  $k$ -того пролета зашпемлен)  $\lambda_k = 2$ , б.  $r_{\Sigma} = \infty$  (левый конец  $k$ -того пролета шарнирно оперт)  $\lambda_k = \infty$  и т. д. Последние соотношения хорошо известны в строительной механике. Значение  $r_{\Sigma}$  легко найти прямо по схеме замещения балки обычными приемами замены последовательно и параллельно соединенных сопротивлений эквивалентным.

Таким образом, мы приходим к выводу о существовании аналогии между методом фокусных отношений строительной механики и простейшими приемами известного в электротехнике метода преобразования (трансформации) электрических цепей.

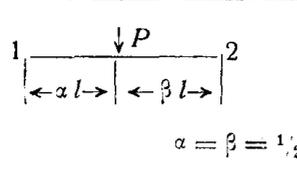
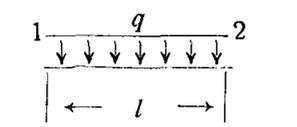
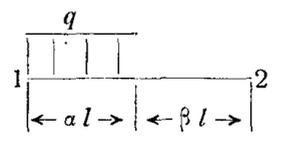
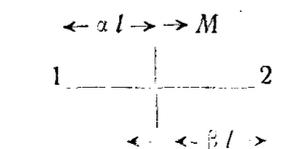
## 5. Заключение

Выше было доказано, что изгибаемый стержень может быть приведен не только к восьмиполусной системе, как это обычно считается, но и к несравненно более простой трехполусной. Изображение стержней в виде активных электрических трехполусников позволяет несколько упростить расчеты плоских стержневых систем и применять к ним любые методы исследования электрических цепей.

Автор надеется, что изложенный метод окажется полезным в практике расчетов строительных конструкций, так как при его применении могут быть использованы возможности как теории электрических цепей, так и теории сооружений.

Разумеется, предлагаемые электрические схемы замещения стержневых систем могут быть легко осуществлены в лаборатории, после чего вычисления изгибающих моментов и углов поворота заменятся измерением соответствующих токов и напряжений.

**Приложение 1.** Параметры схемы замещения изгибаемого стержня постоянного сечения

№ п.п.	Вид загрузкиия	Параметры	
		$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_2$
1	 <p style="text-align: center;"><math>\alpha = \beta = 1/2</math></p>	$\frac{Pl^3}{6EI} (1 + \beta) \alpha \beta$ $\frac{Pl^3}{16EI}$	$\frac{Pl^3}{6EI} (1 + \alpha) \alpha \beta$ $\frac{Pl^3}{16EI}$
2		$\frac{ql^3}{24EI}$	$\frac{ql^3}{24EI}$
3		$-\frac{ql^3}{24EI} (1 + \beta)^2 \alpha^2$	$-\frac{ql^3}{24EI} (2 - \alpha^2) \alpha^2$
4		$-\frac{Ml}{6EI} (3\beta^2 - 1)$	$\frac{Ml}{6EI} (3\alpha^2 - 1)$

**Приложение 2.** Примеры расчета балок и рам.

Пример 1. Определим угол  $\varphi_1$  и изгибающий момент  $M_{21}$  для балки фиг. 5а. Из схемы замещения (фиг. 5б) получаем

$$M_{21} = -\frac{\mathcal{E}_2}{2r} = -\frac{ql^2}{8}, \quad (\text{П.1})$$

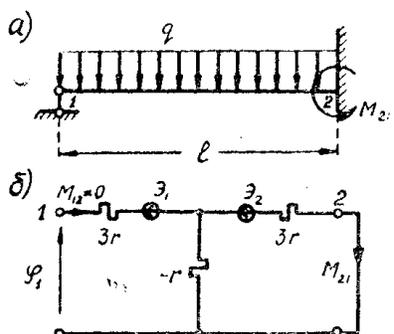
$$\varphi_1 = (-r)(-M_{21}) + \mathcal{E}_1 = \frac{ql^3}{16EI}, \quad (\text{П.2})$$

так как

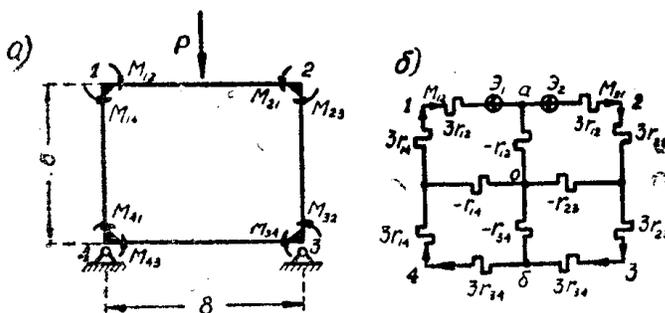
$$r = \frac{l}{6EI} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \frac{ql^3}{24EI}$$

(см. приложение 1). Знак минус указывает на то, что защемляющий момент действует против выбранного положительного направления.

Значения  $M_{21}$  и  $\varphi_1$  общеизвестны и приводятся, например, в [15].



Фиг. 5. Балка и ее схема замещения.



Фиг. 6. Рама и ее схема замещения.

Пример 2. Определим изгибающие моменты в узлах рамы<sup>1)</sup> фиг. 6.

В силу симметричного приложения нагрузки  $P$  узлы рамы не будут смещаться, а только поворачиваться, и поэтому  $\psi = 0$ . В схеме замещения электрические напряжения, между точками  $0-a$  и  $0-b$ , очевидно, будут равны нулю, вследствие чего сразу находим

$$M_{12} = M_{21} = -\frac{\mathcal{E}}{3r_{12} + 3r_{14} + \frac{(-r_{14})(3r_{11} + 3r_{34})}{-r_{14} + 3r_{14} + 3r_{34}}} = -\frac{\mathcal{E}}{3\left(r_{12} + \frac{3r_{14}^2}{2r_{11} + 3r_{34}}\right)}. \quad (\text{П.3})$$

Подставляя сюда

$$r_{12} = \frac{l_{12}}{6EI_{12}} = \frac{2}{3EI}, \quad r_{14} = r_{23} = \frac{1}{EI}, \quad (\text{П.4})$$

$$r_{34} = \frac{4}{3EI}, \quad \mathcal{E} = \frac{Pl_{12}^2}{16EI_{12}} = \frac{2P}{EI},$$

окончательно получаем

$$M_{12} = M_{21} = -\frac{12P}{23} = -0,5217P. \quad (\text{П.5})$$

<sup>1)</sup> Данные для примера заимствованы из [16, задача 13, 15].

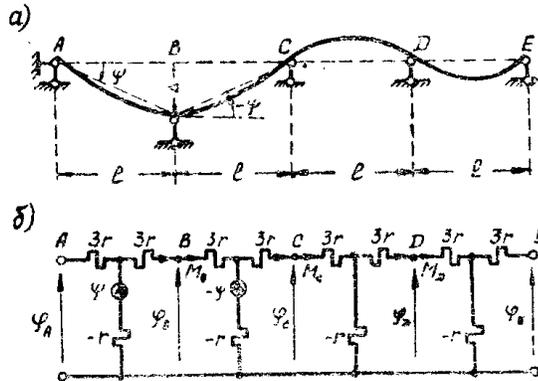
Изгибающие моменты в узлах 3 и 4 будут

$$M_{11} = M_{13} = M_{32} = M_{34} = -M_{12} \frac{r_{14}}{2r_{14} + 3r_{34}} = -\frac{2P}{23} = -0,08695 P. \quad (\text{П.6})$$

Приближенное решение этой задачи по методу фокусов, приведенное в [16], имеет вид:

$$M_{12} = M_{21} = -0,5224 P, \quad M_{11} = M_{13} = M_{32} = M_{34} = -0,087 P. \quad (\text{П.7})$$

Пример 3. Найдем опорные изгибающие моменты неразрезной балки<sup>1)</sup> фиг. 7 от осадки опоры  $B$  на величину  $\Delta$ .



Фиг. 7. Неразрезная балка с осевшей опорой и ее схема замещения

Параметры схемы замещения равны

$$r = \frac{l}{6EI} \quad \text{и} \quad \psi = -\frac{\Delta}{l} \quad (\text{П.8})$$

На основании теоремы об эквивалентном генераторе (теоремы Тевенена—Гельмгольца) непосредственно из схемы находим изгибающий момент  $M_c$ :

$$\begin{aligned} M_c &= \frac{\psi - \frac{2\psi}{4r} 5r}{\frac{5r(-r)}{5r + (-r)} + 3r + \frac{5r(-r)}{5r + (-r)}} = \\ &= \frac{3\psi}{7r} = \frac{18}{7} \frac{EI}{l^2} \Delta = -2,57 \frac{EI}{l^2} \Delta. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

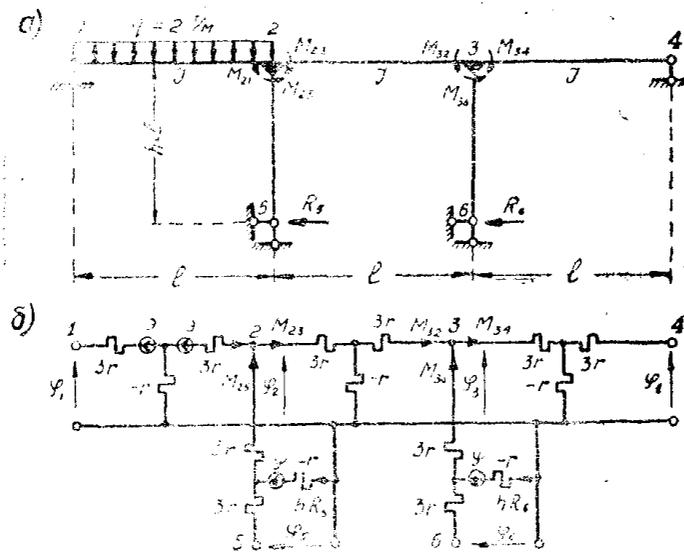
Изгибающие моменты в сечениях  $B$  и  $D$  будут

$$\begin{aligned} M_B &= \frac{\psi \cdot \left(6r - \frac{5}{4}r\right) M_c}{5r} = \frac{85\psi}{140r} = \frac{51}{14} \frac{EI}{l^2} \Delta = 3,65 \frac{EI}{l^2} \Delta, \\ M_D &= M_c \frac{(-r)}{4r} = \frac{3\psi}{28r} = \frac{9}{14} \frac{EI}{l^2} \Delta = 0,642 \frac{EI}{l^2} \Delta. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

<sup>1)</sup> Данные заимствованы из [16, задача 10,17].

Найденные значения  $M_B$ ,  $M_C$  и  $M_D$  совпадают с полученными обычными методами строительной механики [16, задача 10.17].

Пример 4. Определим защемляющие моменты в узлах рамы междуэтажного перекрытия (фиг. 8а).



Фиг. 8. Рама междуэтажного перекрытия и ее схема замещения.

Схема замещения рамы показана на фиг. 8б.

Параметры  $\mathcal{E}$  и  $r$  схемы равны<sup>1)</sup>

$$\mathcal{E} = \frac{q l^3}{24 EI} = \frac{2,5^3}{24 EI} = \frac{125}{12 EI}, \quad (11.11)$$

$$r = \frac{l}{6 EI} = \frac{5}{6 EI}.$$

Заметим, что

$$\frac{\mathcal{E}}{r} = 12,5 \text{ м.} \quad (11.12)$$

Рассчитывая схему любым из методов электрических цепей (наиболее целесообразно применить метод трансфигурации), находим

$$\begin{aligned} M_{21} &= -\frac{11}{32} \frac{\mathcal{E}}{r} - \frac{\psi}{8r}, & M_{32} &= \frac{2}{32} \frac{\mathcal{E}}{r} - \frac{2\psi}{8r}, \\ M_{23} &= -\frac{6}{32} \frac{\mathcal{E}}{r} + \frac{2\psi}{8r}, & M_{31} &= \frac{1}{32} \frac{\mathcal{E}}{r} + \frac{\psi}{8r}, \\ M_{25} &= \frac{5}{32} \frac{\mathcal{E}}{r} + \frac{3\psi}{8r}, & M_{36} &= -\frac{1}{32} \frac{\mathcal{E}}{r} + \frac{3\psi}{8r}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Уравнение статики

$$R_5 + R_6 = -\frac{M_{25} + M_{36}}{h} = 0 \quad (11.14)$$

<sup>1)</sup> Данные примеры заимствованы из [17, стр. 121].

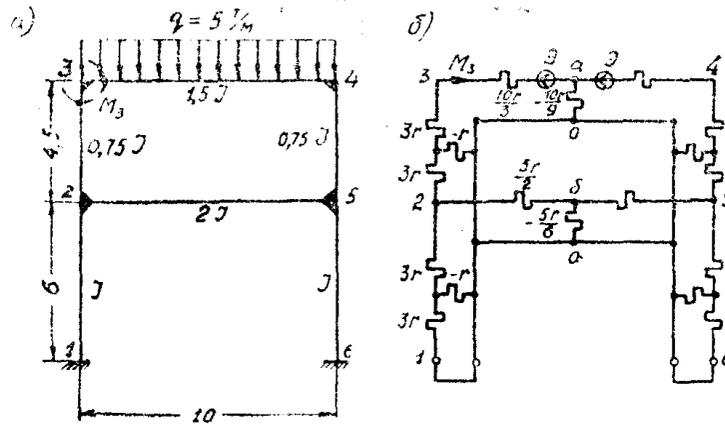
позволяет определить угол поворота стоек 2—5 и 3—6:

$$\psi = -\frac{\mathcal{E}}{6} = -\frac{125}{72EI}. \quad (\text{П.15})$$

Подставляя значения  $\psi$  и  $r$  в уравнения (П.13), окончательно получаем

$$\begin{aligned} M_{21} &= -\frac{775}{192} = -4,036 \text{ тм}, & M_{32} &= \frac{125}{96} = 1,302 \text{ тм}, \\ M_{23} &= -\frac{550}{192} = -2,864 \text{ тм}, & M_{31} &= \frac{25}{192} = 0,13 \text{ тм}, \\ M_{25} &= \frac{225}{192} = 1,172 \text{ тм}, & M_{36} &= -\frac{225}{192} = -1,172 \text{ тм}. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

Точно такие же значения изгибающих моментов приведены в работе Г. В. Ульянинского [17, стр. 121], из которой заимствованы данные рассмотренного примера.



Фиг. 9. Двухъярусная рама и ее схема замещения.

Пример 5. Определим момент в узле № 3 рамы, показанной на фиг. 9а. Параметры схемы замещения (фиг. 9б) равны

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{l_{12}}{6EI_{12}} = \frac{1}{EI} = r, & r_{25} &= \frac{5}{6}r, & r_{23} &= r, \\ r_{31} &= \frac{10}{9}r, & \mathcal{E} &= \frac{qL^3_{31}}{24EI_{31}} = \frac{5 \cdot 10^3}{48}r. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

В силу симметрии системы напряжения между точками  $O_1-a$  и  $O_1-b$  равны нулю. Поэтому искомый момент находится просто по закону Ома

$$M_3 = -\frac{\mathcal{E}}{r_{\mathcal{E}}} = -\frac{5,47 \cdot 10^3}{16,704} \approx -20,7 \text{ тм}, \quad (\text{П.18})$$

где  $r_{\mathcal{E}} = \frac{704r}{3,47}$  — сопротивление, измеренное между зажимами источника э. д. с.  $\mathcal{E}$  при условии, что точки  $a$  и  $b$  замкнутся накоротко с точкой  $O$ .

Заметим, что решение этой задачи по приближенному способу проф. Б. Н. Жемочкина, приведенное в [16, задача 13. 22, стр. 116 и 394], дало в результате значение  $M_3 = 20,8 \text{ тм}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Харкевич. Теория электроакустических аппаратов, М., 1940.
2. А. А. Харкевич. Теория преобразователей, Госэнергоиздат, 1948.
3. А. А. Харкевич. К расчету механических колебательных систем, ЖТФ, т. IV, в. 6, 1934.
4. В. В. Фурдеев. Электроакустика, ГТТИ, 1948.
5. В. В. Фурдеев. Теоремы взаимности, Гостехиздат, 1948.
6. Г. Ольсон. Динамические аналогии, ГИИЛ, 1947.
7. Л. И. Гутенмахер. Электрическое моделирование (электронтегратор), изд. АН СССР, 1943.
8. С. Г. Милейковской. К вопросу о приведении колеблющегося стержня к восьмиполюсной системе, ЖТФ, т. XI, в. 8, 1941.
9. Н. М. Тетельбаум. Исследование круглых колебаний валов (поршневых двигателей) путем электрического моделирования, изд. БИТ, М., 1948.
10. Н. Н. Андреев. К расчету глушителей для моторов внутреннего сгорания, ЖТФ, т. XVI, в. 6, 1946.
11. Н. М. Тетельбаум. Электрическое моделирование упругих систем в динамических задачах строительной механики. Сб. „Повышение прочности деталей машин“, изд. АН СССР, 1949.
12. Ю. Н. Гризодуб. Применение теории пассивных четырехполюсников к расчету распространения колебаний давления в разветвленных гидравлических системах авиадвигателей, Автоматика и телемеханика, т. XI, 1950.
13. А. Л. Гофлин. Электрическая модель балки, лежащей на упругом основании, Электричество, № 5, 1947.
14. Н. М. Рабинович. Строительная механика стержневых систем, Стройиздат, 1946.
15. А. Н. Динник (ред.). Справочник по технической механике, Гостехиздат, 1949.
16. Н. Л. Кузьмин, В. Г. Рекач, Г. И. Розенблат. Сборник задач по теории сооружений, Стройиздат, 1950.
17. Г. В. Ульянинский. Расчет рамных конструкций, Томск, 1931.
18. П. Л. Калайтаров. Теория переменных токов, Госэнергоиздат, 1940.
19. Э. В. Зелях. Основы теории четырехполюсника, Вестник электротехники, № 3 и 7, 1931.
20. Г. Е. Пухов. Уравнения активного четырехполюсника, Научные записки ЛПИ, в. VIII, Львов, 1949.
21. Г. Е. Пухов. Геометрическая теория цепей, состоящих из четырехполюсников, Научные записки ЛПИ, в. X, Львов, 1949.
22. Г. Е. Пухов. Теория метода подсхем, Электричество, № 8, 1952.